中華民國第64屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

探究精神獎

050416

兩線段間隨機點之距離期望與面積期望

學校名稱： 華東臺商子女學校

作者：	指導老師：
高二 李坤應	蔡敏娟

關鍵詞： 隨機幾何、幾何機率、微積分

作品名稱：兩線段間隨機點之距離期望與面積期望

摘要

本文通過對兩線段位置關係的分類討論，對特殊情況的優先探討，推導了兩線段間隨機點之距離期望與三隨機點決定的三角形之面積期望的閉式表達式 (closed-form expressions)。文末附以程式模擬與函數圖像的對比擬合以輔助驗證結論的正確性，並概述此方向值得研究的其他課題及其潛在應用。

壹、前言

一、研究動機

筆者在進行數學探究時曾遇到過這樣一道題：求單位正方形內任意兩點的距離期望，受興趣使然，筆者查詢相關文獻後發現過去的研究已廣泛探討了計算多邊形、超立方體中兩個隨機點距離的期望或機率分佈問題，但對於兩線段隨機點距離期望的研究甚少。換言之，此問題的二維及多維形式已被廣泛探討，而少有研究側重於其一維形式。因此，本文旨在探究此問題並嘗試給出閉式表達式。課綱內教材第六冊對於機率的探討較多局限於離散情況，本文運用教材第五冊的微積分方法，結合資訊科程式知識，探討此類連續機率分佈問題的一般研究方法。

二、研究目的

以坐標化方法為基礎，探究隨機幾何中著名問題「單位正方形內任意兩點距離期望」的一維延伸問題：二維平面上，兩隨機點 M, N 獨立分佈在兩單位線段上，求兩點間距離 d 的期望值。本文將主要探討兩單位線段於端點處相交或平行的情況，並在空間中探討將兩參數結合的歪斜情況，對於其他位置關係可運用類似的研究方法分析。

對於於端點處相交的情況，引入參數 θ 以表示兩線段之夾角，並規定 $\theta \in [0, \pi]$。對於於端點處平行的情況，引入參數 h 以表示兩平行線段間距離，規定 $h \in [0, \infty)$，如圖 1：

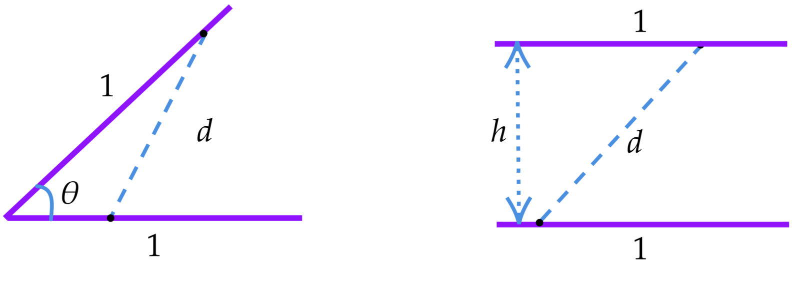


圖 1 資料來源：作者繪製

對於兩線段歪斜的情況，筆者綜合兩參數 θ 和 h，並將示意圖附在後文。

對於其相關問題，如兩線段上三隨機點決定的三角形之面積期望，筆者也將兩線段位置關係分為相交、平行和歪斜三種情況，沿用前文參數進行討論。二維平面上有兩單位線段，符合前文所述位置關係，隨機點 A 分佈在其中一條線段上，兩隨機點 B, C 獨立分佈在另一條線段上，求 A, B, C 三點決定的三角形面積之期望值。兩線段相交、平行的情況如圖 2 所示。對於兩線段歪斜的情況，筆者將示意圖附在後文。

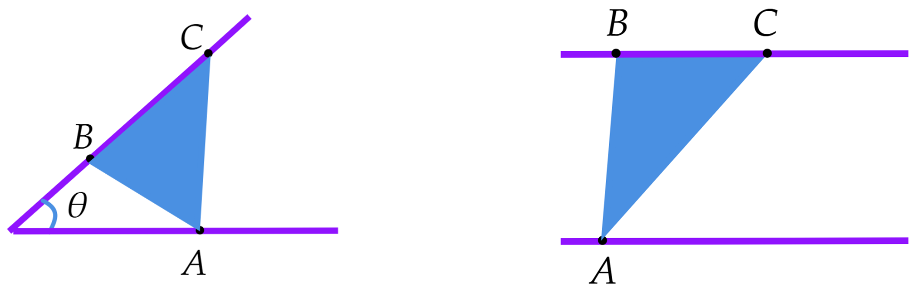


圖 2 資料來源：作者繪製

三、文獻回顧

隨機幾何學 (stochastic geometry)[4] 源自古典積分幾何和幾何機率問題，主要研究幾何學與機率論之間的關係。線段長度均值問題 (mean line segment length) 是隨機幾何的一類著名問題，主要研究給定形狀內兩隨機點間歐式距離的期望值，形狀內每個點被取到的機率相等。即使對於簡單的形狀，如正方形或三角形，求解其距離期望也不容易，其閉式表達式往往相當複雜，這在後文對於正方形情況的探討中有所體現。

對於此類問題，過往的研究大多側重於二維、三維甚至多維的情況：

- Czuber (1884) [2] 計算出了等邊三角形和正方形情況下的距離期望。
- Weisstein[8, 9, 11] 整理了立方體、超方體、圓、球體等情況下距離期望的計算過程。
- Ghosh (1951) [3] 得出了長方形情況下的機率密度函數。
- Sulanke (1961) [5] 發現了等邊三角形條件下的機率密度函數。
- 任意正多邊形條件下的機率密度函數與累積分佈函數由 Bäsel (2012)[1] 提出。

三角形面積均值問題 (mean triangle area)[7, 10] 作為距離期望的延伸問題，主要研究給定形狀內三隨機點決定的三角形之面積期望。

過往研究對於上述兩類問題一維情況的探討僅僅基於一條單位線段，缺乏應用前景。儘管機率密度函數與累積分佈函數能提供更詳盡的訊息，對於期望值的研究卻也從未停止。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Wolfram|Alpha 線上計算器、Mathematica、Overleaf 在線 LaTeX 編輯器、Casio fx-CG50 圖形計算器、Jupyter Notebook 等。

參、研究過程或方法

一、符號約定

◇ 兩隨機點間的歐式距離期望定義為：

$$\mathbb{E}(\|x-y\|)=\frac{1}{\lambda(S)^2}\int_S\int_S\|x-y\|\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\lambda(y)$$

式中 λ 表示 n 維勒貝格測度 (Lebesgue measure)，S 是一勒貝格可測集（Lebesgue measurable set）。

◇ 對於隨機變數 $\mathbf{X}$ 的機率分佈，其累積分佈函數（CDF, cumulative distribution function）記作：

$$F_{\mathbf{X}}(x)=P(\mathbf{X}\leq x)$$

其機率密度函數（PDF, probability density function）記作 $f_{\mathbf{X}}(x)$，其與 $F_{\mathbf{X}}(x)$ 的關係為：

$$F_{\mathbf{X}}(x)=\int_{-\infty}^{x}f_{\mathbf{X}}(t)\mathrm{d}t$$

◇ 隨機變數 $\mathbf{X}$ 服從 $[a,b]$ 上的連續型均勻分佈（continuous uniform distribution），記作 $X\sim U[a,b]$，服從連續型均勻分佈的變數 X，在其值域之內的每個等長區間上取值的機率皆相等，其機率密度函數為：

$$f_{\mathbf{X}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

◇ 可微函數 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的雅可比矩陣（Jacobian matrix）記作 $\mathbf{J}_f(x_1,\cdots,x_n)$，定義為：

$$\mathbf{J}_f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

雅可比矩陣對應的行列式記作 $\det(\mathbf{J})$。

二、正方形內兩隨機點距離期望

設單位正方形一頂點為原點，將相鄰兩邊的頂點置於 x 軸、y 軸正方向建立平面直角坐標系如圖 3 所示：

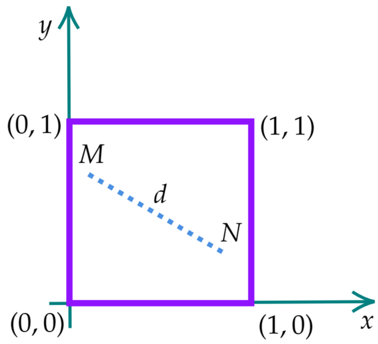


圖 3 資料來源：作者繪製

M，N 為正方形內兩隨機點，設其為 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$，則 $x_1, x_2, y_1, y_2 \sim U[0,1]$。

【定理 1】正方形內兩隨機點的距離期望為：

$$\mathbb{E} = \frac{2+\sqrt{2}+5\ln(\sqrt{2}+1)}{15}$$

【引理】

若 $u, v \sim U[0,1]$，則 $W = |u-v|$ 的機率密度函數（PDF）為 $f_W(w) = 2(1-w), w \in \{u, v\}$。

【證明】

首先考慮其累積分佈函數：

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \mathrm{P}(W \le w) \\ &= \mathrm{P}(-w \le u - v \le w) \\ &= \mathrm{P}(v - w \le u \le v + w) \\ &= \iint_D f_{u,v}(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \iint_D f_u(u) f_v(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \iint_D \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}(1-w)^2 \\ &= 2w - w^2 \end{aligned}$$

式中 D 由圖 4 藍色區域給出：

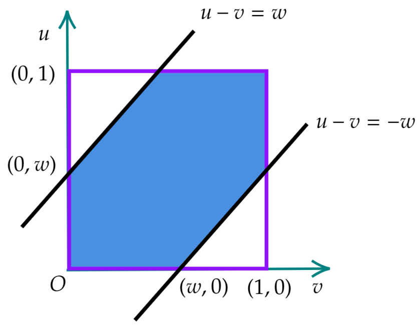


圖 4 資料來源：作者繪製

對上式兩側求導函數得：

$$f_W(w)=2(1-w)$$

$$Q.E.D$$

與前人運用三角分佈（triangular distribution）作換元不同 [6]，筆者通過求累積分佈函數的導函數得出了兩隨機變量差的機率密度函數。結合**【引理】**得正方形內兩隨機點距離期望可表示為：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\\&\xlongequal[y=y_1-y_2]{x=x_1-x_2}4\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^2+y^2}(1-x)(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

作極坐標換元 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+\times[0,2\pi)$： $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$

則雅可比矩陣（Jacobian Matrix）為：

$$\mathbf{J}_f(r,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}\Rightarrow|\det(\mathbf{J})|=r$$

所以，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot 2\int_0^{\sec\theta}f(r,\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}r^2(1-r\cos\theta)(1-r\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}(r^2-r^3\cos\theta-r^3\sin\theta+r^4\cos\theta\sin\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\sec^3\theta}{12}-\frac{\sec^3\theta\tan\theta}{20})\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
\int \sec^3 x\mathrm{d}x &= \int \sec x\mathrm{d}\tan x \\
&= \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x \\
&= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x \\
&= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C
$$

將此不定積分公式帶入上式子，則正方形內兩隨機點距離期望為：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} &= 8\left(\frac{\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|}{24} - \frac{\sec^3\theta}{60}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}+5\ln(\sqrt{2}+1)}{15} \\
&\approx 0.5214054332
\end{aligned}
$$

類似地，正方體內任意兩點的距離期望為：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} &= 8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2+z^2}(1-x)(1-y)(1-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{105}[4+17\sqrt{2}-6\sqrt{3}+21\ln(1+\sqrt{2})+42\ln(2+\sqrt{3})-7\pi] \\
&\approx 0.6617
\end{aligned}
$$

三、特殊情況分析

(一)、$\theta = 0 \Longleftrightarrow h = 0$

設 $\mathbf{X} \sim U[0,1]$，我們在 $[0,1]$ 上隨機取服從變量 $\mathbf{X}$ 分佈的兩點 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$，那麼兩點間的距離可被記作一個新的變量 $\mathbf{Y} = |\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|$。要求期望值 $\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbb{E}(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2|)$，我們引進函數 g：

$$
g(x_1,x_2) = |x_1 - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2 & \text{if } x_1 \geq x_2 \\ x_2 - x_1 & \text{if } x_1 < x_2 \end{cases}
$$

由於兩隨機點選取時相互獨立，兩變量的聯合機率密度函數即為兩機率密度函數相乘，即 $f_{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2}(x_1,x_2) = f_{\mathbf{X}_1}(x_1)f_{\mathbf{X}_2}(x_2) = 1$。因此我們有：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{Y}) &= \int_0^1\int_0^1 g(x_1,x_2)f_{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2}(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^1\int_0^1 |x_1 - x_2|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{x_1} (x_1 - x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 + \int_0^1 \int_{x_1}^1 (x_2 - x_1)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

若對問題再一般化，引入線段長度參數 $L \in (0, \infty)$，此時，設 $\mathbf{X} \sim [0, L]$，即 $\mathbf{X}$ 的機率密度函數為：

$$
f_{\mathbf{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{L} & x \in [0, L] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

因此我們有：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{Y}) &= \int_0^L \int_0^L g(x_1, x_2) f_{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2}(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^L \int_0^L |x_1 - x_2| \cdot \frac{1}{L^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^{x_1} (x_1 - x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_{x_1}^L (x_2 - x_1)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 \\
&= \frac{L}{6} + \frac{L}{6} \\
&= \frac{L}{3}
\end{aligned}
$$

（二）、$\theta = \frac{\pi}{2}$

在此條件下，由於兩線段間夾角為 $\frac{\pi}{2}$，我們不妨設兩線段分別位於平面直角坐標系的 x、y 軸正方向，交點即為原點。那麼，兩隨機點的坐標可分別表示為 $M(x, 0), N(0, y)$。距離期望可表示為

$$
\mathbb{E} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

運用極坐標換元 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，由上文知：$|\det(J)| = r$，因此，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\theta} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

而

$$
\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C
$$

我們得到，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \frac{1}{3}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}{3}
\end{aligned}
$$

類似地，考慮參數 L，此時，距離期望可表示為

$$\mathbb{E} = \int_0^L \int_0^L \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{L^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \frac{2}{L^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{L\cdot\sec\theta} r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2L}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{L}{3}(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}{3} \cdot L
\end{aligned}$$

（三）、$\theta = \pi$

此情形與 $\theta = 0$ 情況類似，同樣我們可以記距離變量 $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$，那麼距離期望為 $\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2)$。計算得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{Y}) &= \int_0^1 \int_0^1 (x_1+x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{2}+x_2)\mathrm{d}x_2 \\
&= (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

類似地，引入參數 L，此時：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbf{Y}) &= \int_0^L \int_0^L (x_1+x_2) \cdot \frac{1}{L^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{L^2}\left(\int_0^L \frac{x_1^2}{2}\Big|_0^L \mathrm{d}x_2 + L\int_0^L x_2\mathrm{d}x_2\right) \\
&= \frac{1}{L^2}\left(\frac{L^3}{2}+\frac{L^3}{2}\right) \\
&= L
\end{aligned}$$

由特殊情況的探討可知，求解距離期望的一般思路為：先用服從連續型均勻分佈的變數表示隨機點距離，後求此式對隨機變數在其分佈範圍的積分。

四、一般形式

（一）、兩線段相交（$h=0$）

1、距離期望：

【定理 2.1】 當兩線段相交且夾角為 θ 時，兩隨機點的距離期望為：

$$\mathbb{E}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \theta=0\\ \frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{\cos\theta}{3}+\frac{1}{3}\sin^2\theta\ln(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1) & \theta\in(0,\pi]\end{cases}$$

【證明】 令兩線段交點為平面直角坐標系原點，其中一條線段位於 x 軸正方向，另一條線段位於第一、二象限，那麼，兩隨機點坐標可表示為 $M(a,0),\ N(b\cos\theta,b\sin\theta)$，$a,b\sim U[0,1]$。如圖 5：

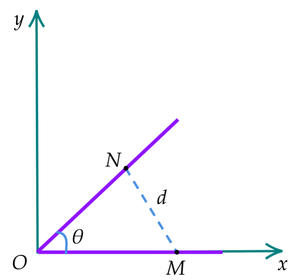


圖 5 資料來源：作者繪製

兩點的距離期望可表示為

$$\int_0^1\int_0^1\sqrt{(a-b\cos\theta)^2+(-b\sin\theta)^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\int_0^1\int_0^1\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$

所以問題等價於研究

$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^2+y^2-2mxy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

m 是位於區間 $[-1,1]$ 的常數。我們首先考慮 $m\in(-1,1)$ 的情況，運用極坐標換元

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^2+y^2-2mxy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta}r^2\sqrt{1-2m\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\sqrt{1-2m\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

令 $t=\tan\theta$，我們有

$$I=\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{1+t^2-2mt}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{(t-m)^2-m^2+1}\mathrm{d}t$$

先求不定積分

$$\int \sqrt{(t-m)^2-m^2+1}\mathrm{d}(t-m)$$

令 $t-m=\sqrt{1-m^2}\tan u$，$\mathrm{d}(t-m)=\sqrt{1-m^2}\sec^2 u$，原式變為：

$$(1-m^2)\int \sec^3 u\mathrm{d}u=\frac{1-m^2}{2}(\sec u\tan u+\ln|\sec u+\tan u|)+C$$

式中 $\sec u=\sqrt{1+\frac{(t-m)^2}{1-m^2}}=\sqrt{\frac{t^2-2mt+1}{1-m^2}}, \tan u=\frac{t-m}{\sqrt{1-m^2}}$。

$t=1$ 時，

$$\frac{1-m^2}{2}(\sqrt{\frac{2}{1+m}}\cdot\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}+\ln\left|\sqrt{\frac{2}{1+m}}+\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\right|)$$
$$=\frac{(1-m)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{1-m^2}{2}(\ln(\sqrt{2}+\sqrt{1-m})-\ln\sqrt{1+m})$$

$t=0$ 時，

$$-\frac{m}{2}+\frac{1-m^2}{2}\ln\frac{\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m}}$$

因此，我們得到：

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}(1-m)^{\frac{3}{2}}+\frac{m}{3}+\frac{1}{3}(1-m^2)\ln\frac{\sqrt{2(1-m)}+1-m}{1-m}$$

又 $m=\cos\theta$，距離期望在 $\theta\in(0,\pi)$ 的一般形式為

$$\mathbb{E}=\frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{\cos\theta}{3}+\frac{1}{3}\sin^2\theta\ln(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1)$$

將 $\cos\theta=-1$ 代入，我們發現 $\theta=\pi$ 時仍然成立，所以：

$$\mathbb{E}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \theta=0\\ \frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{\cos\theta}{3}+\frac{1}{3}\sin^2\theta\ln(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1) & \theta\in(0,\pi]\end{cases}$$

注意到：

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{\cos\theta}{3}+\frac{1}{3}\sin^2\theta\ln(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1)\right]=\frac{1}{3}$$

所以函數圖像應當是連續的。引入參數 L，此時 $a,b\sim U[0,L]$。兩點的距離期望可表示為

$$\int_0^L\int_0^L\sqrt{(a-b\cos\theta)^2+(-b\sin\theta)^2}\cdot\frac{1}{L^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$

所以問題等價於研究

$$I=\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L\sqrt{x^2+y^2-2mxy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

m 是位於區間 $[-1,1]$ 的常數。類似的，我們首先考慮 $m\in(-1,1)$ 的情況，運用極坐標換元：

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L\sqrt{x^2+y^2-2mxy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2}{L^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{L\cdot\sec\theta}r^2\sqrt{1-2m\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}L\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\sqrt{1-2m\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}(1-m)^{\frac{3}{2}}\cdot L+\frac{m}{3}\cdot L+\frac{1}{3}(1-m^2)L\ln\frac{\sqrt{2(1-m)}+1-m}{1-m}\end{aligned}$$

又 $m=\cos\theta$，$\theta=\pi$ 時符合，所以距離期望在 $\theta\in[0,\pi]$ 時的一般形式為

$$\mathbb{E}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{3}L & \theta=0\\ \frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\cdot L+\frac{\cos\theta}{3}\cdot L+\frac{1}{3}L\sin^2\theta\ln(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1) & \theta\in(0,\pi]\end{cases}$$

2、面積期望：

【定理 2.2】

當兩線段相交且夾角為 θ 時，三隨機點決定的三角形之面積期望為：$\mathbb{E}(\theta)=\frac{1}{12}\sin\theta$

【證明】類似的，三隨機點坐標可表示為 $A(a,0),B(b\cos\theta,b\sin\theta),C(c\cos\theta,c\sin\theta)$，其中 $a,b,c\sim U[0,1]$。如圖 6：

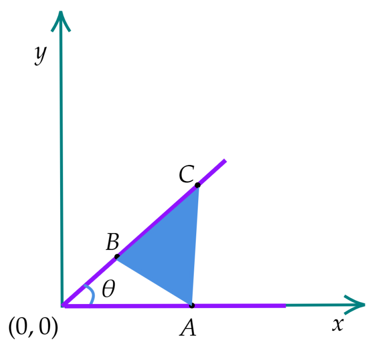


圖 6 資料來源：作者繪製

則 $\overrightarrow{AB}=(b\cos\theta-a,b\sin\theta)$，$\overrightarrow{AC}=(c\cos\theta-a,c\sin\theta)$，$\Delta ABC$ 面積為：

$$\begin{aligned}\Delta ABC\text{面積}&=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}c\cos\theta-a & c\sin\theta\\ b\cos\theta-a & b\sin\theta\end{vmatrix}\right|\\&=\frac{1}{2}|a(c-b)\sin\theta|\end{aligned}$$

我們將此式分為 $b \le c$ 和 $b > c$ 兩種情況，因兩種情況對稱，ΔABC 的面積期望為：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta) &= 2 \times \frac{1}{2}\sin\theta \int_0^1 \int_0^1 \int_0^c (ac - ab)\mathrm{d}b\mathrm{d}a\mathrm{d}c \\
&= \sin\theta \int_0^1 \int_0^1 \left(abc - \frac{1}{2}ab^2\right)\Big|_0^c \mathrm{d}a\mathrm{d}c \\
&= \sin\theta \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2}ac^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{2}\sin\theta \int_0^1 \frac{1}{2}a^2c^2\Big|_0^1 \mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{4}\sin\theta \int_0^1 c^2\mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{4}\sin\theta \cdot \frac{1}{3}c^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{12}\sin\theta
\end{aligned}$$

更直觀地，根據特殊情況探討的結果，B, C 間的距離期望為 $\frac{1}{3}$，A 到線段 $\overline{BC}$ 的距離期望為 $\frac{1}{2}\sin\theta$，故 ΔABC 的面積期望為：

$$\mathbb{E}(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{12}\sin\theta$$

與嚴格計算所得結果一致。若引入參數 L，其求解過程類似，受限於篇幅，筆者不再贅述。

（二）、兩線段平行（$\theta = 0$）

1、距離期望：

【定理 3.1】當兩線段平行且相距 h 時，兩隨機點的距離期望為：

$$\mathbb{E}(h) = \begin{cases} \frac{1}{3} & h = 0 \\ \sqrt{h^2+1} + h^2 \ln \frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h} - \frac{2}{3}(h^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}h^3 & h \in (0, \infty) \end{cases}$$

【證明】設兩線段分別平行於 x 軸且到 x 軸距離均為 $\frac{h}{2}$，左端點均位於 y 軸，如圖 7：

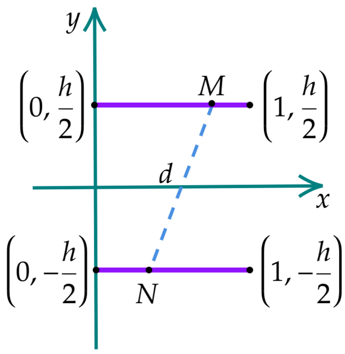


圖 7 資料來源：作者繪製

那麼，兩隨機點的坐標可表示為 $M(m,\frac{h}{2}), N(n,-\frac{h}{2})$，$m,n \sim U[0,1]$。距離期望值可表示為

$$\mathbb{E}=\int_0^1\int_0^1\sqrt{(m-n)^2+h^2}\mathrm{d}m\mathrm{d}n$$

作換元 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u=m-n \\ v=m+n \end{cases},$$

則有：

$$\begin{cases} m=\frac{u+v}{2} \\ n=\frac{v-u}{2} \end{cases},$$

雅可比矩陣為：

$$\mathbf{J}_f(u,v)=\begin{pmatrix} \frac{\partial m}{\partial u} & \frac{\partial m}{\partial v} \\ \frac{\partial n}{\partial u} & \frac{\partial n}{\partial v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\Rightarrow|\det(\mathbf{J})|=\frac{1}{2}$$

積分區域變換如圖 8：

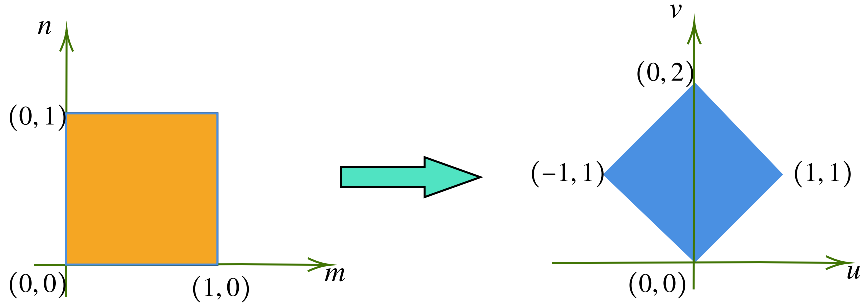


圖 8 資料來源：作者繪製

我們得到：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{|u|}^{2-|u|}\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\ &=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(2-2|u|)\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u\\ &=2\int_0^1(1-u)\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

將此式分為兩部分：

$$\begin{aligned}\int_0^1 u\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u &\xlongequal{u^2=w}\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{w+h^2}\mathrm{d}w\\ &=\frac{1}{3}\left(w+h^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\\ &=\frac{1}{3}[\left(1+h^2\right)^{\frac{3}{2}}-h^3]\end{aligned}$$

和

$$\int_0^1\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u$$

那麼我們只需求

$$I=\int \sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u$$

令 $u=h\tan\phi$，我們有

$$\begin{aligned}I&=\int h^2\sec^3\phi\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{2}h^2(\sec\phi\tan\phi+\ln|\sec\phi+\tan\phi|)+C\\&=\frac{1}{2}h^2\left(\frac{u\sqrt{h^2+u^2}}{h^2}+\ln\left|\frac{u+\sqrt{h^2+u^2}}{h}\right|\right)+C\\&=\frac{1}{2}u\sqrt{h^2+u^2}+\frac{1}{2}h^2\ln\frac{u+\sqrt{h^2+u^2}}{h}+C\end{aligned}$$

因此，

$$\int_0^1\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+1}+\frac{1}{2}h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}$$

將兩部分合在一起，我們得到

$$\mathbb{E}(h)=\begin{cases}\frac{1}{3} & h=0\\ \sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(h^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3 & h\in(0,\infty)\end{cases}$$

同樣，注意到

$$\lim_{h\to 0}\left[\sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(1+h^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3\right]=\frac{1}{3}$$

所以函數的圖像應當也是連續的。

2、面積期望：

【定理 3.2】當兩線段平行且相距 h 時，三隨機點決定的三角形之面積期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\frac{1}{6}h$$

【證明】三隨機點坐標可表示為 $A(a,0),B(b,h),C(c,h)$，其中 $a,b,c\sim U[0,1]$。如圖 9：

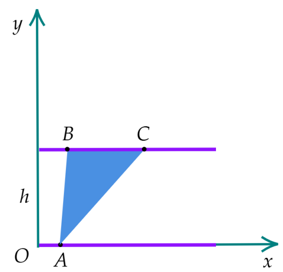


圖 9 資料來源：作者繪製

則 $\overrightarrow{AB}=(b-a,h)$，$\overrightarrow{AC}=(c-a,h)$，$\Delta ABC$ 面積為：

$$
\begin{aligned}
\Delta ABC\text{面積} &= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} c-a & h \\ b-a & h \end{vmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}|h(c-b)|
\end{aligned}
$$

因 $b\le c$ 和 $b>c$ 的情況對稱，ΔABC 的面積期望為：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(h) &= 2\cdot\frac{1}{2}h\int_0^1\int_0^1\int_0^c (c-b)\mathrm{d}b\mathrm{d}a\mathrm{d}c \\
&= h\int_0^1\int_0^1 \left(bc-\frac{1}{2}b^2\right)\Big|_0^c \mathrm{d}a\mathrm{d}c \\
&= h\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}c^2\mathrm{d}a\mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{2}h\int_0^1 ac^2\Big|_0^1\mathrm{d}c \\
&= \frac{1}{2}h\cdot\frac{1}{3}c^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}h
\end{aligned}
$$

更直觀地，B,C 兩點的距離期望為 $\frac{1}{3}$，ΔABC 高為 h，故面積期望為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{6}h$，與嚴格計算所得結果一致。

（三）、兩線段歪斜

1、距離期望：

綜合上文兩參數 θ 和 h，考慮兩線段歪斜的情況。

【定理 4.1】當兩線段歪斜且符合下述位置關係時，兩隨機點在 $\theta=0$ 時距離期望為：

$$
\mathbb{E}(h)=\sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(h^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3
$$

當 $\theta\in(0,\pi)$ 時，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta,h) =& \frac{1}{3}\left[(1-\cos\theta)\sqrt{2+h^2-2\cos\theta}+\cos\theta\sqrt{h^2+1}\right]+\left(h^2+\frac{\sin^2\theta}{3}\right)\ln\frac{\sqrt{h^2-2\cos\theta+2}+1-\cos\theta}{\sqrt{h^2+1}-\cos\theta} \\
&+\frac{2h^3}{3\sin\theta}\left(\arctan\frac{h\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{(h^2-2\cos\theta+2)(1+\cos\theta)}}+\arctan\frac{h\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{(1+h^2)}}-\arctan\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right)
\end{aligned}
$$

當 $\theta = \pi$ 時，

$$\mathbb{E}(h) = \frac{\sqrt{h^2+1}(2h^2-1)}{3} - \frac{\sqrt{h^2+4}(h^2-2)}{3} - \frac{1}{3}h^3 + h^2 \ln \frac{2+\sqrt{h^2+4}}{1+\sqrt{h^2+1}}$$

【證明】令其中一條線段位於 x 軸正方向，兩線段一側端點位於 z 軸正半軸建立如圖 10 之空間坐標系：

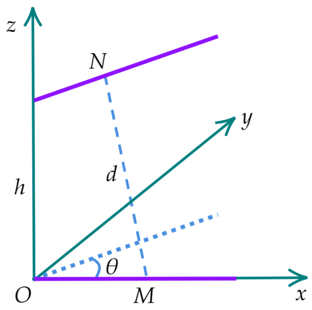


圖 10 資料來源：作者繪製

則兩隨機點 M, N 可被表示為 $M(a,0,0)$，$N(b\cos\theta, b\sin\theta, h)$，其中 $a, b \sim U[0,1]$，兩點的距離期望可被表示為

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(a-b\cos\theta)^2 + (-b\sin\theta)^2 + h^2} \mathrm{d}a\mathrm{d}b$$

所以問題等價於研究

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 - 2mxy + y^2 + h^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $m = \cos\theta \in [-1,1]$，首先考慮 $m = -1$ 即 $\theta = \pi$ 的情況，此時：

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(x+y)^2 + h^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作換元 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases},$$

則有：

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases},$$

雅可比矩陣為：

$$\mathbf{J}_f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |\det(\mathbf{J})| = \frac{1}{2}$$

積分區域變換如圖 11：

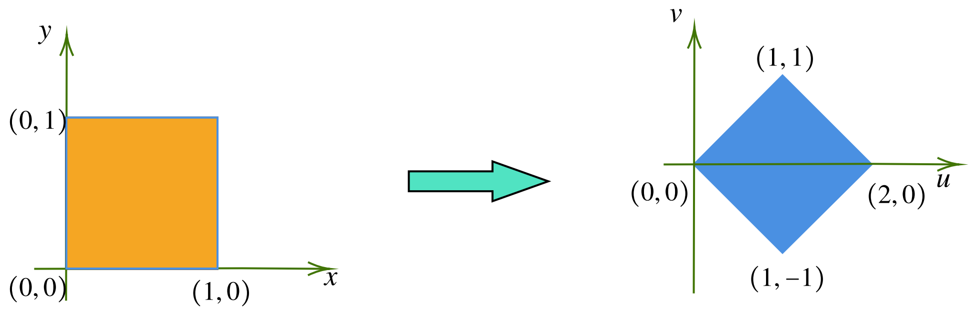


圖 11 資料來源：作者繪製

我們得到，當 $\theta = \pi$ 時，兩隨機點的距離期望為：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{|u-1|-1}^{1-|u-1|} \sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (2-2|u-1|)\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 (1-|u-1|)\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u + \int_1^2 (1-|u-1|)\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 u\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u + \int_1^2 (2-u)\sqrt{u^2+h^2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}(u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}(u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 + \left(u\sqrt{u^2+h^2} + h^2\ln\frac{u+\sqrt{u^2+h^2}}{h}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \frac{\sqrt{h^2+1}(2h^2-1)}{3} - \frac{\sqrt{h^2+4}(h^2-2)}{3} - \frac{1}{3}h^3 + h^2\ln\frac{2+\sqrt{h^2+4}}{1+\sqrt{h^2+1}}
\end{aligned}
$$

我們接著考慮 $m \in (-1, 1)$ 的情況。作極坐標變換 $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha$:

$$
I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec\alpha} r\cdot\sqrt{(1-2m\sin\alpha\cos\alpha)r^2+h^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha
$$

令 $a = 1-2m\sin\alpha\cos\alpha \in (0, 2)$，則此二重積分內層的不定積分式可表示為

$$
I_1 = \int r\sqrt{ar^2+h^2}\mathrm{d}r
$$

令 $u = ar^2+h^2$，則 $\mathrm{d}u = 2ar\mathrm{d}r$，$I_1$ 可表示為

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int r\sqrt{u}\frac{1}{2ar}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2a}\int \sqrt{u}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3a}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{1}{3a}\left(ar^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

所以定積分可表示為

$$\int_0^{\sec\alpha} r\sqrt{ar^2+h^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{3a}[(a\sec^2\alpha+h^2)^{\frac{3}{2}}-h^3]$$
$$= \frac{(\tan^2\alpha-2m\tan\alpha+h^2+1)^{\frac{3}{2}}-h^3}{3-6m\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\therefore I = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2\alpha-2m\tan\alpha+h^2+1)^{\frac{3}{2}}-h^3}{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

考慮該式第二項的定積分：

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\alpha}{\sec^2\alpha-2m\tan\alpha}\mathrm{d}\alpha$$

令 $v=\tan\alpha$:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{1}{v^2-2mv+1}\mathrm{d}v \\
&= \int \frac{1}{(v-m)^2-m^2+1}\mathrm{d}(v-m) \\
&= \int \frac{1}{(v-m)^2+(\sqrt{1-m^2})^2}\mathrm{d}(v-m) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{v-m}{\sqrt{1-m^2}}+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{\tan\alpha-m}{\sqrt{1-m^2}}+C
\end{aligned}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{1-m}{\sqrt{1-m^2}}$$

$$\alpha=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}$$

所以

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\left(\arctan\frac{1-m}{\sqrt{1-m^2}}+\arctan\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\cdot\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}}{1-\frac{m(1-m)}{1-m^2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}
\end{aligned}$$

我們接著考慮 I 化簡式中的第一項定積分：

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2\alpha-2m\tan\alpha+h^2+1)^{\frac{3}{2}}}{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}+h^2\right)\sqrt{\frac{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}+h^2}}{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{h^2}{1-2m\sin\alpha\cos\alpha} \right) \sqrt{\frac{1-2m\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} + h^2} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha \sqrt{\sec^2\alpha - 2m\tan\alpha + h^2} \mathrm{d}\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{h^2 \sec^2\alpha \sqrt{\sec^2\alpha - 2m\tan\alpha + h^2}}{\sec^2\alpha - 2m\tan\alpha} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1+v^2-2mv+h^2} \mathrm{d}v + h^2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1+v^2-2mv+h^2}}{1+v^2-2mv} \mathrm{d}v$$

研究此式中第一項之不定積分：

$$I_5 = \int \sqrt{1+v^2-2mv+h^2} \mathrm{d}v = \int \sqrt{(v-m)^2 - m^2 + h^2 + 1} \mathrm{d}(v-m)$$

作換元 $v - m = \sqrt{1+h^2-m^2}\tan\phi, n = 1 + h^2 - m^2$，則

$$I_5 = n \int \sec^3\phi \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2} n(\sec\phi\tan\phi + \ln|\sec\phi + \tan\phi|) + C$$

其中

$$\tan\phi = \frac{v-m}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sec\phi = \sqrt{1 + \frac{(v-m)^2}{n}}$$

所以

$$I_5 = \frac{1}{2} n \cdot \frac{(v-m)\sqrt{n+(v-m)^2}}{n} + \frac{1}{2} n \ln \left| \sqrt{1 + \frac{(v-m)^2}{n}} + \frac{v-m}{\sqrt{n}} \right| + C$$
$$= \frac{(v-m)\sqrt{1+h^2+v^2-2mv}}{2} + \frac{1+h^2-m^2}{2} \ln \frac{\sqrt{1+h^2+v^2-2mv} + v - m}{\sqrt{1+h^2-m^2}} + C$$

而

$$v = 1 \Rightarrow \frac{(1-m)\sqrt{2+h^2-2m}}{2} + \frac{1+h^2-m^2}{2} \ln \frac{\sqrt{2-2m+h^2} + 1 - m}{\sqrt{1+h^2-m^2}}$$
$$v = 0 \Rightarrow \frac{-m\sqrt{1+h^2}}{2} + \frac{1+h^2-m^2}{2} \ln \frac{\sqrt{1+h^2} - m}{\sqrt{1+h^2-m^2}}$$

所以

$$\int_0^1 \sqrt{1+v^2-2mv+h^2} \mathrm{d}v$$
$$= \frac{(1-m)\sqrt{2+h^2-2m} + m\sqrt{1+h^2}}{2} + \frac{1+h^2-m^2}{2} \ln \frac{\sqrt{2-2m+h^2} + 1 - m}{\sqrt{1+h^2} - m} + C$$

研究 I_2 化簡式第二項之不定積分：

$$I_6 = \int \frac{\sqrt{1+v^2-2mv+h^2}}{1+v^2-2mv} \mathrm{d}v$$
$$= \int \frac{\sqrt{(v-m)^2 - m^2 + 1 + h^2}}{(v-m)^2 - m^2 + 1} \mathrm{d}(v-m)$$

$$
\begin{aligned}
&= n \int \frac{\sec^3 \phi}{n \tan^2 \phi + 1 - m^2} \mathrm{d}\phi \\
&= n \int \frac{\cos \phi}{n \cos^2 \phi \sin^2 \phi + (1 - m^2) \cos^4 \phi} \mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

令 $t = \sin \phi$，我們有

$$
\begin{aligned}
I_6 &= n \int \frac{1}{nt^2(1 - t^2) + (1 - m^2)(1 - t^2)^2} \mathrm{d}t \\
&= n \int \frac{1}{-h^2 t^4 + (h^2 + m^2 - 1)t^2 + 1 - m^2} \mathrm{d}t \\
&= n \int \frac{1}{(h^2 t^2 + 1 - m^2)(1 - t^2)} \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

為了將此分式拆成兩項，我們令

$$
\frac{1}{(h^2 t^2 + 1 - m^2)(1 - t^2)} = \frac{At + B}{h^2 t^2 + 1 - m^2} + \frac{Ct + D}{1 - t^2}
$$

則

$$
(Ch^2 - A)t^3 + (Dh^2 - B)t^2 + (A + C - Cm^2)t + B + D - Dm^2 = 1
$$

因此式恆等，我們有

$$
\begin{cases}
Ch^2 - A = 0 \\
Dh^2 - B = 0 \\
A + C - Cm^2 = 0 \\
B + D - Dm^2 = 1
\end{cases}
$$

解得：

$$
\begin{cases}
A = 0 \\
B = \frac{h^2}{h^2 - m^2 + 1} \\
C = 0 \\
D = \frac{1}{h^2 - m^2 + 1}
\end{cases}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
I_6 &= h^2 \int \frac{1}{h^2 t^2 + 1 - m^2} \mathrm{d}t + \int \frac{1}{1 - t^2} \mathrm{d}t \\
&= h \int \frac{1}{(ht)^2 + (\sqrt{1 - m^2})^2} \mathrm{d}(ht) + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t} + C \\
&= \frac{h}{\sqrt{1 - m^2}} \arctan \frac{ht}{\sqrt{1 - m^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t} + C \\
&= \frac{h}{\sqrt{1 - m^2}} \arctan \frac{h \sin \phi}{\sqrt{1 - m^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} + C
\end{aligned}
$$

其中

$$\sin\phi = \frac{v-m}{\sqrt{h^2+v^2-2mv+1}}$$

而

$$\begin{aligned}
v=1 \Rightarrow & \frac{h}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{h\sqrt{1-m}}{\sqrt{(h^2-2m+2)(1+m)}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{h^2-2m+2}+1-m}{\sqrt{h^2-2m+2}-1+m}\\
&=\frac{h}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{h\sqrt{1-m}}{\sqrt{(h^2-2m+2)(1+m)}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{h^2-2m+2}+1-m\right)^2}{h^2-m^2+1}\\
v=0 \Rightarrow & \frac{h}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{-hm}{\sqrt{(1-m^2)(1+h^2)}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{h^2+1}-m}{\sqrt{h^2+1}+m}\\
&=\frac{h}{\sqrt{1-m^2}}\arctan\frac{-hm}{\sqrt{(1-m^2)(1+h^2)}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{h^2+1}-m\right)^2}{h^2+1-m^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_0^1 \frac{\sqrt{1+v^2-2mv+h^2}}{1+v^2-2mv}\mathrm{d}v = &\frac{h}{\sqrt{1-m^2}}\left(\arctan\frac{h\sqrt{1-m}}{\sqrt{(h^2-2m+2)(1+m)}}+\arctan\frac{hm}{\sqrt{(1-m^2)(1+h^2)}}\right)\\
&+\ln\frac{\sqrt{h^2-2m+2}+1-m}{\sqrt{h^2+1}-m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore I = &\frac{1}{3}\left[(1-m)\sqrt{2+h^2-2m}+m\sqrt{h^2+1}\right]+\left(h^2+\frac{1-m^2}{3}\right)\ln\frac{\sqrt{h^2-2m+2}+1-m}{\sqrt{h^2+1}-m}\\
&+\frac{2h^3}{3\sqrt{1-m^2}}\left(\arctan\frac{h\sqrt{1-m}}{\sqrt{(h^2-2m+2)(1+m)}}+\arctan\frac{hm}{\sqrt{(1-m^2)(1+h^2)}}-\arctan\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\right)
\end{aligned}$$

帶入 $m=\cos\theta$ 得 $\theta\in(0,\pi)$ 時：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta,h) = &\frac{1}{3}\left[(1-\cos\theta)\sqrt{2+h^2-2\cos\theta}+\cos\theta\sqrt{h^2+1}\right]+\left(h^2+\frac{\sin^2\theta}{3}\right)\ln\frac{\sqrt{h^2-2\cos\theta+2}+1-\cos\theta}{\sqrt{h^2+1}-\cos\theta}\\
&+\frac{2h^3}{3\sin\theta}\left(\arctan\frac{h\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{(h^2-2\cos\theta+2)(1+\cos\theta)}}+\arctan\frac{h\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{(1+h^2)}}-\arctan\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right)
\end{aligned}$$

$\theta=0$ 的情況等價於兩線段平行，

$$\mathbb{E}(\theta,h)=\sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(h^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3$$

2、面積期望：

【定理 4.2】當兩線段歪斜且符合下述位置關係時，對於 $\theta\in\{0,\pi\}$，三隨機點決定的三角形之面積期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\frac{h}{6}$$

對於 $\theta \in (0,\pi)$，面積期望為：

$$\mathbb{E}(\theta,h)=\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}}{12}+\frac{h^2}{12\sin\theta}\ln\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}+\sin\theta}{h}$$

【證明】類似的，在歪斜的情況下，三隨機點坐標可表示為 $A(a,0,0)$，$B(b\cos\theta,b\sin\theta,h)$，$C(c\cos\theta,c\sin\theta,h)$，$a,b,c\sim U[0,1]$，如圖 12：

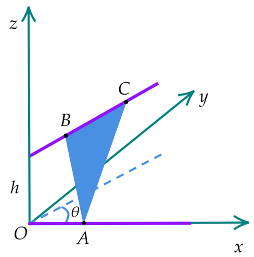


圖 12 資料來源：作者繪製

則 $\overrightarrow{AB}=(b\cos\theta-a,b\sin\theta,h)$，$\overrightarrow{AC}=(c\cos\theta-a,c\sin\theta,h)$，

$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=(h\sin\theta(c-b),h\cos\theta(b-c),a\sin\theta(c-b))$。$\Delta ABC$ 面積可被表示為：

$$\begin{aligned}\Delta ABC\text{面積}&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(c-b)^2(h^2+a^2\sin^2\theta)}\\&=\frac{1}{2}|c-b|\sqrt{h^2+(a\sin\theta)^2}\end{aligned}$$

當 $\sin\theta=0$ 即 $\theta\in\{0,\pi\}$ 時，問題等價於平行的情況，面積期望為 $\frac{1}{6}h$。當 $\theta\in(0,\pi)$ 時，面積期望為：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta,h)&=2\times\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^c\int_0^1(c-b)\sqrt{h^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c\\&=\int_0^1\int_0^1\left.(bc-\frac{1}{2}b^2)\sqrt{h^2+(a\sin\theta)^2}\right|_0^c\mathrm{d}c\mathrm{d}a\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 c^2\sqrt{h^2+(a\sin\theta)^2}\mathrm{d}c\mathrm{d}a\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left.\frac{1}{3}c^3\sqrt{h^2+(a\sin\theta)^2}\right|_0^1\mathrm{d}a\\&=\frac{1}{6}\int_0^1\sqrt{h^2+(a\sin\theta)^2}\mathrm{d}a\end{aligned}$$

令 $a\sin\theta=h\tan u$，即 $u=\arctan\left(\frac{a\sin\theta}{h}\right)$，$\mathrm{d}a=\frac{h\sec^2 u}{\sin\theta}\mathrm{d}u$，則：

$$\mathbb{E}(\theta,h)=\frac{1}{6}\int_0^{\arctan\left(\frac{\sin\theta}{h}\right)}\frac{h^2\sec^3 u}{\sin\theta}\mathrm{d}u$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{h^2}{12\sin\theta}\left(\sec u \tan u + \ln|\sec u + \tan u|\right)\Big|_0^{\arctan\left(\frac{\sin\theta}{h}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}}{12} + \frac{h^2}{12\sin\theta}\ln\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}+\sin\theta}{h}
\end{aligned}
$$

當 $\theta \to 0$ 或 $\theta \to \pi$ 時，$\sin\theta \to 0$，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\theta,h) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{12} + \frac{h^2}{12x} ln \frac{\sqrt{h^2+x^2}+x}{h}\right) \\
&= \frac{h}{12} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{h^2}{12x}\ln\frac{\sqrt{h^2+x^2}+x}{h}\right) \\
&= \frac{h}{12} + \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\left(h^2 \cdot \frac{\sqrt{h^2+x^2}+2x}{h^2+x^2+x\sqrt{h^2+x^2}}\right) \\
&= \frac{h}{6}
\end{aligned}
$$

與前文所得結果一致。

五、結果驗證

由於計算距離期望和面積期望往往涉及到多重積分，因此可以用數值積分方法來估算其近似值。其中一種方法是蒙地卡羅方法 (Monte Carlo Method)，此方法在給定形狀內隨機取點計算距離或面積，當隨機取點模擬過程次數增多時，這些結果的平均值最終會收斂於真實值。此方法只能給出近似值，無法求出精確值，但模擬圖像和閉式表達式圖像的對比對於結果的驗證亦有所幫助。受限於篇幅，筆者僅附上了相交與歪斜情況距離期望隨機取點模擬的程式碼，平行情況以及面積期望的相關程式碼可類推得到。

(一)、兩線段相交

1、距離期望：

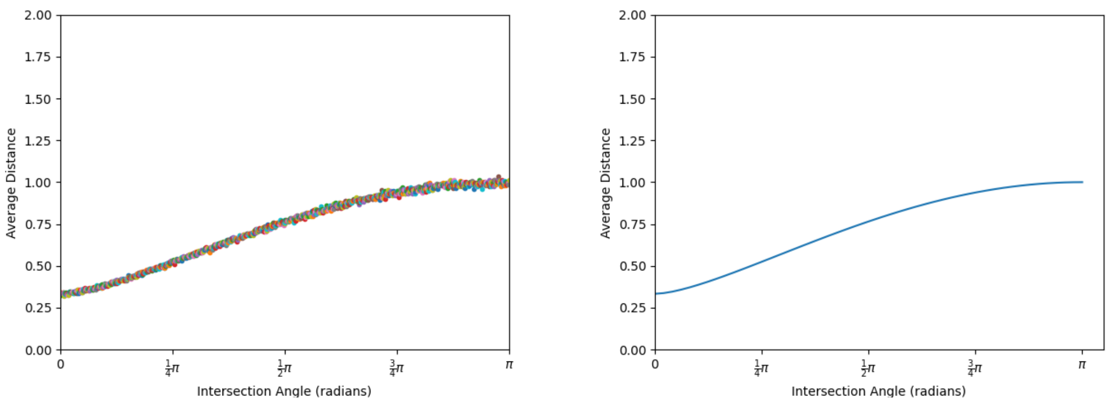
運用 python 程式模擬隨機取點計算距離的過程：

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import random

mean_list = []

for i in range(1, 1000):
    angle = np.pi / 1000 * i
```

```python
    d_list = []
    for j in range(1, 1000):
        m = random.uniform(0, 1) #distance to the origin
        n = random.uniform(0, 1)
        d = (m**2 + n**2 - 2 * m * n * math.cos(angle))**0.5
        d_list.append(d)
    mean = sum(d_list) / len(d_list)
    mean_list.append(mean)
    plt.plot(angle, mean, marker='.')

ax = plt.subplot(111)
plt.xlim(0, np.pi)
plt.ylim(0, 2)
plt.xlabel('Intersection Angle (radians)')
plt.ylabel('Average Distance')

ax.set_xticks([0., .25*np.pi, .5*np.pi, .75*np.pi, np.pi])
ax.set_xticklabels(["0", r"$\frac{1}{4}\pi$",r"$\frac{1}{2}\pi$",r"$\frac{3}{4}\pi$",r"$\pi$"])

plt.show()
```

Listing 1: Simulation using Python（作者撰寫）

結合 python 所繪製的函數圖像作對比，如圖 13：

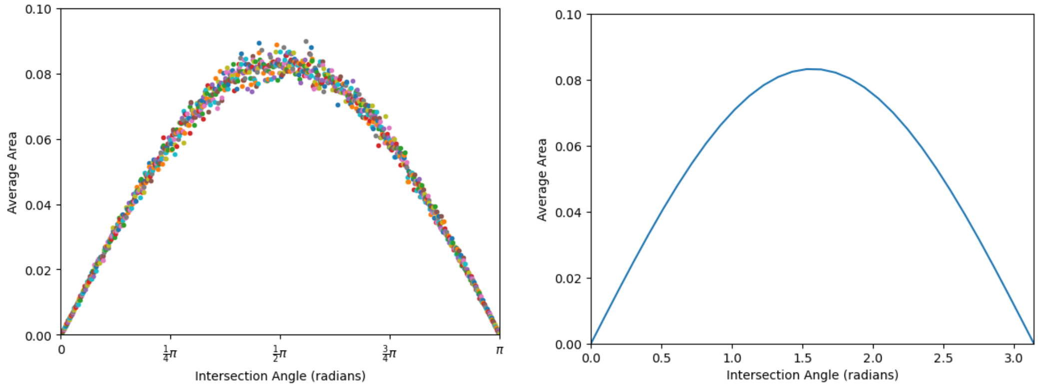


(a) Simulation　　(b) Graph of $\mathbb{E}(\theta)$

圖 13 資料來源：作者繪製

2、面積期望：

類似地，我們得到如圖 14 之結果對比：

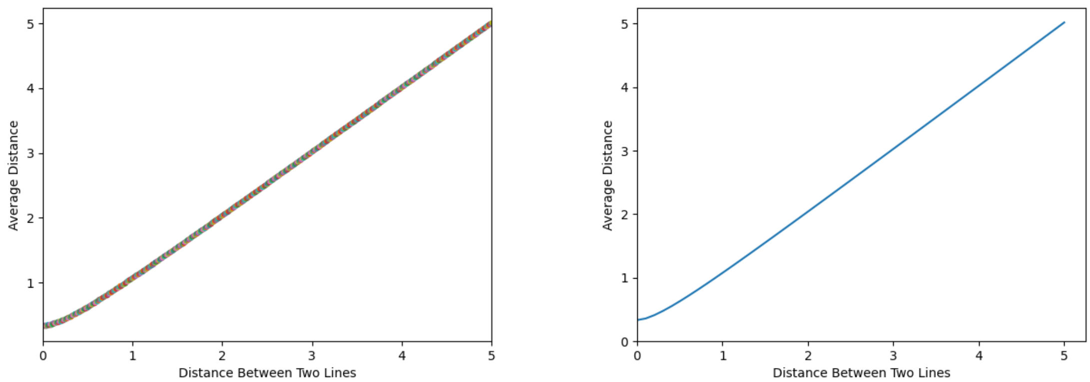


(a) Simulation (b) Graph of $\mathbb{E}(\theta)$

圖 14 資料來源：作者繪製

（二）、兩線段平行

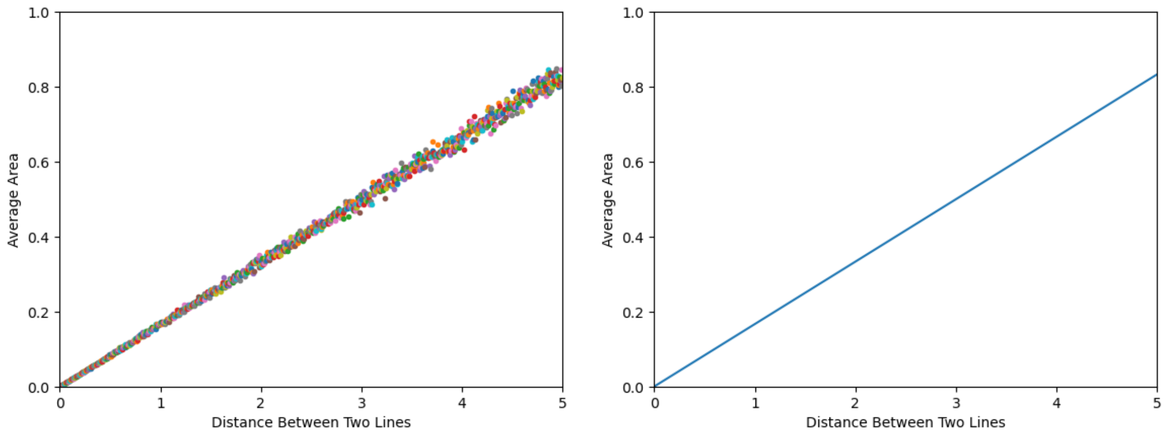
1、距離期望：



(a) Simulation (b) Graph of $\mathbb{E}(h)$

圖 15 資料來源：作者繪製

2、面積期望：



(a) Simulation (b) Graph of $\mathbb{E}(h)$

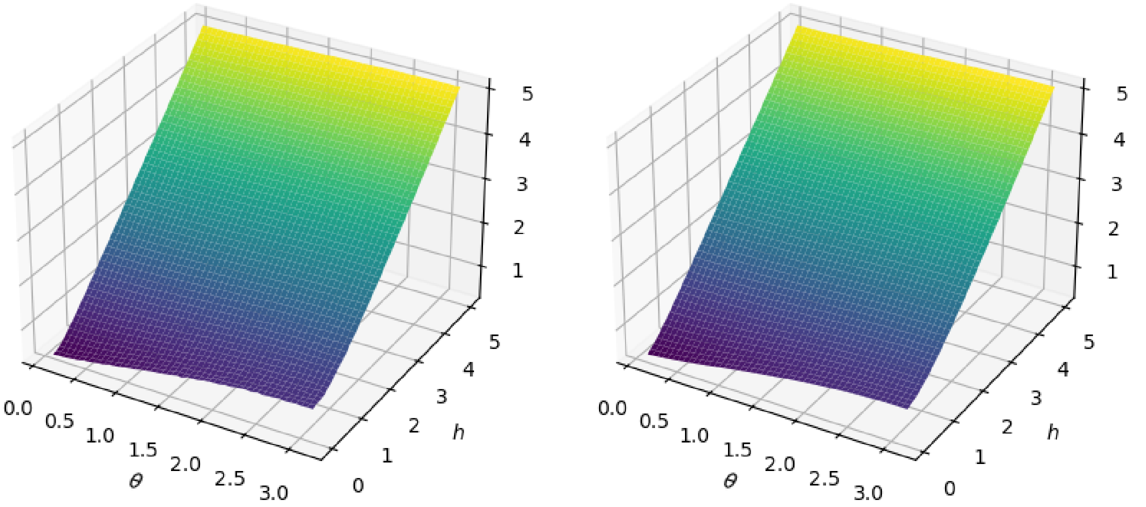
圖 16 資料來源：作者繪製

（三）、兩線段歪斜

1、距離期望：

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# Define the function

def calc(theta, h, a, b):
    return np.sqrt(a**2 + b**2 - 2*a*b*np.cos(theta) + h**2)
# Define the ranges for theta and h
theta_range = np.linspace(0.1, 3.14, 50)
h_range = np.linspace(0, 5, 50)
# Initialize the result array
result = np.zeros((len(h_range),len(theta_range)))
# Perform Monte Carlo simulation
num_iterations = 1000
for i, theta in enumerate(theta_range):
    for j, h in enumerate(h_range):
        quantities = []
        for _ in range(num_iterations):
            a, b = np.random.uniform(0, 1, 2)
            quantity = calc(theta, h, a, b)
            quantities.append(quantity)
        result[j, i] = np.mean(quantities)

# Create a 3D plot
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
# Create a meshgrid for theta and h
theta_mesh, h_mesh = np.meshgrid(theta_range, h_range)
# Plot the surface
ax.plot_surface(theta_mesh, h_mesh, result, cmap='viridis')
# Set labels and title
ax.set_xlabel(r'$\theta$')
ax.set_ylabel(r'$h$')
ax.set_zlabel(r'$z$')

plt.show()
```

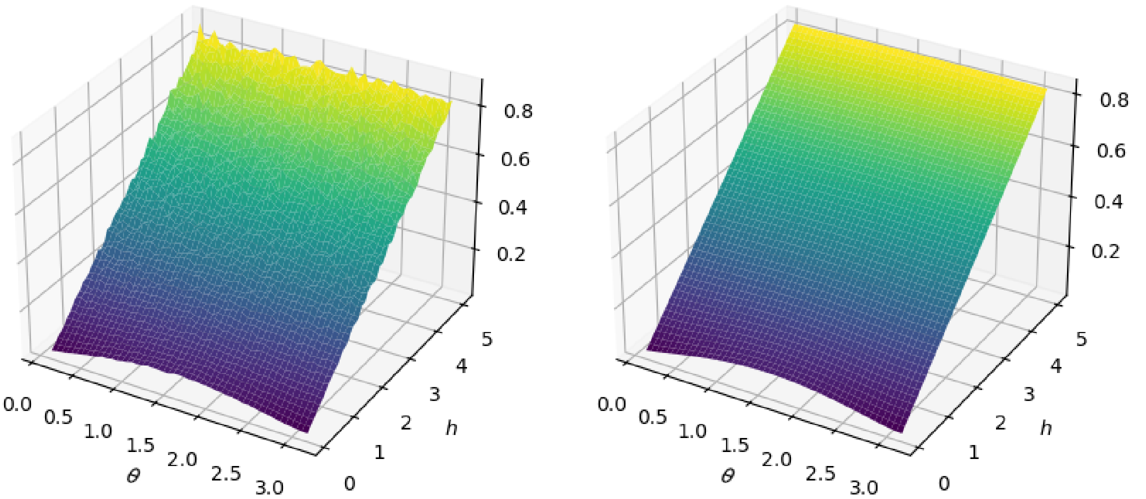
Listing 2: Simulation using Python（作者撰寫）



(a) Simulation　　(b) Graph of $\mathbb{E}(\theta, h)$

圖 17 資料來源：作者繪製

2、面積期望：



(a) Simulation　　(b) Graph of $\mathbb{E}(\theta, h)$

圖 18 資料來源：作者繪製

肆、研究結果

當兩線段相交且夾角為 θ 時，距離期望為

$$\mathbb{E}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \theta = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}} + \frac{\cos\theta}{3} + \frac{1}{3}\sin^2\theta\ln\left(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1\right) & \theta \in (0, \pi] \end{cases}$$

面積期望為：

$$\mathbb{E}(\theta) = \frac{1}{12}\sin\theta$$

當兩線段平行相距 h 且端點對齊時，距離期望為

$$\mathbb{E}(h)=\begin{cases}\frac{1}{3} & h=0\\ \sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(1+h^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3 & h\in(0,\infty)\end{cases}$$

面積期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\frac{1}{6}h$$

當兩線段歪斜並符合上文所述位置關係時，對於 $\theta\in(0,\pi)$，距離期望為：

$$\mathbb{E}(\theta,h)=\frac{1}{3}\left[(1-\cos\theta)\sqrt{2+h^2-2\cos\theta}+\cos\theta\sqrt{h^2+1}\right]+\left(h^2+\frac{\sin^2\theta}{3}\right)\ln\frac{\sqrt{h^2-2\cos\theta+2}+1-\cos\theta}{\sqrt{h^2+1}-\cos\theta}$$
$$+\frac{2h^3}{3\sin\theta}\left(\arctan\frac{h\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{(h^2-2\cos\theta+2)(1+\cos\theta)}}+\arctan\frac{h\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{(1+h^2)}}-\arctan\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right)$$

面積期望為：

$$\mathbb{E}(\theta,h)=\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}}{12}+\frac{h^2}{12\sin\theta}\ln\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}+\sin\theta}{h}$$

對於 $\theta=0$ 的情況，距離期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(h^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3$$

面積期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\frac{1}{6}h$$

$\theta=\pi$ 時，距離期望為

$$\mathbb{E}(h)=\frac{\sqrt{h^2+1}(2h^2-1)}{3}-\frac{\sqrt{h^2+4}(h^2-2)}{3}-\frac{1}{3}h^3+h^2\ln\frac{2+\sqrt{h^2+4}}{1+\sqrt{h^2+1}}$$

面積期望亦為：

$$\mathbb{E}(h)=\frac{1}{6}h$$

伍、討論

本文中，我們從正多邊形及多維超立方體間兩點距離期望與三角形面積均值問題的文獻探討出發，得到研究此類問題的一般方法。對於此類問題的一維情況，即本文的研究主題，我們從特殊情況推廣到一般情況，就兩線段的三種空間位置關係推導了其隨機點距離期望的閉式表達式。對於其延伸問題，即三隨機點決定的三角形之面積期望，我們在嚴格計算後與

距離期望相關聯做出了更直觀的理解。通過程式模擬隨機取點過程，對照閉式表達式的函數圖像，輔助驗證了結果的準確性。但程式模擬與函數圖像的對比驗證依然存在局限性，即只能確保其局部的圖像與整體的走向趨勢一致，兩者間的一致性也會受取點次數等多重因素影響。

在無線網絡高度發達的今天，隨機幾何作為應用機率論的分支，在圖形學、圖像處理、信號處理等領域扮演著不可或缺的角色，而隨機點分佈問題作為隨機幾何中的重要研究課題，其重要性不言而喻，正多邊形的隨機點距離期望已被學者應用於神經網絡神經元間距離的計算。筆者認為此類問題一維形式的研究能夠應用於 K-近鄰演算法（K-Nearest Neighbours）的數據預處理過程。對於有兩個參數的二分類問題，每個訓練實例都能在平面直角坐標系中表出，若先分別對兩個標籤對應的實例進行線性擬合，計算兩擬合線段的距離期望，就能將遠超出距離期望範圍的訓練實例進行預處理，使模型即使 K 取很小也不易訓練到噪聲實例，從而大幅提升模型的準確性。

筆者也將在未來對此類問題做更深入的研究，例如此問題的機率密度函數、累積分佈函數，抑或是兩平面間隨機點的平均距離等，此類問題的研究將能夠應用於更多參數的多分類問題。

陸、結論

本文推導了兩線段間隨機點之距離期望及三隨機點決定的三角形之面積期望的閉式表達式，通過程式模擬隨機過程驗證了其準確性，但也分析了此種驗證方式的局限性，並簡要介紹了其潛在應用前景。

柒、參考文獻資料

[1] Bäsel, Uwe (2012). “Random chords and point distances in regular polygons”. *arXiv preprint arXiv:1204.2707*.

[2] Czuber, E. (1884). *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte*. B.G. Teubner. URL: https://books.google.de/books?id=2jQAAAAAQAAJ.

[3] Ghosh, Birendranath (1951). “Random distances within a rectangle and between two rectangles”. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society* 43, 17–24.

[4] *Stochastic geometry* (n.d.). Encyclopedia of Mathematics. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Stochastic_geometry&oldid=33080.

[5] Sulanke, Rolf (1961). “Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren”. *Mathematische Nachrichten* 23.1, 51–74.

[6] Talwalkar, Presh (2016). *Distance Between Two Random Points In A Square*. URL: https://mindyourdecisions.com/blog/2016/07/03/distance-between-two-random-points-in-a-square-sunday-puzzle/.

[7] Trott, M. (1998). "The Area of a Random Triangle". *Mathematica J.* 7, 189–198. URL: http://library.wolfram.com/infocenter/Articles/3413/.

[8] Weisstein, Eric W. (n.d.[a]). *Circle Line Picking*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. URL: https://mathworld.wolfram.com/CircleLinePicking.html.

[9] Weisstein, Eric W. (n.d.[b]). *Hypercube Line Picking*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. URL: https://mathworld.wolfram.com/HypercubeLinePicking.html.

[10] Weisstein, Eric W. (n.d.[c]). *Mean Triangle Area*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. URL: https://mathworld.wolfram.com/MeanTriangleArea.html.

[11] Weisstein, Eric W. (n.d.[d]). *Sphere Line Picking*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. URL: https://mathworld.wolfram.com/SphereLinePicking.html.

【評語】050416

本作品考慮兩點（或三點）分別在均勻出現在兩條線段，計算兩點之間的距離或三點所形成的三角形面積的期望值，作者以兩線段的關係為分類依據，分成相交、共端點、平行、不相交且不平行幾類，作者的手法均是直接計算機率密度函數，再進行積分，並且適度的使用積分中的變數變換輔助。計算完後，作者也有用程式大量取點以驗證計算結果。然而，本作品的手法較為單一，難度也不大，因此作品成果有限。有些寫法如符號等等有改善的空間。

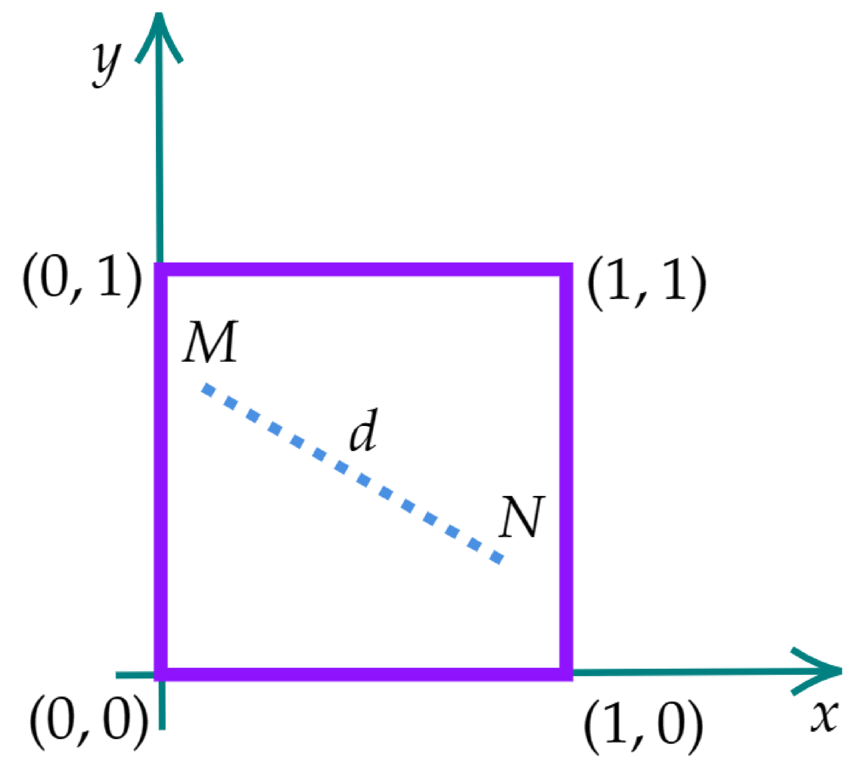
作品簡報

兩線段間隨機點之距離期望與面積期望

研究動機

正方形內兩隨機點距離期望

設單位正方形一頂點為原點，將相鄰兩邊的頂點置於x軸、y軸正方向建立平面直角坐標系如下圖：



M,N為正方形內兩隨機點，設其為 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，則 $x_1,x_2,y_1,y_2\sim U[0,1]$。

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\,dx_1dx_2dy_1dy_2\\
&= 4\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}(1-x)(1-y)\,dxdy\\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta} r^2(1-r\cos\theta)(1-r\sin\theta)\,drd\theta\\
&= 8\left(\frac{\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|}{24}-\frac{\sec^3\theta}{60}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{2+\sqrt{2}+5\ln(\sqrt{2}+1)}{15}\\
&\approx 0.5214054332
\end{aligned}
$$

文獻探討

Mean Line Segment Length

$$\mathbb{E}[\|x-y\|]=\frac{1}{\lambda(S)^2}\int_S\int_S \|x-y\|\,d\lambda(x)\,d\lambda(y)$$

- 長度為 d 的線段：$\frac{1}{3}d$
- 半徑為 r 的圓周任兩點平均弦長：$\frac{4}{\pi}r$
- 半徑為 r 的球體：$\frac{36}{35}r$
- 長 l 寬 w 的長方形：$\frac{1}{15}\left[\frac{l^3}{w^2}+\frac{w^3}{l^2}+d\left(3-\frac{l^2}{w^2}-\frac{w^2}{l^2}\right)+\frac{5}{2}\left(\frac{w^2}{l}\ln\left(\frac{l+d}{w}\right)+\frac{l^2}{w}\ln\left(\frac{w+d}{l}\right)\right)\right]$
- n 維超方形：$\Delta(n)=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{2n}\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}\,dx_1\cdots dx_n\,dy_1\cdots dy_n$

Andersson et.al. (1976) 找出了其上下界：$\frac{1}{3}n^{1/2}\le\Delta(n)\le\left(\frac{1}{6}n\right)^{1/2}\sqrt{\frac{1}{3}\left[1+2\left(1-\frac{3}{5n}\right)^{1/2}\right]}$

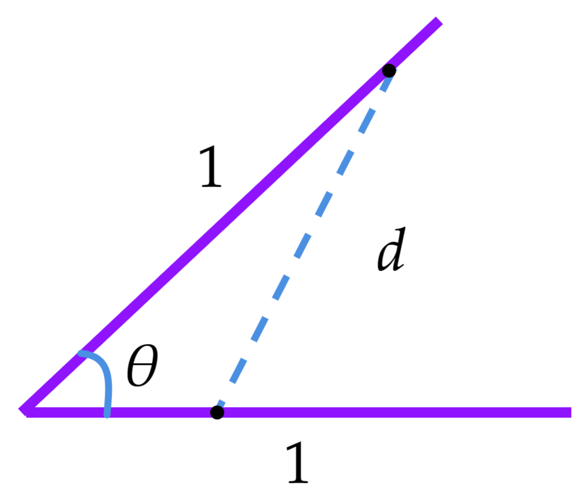
Mean Triangle Area

- 單位正方形：$\frac{11}{144}$
- 單位圓：$\frac{3}{2\pi}$
- 單位球體：$\frac{9\pi}{77}$
- 單位邊長等邊三角形：$\frac{1}{12}$

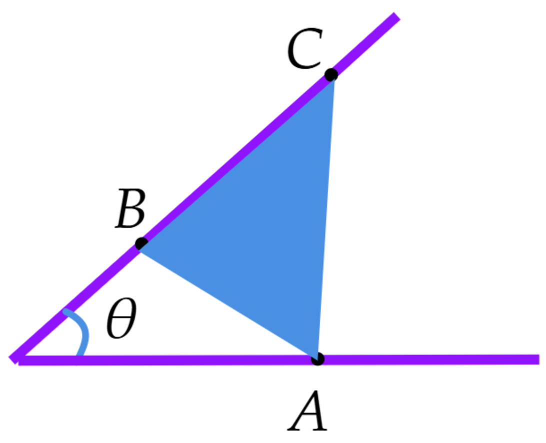
研究目的

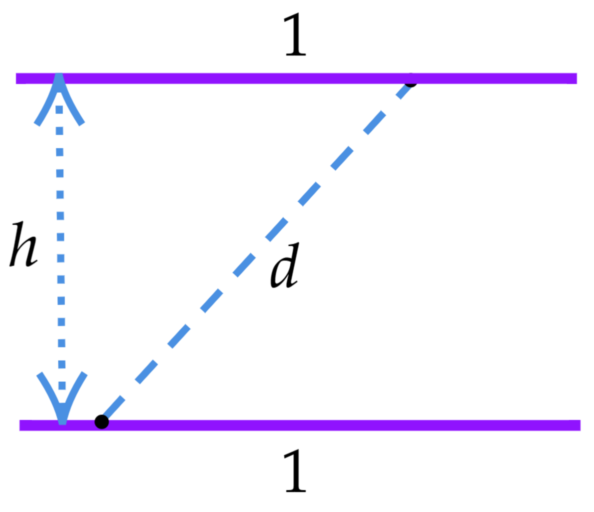
距離期望：兩隨機點 M,N 獨立分佈在兩單位線段上，求兩點間距離 d 的期望值。

面積期望：隨機點 A 分佈在一條線段上，B,C 獨立分佈在另一條線段上，求三點決定的三角形之面積期望值

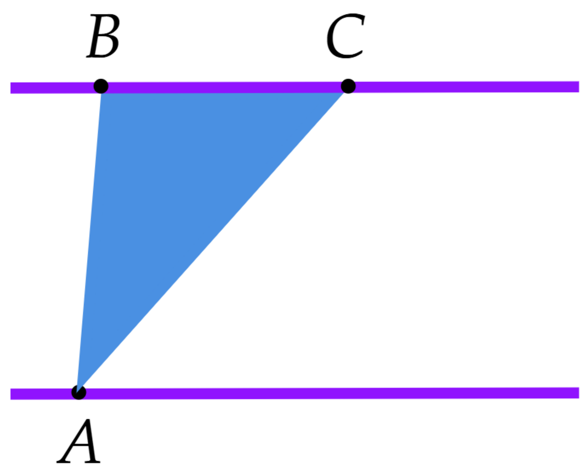


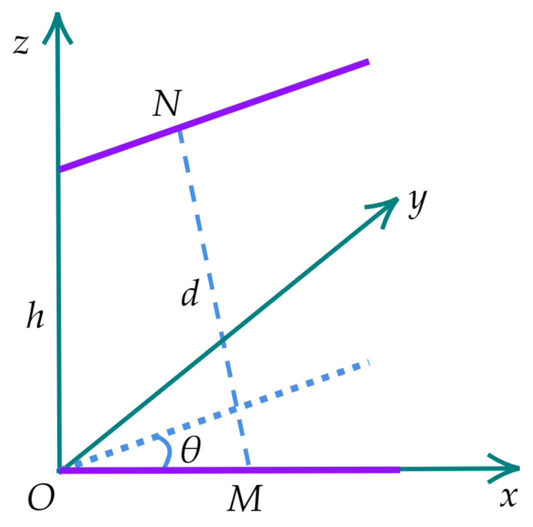
對於於端點處相交的情況，引入參數 θ 以表示兩線段之夾角，並規定 $\theta\in[0,\pi]$。



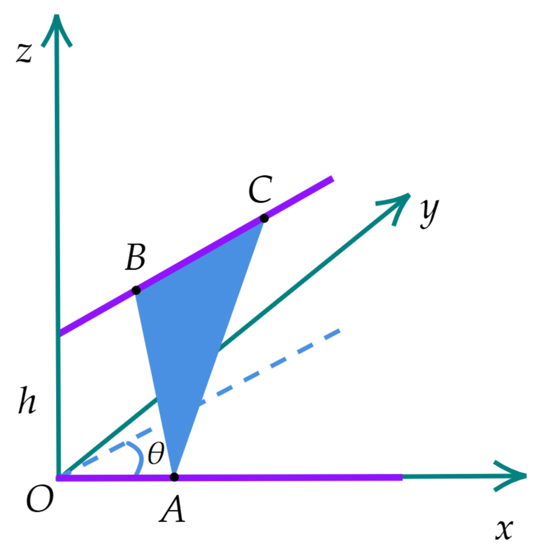


對於於端點處平行的情況，引入參數 h 以表示兩平行線段間距離，規定 $h\in[0,\infty)$。

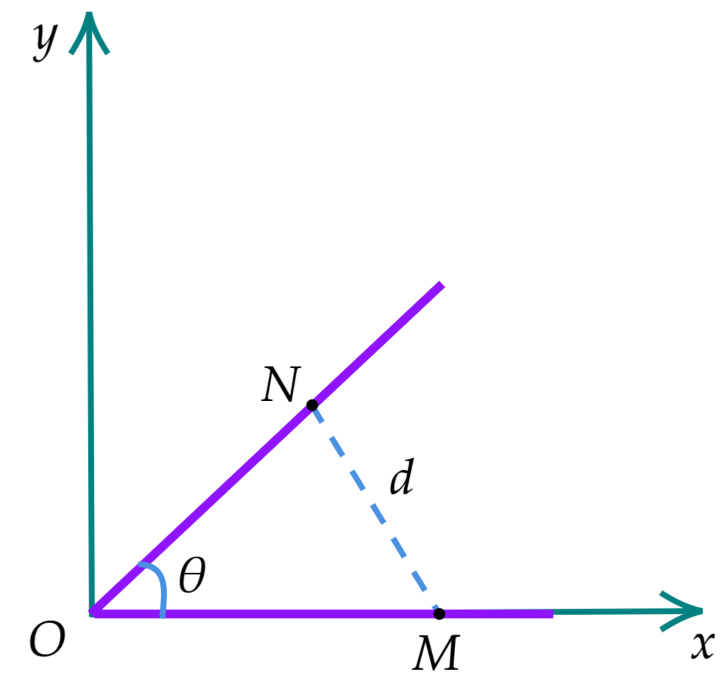




對於兩線段歪斜的情況，令其中一條線段位於 x 軸正方向，兩線段一側端點位於 z 軸正半軸。



兩線段相交



令兩象限交點為平面直角坐標系原點，其中一條線段位於 x 軸正方向，另一條線段位於第一、二象限，兩隨機點可表示為 $M(a,0)$，$N(b\cos\theta, b\sin\theta)$, $a,b\sim U[0,1]$。

兩點的距離期望可以表示為：

$$\int_0^1\int_0^1\sqrt{(a-b\cos\theta)^2+(-b\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$

問題等價於研究：

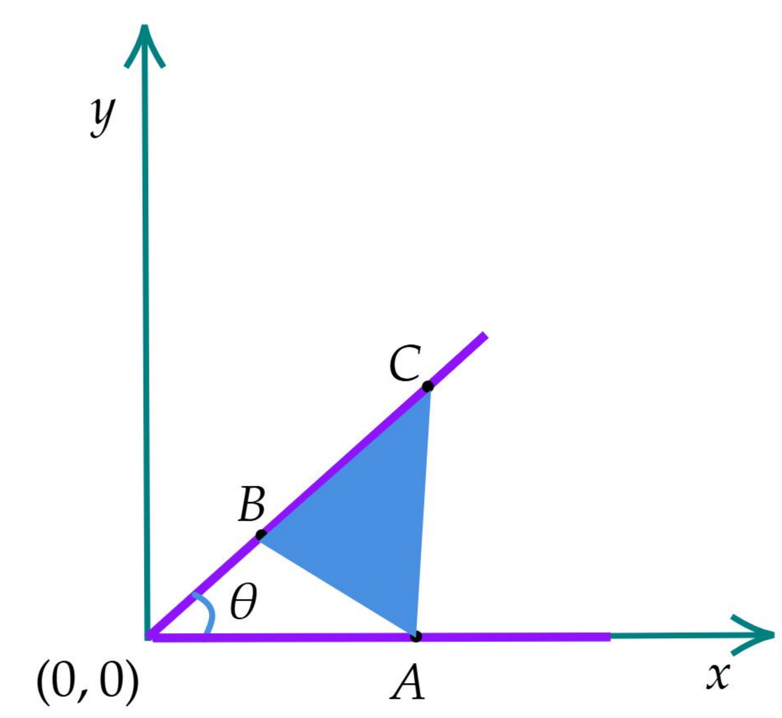
$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^2+y^2-2mxy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Delta ABC\text{面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} c\cos\theta-a & c\sin\theta \\ b\cos\theta-a & b\sin\theta\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|a(c-b)\sin\theta|$$

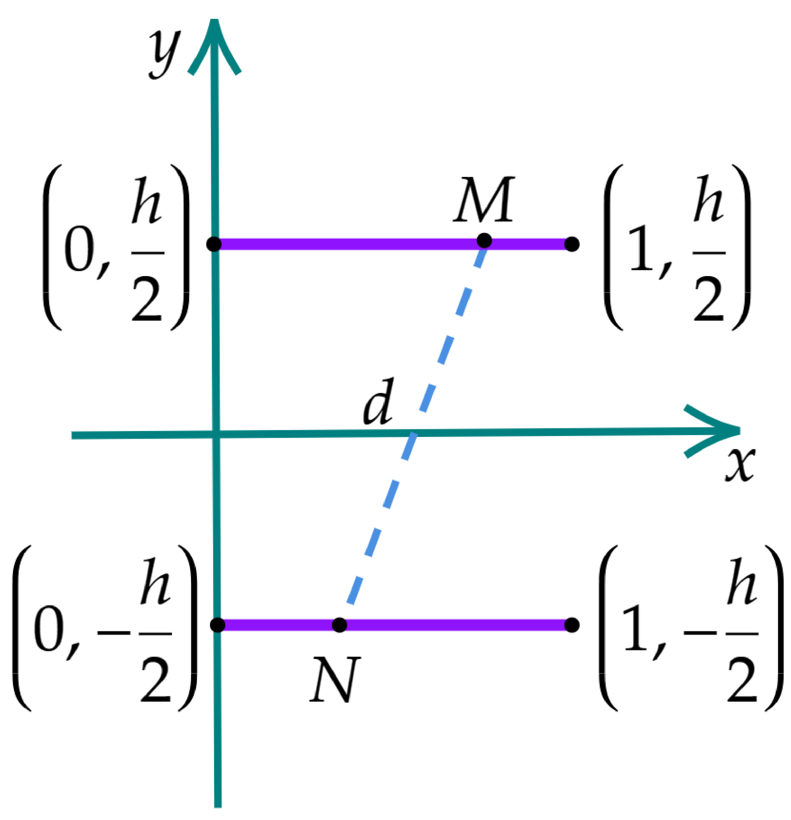
$$\mathbb{E}(\theta)=2\times\frac{1}{2}\sin\theta\int_0^1\int_0^1\int_0^c(ac-ab)\,\mathrm{d}b\mathrm{d}a\mathrm{d}c$$

$$=\frac{1}{12}\sin\theta$$



類似的，三隨機點坐標可表示為 $A(a,0)$，$B(b\cos\theta, b\sin\theta)$，$C(c\cos\theta, c\sin\theta)$，其中 $a,b,c\sim U[0,1]$。$\overrightarrow{AB}=(b\cos\theta-a, b\sin\theta)$
$\overrightarrow{AC}=(c\cos\theta-a, c\sin\theta)$

兩線段平行



設兩條線分別平行於 x 軸且到 x 軸的距離均為 $\frac{h}{2}$，左端點均位於 y 軸，兩隨機點可表示為 $M\left(m,\frac{h}{2}\right)$，$N\left(n,-\frac{h}{2}\right)$, $m,n\sim U[0,1]$。

兩點的距離期望可以表示為：

$$\mathbb{E}=\int_0^1\int_0^1\sqrt{(m-n)^2+h^2}\,\mathrm{d}m\mathrm{d}n$$

作換元：$u=m-n, v=m+n$：

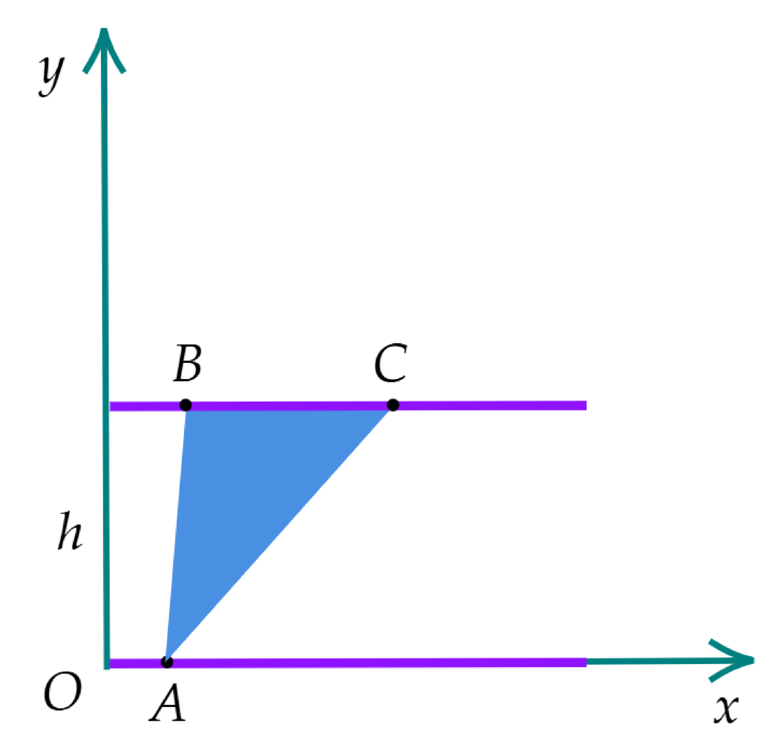
$$\mathbb{E}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\int_{|u|}^{2-|u|}\sqrt{u^2+h^2}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$=2\int_0^1(1-u)\sqrt{u^2+h^2}\,\mathrm{d}u$$

$$\Delta ABC\text{面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} c\cos\theta-a & c\sin\theta \\ b\cos\theta-a & b\sin\theta\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}|a(c-b)\sin\theta|$$

$$\mathbb{E}(h)=2\cdot\frac{1}{2}h\int_0^1\int_0^1\int_0^c(c-b)\,\mathrm{d}b\mathrm{d}a\mathrm{d}c=\frac{1}{6}h$$



類似的，三隨機點坐標可表示為 $A(a,0)$，$B(b,h)$，$C(c,h)$，其中 $a,b,c\sim U[0,1]$。
$\overrightarrow{AB}=(b-a,h)$，$\overrightarrow{AC}=(c-a,h)$

兩線段歪斜

距離期望：兩隨機點 $M(a,0,0)$，$N(b\cos\theta, b\sin\theta, h)$。其中 $a,b\sim U[0,1]$。兩點的距離期望可被表示為：

$$\int_0^1\int_0^1\sqrt{(a-b\cos\theta)^2+(-b\sin\theta)^2+h^2}\,\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$ 等價於研究：

$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^2-2mxy+y^2+h^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

當 $m\in(-1,1)$ 時，作極坐標變換 $x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha$：

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\alpha}r\cdot\sqrt{(1-2m\sin\alpha\cos\alpha)r^2+h^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha$$

令 $a=1-2m\sin\alpha\cos\alpha\in(0,2)$，$u=ar^2+h^2$，$v=\tan\alpha$，$v-m=\sqrt{1+h^2-m^2}\tan\phi$，$n=1+h^2-m^2$，$t=\sin\phi$。

結合積分技巧，我們得到，當 $\theta\in(0,\pi)$ 時：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\theta,h)=\frac{1}{3}\Bigg[&(1-\cos\theta)\sqrt{2+h^2-2\cos\theta}+\cos\theta\sqrt{h^2+1}\Bigg]\\ &+\left(h^2+\frac{\sin^2\theta}{3}\right)\ln\frac{\sqrt{h^2-2\cos\theta+2}+1-\cos\theta}{\sqrt{h^2+1}-\cos\theta}\\ &+\frac{2h^3}{3\sin\theta}\left(\arctan\frac{h\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{(h^2-2\cos\theta+2)(1+\cos\theta)}}\right.\\ &\left.+\arctan\frac{h\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{(1+h^2)}}-\arctan\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\right)\end{aligned}$$

面積期望：三隨機點 $A(a,0,0)$，$B(b\cos\theta, b\sin\theta, h)$，$C(c\cos\theta, c\sin\theta, h)$，其中 $a,b,c\sim U[0,1]$。

$$\mathbb{E}(\theta,h)=\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}}{12}+\frac{h^2}{12\sin\theta}\ln\frac{\sqrt{h^2+\sin^2\theta}+\sin\theta}{h}$$

結果驗證

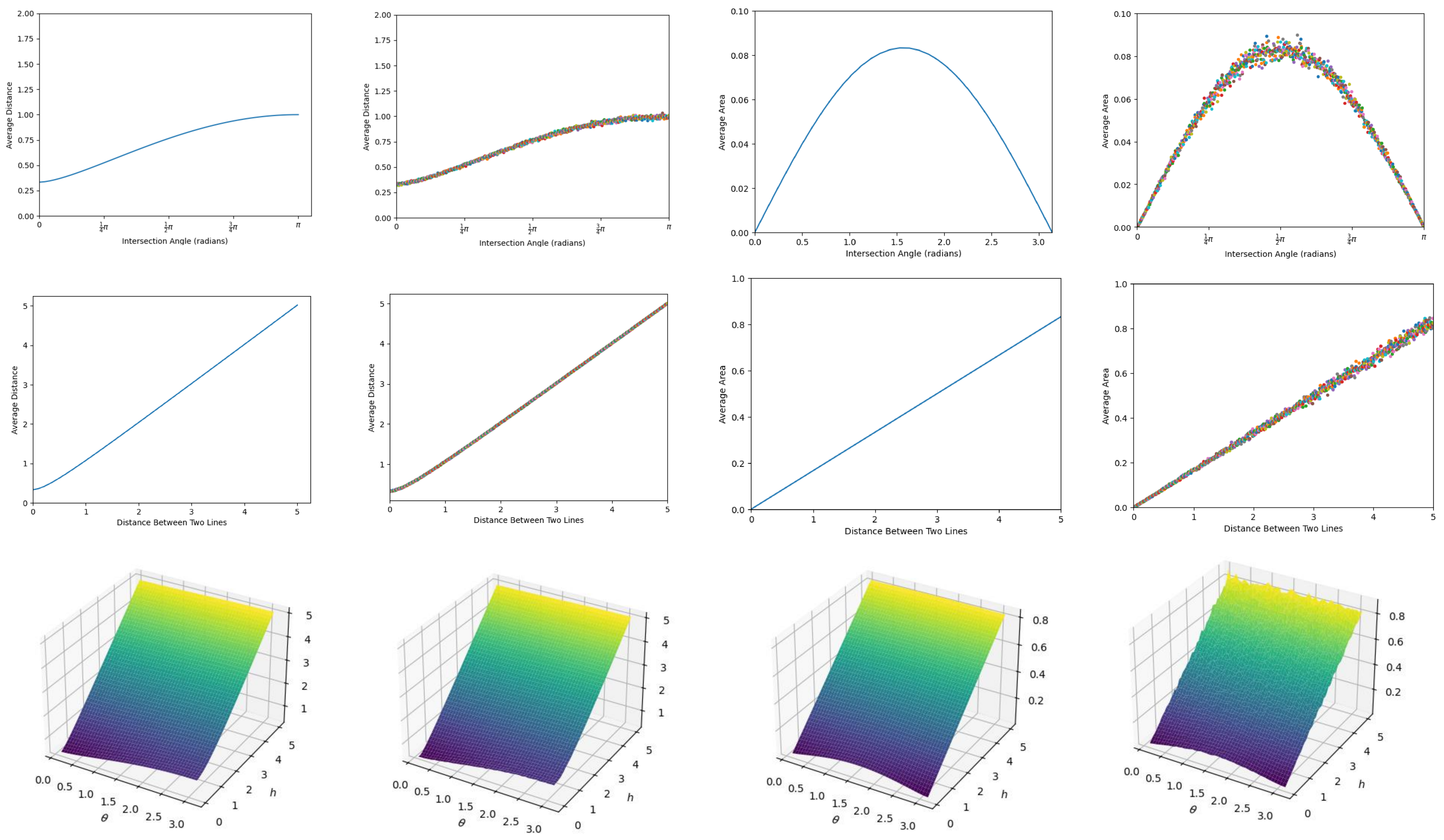
為驗證所得結果之正確性，我們運用python，結合蒙地卡羅方法(Monte Carlo method)模擬兩條線段上的取點過程，繪製出模擬結果與閉式表達式函數圖像的對比圖：

距離期望　面積期望

相交

平行

歪斜



結論與討論

當兩線段相交且夾角為 θ 時，面積期望為 $\frac{1}{12}\sin\theta$，距離期望為：

$$\mathbb{E}(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{3} & \theta=0\\ \frac{\sqrt{2}}{3}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{\cos\theta}{3}+\frac{1}{3}\sin^2\theta\ln\left(\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta}}+1\right) & \theta\in(0,\pi]\end{cases}$$

當兩線段平行相距 h 且端點對齊時，面積期望為 $\frac{1}{6}h$，距離期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\begin{cases}\frac{1}{3} & h=0\\ \sqrt{h^2+1}+h^2\ln\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}-\frac{2}{3}\left(1+h^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}h^3 & h\in(0,\infty)\end{cases}$$

當兩線段歪斜且符合前述位置關係時，對於 $\theta\in(0,\pi)$，可參見前述結果，當 $\theta=0$ 時，結果等價於平行的情況，當 $\theta=\pi$ 時，距離期望為：

$$\mathbb{E}(h)=\frac{\sqrt{h^2+1}(2h^2-1)}{3}-\frac{\sqrt{h^2+4}(h^2-2)}{3}-\frac{1}{3}h^3+h^2\ln\frac{2+\sqrt{h^2+4}}{1+\sqrt{h^2+1}}$$

應用前景

無線網路的進步使得對其研發所需的資源顯著增加，而隨機幾何相關的問題可通過對系統特性和性能指標進行分析描述，以減少其運算的複雜性與成本。

過去廣泛研究的主題是節點間距分佈問題，節點的分佈取決於網路模型，而神經網路 (Neural Network) 的節點形狀往往不規律，科學家們常將神經元視作圓形以簡化模型，筆者認為運用本文結果計算神經元中心連線間的距離期望不失為估計節點間距分佈的可行方法之一，並有助於優化近鄰演算法 (K-Nearest Neighbors) 的數據預處理過程。

筆者也將繼續探討此問題的機率密度函數與累積分佈函數，以填補學術界對於此類問題一維形式研究的空白。對於兩平面間隨機點的平均距離問題的研究也將能應用於更多參數的多分類問題。