中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

團隊合作獎

050417

免死金牌變因下的汰留問題進階探討

學校名稱： 新北市立海山高級中學

作者：	指導老師：
高二 蔡承叡	楊千霈
高二 陳柏諺	董維新

關鍵詞： 免死金牌、汰留問題、 約瑟夫問題

摘要

偶然接觸 Knuth 具體數學[1]、九死一生[2]與我要活下去[3]後，發現汰留問題實為約瑟夫問題的變形。而科學教育月刊的「免死金牌變因下之約瑟夫問題初探」[5]中引進「免死金牌」設定，提升約瑟夫問題的複雜度與趣味性，勾起我們的好奇心，其中的約瑟夫問題實為汰留問題，且利用遞迴關係遞迴至免死金牌持有者的編號為 1 號和 2 號。其中編號 1 號的規律佳，但編號 2 號的規律複雜。我們換個方向思考，當免死金牌持有者的編號為奇數時，依淘汰順序來討論；編號為偶數時，利用遞迴關係遞迴至奇數，找出最後存活者編號的方法與通式。進一步在汰留問題及免死金牌汰留問題，找出倒數第 k 位存活者的編號規則，並將問題推至兩面免死金牌也得到很好的結果。

壹、前言

一、研究動機：

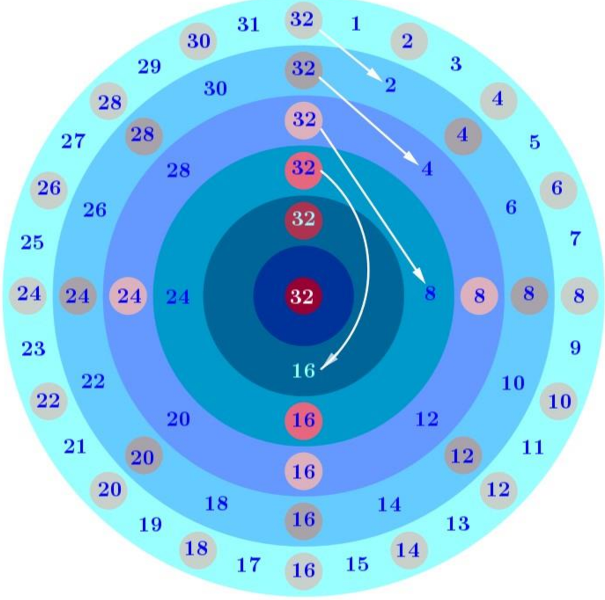
暑假在因緣際會下接觸到具體數學[1]中約瑟夫問題相關的文章，也就是猶太歷史學家於日記中記載的故事，深入瞭解其運作原理後對其產生興趣。在研究了學長的九死一生[2]與我要活下去[3]後，發現其中第 56 屆的作品生死一「數」間[4]將「免死金牌」[5]的設定加入，提升約瑟夫問題的複雜度與趣味性。頓時間勾起我們的好奇心，所以我們開始與老師討論在免死金牌變因下的汰留問題。在深入探討後，對於規律的觀察方向有不同的想法，因此進一步研究，嘗試在 N 人中，其中有一位免死金牌持有者的編號為 y 號的情況下，反覆進行汰留過程，找出最後存活者編號之通式，並加以延伸至有多位免死金牌持有者的情況。

二、研究問題定義

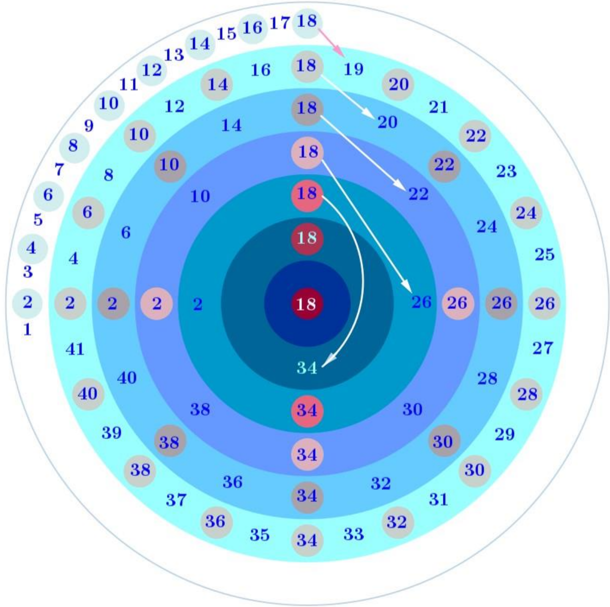
(一) 約瑟夫問題 $J(N,k)=M$ ：我們依具體數學[1]定義約瑟夫問題 $J(N,k)=M$ 為編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先留 1 個人後淘汰 1 個人，反覆留汰過程直到剩下 k 個人存活時，下一個被淘汰的人所對應的編號為 M 號（以下簡稱倒數第 k 位存活者）。若 $k=1$ 則記為 $J(N)=M$ 。

(二) 汰留問題 $L(N,k)=M$ ：我們依具體數學[1]、林豐正等[2]定義汰留問題 $L(N,k)=M$ 為編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，反覆

汰留後，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 M 號。若 $k=1$ 則記為 $L(N)=M$ 。



圖一： $N=32$ 的汰留問題示意圖



圖二： $N=41$ 的汰留問題示意圖

我們由圖一與圖二中 $N=32$ 與 $N=41$ 時所列出汰留問題中的汰留號碼順序得表 1 和 2。

表 1：總人數 $N=32$ 下倒數第 k 位存活者所對應的編號

k	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
號碼	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
k	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
號碼	2	6	10	14	18	22	26	30	4	12	20	28	8	24	16	32

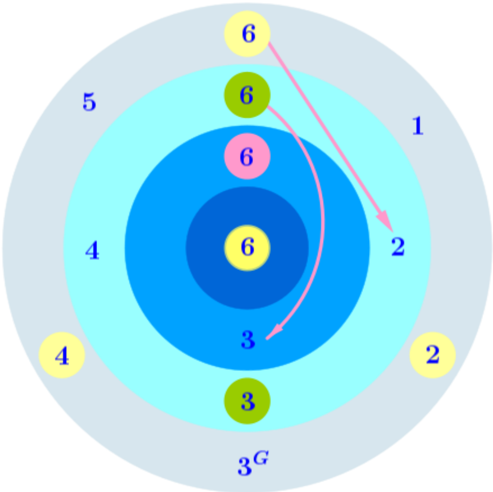
表 2：總人數 $N=41$ 下倒數第 k 位存活者所對應的編號

k	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26
號碼	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
k	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
號碼	33	35	37	39	41	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	6
k	9	8	7	6	5	4	3	2	1							
號碼	14	22	30	38	10	26	2	34	18							

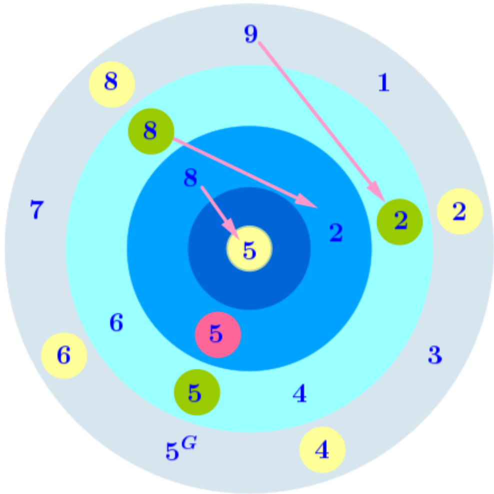
例如 $L(41)=18$ 表示「41 個人圍成一圈，從 1 號開始汰留，最後一位存活者是 18 號」、$L(41,2)=34$ 表「41 個人圍成一圈，從 1 號開始汰留，倒數第二位存活者是 34 號」。

(三) 汰留存活問題 $LR(N,M)=k$ ：編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，反覆汰留後，編號為 M 號的人是倒數第 k 位存活者，亦即「若 $L(N,k)=M$ ，則 $LR(N,M)=k$ 」。例如： $L(41,2)=34$ ，則 $LR(41,34)=2$ ； $L(41,21)=41$ ，則 $LR(41,41)=21$ 。

(四) 汰留免死金牌問題 $LG(N,k,y)=M$ ：編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，其中編號為 y 號者持有免死金牌，能夠免死一次，反覆汰留後，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 M 號。若 $k=1$ 則記為 $LG(N\,;\,y)$ 。例如：$LG(6\,;\,3)=6$ 、 $LG(9\,;\,5)=5$ 。



圖三： $LG(6\,;\,3)=6$ 的示意圖



圖四： $LG(9\,;\,5)=5$ 的示意圖

表 3：總人數 $N=6$ 且編號 3 號持有免死金牌下，倒數第 k 位存活者所對應的編號

k	6	5	4	3	2	1
號碼	1	5	2	4	3	6

表 4：總人數 $N=9$ 且編號 5 號持有免死金牌下，倒數第 k 位存活者所對應的編號

k	9	8	7	6	5	4	3	2	1
號碼	1	3	7	9	4	6	2	8	5

(五) 汰留免死金牌存活問題 $LGR(N,M,y)=k$ ：編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，其中編號為 y 號者持有免死金牌，能夠免死一次，反覆汰留後，編號為 M 號的人是倒數第 k 位存活者，意即「若 $LG(N,k,y)=M$ ，則 $LGR(N,M,y)=k$ 」。例如： $LG(6,1,3)=6$ ，則 $LGR(6,6,3)=1$ ； $LG(9,2,5)=8$ ，則 $LGR(9,8,5)=2$ 。

(六) 多位汰留免死金牌問題 $LG(N,k,\{y_1,y_2,\cdots,y_i\})=M$ ：編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，其中編號為 $y_1,y_2,\cdots,y_i$ 號者持有免死金牌，能夠免死一次，反覆汰留後，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 M 號。若 $k=1$ 則記為 $LG(N\,;\{y_1,y_2,\cdots,y_i\})$ 。

三、研究目的：

我們先將 $L(N,k)=M$ 的關係轉換為 $LR(N,M)=k$ 的關係，並建立相關演算法。利用此關係解決編號為 y 號者持有免死金牌的情況下，最後存活者所對應的編號為 $LG(N;y)$ 的第一種算法。再利用汰留問題的遞迴關係 $L(2N)=2\times L(N)$ 轉為 $LG(2N;2y)=2\times LG(N;y)$ 的關係，將免死金牌持有者的編號由偶數遞迴至奇數後解決的第二種算法。進一步依此關係討論編號為 y 號者持有免死金牌的情況下，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 $LG(N,k,y)$ 以及編號為 M 號的人是倒數第 $LGR(N,M,y)$ 位存活者的一般關係式。在新北市 112 學年度中小學科學展覽會後找到有趣的第三種算法，另外延伸討論將持有免死金牌的人數增加為相異 2 人，在 2 人編號皆為奇數時得到不錯的結果，期望能在將來完整解決 2 位汰留免死金牌問題。

四、文獻回顧：

(一) 在具體數學[1]中提出約瑟夫問題的遞迴關係式：$J(1)=1$、$J(2n)=2J(n)-1$、$J(2n+1)=2J(n)+1$，其中 $n\ge 1$。我們可得到對於所有的正整數 m，滿足 $J(2^m)=1$ 且 $J(n+1)-J(n)=2$，其中 $n+1\ne 2^m$。書中得到對於所有的正整數 m，

$J(2^m+l)=2l+1$，其中 $0\le l<2^m$。另提出約瑟夫問題有趣的二進位的演算法：假設 n 的二進位表示法為 $n=(b_m\,b_{m-1}\cdots b_1\,b_0)_2$，其中 $b_i=0$ 或 1 且 $b_m=1$，則 $J(n)=(b_{m-1}\cdots b_1\,b_0\,b_m)_2$，其中 $b_i=0$ 或 1 且 $b_m=1$。

(二) 在林豐正等的九死一生[2]中，提出汰一留一之倒數第 k 位存活者求法：

在 $N=1\times 2^{n-1}$、$N=3\times 2^{n-1}$、$N=5\times 2^{n-1}$、$N=7\times 2^{n-1}\cdots$；$L(1,1,1,N)$、$L(1,1,2,N)$、$L(1,1,3,N)$、$L(1,1,4,N)\cdots$依序發生跳項。在[2]中主要是利用跳項來說明關係。若是轉換其關係我們會得到關係式 $L(N)=L(N-1)+2$，$L(2^m)=2^m$，$L(2^m+l)=2l$，其中 $0<l<2^m$，$L(2\times N)=2\times L(N)$，這些性質我們在後面會推廣至 $L(N,k)$。

(三) 在戴于珽的我要活下去[3]中，將汰留問題的遞迴式表達如下：對於所有的 $n\ge 1$，$L(1)=1$、$L(2n)=2L(n)$、$L(2n-1)=2L(n)-2$。仿照 $\gamma=1$（我們的符號為 $k=1$）的演算法，建立起 $\gamma=2,3,4,5,\cdots$的演算法如下：

若 N 為總人數，先將其表示成二進位表示法 N_2，再將 γ 也化為二進位表示法 γ_2，在末尾補 0 後再減去 1（即將 $2\gamma-1$ 化為二進位）得到的數字末尾盡量補 0，但不超過 N_2，得數 M_2，將 (N_2-M_2) 末尾補 0，即為 $L(N,\gamma)$ 的二進位表示法。

我們可發現汰留問題與約瑟夫問題的關聯性 $J(N,\gamma)=L(N,\gamma)+1$。

(四) 在林佳言等的免死金牌變因下之約瑟夫問題初探[5]中引進免死金牌的限制，並以列舉的方式做出 $y\le x\le 20$ 的 $J(x,y)$ 表格（其所討論對象實際上為汰留問題 $LG(N;y)$），並依序探討 $y=1$, $y=2$ 及 $y\ge 3$ 之 $J(x,y)$，其中 $J(x,1)$ 較有規律，$J(x,2)$ 規律卻相當複雜，而 $y\ge 3$ 時利用遞迴關係 $J(x+1,y+2)=J(x,y)+2$ 遞迴至 $J(x,1)$ 與 $J(x,2)$，在周子揚等的生死一「數」間[4]中轉而求出現機率。對於 $J(x,2)$ 中的規律複雜，所以我們換個方向思考，依照淘汰順序建立汰除數列，以及利用遞迴關係式將免死金牌持有者編號從偶數變為奇數的方式進行討論。

貳、研究設備及器材

紙、筆、筆記型電腦、Microsoft Word 2019、Microsoft Excel 2019、Visio、C++

參、研究過程或方法

本研究所有圖片皆為作者經諮詢老師協助，作者使用 Geogebra 軟體繪製。

一、問題初步研究與建立演算法：

我們先將汰留問題中基礎性質 $L(N)=M$ 推廣至 $L(N,k)=M$，再轉換至 $LR(N,M)=k$。列出 N=1 到 100，M 與 k 的數據表格，先觀察表格中 M 為奇數時，k 的規則較為簡單，可以立刻找出 N 與 k 的關係式。再考慮當 M 為偶數，其規則略為複雜，先觀察 $M=2$ 時，找出 N 與 k 的關係式，再推展至任意偶數 $M=2m$ 均成立。我們考慮仿照[3]，將 $L(N,k)=M$ 的二進位演算法轉為 $LR(N,M)$ 的二進位演算法。

二、汰除數列的探索：

將汰留問題中，依照每個編號被淘汰的順序建立汰除數列，觀察這個數列後，得到了些有趣的結果，可以用來找出最後存活者的編號。

三、免死金牌問題初步研究：

仿照汰除數列，在總人數為 N 人（下述以 $N=41$ 為例），免死金牌持有者編號為 y 號時，找出最後存活者的編號。我們將 y 依據總人數為 N 人的汰留問題被淘汰的順序，列出其所對應的最後存活者的編號如表 5（即 $y=1,3,5,\cdots,19,21,23,\cdots,37,39,41,\cdots$，其所對應的最後存活者為 $20,20,20,\cdots,20,21,22,\cdots,22,22,22,\cdots$，如表 5 所示），赫然發現是有單純的規律。討論出規律以後從 $N=2$ 反覆討論至 $N=64$，以確認規律的正確性。

表 5：總人數 $N=41$ 下免死金牌持有者編號為 y 號（倒數第 k 位存活者）時最後存活者編號

N=41	k=41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
	y=1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41
	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	21	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
	k=20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
	y=4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	6	14	22	30	38	10	26	2	34	18	
	22	22	22	22	22	24	26	26	26	26	26	26	26	30	34	34	34	2	18	18	

四、免死金牌問題的進階數列探索：

由前面的結果發現當免死金牌的持有者編號 y 為奇數時，其所對應的最後存活者的編號 LG 比較簡單，配合淘汰一圈所得的遞迴關係式，可以將 y 為偶數時，其所對應的最後存活者編號 LG 遞迴至 y 為奇數。

五、汰留免死金牌問題初步研究與建立流程圖：

我們藉由汰留問題的 $L(N,k)$ 的討論方法與結論，觀察金牌持有者為 1、3、5 到所有奇數的情形。因為淘汰第一輪後會淘汰所有編號為奇數者，唯持有免死金牌的人，可再存活一次。因此，其規則略比 $L(N,k)$ 複雜一些，但可類比 $L(N,k)$ 的想法。再仿照免死金牌問題的進階數列探索的遞迴關係式，找出免死金牌持有者編號 y 為偶數時的遞迴關係式，將問題轉化為 y 為奇數。而 $LG(N,k,y)=M$ 為一對一且映成的函數，仿 $L(N,k)$ 找出 $LR(N,M)$ 的流程圖方式，找出 $LGR(N,M,y)$ 的流程圖。

六、兩位免死金牌汰留問題初步研究：

我們延伸汰留免死金牌問題，討論持有免死金牌的人數增加為相異 2 人，利用前面 1 位免死金牌持有者的結果，在 2 人編號皆為奇數時得到不錯的結果。

肆、研究結果

一、問題初步研究與建立演算法：

我們先分析 $L(N,k)=M$ 的關係，亦即是汰留問題在汰 1 留 1 下，總人數 N 人時，倒數第 k 個存活者所對應的編號（M）。觀察 N=1 到 21，M 與 k 的關係如表 6：

表 6：N=1 到 21，M 與 k 的關係

$N \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1																				
2	2	1																			
3	2	3	1																		
4	4	2	3	1																	
5	2	4	5	3	1																
6	4	6	2	5	3	1															
7	6	2	4	7	5	3	1														
8	8	4	6	2	7	5	3	1													
9	2	6	8	4	9	7	5	3	1												
10	4	8	10	6	2	9	7	5	3	1											
11	6	10	2	8	4	11	9	7	5	3	1										
12	8	12	4	10	6	2	11	9	7	5	3	1									
13	10	2	6	12	8	4	13	11	9	7	5	3	1								
14	12	4	8	14	10	6	2	13	11	9	7	5	3	1							
15	14	6	10	2	12	8	4	15	13	11	9	7	5	3	1						
16	16	8	12	4	14	10	6	2	15	13	11	9	7	5	3	1					
17	2	10	14	6	16	12	8	4	17	15	13	11	9	7	5	3	1				
18	4	12	16	8	18	14	10	6	2	17	15	13	11	9	7	5	3	1			
19	6	14	18	10	2	16	12	8	4	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1		
20	8	16	20	12	4	18	14	10	6	2	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	
21	10	18	2	14	6	20	16	12	8	4	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

(一) 我們在[3]中所知 $L(N)$ 的基礎性質 $L(N)=L(N-1)+2$，$L(2\times N)=2\times L(N)$，由表 6 觀察後可將其推廣至至 $L(N,k)$，可以得到

基礎性質 1 $L(N,k)=L(N-1,k)+2$，$k\le N-1$。

基礎性質 2 $L(2\times N,k)=2\times L(N,k)$，$k\le N$。

此二基礎性質顯然可以由 $L(N)$ 類推得到。

(二) 我們由表 6 觀察發現淘汰編號為奇數 $2m+1$ 號的人為第 $m+1$ 位被淘汰者，也恰為倒數第 $N-m$ 個存活者，可得到 $k=N-m$，形成基礎性質 3。

基礎性質 3 $L(N,N-m)=2m+1$，其中 $M=2m+1\le N$

$\boxed{\text{進階性質 1}}$ $L(2k-1,k)=2k-1$（總數不動點性質）

[證明] 編號$1,2,3,\cdots,2k-1$，根據汰留問題規則，依序淘汰的編號為$1,3,5,\cdots,2k-1$，可以得到編號$2k-1$的人是第k位被淘汰的，剛好也會是倒數第k位存活者，故得證。

$\boxed{\text{定義}}$ **總數不動點**：編號 1 到N的汰留問題，最後存活者編號恰為N，此時稱為總數不動點。

$\boxed{\text{進階性質 2}}$ （林豐正等[2]跳項關係）$L((2k-1)\times 2^{p},k)=(2k-1)\times 2^{p}$

[證明] 由基礎性質 2 與進階性質 1 可以得到。

$\boxed{\text{進階性質 3}}$ （林豐正等[2]跳項關係衍伸）$L((2k-1)\times 2^{p-1}+a,k)=2a$

[證明] 由基礎性質 1、2 與進階性質 1 可以得到。

(三) 在[3]中，提出仿照$k=1$的演算法，建立起$k=2,3,4,5,\cdots$的演算法如下：

總人數為N人，先將其表示成二進位表示法N_2，再將k化為二進位表示法k_2，在末尾補 0 後再減去 1（即將$2k-1$化為二進位表示法）得到的數字末尾盡量補 0，但不超過N_2，得數M_2，將(N_2-M_2)末尾補 0，即為$L(N,k)$的二進位表示法。

(四) 觀察表 6，若M為偶數，其規則略為複雜，但是我們先觀察$M=2$時$LR(2n,2)=n$與$LR(2n-1,2)=LR(n,2)$，按此規則，可以得到$LR(N,2)$的值其中$N\geq 2$，

例如：$LR(N=3,2)=LR(N=2,2)=1$，$LR(N=4,2)=2$

$LR(N=5,2)=LR(N=3,2)=1$，$LR(N=6,2)=3$

$LR(N=7,2)=LR(N=4,2)=2$，$LR(N=8,2)=4$

由遞迴關係可以求出任意$LR(N,2)$值，其中$N\geq 2$。也可以推廣到任意$LR(N,M)$。

(五) 我們由$L(N,k)=M$的性質與進階性質，可以轉為$LR(N,M)=k$的性質與定理。

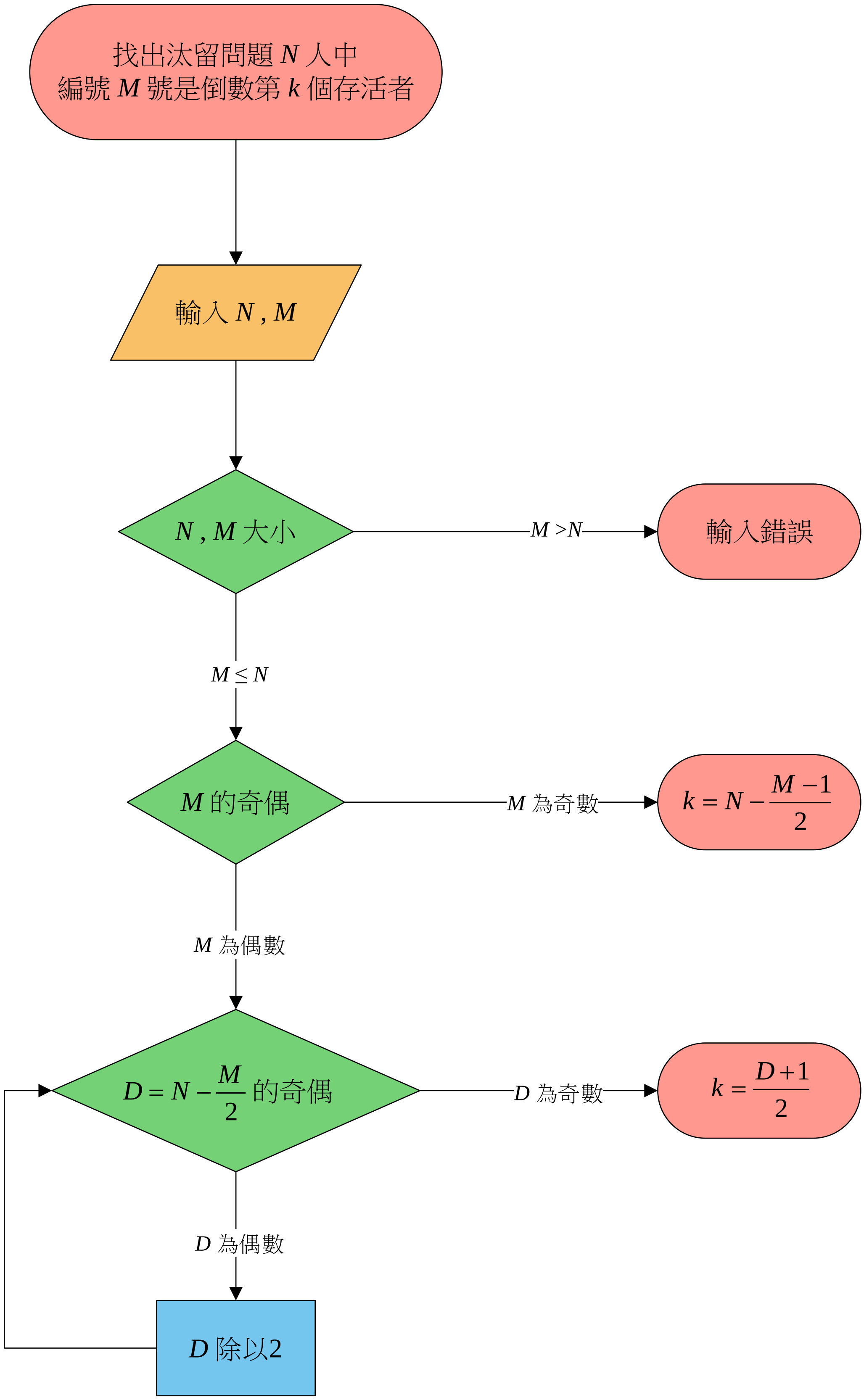
$\boxed{\text{定理 1}}$ 若M為奇數且$M=2m+1\leq N$則$LR(N,2m+1)=N-m$。

[證明] 由基礎性質 3，$L(N,N-m)=2m+1$，其中$M=2m+1\leq N$，則$LR(N,2m+1)=N-m$。

$\boxed{\text{定理 2}}$ 若M為偶數且$M=2m\leq N$，計算判別數$D=N-m$的最高 2 的次冪2^{p-1}，其中p為正整數，即$D=N-m=(2k-1)\times 2^{p-1}$，則$LR(N,M=2m)=k$。

[證明] 由進階性質 3 可知$L((2k-1)\times 2^{p-1}+m,k)=2m=M$，其中$N=(2k-1)\times 2^{p-1}+m$，亦即$L(N,k)=M$則$LR(N,M=2m)=k$，故得證。

最後我們將 $LR(N,M)=k$ 的計算化為演算法與流程圖如下圖五，並利用 C++寫出一個小程式置於附錄。



圖五： $LR(N,M)=k$ 的計算流程圖

二、汰除數列的探索：

我們將汰留問題中，依照每個編號被淘汰的順序所形成的數列，稱為汰除數列，搭配 k 時順序相反，在 $N=41$ 的汰除數列：1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39, 41,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,6,14,22,30,38,10,26,2,34,18，即形成表 2，表示數列 a_n ，其中 $a_1=18, a_2=34, a_3=2,\cdots,a_{41}=1$，由表 2 可得到第一圈淘汰編號為$1,3,5,\cdots,41$形成等差數列，公差為 2（實際上公差為 -2）；第二圈淘汰編號為$4,8,12,\cdots,40$形成等差數列，公差為 4（實際上公差為 -4）；以此類推。這個性質顯而易見，因為第一圈為汰 1 留 1，按照順序淘汰所有奇數自然形成公差為 2 的等差數列，而第二圈僅剩下偶數，再汰 1 留 1，按照順序淘汰隔項偶數自然形成公差為 4 的等差數列。而這個性質對數列 a_n 當然形成分段遞減的等差數列。進一步觀察我們會得到 $\frac{a_{32}+a_{33}}{2}=\frac{a_{16}+a_{17}}{2}=\frac{a_8+a_9}{2}=\frac{a_4+a_5}{2}=\frac{a_2+a_3}{2}=a_1=18$ 。

$\boxed{\text{定理 3}}$ 若 $a_{2^m}>a_{2^m+1}$ 則 $\frac{a_{2^m}+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ ， $a_{2^m}<a_{2^m+1}$ 則 $\frac{\frac{1}{2}a_{2^m}+N+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ 。

[證明] 考慮汰留問題時，觀察當總人數為 $N=2^m+l$ 個人時，淘汰第 1 人為 $a_{2^m+l}=1$，淘汰第 2 人為 $a_{2^m+l-1}=3$ ，…，淘汰第 l 人為 $a_{2^m+1}=2l-1$ ，淘汰第$(l+1)$人為 $a_{2^m}=2l+1$ ，此時最後存活者 $a_1=2l$，此時 $a_{2^m}>a_{2^m+1}$，滿足 $\frac{a_{2^m}+a_{2^m+1}}{2}=a_1$。當總人數為 $N=2^{m+1}$ 個人時，淘汰第 1 人為 $a_{2^{m+1}}=1$，淘汰第 2 人為 $a_{2^{m+1}-1}=3$，…，淘汰第(2^m+1)人為 $a_{2^m+1}=2^{m+1}-1$，淘汰第 2^m 人為 $a_{2^m}=2$，此時最後存活者 $a_1=2^{m+1}$，因為淘汰進入下一圈造成 $a_{2^m}<a_{2^m+1}$，此時將 2 號視為 $N+1$ 即可滿足 $\frac{a_{2^m}+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ ，即 $\frac{\frac{1}{2}a_{2^m}+N+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ 。故得證。

有趣的是相同地再觀察我們會得到 $\frac{a_{32}+a_{31}}{2}=a_{16}$， $\frac{a_{16}+a_{15}}{2}=a_8$ ， $\frac{a_8+a_7}{2}=a_4$ ，但 $a_4>a_3$ 故修正 $\frac{\frac{1}{2}a_4+41+a_3}{2}=a_2$ 。

$\boxed{\text{定理 4}}$ 若 $a_{2^m-1}>a_{2^m}$ 則 $\frac{a_{2^m}+a_{2^m-1}}{2}=a_{2^{m-1}}$ ， $a_{2^m-1}<a_{2^m}$ 則 $\frac{\frac{1}{2}a_{2^m-1}+N+a_{2^m}}{2}=a_{2^{m-1}}$ 。

三、免死金牌問題初步研究：

在 $N=41$ 時考慮免死金牌持有者的編號 $y=1,3,5,\cdots,19$（即 $k=41,40,39,\cdots,32$）時的最後存活者編號時發現，淘汰至 19 號時本應淘汰 10 人，剩下 31 人，但因編號 y 號持有免死金牌可以免死一次，所以開始準備淘汰 21 號時，實際上淘汰 9 人，尚餘 32 人，由汰留問題得知最後存活者編號為 21 號的前一號 20 號（或是 21=a_{31}，則最後存活者編號為 $\frac{a_{32}+a_{31}}{2}=a_{16}=20$。即 $LG(41;y)=20=a_{16}$，當 $y=1,3,\cdots,19$（即 $k=41,40,\cdots,32$））。

特別的是當免死金牌持有者的編號 $y=21$（即 $k=31$）時最後存活者編號計算恰好就是 21 號本身，我們定義其為**免死不動點**，即 $LG(41;y=21)=y=21=a_{31}$，概念可參考圖四。圖四表示 $LG(9;y=5)=5$，表示總人數為 9 人時，編號 5 號是免死不動點，也就是說免死金牌持有者編號為 5 號時，最後存活者編號恰好也是 5 號。

$\boxed{\text{定義}}$ **免死不動點**：編號 1 到 N 的汰留問題，若免死金牌持有者編號為 y 可以免死一次，最後存活者編號恰為 y，此時稱為免死不動點。

再來若 $y=23,25,\cdots,20$（即 $k=30,29,\cdots,16$）時的最後存活者編號時發現，淘汰至 20 號時本應淘汰 26 人，剩下 15 人，但因編號 y 號持有免死金牌可以免死一次，所以開始準備淘汰 24 號時實際上淘汰 25 人，尚餘 16 人，由汰留問題得知最後存活者編號為 24 號的前一號為 22 號(注意不是 23 號,已經被淘汰了),而 24=a_{15},則最後存活者編號為 $\frac{a_{16}+a_{15}}{2}=a_8=22$。即 $LG(41;y)=22=a_8$，當 $y=23,25,\cdots,20$（即 $k=30,29,\cdots,16$）。

一樣的是當免死金牌持有者編號 $y=24$（即 $k=15$）時最後存活者編號恰好就是 24 號本身，也是**免死不動點**。即 $LG(41;y=24)=y=24=a_{15}$。反覆討論至 $k=1$ 為止，可得到定理 5 與 6。反覆討論 $N=1$ 至 $N=16$ 的結果放在表 7。

$\boxed{\text{定理 5}}$ 當免死金牌持有者的編號 y 且 $LR(N,y)=K$，對任意正整數 m，$K=2^m-1$，則 $LG(N;y)=y=a_K$（**免死不動點**）。

$\boxed{\text{定理 6}}$ 當免死金牌持有者的編號 y 且 $LR(N,y)=K$，對任意正整數 m，$2^m-1>K\geq 2^{m-1}$，則 $LG(N;y)=a_{2^{m-2}}$。

表 7：總人數 $N=1$至 $N=16$的免死金牌最後存活者編號

N=1	k=1															
	y=1															
	1															
N=2	k=2	1														
	y=1	2														
	2	2														
N=3	k=3	2	1													
	y=**1**	3	2													
	1	2	2													
N=4	k=4	3	2	1												
	y=1	**3**	2	4												
	2	**3**	4	4												
N=5	k=5	4	3	2	1											
	y=1	3	**5**	4	2											
	4	4	**5**	2	2											
N=6	k=6	5	4	3	2	1										
	y=1	3	5	**2**	6	4										
	6	6	6	**2**	4	4										
N=7	k=7	6	5	4	3	2	1									
	y=**1**	3	5	7	**4**	2	6									
	1	2	2	2	**4**	6	6									
N=8	k=8	7	6	5	4	3	2	1								
	y=1	**3**	5	7	2	**6**	4	8								
	2	**3**	4	4	4	**6**	8	8								
N=9	k=9	8	7	6	5	4	3	2	1							
	y=1	3	**5**	7	9	4	**8**	6	2							
	4	4	**5**	6	6	6	**8**	2	2							
N=10	k=10	9	8	7	6	5	4	3	2	1						
	y=1	3	5	**7**	9	2	6	**10**	8	4						
	6	6	6	**7**	8	8	8	**10**	4	4						
N=11	k=11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1					
	y=1	3	5	7	**9**	11	4	8	**2**	10	6					
	8	8	8	8	**9**	10	10	10	**2**	6	6					
N=12	k=12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1				
	y=1	3	5	7	9	**11**	2	6	10	**4**	12	8				
	10	10	10	10	10	**11**	12	12	12	**4**	8	8				
N=13	k=13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1			
	y=1	3	5	7	9	11	**13**	4	8	12	**6**	2	10			
	12	12	12	12	12	12	**13**	2	2	2	**6**	10	10			
N=14	k=14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
	y=1	3	5	7	9	11	13	**2**	6	10	14	**8**	4	12		
	14	14	14	14	14	14	14	**2**	4	4	4	**8**	12	12		
N=15	k=15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
	y=**1**	3	5	7	9	11	13	15	**4**	8	12	2	**10**	6	14	
	1	2	2	2	2	2	2	2	**4**	6	6	6	**10**	14	14	
N=16	k=16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	y=1	**3**	5	7	9	11	13	15	2	**6**	10	14	4	**12**	8	16
	2	**3**	4	4	4	4	4	4	4	**6**	8	8	8	**12**	16	16

透過前面的討論與定理 5 與定理 6，我們得到了解決免死金牌的第一種方法：

步驟 1 計算免死金牌持有者的編號 y 的淘汰位置為倒數第 $k=K$ ，即 $LR(N\,;y)=K$ 。

步驟 2 對任意正整數 m， $K=2^m-1$，則最後存活者恰為免死金牌持有者的編號 y。

步驟 3 對任意正整數 m， $2^m-1>K\geq 2^{m-1}$ ，則計算 $L(N,k=2^{m-2})$ 為最後存活者。

四、免死金牌問題的進階數列探索：

在 $N=41$ 時考慮免死金牌的持有者 y 與最後存活者編號形成表 8 如下：

表 8：總人數 $N=41$ 下免死金牌持有者 y 與最後存活者編號表

y=	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
最後存活者編號 LG	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**21**	**22**	**22**	**22**
y=	29	31	33	35	37	39	41	4	8	12	16	20	24	28
最後存活者編號 LG	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	**22**	24	26
y=	32	36	40	6	14	22	30	38	10	26	2	34	18	
最後存活者編號 LG	26	26	26	26	26	26	30	34	34	34	2	18	18	

我們發現當免死金牌的持有者編號 y 為奇數時最後存活者編號 LG 比較簡單，y 為偶數時最後存活者編號 LG 比較複雜。觀察若 y 為奇數且 $y=21$ (奇數**免死不動點**)，則最後存活者編號 $LG=21$，若 y 為奇數且 $y<21$ (奇數**免死不動點**)，則最後存活者編號 $LG=20$ ，若 y 為奇數且 $y>21$ (奇數**免死不動點**)，則最後存活者編號 $LG=22$。我們由總表列出總人數 N、免死金牌持有者 y（奇數）、奇數不動點 y_0 與最後存活者編號如下表 9：

表 9：總人數 N、免死金牌持有者 y（奇數）、奇數免死不動點 y_0 與最後存活者編號

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$y<y_0$		2	4	6		2	4	6	8	10	12	14		2	4	6	8	10	12	14	16
$y=y_0$	1	3	5		1	3	5	7	9	11	13		1	3	5	7	9	11	13	15	17
$y>y_0$	2				2	4	6	8	10				2	4	6	8	10	12	14	16	18
N	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$y<y_0$	18	20	22	24	26	28	30		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$y=y_0$	19	21	23	25	27	29		1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$y>y_0$	20	22	24	26				2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
N	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
$y<y_0$	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62		2	4
$y=y_0$	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61		1	3	5
$y>y_0$	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58				2	4	6

我們整理出定理 7

$\boxed{\text{定理 7}}$ (1)總人數 $N=2^m-2$，且免死金牌持有者編號 y 為奇數，則最後存活者編號 $LG=2^m-2$。

(2)總人數 $N\neq 2^m-2$，免死金牌持有者編號 y 為奇數且 $y=$ (奇數**免死不動點** y_0)，則最後存活者編號 $LG=y_0$。

(3)若 y 為奇數且 $y<$(奇數**免死不動點** y_0)，則最後存活者編號 $LG=y_0-1$。

(4)若 y 為奇數且 $y>$(奇數**免死不動點** y_0)，則最後存活者編號 $LG=y_0+1$。

考慮當 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，若總人數 $N=2\overline{N}$ 時，第一輪淘汰 $1,3,5,\cdots,2\overline{N}-1$，留下 $2,4,6,\cdots,2\overline{N}$，重編成 $1,2,3,\cdots,\overline{N}$，此時免死金牌持有者編號重編成 $\overline{y}$，則最後存活者編號為 $LG(\overline{N};\overline{y})$，原編號為 $2\times LG(\overline{N};\overline{y})$，故知 $LG(N;y)=2\times LG(\overline{N};\overline{y})$。若 $N=2\overline{N}+1$ 時，第一輪淘汰 $1,3,5,\cdots,2\overline{N}-1$，留下 $2\overline{N}+1,2,4,\cdots,2\overline{N}$，重編成 $1,2,3,\cdots,\overline{N},\overline{N}+1$，此時免死金牌持有者編號重編成 $\overline{y}+1$，則最後存活者編號為 $LG(\overline{N}+1;\overline{y}+1)$，還原原來編號為 $2\times LG(\overline{N}+1;\overline{y}+1)-2$，故知 $LG(N;y)=2\times LG(\overline{N}+1;\overline{y}+1)-2$。列出遞迴關係如下：

$\boxed{\text{定理 8}}$ (1)若 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，總人數 $N=2\overline{N}$ 時，$LG(N;y)=2\times LG(\overline{N};\overline{y})$。

(2)若 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，總人數 $N=2\overline{N}+1$ 時，$LG(N;y)=2\times LG(\overline{N}+1;\overline{y}+1)-2$。

我們利用定理 7 與 8 就可以遞迴求出任意的 $LG(N;y)$，例如計算 $N=41$：

$$LG(41;2)=2\times LG(21;2)-2=2\times(2\times LG(11;2)-2)-2=2\times(2\times(2\times LG(6;2)-2)-2)-2$$
$$=2\times(2\times(2\times 2\times LG(3;1)-2)-2)-2=2\times(2\times(2\times 2\times 1-2)-2)-2=2$$

$$LG(41;4)=2\times LG(21;3)-2=2\times 12-2=22$$

$$LG(41;6)=2\times LG(21;4)-2=2\times(2\times LG(11;3)-2)-2=2\times(2\times 8-2)-2=26$$

其他的以此類推。在此我們得到了解決免死金牌的第二種方法。

接下來我們探討 $LG(N;y)$ 在 y 為奇數時的通式寫法，觀察表 9 可以看出當 $N=2^m-2$，

$LG(N\,;y)=2^m-2=N$ ，當 $N=2^m-2+t$ 時，奇數免死不動點 $y_0=2t-1$，由定理 7 寫出

通式 1
$$\begin{cases} LG(2^m-2\,;2t-1)=2^m-2=N \\ LG(2^m-2+l\,;2t-1)=\begin{cases} y_0+1=2l \quad =2t-1+2(l-t)+1 & \text{當 } l<t \\ y_0 \quad =2l-1=2t-1 & \text{當 } l=t\in N \\ y_0-1=2l-2=2t-1+2(l-t)-1 & \text{當 } l>t \end{cases} \end{cases}$$

若考慮以 $y=2t-1$，則 $LG(2^m-2+l\,;y=2t-1)=\begin{cases} 2t-1+2(l-t)+1 & \text{當 } 2l-1<2t-1 \\ 2t-1 & \text{當 } 2l-1=2t-1\in N \\ 2t-1+2(l-t)-1 & \text{當 } 2l-1<2t-1 \end{cases}$。

引入符號函數合併三式，消 $t=\dfrac{y+1}{2}$ ，得 $LG(2^m-2+l\,;y)=y+\operatorname{sgn}(2l-y-1)\cdot(|2l-y-1|-1)$ ，

而 $l=N+2-2^{[\log_2(N+2)]}$ ，即 $LG(N\,;y)=y+\operatorname{sgn}(2l-y-1)\cdot(|2l-y-1|-1)$ ，其中[ ]表高斯符號。

通式 2 若 $l=N+2-2^{[\log_2(N+2)]}$ ，則 $LG(N\,;y)=y+\operatorname{sgn}(2l-y-1)\cdot(|2l-y-1|-1)$ 。

若考慮通式在 $l=t$ 前後發生跳項，所以引入高斯符號 flooring 和 ceiling 後可得

$LG(2^m-2+l\,;2t-1)=2l-1-\left\lceil\dfrac{l-t}{N}\right\rceil-\left\lfloor\dfrac{l-t}{N}\right\rfloor$ ，消 $t=\dfrac{y+1}{2},\dfrac{l-t}{N}=\dfrac{2l-y-1}{2N}$ 得到

$LG(2^m-2+l\,;y)=2l-1-\left\lceil\dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rceil-\left\lfloor\dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rfloor$ ，可得通式 3。

通式 3 若 $l=N+2-2^{[\log_2(N+2)]}$ ，則 $LG(N\,;y)=2l-1-\left\lceil\dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rceil-\left\lfloor\dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rfloor$

最後將個有趣的結果放於此處，考慮表 9 中總人數、免死金牌持有者編號 y 的倒數第 K 個存活者（即 $LR(N\,;y)=K$ ），與最後存活者編號列表於表 10，但由定理 6 得知， $K=2^m$ 到 2^m-2 的最後存活者編號相同，所以歸於同一格中，而 $K=2^m-1$ 為免死不動點，單獨一格表示，其間有不錯的性質在裡面。

首先，總人數 N 人時汰留問題下最後存活者編號為 $L(N)$，令 $b_0=L(N)$ ，接下來將表格中的數形成數列 $\langle\, b_n \rangle$ ，即當 $N>2^{[\log_2(N+1)]}-1$ 時，若 $2^{[\log_2(N+1)]}\le K=LR(N\,;y)\le N$ ，則令 $b_1=LG(N\,;y)$ ，若 $K=2^{[\log_2(N+1)]}-1$ ，則令 $b_2=LG(N\,;y)$ ，此為第 1 個**免死不動點**，若 $2^{[\log_2(N+1)]-1}\le K=LR(N\,;y)\le 2^{[\log_2(N+1)]}-2$ ，則令 $b_3=LG(N\,;y)$ ，若 $K=2^{[\log_2(N+1)]-1}-1$ ，則令 $b_4=LG(N\,;y)$ ，此為第 2 個**免死不動點**，其餘以此類推。

表 10：總人數 N、免死金牌持有者 y（以對應的 k 表達）與最後存活者編號對照表

人數N	L(N)	K=16至30		K=15		K=8至14		K=7		K=4至6		K=3		K=1至2
3	2											1		2
													1	
4	4									2		3		4
											1		1	
5	2									4		5		2修6
											1		1	
6	4									6		2修7		4修8
											1		1	
7	6							1		2		4		6
									1		2		2	
8	8					2		3		4		6		8
							1		1		2		2	
9	2					4		5		6		8		2修10
							1		1		2		2	
10	4					6		7		8		10		4修12
							1		1		2		2	
11	6					8		9		10		2修12		6修14
							1		1		2		2	
12	8					10		11		12		4修14		8修16
							1		1		2		2	
13	10					12		13		2修14		6修16		10修18
							1		1		2		2	
14	12					14		2修15		4修16		8修18		12修20
							1		1		2		2	
15	14			1		2		4		6		10		14
					1		2		2		4		4	
16	16	2		3		4		6		8		12		16
			1		1		2		2		4		4	
17	2	4		5		6		8		10		14		2修18
			1		1		2		2		4		4	
18	4	6		7		8		10		12		16		4修20
			1		1		2		2		4		4	
19	6	8		9		10		12		14		18		6修22
			1		1		2		2		4		4	
20	8	10		11		12		14		16		20		8修24
			1		1		2		2		4		4	
21	10	12		13		14		16		18		2修22		10修26
			1		1		2		2		4		4	
22	12	14		15		16		18		20		4修24		12修28
			1		1		2		2		4		4	
23	14	16		17		18		20		22		6修26		14修30
			1		1		2		2		4		4	
24	16	18		19		20		22		24		8修28		16修32
			1		1		2		2		4		4	
25	18	20		21		22		24		2修26		10修30		18修34
			1		1		2		2		4		4	
26	20	22		23		24		26		4修28		12修32		20修36
			1		1		2		2		4		4	
27	22	24		25		26		2修28		6修30		14修34		22修38
			1		1		2		2		4		4	
28	24	26		27		28		4修30		8修32		16修36		24修40
			1		1		2		2		4		4	
29	26	28		29		2修30		6修32		10修34		18修38		26修42
			1		1		2		2		4		4	
30	28	30		2修31		4修32		8修34		12修36		20修40		28修44
			1		1		2		2		4		4	
人數N	L(N)	K=16至30		K=15		K=8至14		K=7		K=4至6		K=3		K=1至2

例如：$N=21>2^4-1$，則$b_0=10, b_1=12, b_2=13, b_3=14, b_4=16, b_5=18, b_6=2, b_7=10$。

例如：$N=16>2^4-1$，則$b_0=16, b_1=2, b_2=3, b_3=4, b_4=6, b_5=8, b_6=12, b_7=16$。

例如：$N=15=2^4-1$，則$b_0=14, b_1=1, b_2=2, b_3=4, b_4=6, b_5=8, b_6=10, b_7=14$。

按此規則得到數列$\langle b_n \rangle$，基本上$\langle b_n \rangle$遞增即$b_1<b_2<b_3<b_4<\cdots$，但若汰留回最小編號時就得修正，即定義數列$\langle \overline{b_n} \rangle$，若$b_k>b_{k-1}$則$\overline{b_k}=b_k$，若$b_k<b_{k-1}$則修正$\overline{b_n}=N+\frac{1}{2}b_n$，對於所有的$n\ge k$。數列$\langle \overline{b_n} \rangle$有許多有趣的性質，如下：

$\boxed{\text{有趣的性質 1}}$ 數列$\langle \overline{b_n} \rangle$嚴格遞增，當 n 為自然數。

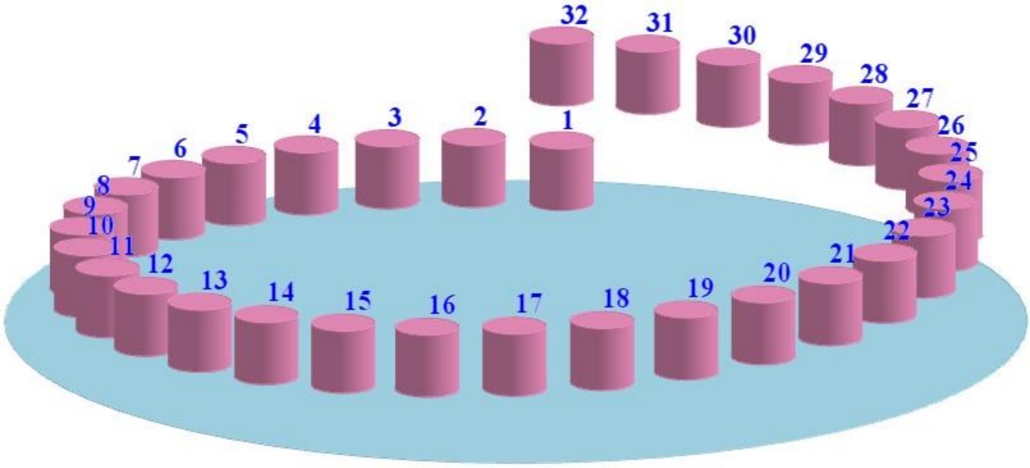
$\boxed{\text{有趣的性質 2}}$ 數列$\langle \overline{b_n} \rangle$轉數列$\langle b_n \rangle$：若$\overline{b_n}\le N$則$b_n=\overline{b_n}$，若$\overline{b_n}>N$則$b_n=(\overline{b_n}-N)\times 2$。

[說明]這個性質顯然由數列$\langle \overline{b_n} \rangle$的定義可以得到。

$\boxed{\text{有趣的性質 3}}$ $b_1=b_0+2 \pmod N$

[證明]$L(N)$表示總人數N個人時的最後存活者編號且知$L(N+1)=L(N)+2$，其原理為$N+1$個人汰 1 號留 2 號，正要汰除 3 號時剩下N個人，重編號時 3 號當成新 1 號，則$L(N)+2$號當成新的$L(N)$號為最後的存活者編號，即得$L(N+1)=L(N)+2$。而$LG(N;y=1)$亦類似，在汰 1 號留 2 號，正要汰除 3 號時，因為 1 號持有免死金牌故仍剩下N個人，重編號時 3 號當成新 1 號，則$L(N)+2$號當成新的$L(N)$號為最後的存活者編號，即得

$LG(N;y=1)=L(N)+2 \bmod N$，轉換成新的符號為$b_1=b_0+2 \pmod N$，故得證。



圖六：$N=31$時第 1 人被淘汰但持免死金牌的汰留問題示意圖

$\boxed{\text{有趣的性質 4}}$ 若 $N > 2^{[\log_2(N+1)]}-1$ 則 $b_3-b_2=b_2-b_1=1$（第一個不動點前後差 1）、

$b_5-b_4=b_4-b_3=2$（第二個不動點前後差 2）、$b_7-b_6=b_6-b_5=4$（第三個不動點前後差 4）、

$\ldots\ldots b_{2n+1}-b_{2n}=b_{2n}-b_{2n-1}=2^{n-1}$（第 n 個不動點前後差 2^{n-1}），其中 $n=\left[\log_2(N+1)\right]-1$。

若 $N = 2^{[\log_2(N+1)]}-1$ 則 $b_2-b_1=1$（第一個不動點前後差 1）、$b_4-b_3=b_3-b_2=2$（第二個不動點前後差 2）、$b_6-b_5=b_5-b_4=4$（第三個不動點前後差 4）、……

$b_{2n}-b_{2n-1}=b_{2n-1}-b_{2n-2}=2^{n-1}$（第 n 個不動點前後差 2^{n-1}），其中 $n=\left[\log_2(N+1)\right]-1$。

[證明] 這個性質由定理 7 立刻知道在第一個不動點前後差 1 成立，而第二個不動點落在淘汰的第二輪全偶數中前後差 1 項即編號差 2 號，其餘以此類推。

$\boxed{\text{有趣的性質 5}}$ 數列 $\left\langle \overline{b_n} \right\rangle$ 最後一項 $\overline{b_n}=N+\frac{1}{2}b_0$，即 $b_n=b_0$ 形成一個閉圈。

[說明] 這個性質最為有趣但我們尚且無法證明，但數列 $\left\langle \overline{b_n} \right\rangle$ 會嚴格遞增然後迴轉一圈停回 b_0 實在令我們驚豔。最後一項 $b_n=b_0$ 是很明顯的事，因為 $L(N)$ 為總人數 N 個人時的最後存活者編號，其持有免死金牌是完全不需要用到的。而 $y=L(N;k=2)$ 持有免死金牌時，當用到免死金牌時，人數僅留 2 人，汰留後又回到自身被淘汰，所以 $b_n=b_0=L(N)$。

這個有趣的結果能夠快速地列出總人數、免死金牌持有者 y 的倒數存活編號 K（$LR(N\,;y)=K$）與最後存活者編號列表，在搭配熟悉 $LR(N;y)=k$ 的演算法後即可快速得到最後存活者編號，我們將此方法當成免死金牌算法三。

五、汰留免死金牌問題初步研究與建立流程圖：

我們分析 $LG(N,k,1)=M$ 的關係，亦即是汰留問題在汰 1 留 1 下，反覆汰留過程當中編號為 1 號者持有免死金牌，能夠免死一次，人數 N 人時，編號 M 號為倒數第 k 個被淘汰，其中 M 與 k 的關係。觀察 N=1 到 21，M 與 k 的關係。

觀察第一行可以發現：$LG(2^m-1,1,1)=1$、$LG(2^m,1,1)=2$。將基礎性質 1 類推到免死金牌 $LG(N,k,y)=LG(N-1,k,y)+2$，可進一步觀察出 $LG(2^m+l,1,1)=2(l+1)$。

因此歸納出免死金牌持有者編號為 1 號的關係如下：$LG(2^m-1,1,1)=1$ 且

$LG(\,2^m+l,1,1\,)=2(l+1)$，其中$0\le l\le 2^m-2$。觀察第二行發現：$LG(\,3\times 2^m-1,2,1\,)=1$、$LG(\,3\times 2^m+l,2,1\,)=2(l+1)$，其中$0\le l\le 3\times 2^m-2$。觀察第三行發現：$LG(\,5\times 2^m-1,3,1\,)=1$、$LG(\,5\times 2^m+l,3,1\,)=2(l+1)$，其中$0\le l\le 5\times 2^m-2$。

表 11：$LG(\,N,k,1\,)=M$，N=1 到 21，M 與 k 的關係

金牌持有者1號																					
N \ ***k***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1																				
2	2	1																			
3	1	2	3																		
4	2	4	1	3																	
5	4	1	2	5	3																
6	6	2	4	1	5	3															
7	1	4	6	2	7	5	3														
8	2	6	8	4	1	7	5	3													
9	4	8	1	6	2	9	7	5	3												
10	6	10	2	8	4	1	9	7	5	3											
11	8	1	4	10	6	2	11	9	7	5	3										
12	10	2	6	12	8	4	1	11	9	7	5	3									
13	12	4	8	1	10	6	2	13	11	9	7	5	3								
14	14	6	10	2	12	8	4	1	13	11	9	7	5	3							
15	1	8	12	4	14	10	6	2	15	13	11	9	7	5	3						
16	2	10	14	6	16	12	8	4	1	15	13	11	9	7	5	3					
17	4	12	16	8	1	14	10	6	2	17	15	13	11	9	7	5	3				
18	6	14	18	10	2	16	12	8	4	1	17	15	13	11	9	7	5	3			
19	8	16	1	12	4	18	14	10	6	2	19	17	15	13	11	9	7	5	3		
20	10	18	2	14	6	20	16	12	8	4	1	19	17	15	13	11	9	7	5	3	
21	12	20	4	16	8	1	18	14	10	6	2	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3

因此歸納出編號為 1 號者持有免死金牌的關係如下：

$LG(\,(2k-1)\times 2^m-1,k,1\,)=1$且$LG(\,(2k-1)\times 2^m+l,k,1\,)=2(l+1)$，其中$0\le l\le (2k-1)\times 2^m-2$。

不難發現，免死金牌持有者編號為奇數，第一輪免死金牌就會被使用。因此，先探討免死金牌持有者編號為奇數的情況下，M 與 k 的關係。接著分析$LG(\,N,k,3\,)=M$ 的關係。

觀察第一行可以發現：$LG(\,2^m-1,1,3\,)=2$、$LG(\,2^m,1,3\,)=3$、$LG(\,2^m+l,1,3\,)=2(l+1)$，其中$1\le l\le 2^m-2$。觀察第二行發現：$LG(\,3\times 2^m-1,2,3\,)=2$、$LG(\,3\times 2^m,2,3\,)=3$、$LG(\,3\times 2^m+l,2,3\,)=2(l+1)$，其中$1\le l\le 3\times 2^m-2$。觀察第三行發現：$LG(\,5\times 2^m-1,3,3\,)=2$、$LG(\,5\times 2^m,3,3\,)=3$、$LG(\,5\times 2^m+l,3,3\,)=2(l+1)$，其中$1\le l\le 5\times 2^m-2$。

表 12：$LG(N,k,3)=M$ ，N=3 到 21，M 與 k 的關係

金牌持有者3號																					
N \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	1																				
2	2	1																			
3	2	3	1																		
4	3	4	2	1																	
5	4	2	3	5	1																
6	6	3	4	2	5	1															
7	2	4	6	3	7	5	1														
8	3	6	8	4	2	7	5	1													
9	4	8	2	6	3	9	7	5	1												
10	6	10	3	8	4	2	9	7	5	1											
11	8	2	4	10	6	3	11	9	7	5	1										
12	10	3	6	12	8	4	2	11	9	7	5	1									
13	12	4	8	2	10	6	3	13	11	9	7	5	1								
14	14	6	10	3	12	8	4	2	13	11	9	7	5	1							
15	2	8	12	4	14	10	6	3	15	13	11	9	7	5	1						
16	3	10	14	6	16	12	8	4	2	15	13	11	9	7	5	1					
17	4	12	16	8	2	14	10	6	3	17	15	13	11	9	7	5	1				
18	6	14	18	10	3	16	12	8	4	2	17	15	13	11	9	7	5	1			
19	8	16	2	12	4	18	14	10	6	3	19	17	15	13	11	9	7	5	1		
20	10	18	3	14	6	20	16	12	8	4	2	19	17	15	13	11	9	7	5	1	
21	12	20	4	16	8	2	18	14	10	6	3	21	19	17	15	13	11	9	7	5	1

因此歸納出免死金牌持有者編號為 3 號的關係如下：

$LG((2k-1)\times 2^m-1,k,3)=2$ 、$LG((2k-1)\times 2^m,k,3)=3$ 、$LG((2k-1)\times 2^m+l,k,3)=2(l+1)$ ，其中$1\le l\le(2k-1)\times 2^m-2$ 。

$\boxed{\text{定理 9}}$ 編號為奇數者持有免死金牌，即 $y=2t-1$ ，其中 t 為整數

$LG((2k-1)\times 2^m+l,k,2t-1)=2(l+2)$ ，其中 $-1\le l\le t-3$

$LG((2k-1)\times 2^m+l,k,2t-1)=2t-1=2l+3$，其中 $l=t-2$

$LG((2k-1)\times 2^m+l,k,2t-1)=2(l+1)$ ，其中 $t-1\le l\le(2k-1)\times 2^m-2$

[證明] $LG(N,k,2t-1)=M$ ：表示總人數為 N 人時由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，反覆汰留過程中其中編號為$2t-1$號者持有免死金牌，能夠免死一次，反覆汰留過程中而倒數第 k 個人存活者編號為 M 號。先汰 t 人留 t 人後，因為編號$2t-1$有免死金牌，實際上汰$t-1$人，下一次從編號$2t+1$開始汰除。因此，我們重新編號為 1*、2*、...、N-t+1*，如下表所示。

表 14：汰留免死問題先汰除免死金牌後，轉換為汰留問題重新編號對照表

編號	1	2	3	4	…	$2t$-1 (金)	$2t$	$2t$+1	…	N
先汰 t 人	X	O	X	O	…	X	O			
重新編號		N-2t+1*		N-2t+2*		N-t*	N-t+1*	1*	…	N-2t*

$LG(N,k,2t-1)=M$，持有金牌者 $L(N-t+1^*,k)=N-t^*$，由進階性質 3 得知

$L((2k-1)\times 2^{m-1}+l\,,k)=2l$，得 $N-t+1=(2k-1)\times 2^m-1$，故 $N=(2k-1)\times 2^m+t-2$。

可得 $LG((2k-1)\times 2^m+t-2,k,2t-1)=2t-1$，同理可以推得

$$LG(N,k,2t-1)=\begin{cases}2 & ,N=(2k-1)\times 2^m-1\\ 4 & ,N=(2k-1)\times 2^m\\ 6 & ,N=(2k-1)\times 2^m+1\\ \vdots & \\ 2t-1 & ,N=(2k-1)\times 2^m+(t-2)\\ 2t & ,N=(2k-1)\times 2^m+(t-1)\\ 2t+2 & ,N=(2k-1)\times 2^m+t\\ 2t+4 & ,N=(2k-1)\times 2^m+(t+1)\\ \vdots & \\ \vdots & ,N=(2k-1)\times 2^m+(2k-1)\times 2^m-2\end{cases}$$ ，故得證。

此過程中，未處理編號 1、3、5、…、$2t-3$這先被汰除的$t-1$人。但這$t-1$人的問題非常容易被解決。爾後，關於先被淘汰的奇數編號，我們都先不討論其一般性規則。

接著我們透過觀察發現編號為偶數者持有免死金牌的情況下，M 與 k 的關係。應分為 N 的奇偶來討論，二個類型分別為 $LG(2x,k,2t)$ 與 $LG(2x-1,k,2t)$。(定理 8 的延伸)

定理 10　$LG(2x,k,2t)=2\times LG(x,k,t)$ 、 $LG(2x-1,k,2t)=2\times LG(x,k,t-1)+2$

[證明]總人數為 $2x$ 和 $2x-1$人時，分別先汰 x 人留 x 人後，仿定理 9 分別重新編號如下表 15 和表 16 即可推得此性質。

表 15：汰留免死問題先汰除免死金牌後，轉換為汰留問題重新編號對照表

編號	1	2	3	4	…	$2t$-1	$2t$ (金)	…	$2x$-1	$2x$
先汰 x 人	X	O	X	O	…	X	O	…	X	O
重新編號		1*		2*			t*			x*

表 16：汰留免死問題先汰除免死金牌後，轉換為汰留問題重新編號對照表

編號	1	2	3	4	…	2*t*-1	2*t* (金)	…	2*x*-2	2*x*-1
先汰 *x* 人	X	O	X	O	…	X	O	…	O	X
		O								
重新編號		*x*-1*		1*			*t*-1*		*x*-2*	

仿照$LG(N\,;\,y)$的通式想法，我們也可以將寫出 y 是奇數，$LG(\,N,k,2t-1\,)$的通式。

通式 1
$$\begin{cases} LG(\,(2k-1)\times 2^m-2,k,2t-1\,)=(2k-1)\times 2^m-2 \\ LG(\,(2k-1)\times 2^m-2+l,k,2t-1\,)=\begin{cases} 2l & \text{當 } l<t \\ 2l-1=2t-1 & \text{當 } l=t \\ 2l-2 & \text{當 } l>t \end{cases} \end{cases}$$

以免死金牌持有者 $y=2t-1$，亦即$t=\dfrac{y+1}{2}$。總人數為 N 人，則$m=[\log_2(\dfrac{N+2}{2k-1})]$，

$l=N+2-(2k-1)\times 2^{[\log_2(\frac{N+2}{2k-1})]}$，此時$LG(N\,,k,y)=\begin{cases} y+2(l-t)+1 & \text{當 } 2l-1<2t-1 \\ y & \text{當 } 2l-1=2t-1\in N \\ y+2(l-t)-1 & \text{當 } 2l-1<2t-1 \end{cases}$。

引入符號函數合併三式，消，得$LG(N,k,y)=y+\operatorname{sgn}(2l-y-1)\cdot(|2l-y-1|-1)$，其中

$l=N+2-(2k-1)\times 2^{[\log_2(\frac{N+2}{2k-1})]}$。

通式 2　$LG(N,k,y)=y+\operatorname{sgn}(2l-y-1)\cdot(|2l-y-1|-1)$，其中$l=N+2-(2k-1)\times 2^{[\log_2(\frac{N+2}{2k-1})]}$。

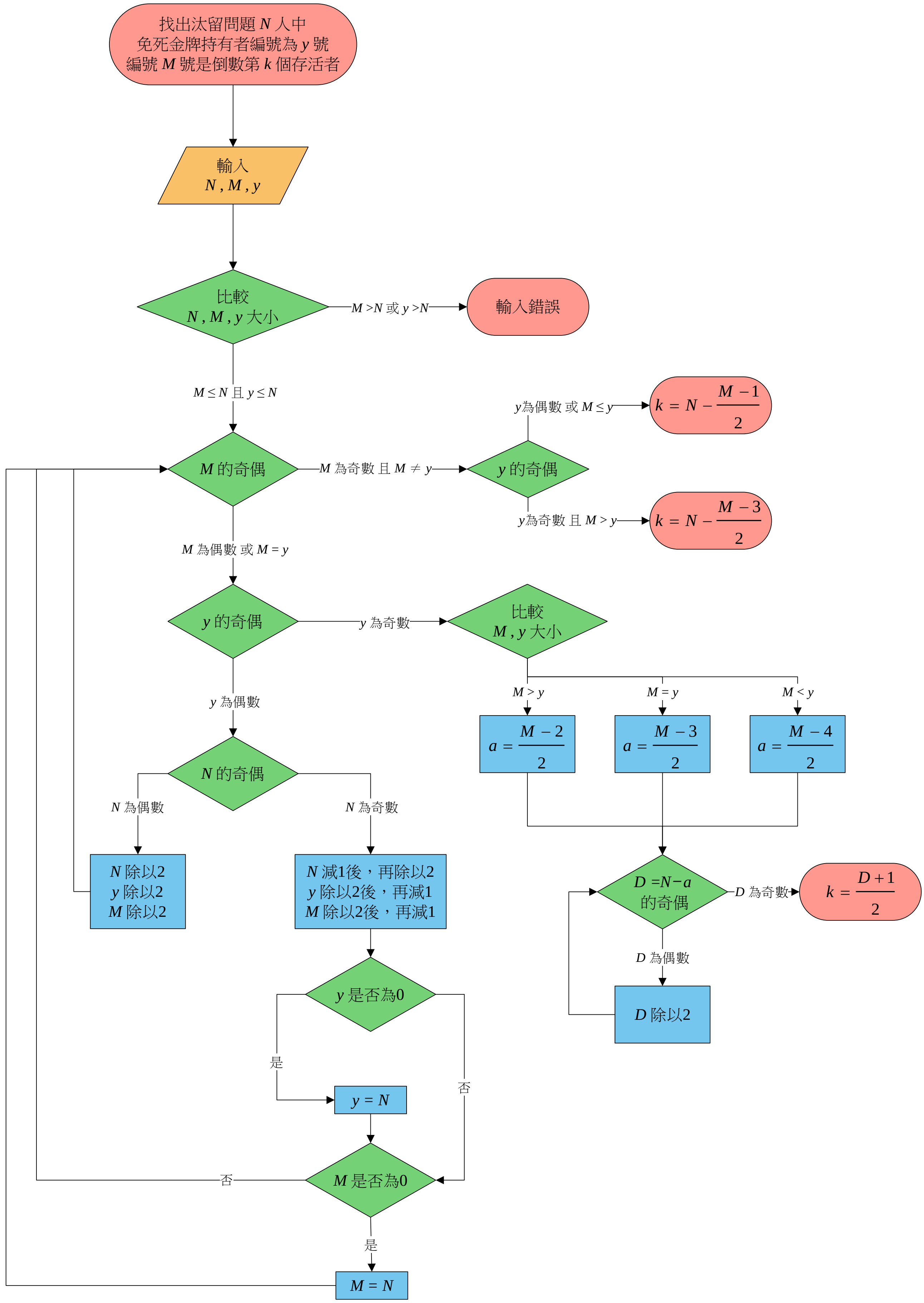
若考慮通式在$l=t$前後發生跳項，所以引入高斯符號 flooring 和 ceiling 後可得

$LG(N\,,k,\,2t-1)=2l-1-\left\lceil \dfrac{l-t}{N}\right\rceil-\left\lfloor \dfrac{l-t}{N}\right\rfloor$，消$t=\dfrac{y+1}{2},\dfrac{l-t}{N}=\dfrac{2l-y-1}{2N}$得到

$LG(N\,,k,\,y)=2l-1-\left\lceil \dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rceil-\left\lfloor \dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rfloor$，可得通式 3。

通式 3　$LG(N,k,y)=2l-1-\left\lceil \dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rceil-\left\lfloor \dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rfloor$，其中$l=N+2-(2k-1)\times 2^{[\log_2(\frac{N+2}{2k-1})]}$。

至此，我們完成了汰留免死金牌問題，當免此金牌者持有者編號為奇數時，我們可以透過通式 3，直接求得倒數第k的存活者所對應的編號。當免此金牌此有者為偶數時，我們可以利用定理 10 將總人數減半，其所對應的免死金牌持有者編號也會減半的遞迴關係式找出任意的$LG(N,k,y)$。因為$LG(N,k,y)=M$ 是一對一且映成的函數，我們利用流程圖的方式解決$LGR(\,N,M,y\,)=k$，我們將$LGR(\,N,M,y\,)=k$的計算化為演算法與流程圖如下：



圖七： $LGR(N,M,y)=k$ 的計算流程圖

六、兩位免死金牌汰留問題初步研究：

我們討論完 1 位免死金牌持有者後，繼續延伸汰留免死金牌問題，討論持有免死金牌的人數增加為相異 2 人，利用文前 1 位免死金牌持有者的結果，分析 2 位編號皆為奇數的情形。

表 17：兩位編號皆為奇數免死金牌持有者時的最後存活者編號

N	$L(N)$	$L+4$	1,3免	3,5免	5,7免	7,9免	1,5免	1,7免
3	2		3					
4	4		4					
5	2		1	2			1	
6	4		2	3			2	
7	6	2	3	4	5		4	4
8	8	4	4	5	6		5	6
9	2	6	6	6	7	8	6	7
10	4	8	8	8	8	9	8	8
11	6	10	10	10	10	10	10	10
12	8	12	12	12	12	12	12	12
13	10		1	2	2	2	1	1
14	12		2	3	4	4	2	2
15	14	2	3	4	5	6	4	4
16	16	4	4	5	6	7	5	6
17	2	6	6	6	7	8	6	7
18	4	8	8	8	8	9	8	8
19	6	10	10	10	10	10	10	10
20	8	12	12	12	12	12	12	12
21	10	14	14	14	14	14	14	14
22	12	16	16	16	16	16	16	16
23	14	18	18	18	18	18	18	18
24	16	20	20	20	20	20	20	20
25	18	22	22	22	22	22	22	22
26	20	24	24	24	24	24	24	24
27	22	26	26	26	26	26	26	26
28	24	28	28	28	28	28	28	28

由前面討論知一個免死金牌等同多一個人，若免死金牌持有者編號為奇數則在第一輪淘汰時即使用免死金牌，由 $L(N+1)=L(N)+2$ 知原則上存活者編號會向後增加 2 號，除非恰好是落在免死不動點。兩個免死金牌持有者編號皆為奇數時，原則上存活者編號會增加 4 號，但 $N=2^m+2^m-2$ 時，$L(N)=L(2^m+2^m-2)=2(2^m-2)$，則 $L(N)+4=2(2^m-2)+4>N$，編號不合理將其空白，同理在 $N=2^m+2^m-3$。此時將兩個空白格標示上兩個免死金牌持有者編號，然後順排其編號，結果與真正進行兩位奇數免死金牌持有者汰留後的結果相同。

其理由為總人數 N 個人時，免死金牌持有者編號若是 $2i+1$ 與 $2j+1$，則由 1 號開始汰留，汰留至 $2j+3$ 號時，留下編號為 $2,4,\cdots,2i,2i+1,2i+2,2i+4,\cdots,2j,2j+1,2j+2$ 銜接

於 N 號的後面，所以情形同前段所示。仿汰留免死金牌問題，若免死金牌持有者編號為 $2i+1$ 與 $2j+1$ (設 $i<j$)，知道**總數不動點**為 2^m-4，即 $LG(2^m-4\ ;\ \{2i-1\ ,\ 2j-1\})=2^m-4$。**免死不動點**為 $LG(2^m-4+i\ ;\{2i-1,2j-1\})=2i-1$ 和 $LG(2^m-4+j+1\ ;\{2i-1,2j-1\})=2j-1$。

通式
$$\begin{cases} LG(\ 2^m-4\ ;\ \{2i-1\ ,\ 2j-1\}\ )=2^m-4 \\ LG(\ 2^m-4+l\ ;\ \{2i-1\ ,\ 2j-1\}\ )=\begin{cases} 2l & \text{當 } l<i \\ 2l-1=2i-1 & \text{當 } l=i \\ 2l-2 & \text{當 } i<l<j \\ 2l-3 & \text{當 } l=j \\ 2l-4 & \text{當 } l>j \end{cases} \end{cases}$$

仿照 $LG(N;y)$，利用天花板及地板函數，可將通式合併如下：當 $N=2^m-4+l$ 時，

$$LG(\ 2^m-4+l\ ;\ \{2i-1\ ,\ 2j-1\}\ )=2l-(\left\lceil \frac{l-i}{N}\right\rceil+\left\lfloor \frac{l-i}{N}\right\rfloor+1)-(\left\lceil \frac{l-j}{N}\right\rceil+\left\lfloor \frac{l-j}{N}\right\rfloor+1)$$ 。

考慮免死金牌持有者編號為 $y_1=2i+1\ ,\ y_2=2j+1$，亦即 $i=\dfrac{y_1+1}{2}\ ,\ j=\dfrac{y_2+1}{2}$，總人數 $N=2^m-4+l$，可轉換得 $m=[\log_2(N+4)]$ 且 $l=N+4-2^{[\log_2(N+4)]}$。可得到定理 11。

定理 11 $$LG(N;\ \{y_1,y_2\}\ )=2l-(\left\lceil \frac{2l-y_1-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor \frac{2l-y_1-1}{2N}\right\rfloor+1)-(\left\lceil \frac{2l-y_2-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor \frac{2l-y_2-1}{2N}\right\rfloor+1)$$

其中 $l=N+4-2^{[\log_2(N+4)]}$。

接著，我們仿照 $LG(N,k,y)=M$ 的觀察方法，去找出兩位免死金牌汰留問題中，倒數第 k 位存活者所對應的編號 $LG(N,k,\{y_1,y_2\})=M$。我們觀察免死金牌持有者為 1 號和 3 號，3 號和 7 號兩組資料，可以發現，規則跟 $LG(N,k,y)=M$ 所觀察到的部分相似：

(1)每一直行，除了免死金牌持有者外，都是 $2,4,6,8,\cdots$ 直到數字大於 N 時發生跳項。

(2) $k=1$ 時，發生跳項間的個數為 8 項、16 項、32 項、…；$k=2$ 時，發生跳項間的個數為 12 項、24 項、48 項、…；$k=3$ 時，發生跳項間的個數為 10 項、20 項、40 項、…。

可推得倒數第 k 個存活者，總數不動點與 $(2k-1)\times 2^m$ 有關。概念與兩個免死金牌最後存活者問題相同，編號會與沒有免死金牌差 4 號。故總數不動點為 $(2k-1)\times 2^m-4$，亦即 $LG((2k-1)\times 2^m-4,k,\{y_1,y_2\})=(2k-1)\times 2^m-4$。

仿照免死金牌問題的處理方式，兩個免死金牌問題，爾後，關於先被淘汰的奇數編號，非常簡單，我們都先不討論其一般性規則。依據表 18、表 19 及免死金牌問題的概念可得：

$\boxed{通式}$ $LG((2k-1)\times 2^m-4+l,\ k\ ,\{2i-1\ ,\ 2j-1\})=\begin{cases}2l & 當\ l<i\\ 2l-1 & 當\ l=i\\ 2l-2 & 當\ i<l<j\\ 2l-3 & 當\ l=j\\ 2l-4 & 當\ l>j\end{cases}$

表 18： $LG(N,k,\{1,3\})$ 所對應的編號

金牌持有者1號、3號									
N \ k	1	2	3	4	N \ k	1	2	3	4
4	4	2	3	1	36	12	28	36	20
5	1	3	4	2	37	14	30	1	22
6	2	4	6	3	38	16	32	2	24
7	3	6	1	4	39	18	34	3	26
8	4	8	2	6	40	20	36	4	28
9	6	1	3	8	41	22	38	6	30
10	8	2	4	10	42	24	40	8	32
11	10	3	6	1	43	26	42	10	34
12	12	4	8	2	44	28	44	12	36
13	1	6	10	3	45	30	1	14	38
14	2	8	12	4	46	32	2	16	40
15	3	10	14	6	47	34	3	18	42
16	4	12	16	8	48	36	4	20	44
17	6	14	1	10	49	38	6	22	46
18	8	16	2	12	50	40	8	24	48
19	10	18	3	14	51	42	10	26	50
20	12	20	4	16	52	44	12	28	52
21	14	1	6	18	53	46	14	30	1
22	16	2	8	20	54	48	16	32	2
23	18	3	10	22	55	50	18	34	3
24	20	4	12	24	56	52	20	36	4
25	22	6	14	1	57	54	22	38	6
26	24	8	16	2	58	56	24	40	8
27	26	10	18	3	59	58	26	42	10
28	28	12	20	4	60	60	28	44	12
29	1	14	22	6	61	1	30	46	14
30	2	16	24	8	62	2	32	48	16
31	3	18	26	10	63	3	34	50	18
32	4	20	28	12	64	4	36	52	20
33	6	22	30	14	65	6	38	54	22
34	8	24	32	16	66	8	40	56	24
35	10	26	34	18	67	10	42	58	26

表 19： $LG(N,k,\{3,7\})$ 所對應的編號

金牌持有者3號、7號									
N \ k	1	2	3	4	N \ k	1	2	3	4
8	6	8	3	7	40	20	36	6	28
9	7	2	4	8	41	22	38	7	30
10	8	3	6	10	42	24	40	8	32
11	10	4	7	2	43	26	42	10	34
12	12	6	8	3	44	28	44	12	36
13	2	7	10	4	45	30	2	14	38
14	3	8	12	6	46	32	3	16	40
15	4	10	14	7	47	34	4	18	42
16	6	12	16	8	48	36	6	20	44
17	7	14	2	10	49	38	7	22	46
18	8	16	3	12	50	40	8	24	48
19	10	18	4	14	51	42	10	26	50
20	12	20	6	16	52	44	12	28	52
21	14	2	7	18	53	46	14	30	2
22	16	3	8	20	54	48	16	32	3
23	18	4	10	22	55	50	18	34	4
24	20	6	12	24	56	52	20	36	6
25	22	7	14	2	57	54	22	38	7
26	24	8	16	3	58	56	24	40	8
27	26	10	18	4	59	58	26	42	10
28	28	12	20	6	60	60	28	44	12
29	2	14	22	7	61	2	30	46	14
30	3	16	24	8	62	3	32	48	16
31	4	18	26	10	63	4	34	50	18
32	6	20	28	12	64	6	36	52	20
33	7	22	30	14	65	7	38	54	22
34	8	24	32	16	66	8	40	56	24
35	10	26	34	18	67	10	42	58	26
36	12	28	36	20	68	12	44	60	28
37	14	30	2	22	69	14	46	62	30
38	16	32	3	24	70	16	48	64	32
39	18	34	4	26	71	18	50	66	34

考慮免死金牌持有者編號為 $y_1=2i+1$, $y_2=2j+1$，亦即 $i=\dfrac{y_1+1}{2}$, $j=\dfrac{y_2+1}{2}$ ，總人數 $N=2^m-4+l$ ，轉換得 $m=[\log_2(N+4)]$ 且 $l=N+4-2^{[\log_2(N+4)]}$ ，可將通式合併寫成定理 12。

$\boxed{定理\ 12}$ 當 $l=N+4-2^{[\log_2(N+4)]}$ 時，

$$LG(N,\ k\ ,\{y_1,y_2\})=2l-\left(\left\lceil\frac{2l-y_1-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor\frac{2l-y_1-1}{2N}\right\rfloor+1\right)-\left(\left\lceil\frac{2l-y_2-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor\frac{2l-y_2-1}{2N}\right\rfloor+1\right)。$$

伍、討論

一、我們考慮仿照 Knuth[1]的具體數學，建立$LR(N,M)$的演算法如下：

步驟 1 將N與M化為二進位，$(N)_{10}=(B_n B_{n-1}\cdots B_1 B_0)_2$，$(M)_{10}=(b_n b_{n-1}\cdots b_1 b_0)_2$

示性數$=b_0$，判別數$D=(B_n B_{n-1}\cdots B_1 B_0)_2-(b_n b_{n-1}\cdots b_1)_2=(d_n d_{n-1}\cdots d_1 d_0)_2$

步驟 2 若示性數$b_0=1$則$LR(N,M)=D$

步驟 3 若示性數$b_0=0$則將D $\boxed{\text{去 }0}$，即尋找$d_0=d_1=d_2=\cdots=d_{p-1}=0$，$d_p=1$，

則$LR(N,M)=(d_n d_{n-1}\cdots d_{p+1})_2+1$

解釋演算法如下：當$N=41=(101001)_2$，$M=13=(1101)_2$，示性數$=b_0=1$，即M為奇數，判別數$D=(101001)_2-(110)_2=(100011)_2=35$則$LR(41,13)=35$，即總人數$N=41$，編號$M=13$，在汰 1 留 1 下為倒數第 35 個被淘汰。

二、在研究過程中，我們應該是第一個討論汰除數列，這個數列有許多有趣的性質，值得我們後續繼續討論，而所得的定理 3 與 4 在後續的免死金牌的初步探索中也發揮了一定的作用，但是淘汰一圈後會產生跳項修正的問題，確實會造成許多的麻煩，這裡也讓我們得到了解決免死金牌的第一種方法。

三、但解決免死金牌的第一種方法須運用$LR(N,y)=K$與計算$L(N,k=2^{m-2})$，過程較為麻煩，所以我們挑選了比較簡單的奇數結果（定理 7）與遞迴關係（定理 8）形成了解決免死金牌的第二種方法。

四、我們從最後存活者，進一步討論一般汰留免死金牌問題$LG(N,k,y)=M$，並得到了不錯的結果，在免死金牌持有者編號y是奇數時找出通式，y是偶數時利用遞迴關係式將免死金牌持有者編號變為奇數。最後，建立流程圖讓問題得到一種解決的方式。

五、我們將汰留免死金牌問題最後存活者$LG(N;y)=M$延伸變成兩個免死金牌持有者編號為奇數的最後存活者$LG(N;\{y_1,y_2\})=M$，並仿照免死金牌問題的方式找出通式。

六、我們將兩個免死金牌持有者編號為奇數問題，從最後存活者，進一步討論到倒數第k位存活者編號$LG(N,k,\{y_1,y_2\})=M$，並依據相同的方法找出通式。

陸、結論

我們先推廣 $L(N)=M$ 的基礎性質至 $L(\,N\,,k\,)=M$ ，得到

基礎性質 1 $L(N\,,k\,)=L(N-1\,,k\,)+2$

基礎性質 2 $L(2\times N\,,k\,)=2\times L(N\,,k\,)$

基礎性質 3 $L(N\,,N-m\,)=2m+1$，其中 $M=2m+1\leq N$

進階性質 1 $L(\,2k-1\,,k\,)=2k-1$ （不動點性質）

進階性質 2 $L(\,(2k-1)\times 2^{p}\,,k\,)=(2k-1)\times 2^{p}$

進階性質 3 $L(\,(2k-1)\times 2^{p-1}+a\,,k\,)=2a$

再轉換至 $LR(\,N\,,M\,)=k$ ，得到

定理 1 若 M 為奇數且 $M=2m+1\leq N$ 則 $LR(N\,,2m+1\,)=N-m$

定理 2 若 M 為偶數且 $M=2m\leq N$ ，計算判別數 $D=N-m$ 的最高 2 的次冪 2^{p-1} ， $p\in N$ ，

即 $D=N-m=(2k-1)\times 2^{p-1}$ ，則 $LR(N\,,M=2m\,)=k$

並轉為圖五中 $LR(\,N\,,M\,)=k$ 的計算流程圖。再仿照[1]，建立 $LR(\,N\,,M\,)$ 的演算法如下：

步驟 1 將 N 與 M 化為二進位， $(N)_{10}=(B_n\,B_{n-1}\cdots B_1\,B_0\,)_2$ ， $(M)_{10}=(b_n\,b_{n-1}\cdots b_1\,b_0\,)_2$

示性數 $=b_0$ ，判別數 $D=(B_n\,B_{n-1}\cdots B_1\,B_0\,)_2-(b_n\,b_{n-1}\cdots b_1\,)_2=(d_n\,d_{n-1}\cdots d_1\,d_0\,)_2$

步驟 2 若示性數 $b_0=1$ 則 $LR(\,N\,,M\,)=D$

步驟 3 若示性數 $b_0=0$ 則將 D $\boxed{\text{去 }0}$ ，即尋找 $d_0=d_1=d_2=\cdots=d_{p-1}=0$ ， $d_p=1$ ，

則 $LR(\,N\,,M\,)=(d_n\,d_{n-1}\cdots d_{p+1}\,)_2+1$

另外我們分析汰除數列，得到了汰除數列的定理如下

定理 3 若 $a_{2^m}>a_{2^m+1}$ 則 $\dfrac{a_{2^m}+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ ， $a_{2^m}<a_{2^m+1}$ 則 $\dfrac{\frac{1}{2}a_{2^m}+N+a_{2^m+1}}{2}=a_1$

定理 4 若 $a_{2^m-1}>a_{2^m}$ 則 $\dfrac{a_{2^m}+a_{2^m-1}}{2}=a_{2^{m-1}}$ ， $a_{2^m-1}<a_{2^m}$ 則 $\dfrac{\frac{1}{2}a_{2^m-1}+N+a_{2^m}}{2}=a_{2^{m-1}}$

運用以上汰除數列的結果定理 3 與 4，我們得到解決免死金牌的第一種方法：

步驟 1 計算免死金牌持有者的編號 y 的淘汰位置為倒數第 $k=K$ ，即 $LR(N\,,y\,)=K$ 。

步驟 2 若 $K=2^m-1, m\in N$ 則最後存活者恰為免死金牌持有者的編號 y。

步驟 3 若 $2^m-1>K\geq 2^{m-1}, m\in N$，則計算 $L(N, k=2^{m-2})$ 為最後存活者。

其相關定理為定理 5 與 6。

定理 5 當免死金牌持有者的編號 y 其中 $LR(N, y)=K$，倘若 $K=2^m-1, m\in N$，則

$LG(N; y)=y=a_K$ （**免死不動點**）。

定理 6 當免死金牌持有者的編號 y 其中 $LR(N, y)=K$，倘若 $2^m-1>K\geq 2^{m-1}, m\in N$，則

$LG(N; y)=a_{2^{m-2}}$。

但解決免死金牌的第一種方法須運用 $LR(N, y)=K$ 與計算 $L(N, k=2^{m-2})$，過程較為麻煩，所以我們挑選了比較簡單的奇數結果（定理 7）與遞迴關係（定理 8）形成了解決免死金牌的第二種方法。

定理 7 若總人數 $N=2^m-2$，且免死金牌持有者編號 y 為奇數，則最後存活者編號

$LG=2^m-2$。

若總人數 $N\neq 2^m-2$，且免死金牌持有者編號 y 為奇數且 $y=$(奇數**免死不動點** y_0)，則最後存活者編號 $LG=y_0$。

若 y 為奇數且 $y<$(奇數**免死不動點** y_0)，則最後存活者編號 $LG=y_0-1$。

若 y 為奇數且 $y>$(奇數**免死不動點** y_0)，則最後存活者編號 $LG=y_0+1$。

定理 8 若 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，總人數 $N=2\overline{N}$ 時，$LG(N; y)=2\times LG(\overline{N}; \overline{y})$。

若 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，總人數 $N=2\overline{N}+1$ 時，$LG(N; y)=2\times LG(\overline{N}+1; \overline{y}+1)-2$。

我們進一步討論汰留免死金牌問題 $LG(N, k, y)=M$，並得到了定理 9 與定理 10，並形成了演算法。可以發現定理 10 為定理 8 的一般型態。

定理 9 總人數 N 人，免死金牌持有者編號 $y=2t-1$，其中 t 為整數，則倒數第 k 位存活者編號為 $LG(N,k,y)=2l-1-\left\lceil\frac{2l-y-1}{2N}\right\rceil-\left\lfloor\frac{2l-y-1}{2N}\right\rfloor$，其中 $l=N+2-(2k-1)\times 2^{[\log_2(\frac{N+2}{2k-1})]}$。

定理 10 免死金牌持有者編號為偶數時，利用遞迴關係式將問題轉換，其關係式為

$LG(2x, k, 2t)=2\times LG(x, k, t)$、$LG(2x-1, k, 2t)=2\times LG(x, k, t-1)+2$

定理 11 總人數 N 人，免死金牌持有者編號 y_1, y_2，其中 y_1, y_2 為奇數，則最後存活者編號為

$$LG(N;\ \{y_1, y_2\}) = 2l - (\left\lceil \frac{2l - y_1 - 1}{2N} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2l - y_1 - 1}{2N} \right\rfloor + 1) - (\left\lceil \frac{2l - y_2 - 1}{2N} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2l - y_2 - 1}{2N} \right\rfloor + 1)$$

，其中 $l = N + 4 - 2^{[\log_2(N+4)]}$ 。

定理 12 總人數 N 人，免死金牌持有者編號 y_1, y_2，其中 y_1, y_2 為奇數，則倒數第 k 位存活者編號為 $LG((2k-1)\times 2^m - 4 + l,\ k\ ,\{2i-1\ ,\ 2j-1\})$

$$= 2l - (\left\lceil \frac{2l - y_1 - 1}{2N} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2l - y_1 - 1}{2N} \right\rfloor + 1) - (\left\lceil \frac{2l - y_2 - 1}{2N} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2l - y_2 - 1}{2N} \right\rfloor + 1)$$

，其中 $l = N + 4 - 2^{[\log_2(N+4)]}$ 。

柒、參考文獻資料

[1]Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛羆譯，Concrete Mathematics，具體數學，東華出版社，一版，台北市，P.9～19，1988 年出版。

[2]林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為(2003)。九死一生。中華民國第 43 屆全國中小學科學展覽會高中組數學科佳作。

[3]戴于珽(2004)。我要活下去。中華民國第 44 屆全國中小學科學展覽會高中組數學科佳作。

[4]周子揚、曾佑美、李昱萱(2016)。生死一「數」間。中華民國第 56 屆全國中小學科學展覽會國中組數學科佳作。

[5]林佳言、鄒佳築、蘇柏奇。免死金牌變因下之約瑟夫問題初探。科學教育月刊第 373 期。

捌、附錄

我們將研究結果的一、（頁 9）中的流程圖利用 C++寫了程式如下：

```
#include <iostream>
using namespace std;
int abc(int a){
    if (a%2==1)
        return (a+1)/2;
    else
        abc(a/2);}
int main(){
    int N=0,m=0;
    while(1)
    {
            do{
            if (N<m)
                cout<<"輸入錯誤！N 必須大於 m，請再輸入一次"<<endl;
            cout<<"請輸入 N 及 m 值（N>=m)";
            cin>>N>>m;  }
        while(m>N);
        if (m%2)
            cout<<N-(m-1)/2<<endl;
        else
            cout<<abc(N-(m/2))<<endl;
                system("pause");
        continue;
    }
        return 0;
}
```

【評語】050417

本作品研究汰留問題，即 N 個人圍成一圈，由 1 號開始依序淘汰一人後留下次一人，問倒數第 k 個被淘汰的人是幾號？本問題幾乎已被研究透徹，因此作者再加入一個條件，這 N 個人中有一人具有免死金牌，作者針對這一個問題給出遞迴式，作者在遞迴式中將各種同餘的情況分類完整。但較可惜的是本作品呈現的結構不清晰，證明過程亦有不夠嚴謹之處，期盼這些面向未來可以改善。

作品簡報

免死金牌變因下的
汰留問題 進階探討

壹、簡介

一、研究動機

約瑟夫問題就是猶太歷史學家於日記中記載的故事，在研究了學長的九死一生[2]與我要活下去[3]後，發現免死金牌變因下之約瑟夫問題初探[4]中加入了免死金牌的設定，提升問題的複雜度與趣味性。我們開始與老師討論在免死金牌變因下的汰留問題。觀察規律的方向與前人有不同的想法，但得出不錯的結果與通式。

二、研究目的與問題

一開始是為了解決汰留問題中，倒數第 k 位存活者的編號。接著加入免死金牌的設定後，先找出最後存活者編號，進一步完成倒數第 k 位存活者的編號。接續延伸設定為有多位持有免死金牌的情形。我們將問題及符號定義如下：

(一) 約瑟夫問題 $J(N,k)=M$ ：依文獻[1]定義約瑟夫問題 $J(N,k)=M$ 為編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先留 1 個人後淘汰 1 個人，反覆留汰過程直到剩下 k 個人存活時，下一個被淘汰的人所對應的編號為 M 號（以下簡稱倒數第 k 位存活者）。若 $k=1$ 則記為 $J(N)=M$ 。

(二) 汰留問題 $L(N,k)=M$ ：依文獻[1]、[2]定義汰留問題 $L(N,k)=M$ 為編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，反覆汰留後，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 M 號。若 $k=1$ 則記為 $L(N)=M$ 。

(三) 汰留存活問題 $LR(N,M)=k$ ：若 $L(N,k)=M$ ，則 $LR(N,M)=k$ 。

(四) 汰留免死金牌問題 $LG(N,k,y)=M$ ：編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，其中 y 號持有免死金牌，能免死一次，反覆汰留後，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 M 。若 $k=1$ 則記為 $LG(N;y)$。

(五) 汰留免死金牌存活問題 $LGR(N,M,y)=k$ ：若 $LG(N,k,y)=M$ ，則 $LGR(N,M,y)=k$ 。

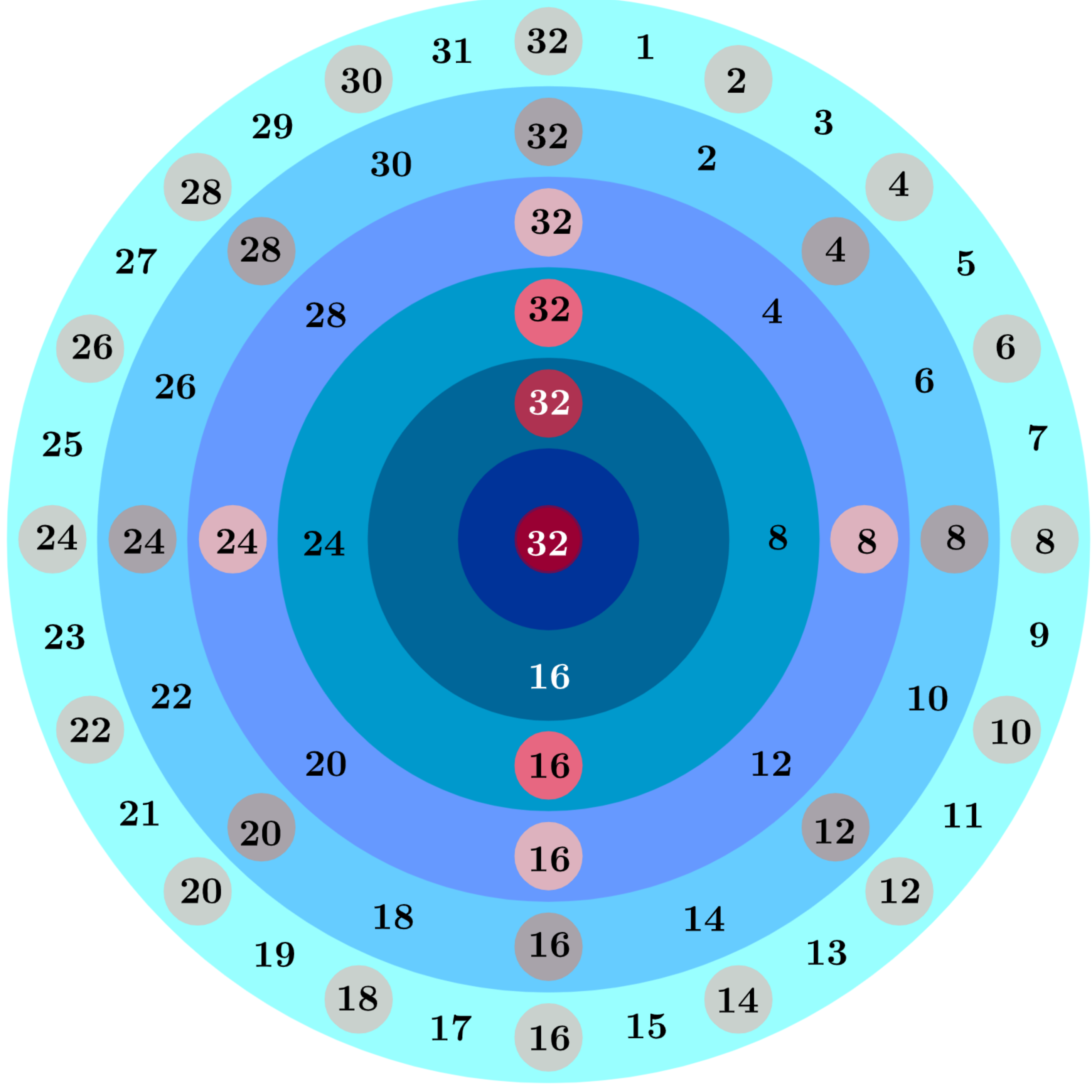
(六) 多位汰留免死金牌問題 $LG(N,k,\{y_1,y_2,\dots,y_i\})=M$ ：編號 1 到 N 的 N 個人圍成一個圓圈，由 1 號開始先淘汰 1 個人後留 1 個人，其中 $y_1,y_2,\dots,y_i$ 號持有免死金牌，能免死一次，反覆汰留後，倒數第 k 位存活者所對應的編號為 M 。若 $k=1$ 則記為 $LG(N;\{y_1,y_2,\dots,y_i\})$ 。

貳、研究方法或過程

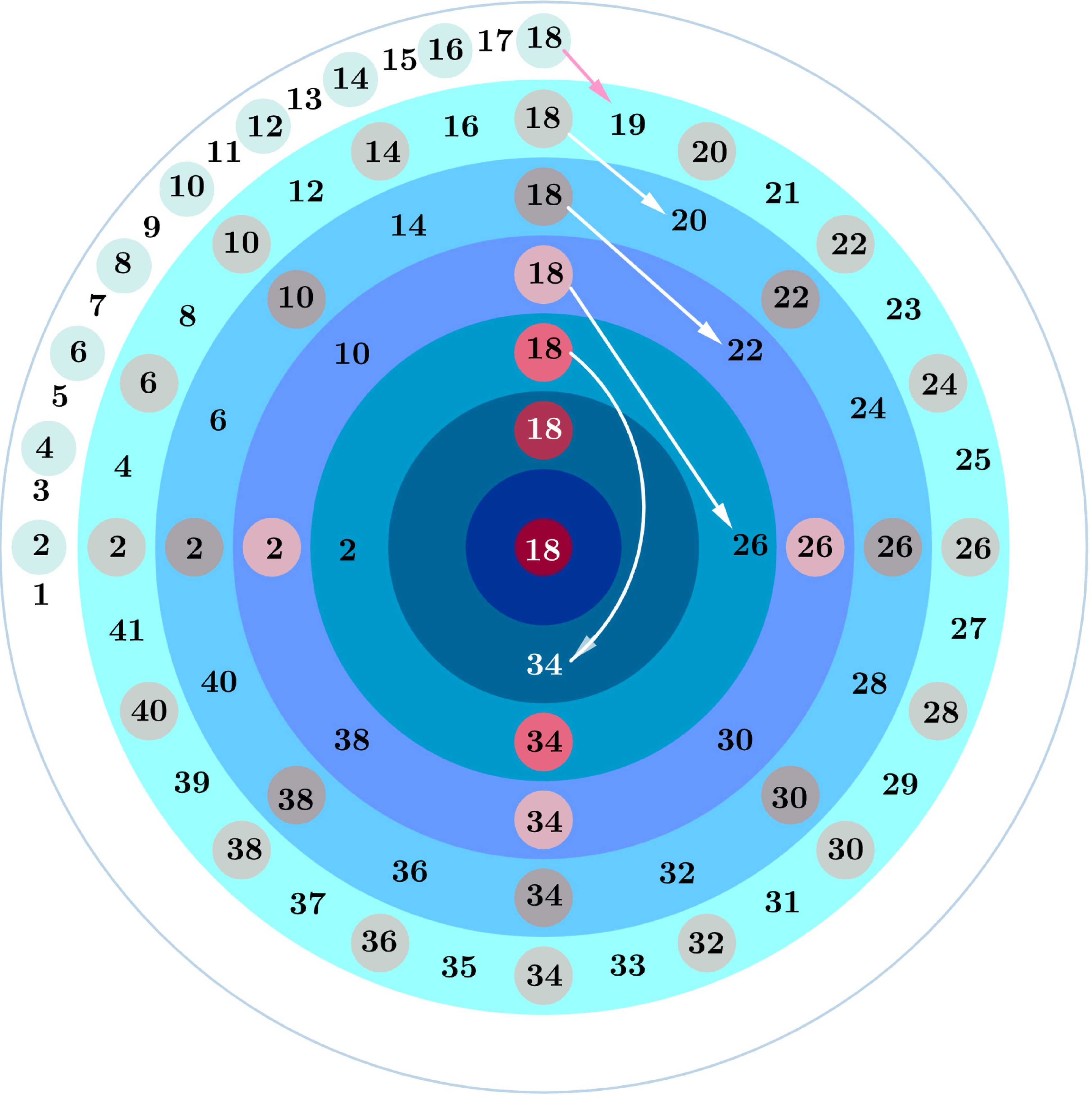
汰留問題研究與建立演算法 → 汰除數列的探索 → 免死金牌問題初步研究 → 免死金牌問題的進階數列探索 → 汰留免死金牌問題初步研究與建立流程圖 → 兩位免死金牌汰留問題初步研究

參、研究結果

一、汰留問題研究



圖一： $N=32$ 的汰留問題示意圖



圖二： $N=41$ 的汰留問題示意圖

表 1：總人數 $N=32$ 下倒數第 k 位存活者所對應的編號

k	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
號碼	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
k	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
號碼	2	6	10	14	18	22	26	30	4	12	20	28	8	24	16	32

表 2：總人數 $N=41$ 下倒數第 k 位存活者所對應的編號

k	41	40	39	38	37	36	35	34	33							
號碼	1	3	5	7	9	11	13	15	17							
k	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
號碼	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	4	8	12	16
k	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
號碼	20	24	28	32	36	40	6	14	22	30	38	10	26	2	34	18

(一) 最後存活者**總數不動點**： $\boldsymbol{L(2^m)=2^m}$ 。

(二) 最後存活者問題性質： $L(2N)=2\times L(N)$ 。

(三) **倒數第 k 位存活者總數不動點**：

$L(2k-1,k)=2k-1$ 及 $L(2N,k)=2\times L(N,k)$

可推論 $\boldsymbol{L((2k-1)\times 2^m,k)=(2k-1)\times 2^m}$ 。

(四) **最後存活者編號之通式**： $\boldsymbol{L(2^m+l)=2l}$ 。

(五) 最後存活者問題性質：

$L(N+1)\equiv L(N)+2 \pmod N$ 。

(六) **倒數第 k 位存活者編號之通式**：

$L((2k-1)\times 2^m,k)=(2k-1)\times 2^m$ 及

$L(N+1,k)\equiv L(N,k)+2 \pmod N$ ，

可推論 $\boldsymbol{L((2k-1)\times 2^m+l,k)=2l}$ 。

二、汰除數列初步探索(免死金牌問題的最後存活者之一)

表 3：總人數 $N=17,18$ 的免死金牌最後存活者編號

N=17		k=17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		y=1	3	**5**	7	9	11	13	15	17	4	**8**	12	16	6	**14**	10	**2**
		$a_k=4$	4	**5**	6	6	6	6	6	6	6	**8**	10	10	10	**14**	2	**2**
N=18	k=18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	y=1	3	5	**7**	9	11	13	15	17	2	6	**10**	14	18	8	**16**	12	**4**
	$a_k=6$	6	6	**7**	8	8	8	8	8	8	8	**10**	12	12	12	**16**	4	**4**

觀察發現以下幾個性質：($a_{k+1}>a_k$ 時須修正 a_k 為 $N+(a_k/2)$)

(1) $\frac{a_{17}+a_{16}}{2}=\frac{a_9+a_8}{2}=\frac{a_5+a_4}{2}=\frac{a_3+a_2}{2}=a_1$

(2) $\frac{a_{16}+a_{15}}{2}=a_8$，$\frac{a_8+a_7}{2}=a_4$，$\frac{a_4+a_3}{2}=a_2$

(3) $K=2^m-1$：最後存活者恰為免死金牌持有者的編號 y。

第一種免死金牌問題最後存活者編號 $LG(N;y)$ 的方法：

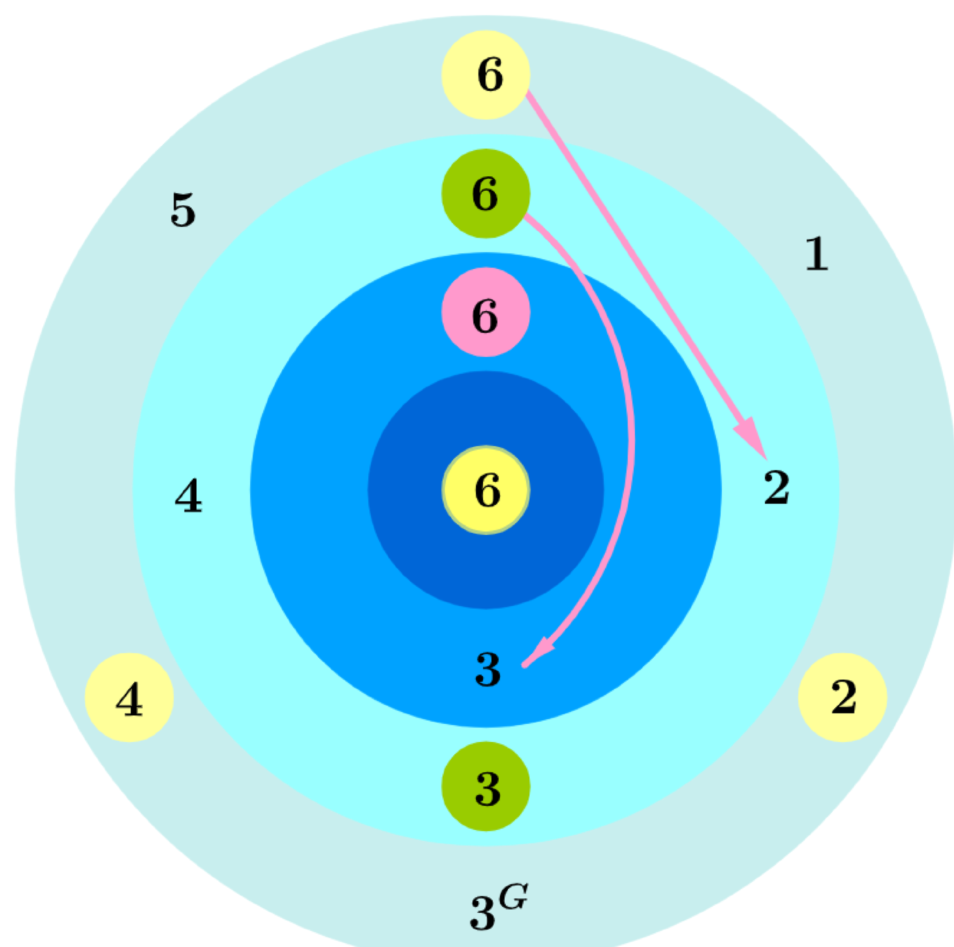
步驟 1　計算編號 y 的淘汰位置為倒數 $k=K$，即 $LR(N,y)=K$。

步驟 2　若 $K=2^m-1$，則最後存活者編號 $LG(N;y)=y$。(免死不動點)

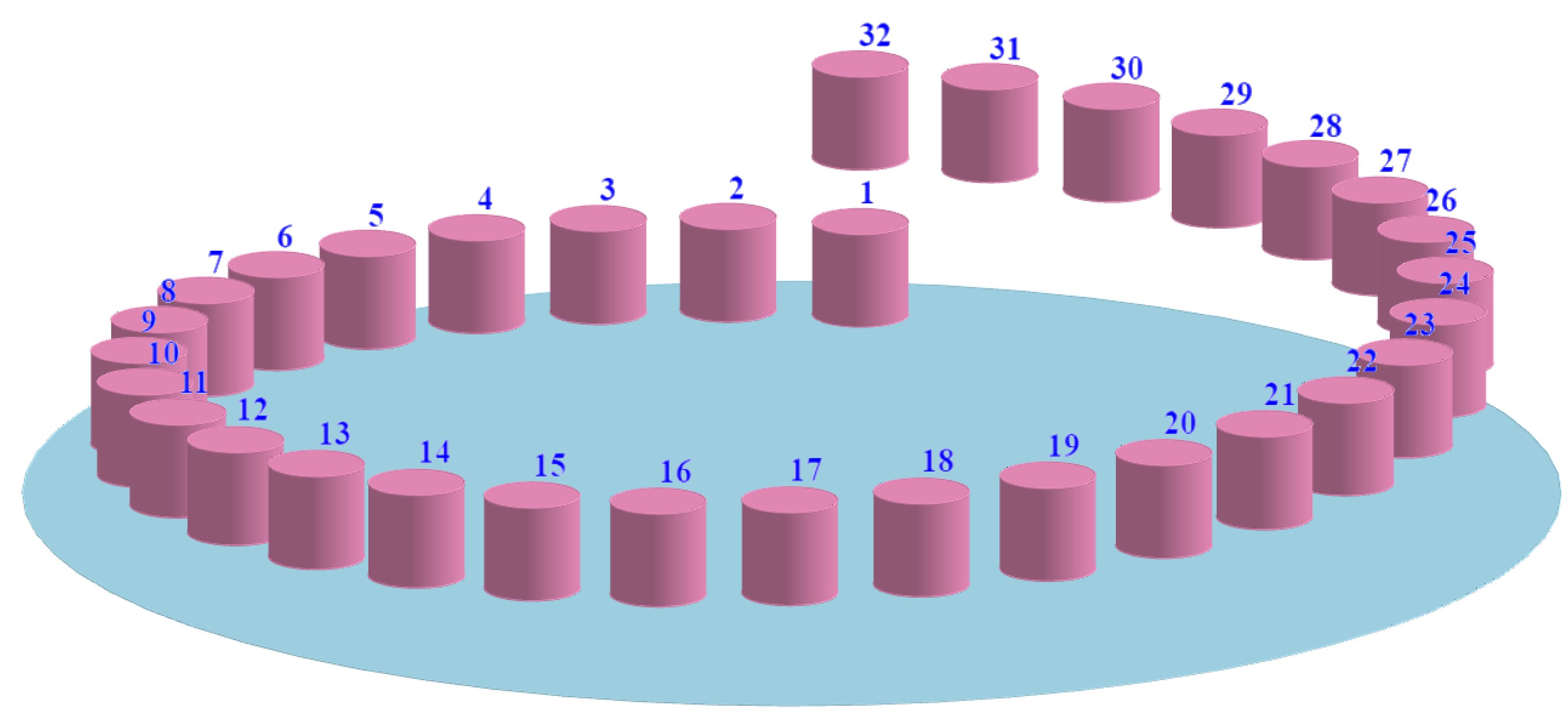
步驟 3　若 $2^m-1>K\geq 2^{m-1}$，則最後存活者 $LG(N;y)=L(N,k=2^{m-2})$。

持有免死金牌視為多 1 人的概念，結合 $LG(N+1;y)=LG(N;y)+2$ 可推得**總數不動點**為 $LG(2^m-2;y)=2^m-2$。

當免死金牌持有者的編號 $y=10$（即 $k=7$）時最後存活者恰好是 10 號本身，我們定義其為**免死不動點**。即 $LG(18;y=10)=10$。



圖三：$LG(6;3)=6$ 的示意圖



圖四：$N=31$ 第 1 人被淘汰但持免死金牌的汰留問題示意圖

三、汰除數列進階探索(免死金牌問題的最後存活者之二)

表 4：總人數 N、免死金牌持有者 y 為奇數、奇數不動點 y_0 與最後存活者編號

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$y<y_0$		2	4	**6**		2	4	6	8	10	12	**14**		2
$y=y_0$	1	3	5		1	3	5	7	9	11	13		1	3
$y>y_0$	2				2	4	6	8	10				2	4
N	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$y<y_0$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	**30**
$y=y_0$	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	
$y>y_0$	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26			

第二種免死金牌問題最後存活者編號 $LG(N;y)$ 的方法：

步驟 1　利用遞迴關係式(定理 8)將金牌 y 由偶數變成奇數。

步驟 2　利用比較簡單的奇數結果求出原偶數結果(定理 7)。

$$\begin{cases} LG(2^m-2\,;2t-1)=2^m-2=N \\ LG(2^m-2+l\,;2t-1)=\begin{cases} y_0+1=2l & =2t-1+2(l-t)+1 & \text{當 } l<t \\ y_0 & =2l-1=2t-1 & \text{當 } l=t\in N \\ y_0-1=2l-2=2t-1+2(l-t)-1 & & \text{當 } l>t \end{cases} \end{cases}$$

四、汰除數列有趣的性質(免死金牌問題的最後存活者之三)

表 5：總人數 N、免死金牌持有者 y (以對應的 k 表達)與最後存活者編號

人數 N	$L(N)$	K=16 至 30		K=15		K=8 至 14		K=7		K=4 至 6		K=3		K=1 至 2
	b_0	b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7
			1		1		2		2		4		4	
17	2	4		5		6		8		10		14		2 修 18
			1		1		2		2		4		4	
18	4	6		7		8		10		12		16		4 修 20
			1		1		2		2		4		4	
19	6	8		9		10		12		14		18		6 修 22
			1		1		2		2		4		4	
20	8	10		11		12		14		16		20		8 修 24
			1		1		2		2		4		4	
21	10	12		13		14		16		18		2 修 22		10 修 26
			1		1		2		2		4		4	
22	12	14		15		16		18		20		4 修 24		12 修 28

發現數列規則如下：

(1)數列 $<b_n>$ 的規則為+1、+1、+2、+2、+4、+4、+8、…。

$(b_n>N$ 時須修正 b_n 為 $(b_n-N)\times 2)$

(2) $b_0+2\equiv b_1 \pmod N$

(3)最後一項 $b_n=b_0$

第三種免死金牌問題最後存活者編號 $LG(N;y)$ 的方法：

步驟 1　列出總人數、免死金牌持有者 y 的倒數存活編號 K 與最後存活者編號列表。

步驟 2　搭配 $LR(N;y)=k$ 的演算法後即可求得。

五、汰留免死金牌問題(免死金牌問題的倒數第 k 位存活者)

仿定理 8，下述建立在**免死金牌持有者編號為奇數**的情形下，免死金牌持有者為偶數的情形，我們利用遞迴關係處理。

表 6：免死金牌持有者編號為 1 號，倒數第 k 位存活者對應的編號 $LG(N,k,1)=M$

金牌1號	k\\N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	1	**1**	2	**1**	2	4	6	**1**	2	4	6	8	10	12	14	**1**	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	**1**
	2		**1**	2	4	**1**	2	4	6	8	10	**1**	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	**1**	2	4	6	8	10	12	14	16
	3			3	**1**	2	4	6	8	**1**	2	4	6	8	10	12	14	16	18	**1**	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

表 7：免死金牌持有者編號為 3 號，倒數第 k 位存活者對應的編號 $LG(N,k,3)=M$

金牌3號	k\\N		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	1		2	**3**	4	6	2	**3**	4	6	8	10	12	14	2	**3**	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	2
	2		3	4	2	**3**	4	6	8	10	2	**3**	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	2	**3**	4	6	8	10	12	14	16
	3		1	2	**3**	4	6	8	2	**3**	4	6	8	10	12	14	16	18	2	**3**	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

由上表可觀察並證明得到下列性質：

(1)**總數不動點**：$LG((2k-1)\times 2^m-2,k,y)=(2k-1)\times 2^m-2$

(2)**免死不動點**：$LG((2k-1)\times 2^m-2+t,k,2t-1)=2t-1$

(3)倒數第 k 位存活者編號，除了免死不動點的前後項差 1 以外，其餘的前後項均差 2 $\pmod N$。

利用此性質，寫出 $L(N,k,y)$ 的**通式**為

$$\begin{cases} LG(\,(2k-1)\times 2^m-2,k,2t-1\,)=(2k-1)\times 2^m-2 \\ LG(\,(2k-1)\times 2^m-2+l,k,2t-1\,)=\begin{cases} 2l & \text{當 } l<t \\ 2l-1=2t-1 & \text{當 } l=t \\ 2l-2 & \text{當 } l>t \end{cases} \end{cases}$$

六、兩位免死金牌汰留問題初步研究

下述內容建立在**兩位免死金牌持有者的編號為相異奇數**的情形下討論，尚未解決編號為偶數的情形。

表 8：免死金牌持有者編號為 3 號和 7 號，倒數第 k 位存活者對應的編號 $LG(N,k,\{3,7\})=M$

3號和7號持有金牌	$k\backslash N$	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
	1	6	7	8	10	12	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	2	3	4	6	7	8
	2	8	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24
	3	3	4	6	7	8	10	12	14	16	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
	4	7	8	10	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16

3號和7號持有金牌	$k\backslash N$	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
	1	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	2
	2	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	3	34	36	2	3	4	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46
	4	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	2	3	4	6	7	8	10	12	14

兩位持有免死金牌可視為多 2 人，結合 $LG(N+1;y)=LG(N;y)+2$ 可推得**總數不動點**為 $LG(2^m-4;\{y_1,y_2\})=2^m-4$。
由汰留免死金牌問題的結論觀察上表可推得

(1)**總數不動點**：$LG((2k-1)\times 2^m-4,k,\{y_1,y_2\})=(2k-1)\times 2^m-4$

(2)**免死不動點**：$LG((2k-1)\times 2^m-4+i,k,\{2i-1,2j-1\})=2i-1$、$LG((2k-1)\times 2^m-4+j+1,k,\{2i-1,2j-1\})=2j-1$
(假設免死金牌持有者編號為 $2i-1$ 及 $2j-1$，其中 $i<j$)

(3)倒數第 k 位存活者編號，除了免死不動點的前後項差 1 以外，其餘的前後項均差 2 $\pmod N$。

$M=LG((2k-1)\times 2^m-4+l,\ k\ ,\{2i-1\ ,\ 2j-1\})$ 的**通式**為

l	$l<i$	$l=i$	$i<l<j$	$l=j$	$l>j$
M	$2l$	$2l-1$	$2l-2$	$2l-3$	$2l-4$

肆、討論與結論

定理 1　若 M 為奇數且 $M=2m+1\le N$ 則 $LR(N,2m+1)=N-m$。

定理 2　若 M 為偶數且 $M=2m\le N$，計算判別數 $D=N-m$ 的最高 2 的次冪 2^{p-1}，則 $LR(N,M=2m)=k$。

由定理 1、2 建立 $LR(N,M)$ 演算法如下：

步驟 1　將 N 與 M 化為二進位，$(N)_{10}=(B_n B_{n-1}\dots B_1 B_0)_2$，$(M)_{10}=(b_n b_{n-1}\dots b_1 b_0)_2$
示性數 $=b_0$，判別數 $D=(B_n B_{n-1}\dots B_1 B_0)_2-(b_n b_{n-1}\dots b_1)_2=(d_n d_{n-1}\dots d_1 d_0)_2$

步驟 2　若示性數 $b_0=1$ 則 $LR(N,M)=D$

步驟 3　若示性數 $b_0=0$ 則將 D $\boxed{\text{去 }0}$，即尋找 $d_0=d_1=d_2=\dots=d_{p-1}=0$，$d_p=1$，則 $LR(N,M)=(d_n d_{n-1}\dots d_{p+1})_2+1$

定理 3　若 $a_{2^m}>a_{2^m+1}$，則 $\dfrac{a_{2^m}+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ 且 $\dfrac{a_{2^m}+a_{2^m-1}}{2}=a_{2^{m-1}}$。

定理 4　若 $a_{2^m}<a_{2^m+1}$，則 $\dfrac{\frac{1}{2}a_{2^m}+N+a_{2^m+1}}{2}=a_1$ 且 $\dfrac{\frac{1}{2}a_{2^m-1}+N+a_{2^m}}{2}=a_{2^{m-1}}$。

定理 5　當免死金牌持有者的編號 y 其中 $LR(N,y)=K$，若 $K=2^m-1, m\in\mathbb{N}$，則 $LG(N;y)=y=a_K$（免死不動點）。

定理 6　當免死金牌持有者的編號 y 其中 $LR(N,y)=K$，若 $2^m-1>K\ge 2^{m-1}, m\in\mathbb{N}$，則 $LG(N;y)=a_{2^{m-2}}$。

定理 7　若總人數 $N=2^m-2$，且免死金牌持有者編號 y 為奇數，則最後殘活者編號 $LG=2^m-2$。
若總人數 $N\ne 2^m-2$，且免死金牌持有者編號 y 為奇數且 $y=$(奇數不動點 y_0)，則最後殘活者編號 $LG=y_0$。
若 y 為奇數且 $y<$(奇數不動點 y_0)，則最後殘活者編號 $LG=y_0-1$。
若 y 為奇數且 $y>$(奇數不動點 y_0)，則最後殘活者編號 $LG=y_0+1$。

定理 8　若 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，總人數 $N=2\overline{N}$ 時，$LG(N;y)=2\times LG(\overline{N};\overline{y})$。
若 y 為偶數且 $y=2\overline{y}$，總人數 $N=2\overline{N}+1$ 時，$LG(N;y)=2\times LG(\overline{N}+1;\overline{y}+1)-2$。

定理 9　總人數 N 人，免死金牌持有者編號 $y=2t-1$，其中 t 為整數，則倒數第 k 位存活者編號為
$LG(N,k,y)=2l-1-\left\lceil\dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rceil-\left\lfloor\dfrac{2l-y-1}{2N}\right\rfloor$，其中 $l=N+2-(2k-1)\times 2^{[\log_2(\frac{N+2}{2k-1})]}$。

定理 10　免死金牌持有者編號為偶數，其遞迴關係為 $LG(2x,k,2t)=2\times LG(x,k,t)$、$LG(2x-1,k,2t)=2\times LG(x,k,t-1)+2$。

定理 11　總人數 N 人，免死金牌持有者編號 y_1,y_2，其中 y_1,y_2 為奇數，當 $l=N+4-2^{[\log_2(N+4)]}$，則最後存活者編號為
$LG(N;\ \{y_1,y_2\})=2l-\left(\left\lceil\dfrac{2l-y_1-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{2l-y_1-1}{2N}\right\rfloor+1\right)-\left(\left\lceil\dfrac{2l-y_2-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{2l-y_2-1}{2N}\right\rfloor+1\right)$。

定理 12　總人數 N 人，免死金牌持有者編號 y_1,y_2 均為奇數，當 $l=N+4-2^{[\log_2(N+4)]}$，則倒數第 k 位存活者編號為
$LG((2k-1)\times 2^m-4+l,\ k\ ,\{2i-1\ ,\ 2j-1\})=2l-\left(\left\lceil\dfrac{2l-y_1-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{2l-y_1-1}{2N}\right\rfloor+1\right)-\left(\left\lceil\dfrac{2l-y_2-1}{2N}\right\rceil+\left\lfloor\dfrac{2l-y_2-1}{2N}\right\rfloor+1\right)$。

References

[1]Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛罷譯，Concrete Mathematics，具體數學，東華出版社，一版，台北市，1988 年出版。
[2]林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為(2003)。九死一生。中華民國第 43 屆全國中小學科學展覽會高中組數學科佳作。
[3]戴于珽(2004)。我要活下去。中華民國第 44 屆全國中小學科學展覽會高中組數學科佳作。
[4]林佳言、鄒佳築、蘇柏奇。免死金牌變因下之約瑟夫問題初探。科學教育月刊第 373 期（2014 年 10 月）。

本研究所有圖片皆為作者經諮詢老師協助，作者使用 Geogebra 軟體繪製。