中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第一名

050415

圓緣相連-關於忍者通道性質的探討

學校名稱： 高雄市立高雄高級中學

作者：	指導老師：
高二 李家睿	王信元

關鍵詞： 超立方體、動態規劃、組合極值

得獎感言

撞期，撞題，再撞颱的科展奇幻之旅

「只有第一名的作品能在得獎感言裡放上作者照片喔!」國中科展老師看似平凡的一席話，卻深深烙印在心頭，凸顯出第一名的殊榮與特別，當時作夢也想不到，我們能有獲得這項榮譽的機會。

作品的初期出乎意料地順利，練習IMO試題時意外發現忍者通道的題目看似神奇，但在掌握構造以及動態規劃技巧後卻迎刃而解，並發現了許多延伸的可能，在與前國手交流後更理解推廣至高維度的hypercube結構，並開始了研究的旅程，於去年暑假便順利完成了初稿。

正當一切步上軌道之時，意外卻接踵而至，首先是今年度的數奧第三階段選訓營與科展報告撞期，必須由組員獨自報告，緊接著是更為致命的問題：校內居然有研究相同題目的作品，當初選擇IMO試題一大主因是可避免重複題目，卻沒料到於市賽即碰上強勁對手，內心滿是惶恐，深怕研究難度不足或內容有失誤而不受評審青睞，指導老師還因此安慰我們：「如果最後不幸因撞題落選，還有國際科展的機會的」。

在與組員完成最終準備，我便前往第三階段選訓營，在考國手選拔失常落選後，突然收到入圍頒獎典禮的通知，可望取得獎項的消息有如雪中送炭使我悲傷的心情有了一絲緩解，最終宣布名單時，驚喜的發現相同題目的兩件作品包辦一二名，且我們驚為天人的取得了代表權。

賽後，我們與第二名的組別一同討論作品，也使我對於三維多球有了更多想法，經過一段時間努力後終於完成了延伸的推廣，也使作品更具完整性。

疫情當中參與的第六十屆全國科展實體辦理，今年卻因颱風創紀錄的三天連假使我第一次參與線上競賽，評審之前認為並無多大可能獲得青睞，得以平常心面對報告及評審，相信如此才能有超常的發揮，克服了種種艱困的挑戰後取得第一名的佳績！

得獎第一時間想感謝的便是共同討論並完成作品，卻因故無法參與全國科展的承翰組員對於這份作品的貢獻，沒有他絕對不會有如今的獎項，不論是作品內容的討論，在面對困難時給予我繼續研究的信心與動力，甚至是在市賽時獨自一人完成評審並以傑出的表現獲得全國代表權，使我得以取得參加全國賽的資格，充分顯示了隊友的重要，也完成我國中時期待能有合作對象的夢想。

接著，我想感謝指導老師對於作品的付出，不僅提出計算方法數的問題予我們思考，完成後還進行校稿與檢查，並指導我們的口頭發表；另外也感謝數學組組員們聆聽我們的報告，並與我們交流研究內容，最後，感謝家人們一直以來的支持，使我得以追尋數奧夢想以及完成這份科展作品，還有卡比獸在我面對未知的挑戰時成為我的心靈支柱！

得獎後與承翰在平凡五金行慶祝

感謝數學組與指導老師對科展的協助

感謝家人以及卡比獸們的陪伴

摘要

本作品由 2023 年 IMO 的第五題出發，希望探索在忍者通道中的其他性質，首先思考改變每排中放入的球數並觀察規律，進而推廣到三維圓圈塔中的性質，最後使用 hyper-cube(超立方體)的情況進行一般化的推廣與構造的優化，完成最小值問題的求解另外也對於特例部分探索解的總數。

壹、研究動機

於練習 IMO 競賽試題時，特殊的第五題立刻引起了我們的興趣，看似雜亂無章，有著許多放置情況的日式三角形，在排數足夠大之情況下卻可以保證有任意長度的忍者通道，也因此，我們希望可以探索更多關於忍者通道的性質，並嘗試思考，不同的放置情況與高維度情況下，是否也能有如此漂亮之結果?

貳、研究目的

(1) 討論每排放入不同球數，並對於所得結果進行探究
(2) 討論並證明三維情況下單球與多球之解答
(3) 採用 hyper-cube，並討論高維度單球與多球堆體下界
(4) 討論原始題目中在某些特定排數下達到最小值時的可能方法數

參、研究器材與設備

(1) 電腦軟體：Geogebra,小畫家,C++ 17, wolfram alpha
(2) 紙，筆

肆、研究過程或方法

*以下為方便討論，若有未定義之項次，如$T_{1,0}$則均代表0

(一)原始題目：

(2023 IMO P5)
設 n 為正整數。日式三角形是將 $1+2+\cdots+n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 由上往下數的第 i 列有i 個圓，且每一列都有一個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的忍者通道，是一串由最上列到最下列的n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。試找出k的最大值(以n表示)，保證在每一個日式三角形中，有一條包含至少k個紅色圓的忍者通道。

解答：

答案為$M_i=\lfloor\log_2(i)\rfloor+1$，以下給出其證明
首先我們先聯想到一個經典問題：
從方格表中的左下角走至右上角且每次僅能向上與向右之方法總數有多少?
明顯的，由於每一格的答案只與左邊與下面有關係，因此直接相加即可(如圖 1)

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

圖 1 經典問題的解答

觀察原始問題，注意走至某一格只可能從上一行的左邊與右邊走至該格，因此希望利用類似動態規劃(dynamic programming)的方法進行思考，先做如下定義：

- 定義$T_{n,m}$為抵達日式三角形第 n 列第 m個時，走過最多紅色圓的忍者通道數量
- 若第 n 列第 m 個為紅色，則定義$W_{n,m}=1$，否則$W_{n,m}=0$
- T_i代表集合$\{T_{i,1},T_{i,2},\dots,T_{i,i}\}$
- $S_i=T_{i,1}+T_{i,2}+\cdots+T_{i,i}$
- $M_i=\max(T_{i,1},T_{i,2},\cdots,T_{i,i})$

接著由題目敘述，可以發現$T_{i,j}=\max(T_{i-1,j-1},T_{i-1,j})+W_{i,j}, 1\le i\le n, 1\le j\le i$

對每個日式三角形，包含最多個紅色圓的忍者通道的數量為$\max(T_{n,i}), 1\le i\le n$，以如下例子作為說明：

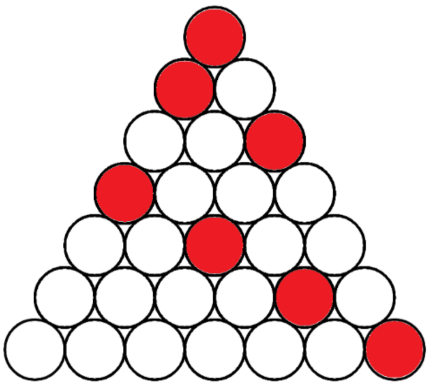


圖 2 n=7 的一個塗色例子

此圖的$T_{i,j}$值如下表所示

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$i=1$	1						
$i=2$	2	1					
$i=3$	2	2	2				
$i=4$	3	2	2	2			
$i=5$	3	3	3	2	2		
$i=6$	3	3	3	3	3	2	
$i=7$	3	3	3	3	3	3	3

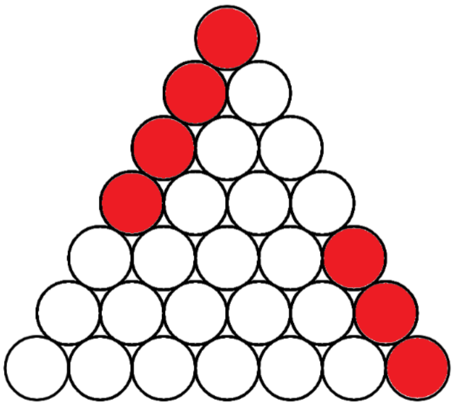
表 2

而在表 2 中最多可以通過 3 個紅色圓
接著，藉由對於$T_{i,j}$性質的觀察，可以發現每一排的結果只取決於上一排。
再次觀察圖 2 中的T_i, S_i, M_i

	T_i	S_i	M_i
$i = 1$	{1}	1	1
$i = 2$	{2,1}	3	2
$i = 3$	{2,2,2}	6	2
$i = 4$	{3,2,2,2}	9	3
$i = 5$	{3,3,3,2,2}	13	3
$i = 6$	{3,3,3,3,3,2}	17	3
$i = 7$	{3,3,3,3,3,3,3}	21	3

表 3

由上表觀察知，$S_3 = S_2 + M_2 + 1$，$S_4 = S_3 + M_3 + 1$，⋯



$n = 7$ 的另外一個例子

	T_i	S_i	M_i
$i = 1$	{1}	1	1
$i = 2$	{2,1}	3	2
$i = 3$	{3,2,1}	6	3
$i = 4$	{4,3,2,1}	10	4
$i = 5$	{4,4,3,2,2}	15	4
$i = 6$	{4,4,4,3,2,3}	20	4
$i = 7$	{4,4,4,4,3,3,4}	26	4

表 4

由表 1 至表 4 可得以下結論：

引理 1. $S_i \geq S_{i-1} + M_{i-1} + 1 \; \forall i \geq 0$

證明：

取 k 滿足$T_{i-1,k} = M_{i-1}$，(即$\{T_{i-1,1}, T_{i-1,2}, \cdots, T_{i-1,i-1}\}$中任一最大值的下標)
則易知$T_{i,k} = T_{i,k-1} = T_{i-1,k} = M_{i-1}$
接著將所有數字分為兩部分進行估計：

- $T_{i,j} \geq T_{i-1,j}\ \forall j < k$
- $T_{i,j} \geq T_{i-1,j-1}\ \forall j > k+1$

又$S_i = \sum_{j=1}^{i} T_{i,j} = \sum_{j=1}^{k-1} T_{i,j} + M_{i-1} + M_{i-1} + \sum_{j=k+1}^{n} T_{i,j} \geq \sum_{j=1}^{n-1} T_{i-1,j} + M_{i-1} + 1$
(+1 是因為每排新增一個紅球)，故有$S_i \geq S_{i-1} + M_{i-1} + 1$

引理 2. $M_i \geq \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$，其中$\lceil x \rceil$為 ceil function

證明：由鴿籠原理即得
由於起始時為$S_1 = 1, M_1 = 1$，故可由引理 1,2 得到以下表格

	S_i最小可能	M_i最小可能
$i = 1$	1	1
$i = 2$	3	2
$i = 3$	6	2
$i = 4$	9	3
$i = 5$	13	3
$i = 6$	17	3
$i = 7$	21	3
$i = 8$	25	4

可以發現對於任意的 i ，若正整數 k 滿足$2^k \leq i < 2^{k+1}$，則M_i的最小可能為k ，接著以數學歸納法證明此假設

定理 3. $M_i \geq \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$，其中$\lfloor x \rfloor$為 floor function，且$S_{2^{k+1}-1} \geq (2^{k+1} - 1) \cdot (k+1)$

證明：
對$k = \lfloor \log_2 i \rfloor$的值做數學歸納法

對於$k = 0$ 的情況，只有可能$i = 1$ ，由題目可知必有$T_1 = \{1\}$，$S_i = 1$，故$M_1 = 1$
命題成立

假設對於所有i 滿足$\lfloor \log_2 i \rfloor = k$，都有$M_i \geq k+1$，且$S_{2^{k+1}-1} \geq (2^{k+1} - 1) \cdot (k+1)$，
欲證對於所有i 滿足$\lfloor \log_2 i \rfloor = k+1$，都有$M_i \geq k+2$，且$S_{2^{k+2}-1} \geq (2^{k+2} - 1) \cdot (k+2)$
由引理 1，和歸納假設，可以知道$S_{2^{k+1}} \geq (2^{k+1} - 1) \cdot (k+1) + k + 1 + 1 = 2^{k+1} \cdot (k+1) + 1$

再由引理 2，可以知道$M_{2^{k+1}} \geq \left\lceil \frac{2^{k+1}(k+1)+1}{2^{k+1}} \right\rceil = k+2$

對於$2^{k+1} < i \leq 2^{k+2} - 1$，可以知道$S_i - S_{i-1} \geq M_{i-1} + 1 \geq k+3$，故自然$M_i \geq k+2$
另外$S_{2^{k+2}-1} \geq S_{2^{k+1}} + (2^{k+2} - 2^{k+1} - 1) \cdot (k+3) = 2^{k+1} \cdot (k+1) + 1 + (2^{k+2} - 2^{k+1} - 1) \cdot (k+3)$
因此$S_{2^{k+2}-1} \geq (2^{k+2} - 1)(k+2)$，故原命題成立。

至此，完成了下界的估計，接著希望構造一種滿足下界的塗色方法，這時注意到引理 2 中的S_i與估計中的情況相當吻合，因此或許形如引理 2 的構造方法是可行的。

定理 4. 存在$M_i \le \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$的構造

證明：

設(i,j)代表將第i 行第j 格塗成紅色

以下證明$(1,1),(2,1),(3,3),(4,1),(5,3),(6,5),(7,7)$ ...的塗色法可以符合題意，即將$\left(i, 2\left(i-2^{\lfloor \log_2(i) \rfloor}\right)+1\right)$塗成紅色成立

注意到可以證明若$\lfloor \log_2(i) \rfloor$的值相同，則這些紅色圓圈彼此互相不能到達，因為若$\lfloor \log_2(i) \rfloor$相同，則相當於塗色$(i, 2i+1-c)$，$c$ 是常數，而由相鄰兩排移動最多只能向右移動一格，假設存在為a, b ，則有$(a, 2a+1-c),(b, 2b+1-c)$可以互相抵達，因此$2(b-a) \le b-a$，故$a=b$ ，矛盾

因此最多只有$0,1,2,\ldots,\lfloor \log_2(i) \rfloor = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$種不同的取值

最後，由定理 3 與定理 4，可以知道原題答案即為$M_i = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$ ■

(二)每排放置多球的情況

在開始討論每排放置更多球的情況之前，為了簡化討論並同時呈現題目有趣的性質，先證明一個性質

性質 1 令$f(n)=k$代表原題目中的答案，則$f(n)$遞增且$f(n+1)-f(n) \le 1$

證明：

注意到若前n 排已可保證路徑中有至少k 個紅球，則不論下一排的配置情況，至少可以選擇與前n 排相同的路徑以走訪至少k 個紅球，因此$f(n+1) \ge f(n)$，遞增證畢

另外，因為$f(n)=k$，故必定存在一種構造只能最多走訪k 個紅球，選擇該配置情況，因為下一排中最多只能走訪最多新走訪一個紅球，故$f(n) \le k+1$，因此$f(n+1)-f(n) \le 1$

因此，可以將原始題目改成如下版本：

(延伸至多球情況下的題目) 設m為正整數，定義m-日式三角形是將$1+2+\cdots+n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有$i=1,2,\cdots,n$ 由上往下數的第i 列有i 個圓，且前$m-1$列每列所有圓形**均不塗色**，之後每一列都有m個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的忍者通道，是一串由最上列到最下列的n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。 設 k 為正整數。試找到最小正整數n ，使得保證在每一個m-日式三角形中，有一條包含至少k 個紅色圓的忍者通道。

首先，先觀察， $T_{i,j} = T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1} + W_{i,j}$ 依然是正確的，唯一有改變的是$S_i \ge S_{i-1} + W_{i-1} + m$，因為每排至少會新增$m$個紅色球，證明方式與引理 1 類似。

利用此觀察，可以再次建立S_i, M_i最小可能的表格

($m = 2$)	S_i 最小可能	M_i 最小可能
$i = 1$	0	0
$i = 2$	2	1
$i = 3$	5	2
$i = 4$	9	3
$i = 5$	14	3
$i = 6$	19	4
$i = 7$	25	4
$i = 8$	31	4
$i = 9$	37	5

注意到在修改後的題目下，對於$k = 1, 2, 3, 4, 5$ ，答案分別為$n = 2, 3, 4, 6, 9$
並沒有與原問題($m = 1$)的情況下有相同的明顯規律，也因此討論求和情況與使用數學歸納法將較為麻煩

為解決計算上的困難與進行結果的討論，首先需要先優化估計部分，並於估計完成後一併給出構造之方法：

若存在構造可以滿足每一層總和都符合$S_{i+1} = S_i + M_i + m\ (i \geq m)$，且$M_i = \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$，則此構造必可使$S_i$最小，又因$M_i \geq \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$，故答案亦最小， 即為符合估計下界的構造。但，於構造中計算S_i以確定符合$M_i = \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$的條件也不甚方便，因此可以使用以下這個較嚴格的條件進行確認

> 引理 5
> 若$T_i = \{T_{i,1}, T_{i,2}, \ldots, T_{i,i}\}$滿足集合中只有至多兩種不同取值，且兩種取值相差1 ，所有較大取值均相連，或是全部相同，$\forall i \geq m \in \mathbb{N}$ ，則此為符合答案的最小構造，且不論m的取值，均存在相對應的構造

證明：

首先驗證$M_i = \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$，因為只有至多兩種相差為1 的取值，故明顯只有可能為$\left\lfloor \frac{S_i}{i} \right\rfloor$或$\left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$

接著確認符合$S_{i+1} = S_i + M_i + m\ (i \geq m)$，由於前述條件，可以將
T_i表示成$\{a, \cdots, a, a+1, \cdots, a+1, a, \cdots, a\}$的形式，因此
$T_{i+1} = \{a, \cdots, a, a+1, \cdots, a+1, a, \cdots, a\}$再加上$m$ 個位置新增 1，故總共增加$a + 1 + m = M_i + m$，得證。
證明保證存在構造方式，首先當$i = m$ 時，明顯可以成立，只需將整排全部選取，
此時$T_m = \{1,1, \cdots, 1\}$即可

假設$i = k$時存在構造方式，欲證當$i = k + 1$時仍存在構造方式，則只需觀察上述證明中，$T_{k+1} = \{a, \cdots, a, a+1, \cdots, a+1, a, \cdots, a\}$另外在$m$個位置加上1 ，而加入1前仍符合題目條件，因此只需將1 每次加在$a + 1$的旁邊即可，若整排均已變$a + 1$ ，則可以從最左邊開始依次改為$a + 2$ ，如此仍會符合條件

有了引理 5 的幫助，可以構造出$m = 2$和$m = 3$的塗色答案(如圖 4、5)

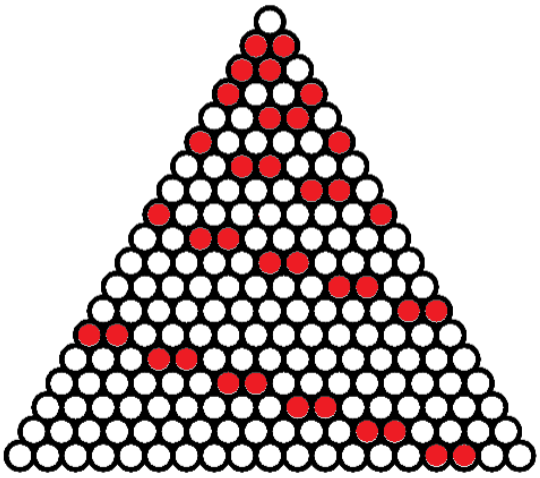


圖 4 $m = 2$的構造

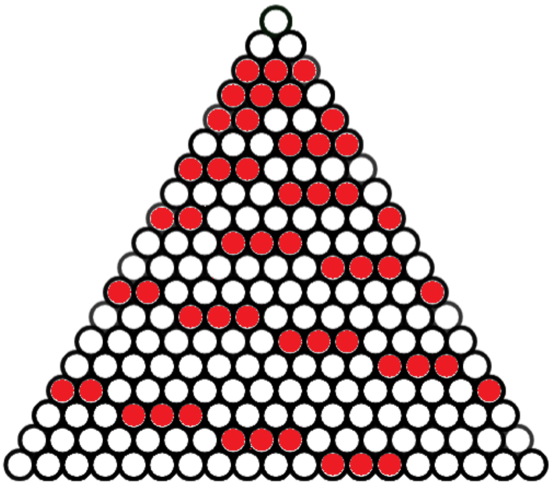


圖 5 $m = 3$的構造

最後，由於已知此構造是最佳的，可以直接利用構造中的性質進行最終答案的計算，雖然直接表示為紅色的圓圈較為不易，但仍可直接對紅圈性質進行估計

引理 6 給定m的情況下，若定義$< a_k >$依次代表$k = 1,2, \ldots,$ 的答案，則

$$\begin{cases} a_i = a_{i-1} + \left\lfloor \frac{b_{i-1}}{m} \right\rfloor + 1 \\ b_i = a_i - m + m \times \{\frac{b_{i-1}}{m}\} \end{cases}, i \in \mathbb{N}$$

其中$< b_k >$為輔助數列，$a_1 = m, b_1 = 0$，$\lfloor x \rfloor$為 floor function，$\{x\}$代表x的小數部分

證明:

觀察圖 3,圖 4 的構造，以數學歸納法證明b_i即為T_{a_i}中，小於i值的數量，a_i為原題答案

對於$i = 1$ ，由題目條件即可知道原命題成立

假設$i = l$時，原命題成立，欲證明當$i = l + 1$時，原命題仍然成立

觀察到每往下一排，會多新增一個球，而假設上一排有x個連續為最大值的球，則此時會有$x + 1$個，因此在尚未增加染色紅球時，不為最大值的球數量不會改變，因此需要$\left\lfloor \frac{b_i}{m} \right\rfloor$排後，剩餘的不為最大值的球數才會小於$m$，而此時下一排便會使必定會使最大值提高

故可知$a_{l+1} = a_l + \left\lfloor \frac{b_l}{m} \right\rfloor + 1$為正確答案，另外，在$T_{a_{l+1}-1}$時，尚有$m \cdot \left\{\frac{b_l}{m}\right\}$個位置不為最大值，故新增$m$個球後，共有$m - m \cdot \left\{\frac{b_l}{m}\right\}$個位置已為最大值，剩下$a_{l+1} - m + m \cdot \left\{\frac{b_l}{m}\right\}$個值不為最大值，故得證

至此，討論完多球情況下的答案，但卻需要仰賴輔助數列的幫忙，接下來證明以單一數列表示之方法，與呈現對於數列性質的探索

	$< a_i >$的前15 項	$OEIS$ 搜尋的結果	計算公式
$m = 2$	2,3,4,6,9, 14,21,31,47,70, 105,158,237,355,533	$A073941$	$c_i = \left\lceil \frac{1+\sum_{j=1}^{i-1} c_j}{2} \right\rceil$ $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1$ c_i與計算中的$a_{i-3}\forall i \geq 3$相同
$m = 3$	3,4,5,7,9, 12,16,21,28,38, 50,67,89,119,159	$A120149$	$c_i = 2 + \left\lfloor \frac{1+\sum_{j=0}^{i-1} c_j}{3} \right\rfloor$ $c_1 = 2$ c_i與計算中的$a_{i-1}\forall i \geq 2$相同
$m = 4$	4,5,6,7,8, 10,12,14,17,20, 24,29,35,42,50,	$A120171$	$c_i = \left\lceil \frac{11+\sum_{j=1}^{i-1} c_j}{4} \right\rceil$ $c_1 = 2$ c_i與計算中的$a_{i-5}\forall i \geq 5$相同

因此，猜測對於固定的m ，似乎可將答案表示為$a_i = \left\lfloor \frac{d+\sum_{j=1}^{i-1} a_j}{m} \right\rfloor$，其中$d$ 是代定常數，

但是，$OEIS$ 的結果卻有一個缺點：並不是由第一項開始均相同

性質 2 $b_i \equiv \sum_{i=1}^{i} a_i \pmod{m} \forall i \geq 1$

證明：

一樣使用數學歸納法，對於$i = 1$ ，因為$b_1 = 0, a_1 = m$，符合條件

假設當$i = x$時命題成立，欲證當$i = x + 1$ 命題成立，

又$b_{x+1} = a_x - m + m \cdot \left\{\frac{b_x}{m}\right\} \equiv a_{x+1} + b_x \pmod{m}$，又由歸納假設，

有$b_x \equiv \sum_{i=1}^{x} a_i \pmod{m}$，故$b_{x+1} \equiv \sum_{i=1}^{x+1} a_i \pmod{m}$

得證。

定理 7 $a_1 = m, a_i = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j}{m} \right\rfloor + m \,\forall i \geq 2$

證明：

使用數學歸納法證明定理 7：

首先，對於$i = 1$ ，命題明顯成立

假設當$i = x$時命題成立，即$a_x = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{x-1} a_i}{m} \right\rfloor + m$，欲證$a_{x+1} = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{x} a_i}{m} \right\rfloor + m$

由引理 6，知道$a_{x+1}=a_x+\left\lfloor\frac{b_x}{m}\right\rfloor+1$

故可以等價證明$\left\lfloor\frac{b_x}{m}\right\rfloor+1=a_{x+1}-a_x=\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}\right\rfloor+m-a_x$

由性質 2，知道$\left\lfloor\frac{b_x}{m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}\right\rfloor=\frac{b_x}{m}-\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}$

因此等價欲證$\frac{b_x}{m}-\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}=m-a_x-1$，$b_x-\sum_{i=1}^{x}a_i+m(a_x+1-m)=0$

但此時依然無法處理$\sum_{i=1}^{x}a_i$，因此希望再一次使用數學歸納法，同時證明這條式子：

對於$x=1$ ，$a_1=m,b_1=0$，成立

假設對於$x=y$，有$b_y-\sum_{i=1}^{y}a_i+m\left(a_y+1-m\right)=0$，欲證對於$x=y+1$時仍然成立，即$b_{y+1}-\sum_{i=1}^{y+1}a_i+m\left(a_{y+1}+1-m\right)=0$，考慮將兩式相減，等價欲證$b_{y+1}-b_y-a_{y+1}+m\left(a_{y+1}-a_y\right)=0$

又因為$b_{y+1}=a_{y+1}-m+m\cdot\left\{\frac{b_y}{m}\right\}$，且$a_{y+1}=a_y+\left\lfloor\frac{b_y}{m}\right\rfloor+1$

故等價證明$m\cdot\left\{\frac{b_y}{m}\right\}-m-b_y+m\left(\left\lfloor\frac{b_y}{m}\right\rfloor+1\right)$

即$m\left(\left\lfloor\frac{b_y}{m}\right\rfloor\right)+m\cdot\left\{\frac{b_y}{m}\right\}=b_y$，成立!

故得證 ■

因此，可以得到僅由a_i構成的表示式，至此完成了二維多球問題的討論

(三) 三維情況下的問題與立方體

我們希望將問題延伸至三維的情況，並繼續討論原始問題

但此時發現，對於球是否相鄰的問題，雖然可以立體堆塔的情況進行思考，惟數學定義上較為不方便，且對於更高維的情況會有困難，例如四維情形於實際中並不存在，故考慮超立方體的定義，

定義：

- 考慮三維座標平面中的非負整數點$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}),\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
- 位於第n 層的點座標(x,y,z)滿足$x+y+z=n$
- 兩座標$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$相鄰若且唯若$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|=1$

(三維版本的題目)

對於正整數n ，定義日式建築是一個邊長n 的正方體，其中每一層恰有一個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰點之一。設k為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

定義$T_{i,j,k}$為走至點(i,j,k)時最少通過的紅色點數量
此時類似於二維版本時有關係式$T_{i,j,k}=\max\left(T_{i-1,j,k},T_{i,j-1,k},T_{i,j,k-1}\right)+W_{i,j,k}$
同時定義：

- $T_m=\left\{T_{i,j,k},i+j+k=m\right\}$
- $S_m=\sum_{i+j+k=m}T_{i,j,k}$
- $W_m=\max(T_m)$

因此，計算S_m時就顯得較為困難，且若想以表格觀察規律也較為不便

較有可能之做法可能是以i值進行討論，並採用拆開成許多子區塊，在每一層裡，按照不同i值定義

- $T_{m,i}=\left\{T_{i,0,m-i},T_{i,1,m-i-1},\dots,T_{i,m-i,0}\right\}$
- $S_{m,i}=\sum_{j+k=m-i}T_{i,j,k}$

則可以注意到$T_{m,i}$與$T_{m-1,i}$的關係與降低一個維度之情況類似，而$T_{m,i}$與$T_{m-1,i-1}$則有著一樣多的元素，且對應位置之元素均相鄰，經過一些觀察之後，可以知道

> 引理 8 $S_{m,i}\geq\max\left(S_{m-1,i-1},S_{m-1,i}+\max\left(T_{i,0,m-i-1},T_{i,1,m-i-2},\dots,T_{i,m-i-1,0}\right)\right)+\max\left(T_{i,0,m-i},T_{i,1,m-i-1},\dots,T_{i,m-i,0}\right)$

證明：
首先，可以先忽略$W_{m,i}$，因為新增的紅球必定會使$S_{m,i}$之值增加$W_{m,i}$，且與上一層之答案無關
以下不妨設$W_{m,i}=0$
由引理 1 的證法，容易得到$S_{m,i}\geq S_{m-1,i}+W_{m-1,i}$，另外$S_{m,i}\geq S_{m-1,i-1}$ 則可以由$T_{i,j,k}\geq T_{i-1,j,k}$對於所有$T_{m,i}$內的元素皆成立得到，得證

但由於希望證明的總和$S_m=\sum_{i=0}^{m}S_{m,i}$ 若直接以引理 8 相加，會因為各項最大值較不易討論的關係而無法求得，此處選擇採用調整法

> 引理 9 給定S_m的值，使S_{m+1}之下界使用S_m估計之情況下達到最小值的所有可能T_m集合中，必有一個使得$\max(T_m)-\min(T_m)\leq 1$

證明：
由引理 8 ，可以知道$S_{m+1}=\sum_{i=0}^{m+1}S_{m+1,i}\geq\sum_{i=0}^{m+1}\max\left(S_{m,i-1},S_{m,i}+M_{m,i}\right)$
首先，對於$T_{m,i}$內的元素，自然希望$\max\left(T_{m,i}\right)-\min\left(T_{m,i}\right)\leq 1$，如此能使$M_{m,i}$最小，在使用引理 8 的估計下可使$S_{m+1}$值最小
接著，使用調整法對於$T_{m,0},T_{m,1},T_{m,2},\dots,T_{m,m}$中兩相鄰項滿足$\max\left(T_{m,i+1},T_{m,i}\right)-\min\left(T_{m,i+1},T_{m,i}\right)\geq 2$時分類討論並進行調整：

(1) $\max\left(T_{m,i+1}\right)>\min\left(T_{m,i}\right)+2$

此時，更動$S_{m,i+1}$和$S_{m,i}$會影響到$S_{m+1,i+2},S_{m+1,i+1},S_{m+1,i}$此三項，在使用調整法的前提

下，假設最不好的情況，亦即$T_{m,i+2}$的每一項均極大，$T_{m,i-1}$的每一項均極小，如此，使$S_{m,i+1}$之值減小時，無法使$S_{m+1,i+2}$減小，且$S_{m+1,i}$也必定會較大
但即使如此，如下證明在此情況下調整至$\max(T_{m,i+1})-\min(T_{m,i})=1$也保證不會變差
(1-1) 若$T_{m,i}$不全相同，且$\max(T_{m,i+1})-\min(T_{m,i})\geq 2$

則將$T_{m,i+1}$最大的數字減去1 後將$T_{m,i}$最小的數字增加1 將使

	$S_{m+1,i+2}$	$S_{m+1,i+1}$	$S_{m+1,i}$
相較於調整前之差值	≤ 0	-1	$\leq +1$

(註：表格中之數值代表調整後之數值減去調整前之數值的可能差值範圍，下同)
故此調整成立
(1-2)若$T_{m,i}$全相同，且$\max(T_{m,i+1})-\min(T_{m,i})\geq 2$，進行以下調整

將$T_{m,i+1}$中為最大值的所有數(假設有x 個)同時-1 ，並將$T_{m,i}$相對應數量的數字$+1$ ，此時
(因為$\max(T_{m,i+1})-\min(T_{m,i})\geq 2$，所以$\max(T_{m,i+1})-1\geq\min(T_{m,i})+1$，故$S_{m,i+1}+M_{m,i+1}\geq S_{m,i}$)

	$S_{m+1,i+2}$	$S_{m+1,i+1}$	$S_{m+1,i}$
相較於調整前之差值	≤ 0	$-x-1$	$\leq x+1$

故此調整成立
利用此調整方式，因為每次調整後$S_{m,i}$嚴格遞增，且$\max(T_{m,i})$每次最多增加1 ，故必定可以在經過有限次更動後，使得$\max(T_{m,i+1})-\min(T_{m,i})=1$，最後需要證明此調整方式會結束，可以定義$\mathrm{D}=\sum_{i+j+k=m}T_{i,j,k}^2$，操作$Case\ 1-1$或$Case\ 1-2$的過程中，可以視為若干次將兩數字$\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1},T_{i_2,j_2,k_2}$改為$\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1}-1,T_{i_2,j_2,k_2}+1$的操作，其中

$\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1}-T_{i_2,j_2,k_2}\geq 2$，考慮操作後D 值的改變，由於$\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1}^2+\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1}^2-(\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1}-1)^2-(T_{i_2,j_2,k_2}+1)^2=2(\mathrm{T}_{i_1,j_1,k_1}-T_{i_2,j_2,k_2}-1)>0$，故D值嚴格遞減，又因為$D\geq 0$ ，故明顯此調整經過有限次後停止，得證
(2) $\max(T_{m,i})>\min(T_{m,i+1})+2$

當$S_{m,i+1}+M_{m,i+1}\leq S_{m,i}$時，
將$T_{m,i}$中最大的數-1 ，$T_{m,i+1}$中最小的數$+1$ ，調整後各項數值表格如下：

	$S_{m+1,i+2}$	$S_{m+1,i+1}$	$S_{m+1,i}$
相較於調整前之差值	≤ 1	-1	≤ 0

因此可持續操作直至$\max(T_{m,i})-\min(T_{m,i+1})=1$，且有限次操作與$Case\ 1$ 相同，而此操作也同樣會使D 值嚴格遞減，故可知兩種調整法均必定結束，

此時距離完成證明情況還有最後一個問題：類似以下情況$\max(T_{m,i})=\min(T_{m,i})=x,\max(T_{m,i+1})=\min(T_{m,i+1})=x+1,\max(T_{m,i+2})=\min(T_{m,i+2})=x+2$時仍與欲證題目不符，因此還需以下最後兩種調整方式：

(1)對於連續若干個集合$\{T_{m,i},T_{m,i+1},T_{m,i+2},\dots,T_{m,j}\}$，滿足$\max(T_{m,i})=\min(T_{m,i})=x$，$\max(T_{m,i+1})=\min(T_{m,i+1})=\cdots=\max(T_{m,j-1})=\min(T_{m,j-1})=x+1$，$\max(T_{m,j})=\min(T_{m,j})=x+2$，則直接將$T_{m,j}$的所有元素$-1$，選擇$T_{m,i}$的$m-j$個元素$+1$，必定可使$S_{m+1}$不變或更小，且$D$值嚴格遞減，故一樣最多操作有限次

(2) 對於連續若干個集合$\{T_{m,i},T_{m,i+1},T_{m,i+2},\dots,T_{m,j}\}$，滿足$\max(T_{m,i})=\min(T_{m,i})=x+2$，$\max(T_{m,i+1})=\min(T_{m,i+1})=\cdots=\max(T_{m,j-1})=\min(T_{m,j-1})=x+1$，$\max(T_{m,j})=\min(T_{m,j})=x$，則直接將$T_{m,j}$的所有元素$+1$，選擇$T_{m,i}$的$m-j$個元素$-1$，必定可使$S_{m+1}$不變或更小，且$D$值嚴格遞減，故一樣最多操作有限次

若所有調整方式均已無法進行操作，則易知必有$\max(T_m)-\min(T_m)\le 1$，故得證。

引理 10 若$\max(T_m)-\min(T_m)=1$，則使S_{m+1}達到最小值的的所有方法中，其中一種是將所有$(i,j,k),i+j+k=m$按照字典序大小排列，並滿足排列後$T_{i,j,k}$所有數值遞減

證明：

首先由於$\max(T_m)-\min(T_m)=1$，故可以考慮簡化命題，將每一項$T_{i,j,k}$同時減去$\min(T_m)$，此時$0\le T'_{i,j,k}\le 1$，且$S'_m=S_m-|T_m|\cdot\min(T_m)$，

觀察$S_{m+1}=\sum_{i=0}^{m+1}S_{m+1,i}\ge\sum_{i=-1}^{m}\max(S_{m,i},S_{m,i+1}+M_{m,i+1})$的式子，改寫成$S'_{m+1}=\sum_{i=0}^{m+1}S'_{m+1,i}\ge\sum_{i=-1}^{m}\max(S'_{m,i},S'_{m,i+1}+1)$首先注意到

若$S'_{m,0},S'_{m,1},S'_{m,2},\cdots,S'_{m,m}$的最大值為x，可改寫$\sum_{i=-1}^{m}\max(S'_{m,i},S'_{m,i+1}+1)=\sum_{i=0}^{n}S'_{m,i}+\sum_{i=0}^{n}\max(0,S'_{m,i+1}+1-S'_{m,i})+S_{m,0}+1$

若最大值位於$S_{m,y}$，則也可改寫成$=\sum_{i=0}^{m}S'_{m,i}+x+\sum_{i=y}^{m}\max(0,S'_{m,i+1}+1-S'_{m,i})+\sum_{i=-1}^{y-2}\max(0,S'_{m,i+1}+1-S'_{m,i})$

接著，在固定$S'_m=\sum_{i=0}^{m}S'_{m,i}$的情況下，希望找到

$\boldsymbol{d}=x+\sum_{i=y}^{m}\max(0,S'_{m,i+1}+1-S'_{m,i})+\sum_{i=-1}^{y-2}\max(0,S'_{m,i+1}+1-S'_{m,i})$的最小值

首先，觀察若最大值並未出現在$S'_{m,0}$，且$S'_{m,y}=S'_{m,y+1}=\cdots=S'_{m,y+z}=x$則將$S'_{m,y-1},S'_{m,y-2},\cdots,S'_{m,0}$向前移動至$S'_{m,z+1}$可保證$d$減少或維持不變(將$\{S'_{m,m},S'_{m,m-1},\cdots,S'_{m,0}\}$調整為$\{S'_{m,m},S'_{m,m-1},\cdots S'_{m,y+z+1},S'_{m,y-1},\cdots,S'_{m,1},S'_{m,0},S'_{m,y+z},\cdots,S'_{m,y+1},S'_{m,y}\}$，則$d$的變動為$\le\max(0,S'_{m,0}+1-S'_{m,y+z})=0$，接著注意到若存在三項滿足$S'_{m,a}>S'_{m,a+1},S'_{m,a+1}<S'_{m,a+2}$，則將$S'_{m,a+1}$調整成$\min(S'_{m,a},S'_{m,a+2})$一樣不會使$d$增加，此時將任意$\min(S'_{m,a},S'_{m,a+2})-S'_{m,a+1}$個數字減1必不會使$d$增加，故可以假設$\{S'_{m,m},S'_{m,m-1},\cdots,S'_{m,0}\}$遞減，因為$S'_{m,0}$為最大值。

最後，若$S'_{m,a}$是最小滿足$S'_{m,a} = S'_{m,a+1}$的次項，則可以調整$\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \cdots, S'_{m,0}\}$至$\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \cdots, S'_{m,a+1}, S'_{m,a}+1, S'_{m,a-1}+1, \cdots, S'_{m,0}+1\}$不會使$d$ 增加，並可任一選取$a+1$ 項減1 (可重複選取)必不會使d 增加，至此可利用調整法說明$\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \cdots, S'_{m,0}\}$應嚴格遞增，此時$d = S'_{m,0}+1$

對於給定的 $S'_{m,0}$，利用嚴格遞增條件即有$S_m \le \frac{(1+S'_{m,0})(S'_{m,0})}{2}$，故給定$S_m$的前提下，若$w$ 滿足第w 個三角形數$\geq S_m$且第$w-1$ 個三角形數$< S_m$，則d 的最小值即為$w+1$

因此，若S_m為三角形數，則按字典序進行的排列完全符合以上構造，若S_m不為三角形數，則字典序進行的排列會使$\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \cdots, S'_{m,0}\} = \left\{S_m - \frac{w\cdot(w+1)}{2}, 1,2, \cdots, w\right\}$，一樣滿足$d$

有了估計上的結果後，可以進行構造

引理 11 首先選擇(0,0,0)作為第一個紅球的位置，之後令上一個紅球放置於(i,j,k)，下一個紅球則選擇放置於$f(i,j,k) = \begin{cases} (i,j-1,k+2), if\ \ j\neq 0 \\ (i-1,k+2,0), if\ i\neq 0,\ j=0, k\neq 0 \\ (i+k+1,0,0), if\ i=0,\ j=0, k\neq 0 \\ (i-1,2,0), if\ j=0, k=0 \end{cases}$

證明：一樣採用數學歸納法

首先第一層的紅球放置完畢後，$T_{0,0,0} = 1$，符合$\max(T_0) - \min(T_0) \le 1$，且$T_{i,j,k}$中滿足按照字典序排序後遞減

假設第x 層放置完畢後符合$\max(T_x) - \min(T_x) \le 1$，且$\forall i+j+k = x, T_{i,j,k}$按照字典序排序後遞減，以$(a,b,c)$為字典序最大滿足$T_{i,j,k} = \max(T_x)$的數對，且同時染色的紅球為$(a,b,c)$

欲證明第$x+1$ 層放置完畢後符合$\max(T_{x+1}) - \min(T_{x+1}) \le 1$，且$\forall i+j+k = x+1$，$T_{i,j,k}$按照字典序排序後遞減，以$f(a,b,c)$為字典序最大滿足$T_{i,j,k} = \max(T_x)$的數對，同時染色的紅球為$f(a,b,c)$

按照$f(a,b,c)$的定義方式，分成四種不同情況進行討論

由於$T_{x,0,0}, T_{x-1,2,0}, \cdots, T_{a,b,c}$的全部數均為$\max(T_x)$，

若$b \neq 0$ ，在新增紅球前，$\forall i+j+k = x+1, i \geq a+1, T_{i,j,k} = \max(T_x)\ \forall a+j+k = x+1, j \geq b, T_{a,j,k} = \max(T_x)$

故T_{x+1}在新增紅球前字典序最小不為$\max(T_x)$的為$T_{a,b-1,c+2}$，此情況正確

若$b=0, c=0$ ，在新增紅球前因為$(a,0,0)$是字典序最大，故表示此時只有$T_{a,0,0} = \max(T_x)$，其餘均為$\max(T_x)-1$，在T_{x+1}中僅有$T_{a+1,0,0}, T_{a,1,0}, T_{a,0,1}$為$\max(T_x)$，取$(a-1,2,0)$滿足歸納假設

若a $\neq 0, b=0, c\neq 0$ ，使用類似手法可以知道，由於新增紅球前字典序最小不為$\max(T_x)$的為$T_{a-1,c+2,0}$

若$a=0,b=0,c\neq 0$，此時新增紅球前$\forall i+j+k=x+1, T_{i,j,k}=\max(T_x)$，故新增紅球將使$\max(T_x)$**提高**，應直接選擇字典序最大者，為$(c+1,0,0)$

最後，利用引理 11 的證明過程中，只有在$a=0,b=0,c\neq 0$時，會使$\max(T_x)$增加，和定義的遞迴關係，可以進行答案的計算

定理 12 對於三維堆塔，對於任一k 值，n 的最小值為$2^{\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^2-1}}-1}-1}-1}_{k-1\text{ 個}2}}-2$

證明：
對於給定之k值，令所求之答案為$g(k)$
注意到$f(a,b,0)\to f(a,b-1,2)\to f(a,b-2,4),\cdots,\to f(a,0,2b)\to f(a-1,2b+2,0)$
因$k=m$的答案是$g(m)$，此時塗色紅球可表示為$(g(m)-1,0,0)$，由上述觀察，可得
$f(g(m)-1,0,0)\to f(g(m)-2,2=2^2-2,0)\to f(g(m)-3,2\cdot 2+2=2^3-2,0)\to$
$\cdots\to f\left(0,2^{g(m)}-2,0\right)\to\cdots\to f\left(0,0,2^{g(m)}-4\right)\to f(2^{g(m)+1}-3,0,0)$
故$k=m+1$ 的答案為$2^{g(m)+1}-2$
而$k=0$的答案為1，故$k=1$的答案為2，$k=2$的答案為6，利用數學歸納法即可得到
$g(k)=2^{\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^2-1}}-1}-1}-1}_{k-1\text{ 個}2}}-2$ ■

(四)三維多球問題探討
與三維單球相同，定義：

- 考慮三維座標平面中的非負整數點$(x,y,z), x,y,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
- 位於第n 層的點座標(x,y,z)滿足$x+y+z=n$
- 兩座標$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$相鄰若且唯若$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|=1$

此時可得三維多球之問題：

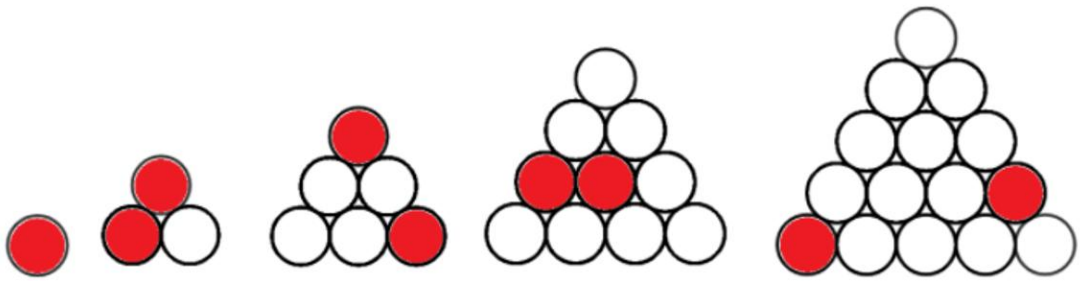
(延伸至三維多球情況)
對於正整數n,m，定義日式建築是一個邊長n的正方體，其中每一層恰有m個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰點之一。其中若該層點總數少於m，則將該層中所有位置均塗上紅色
設k為正整數，試找到最小正整數n，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

同樣定義 $T_{i,j,k}$為走至點(i,j,k)時最少通過的紅色點數量
此時一樣有關係式$T_{i,j,k}=\max\left(T_{i-1,j,k},T_{i,j-1,k},T_{i,j,k-1}\right)+W_{i,j,k}$

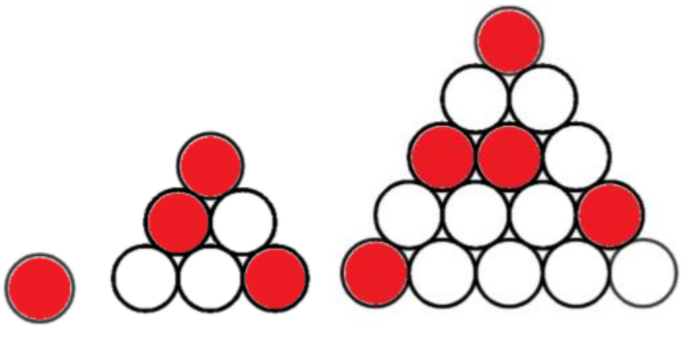
首先，利用與三維單球相似之調整法，即可知道引理 9,10 的結論仍然成立，因此可知每次之 dp 值應不超過兩種，其構造方法如下：

引理 13：三維m球中最好的放置方法如下：
首先若該層點總數少於m，則將該層中所有位置均塗上紅色
將$\{(i,j,k), i+j+k=x\}$按照字典序排序為
$\{x_1=(x,0,0), x_2=(x-1,1,0), \ldots, x_{\frac{(x+2)(x+1)}{2}}=(0,0,x)$
令第x層未加上$W_{i,j,k}$前，$\{T_{i,j,k}, i+j+k=x\}$中最小值按照字典序排序第一次出現在x_t，則按字典序依序塗色$x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, x_{t+m-1}$，其中若下標超過$\frac{(x+2)(x+1)}{2}$，則取其模$\frac{(x+2)(x+1)}{2}$

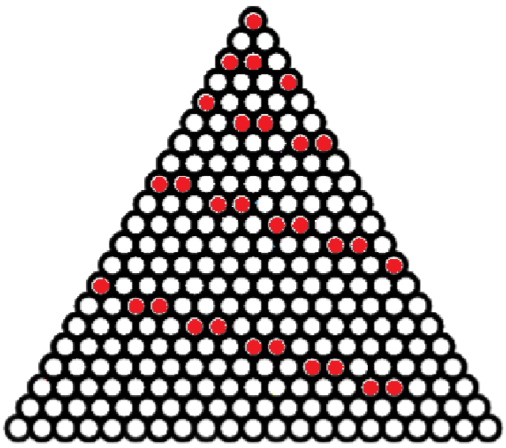
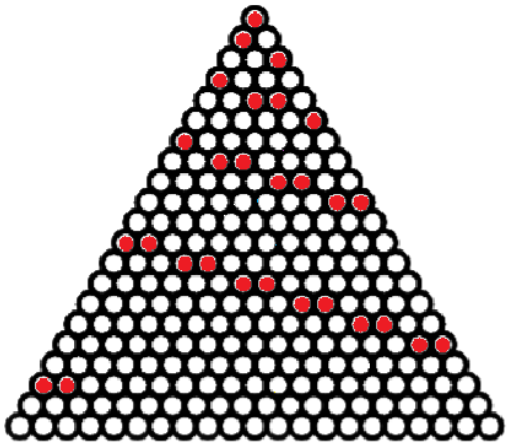
其中一個$n=5, m=2$的範例如下



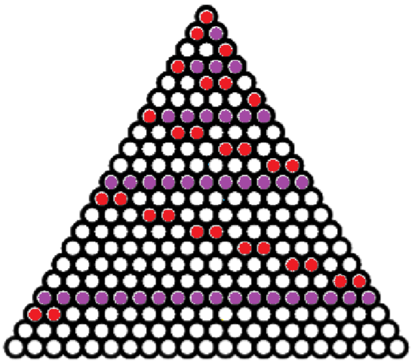
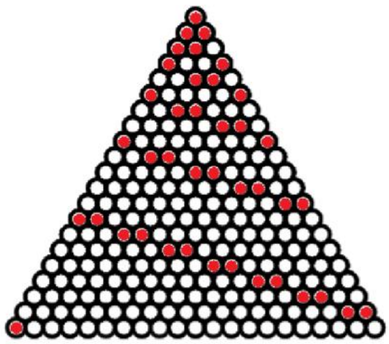
但為計算最小的n值，必須找出更為簡便觀察的方法，可以觀察到在上述構造下，會使k值增大的情況僅有塗色紅球包含該層三角形中字典序最小的球，如上圖中的1,2,3層
因此可以將同樣k值不同層的紅球塗色結果合併至一張圖中，如下圖為$m=2$前 5 層的合併結果



其中若該層有觸碰到最上層的圓圈，則按照$T_{i,j,k}$之值拆分成兩邊並放置於兩張圖中
先將這類合併的二維日式三角形區分為$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_m$，其中$M_i$代表第一次塗色該層時使用的紅球數，如左圖為$\mathrm{M}_1$，而右圖為$\mathrm{M}_2$
先將這類合併的二維日式三角形區分為$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_m$，其中$M_i$代表第一次塗色該層時使用的紅球數，如左圖為$\mathrm{M}_1$，而右圖為$\mathrm{M}_2$

可以觀察到合併日式三角形與二維多球之日式三角形極為相似，不同處在於若二維多球時該排會使k值增大，則合併日式三角形中必須將下一排塗色，而二維多球時則在該排起始處塗色

圖中紫色部分定義有紅球觸及最右側圓球後的下一排

接著探討何時紫色排數會增加：

使用與二維多球類似的遞迴關係，可以發現

引理 14 給定m, i的情況下，若定義$< a_{t,m,i} >$依次代表M_i合併日式三角形中第t次紫色排的排數，則對於足夠大的$t > m + 1$，有

$$\begin{cases} a_{t,m,i} = a_{t-1,m,i} + 1 + \left\lfloor \frac{a_{t-1,m,i}+1-b_{t-1,m,i}}{m} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m-b_{t-1,m,i}}{m} \right\rceil \\ b_{t,m,i} = m - m \times \{\frac{a_{t-1,m,i}+1-b_{t-1,m,i}}{m}\} \end{cases}, i \in \mathbb{N}$$

其中$< b_k >$為輔助數列，$a_{m+1,m,i}, b_{m+1,m,i}$須以手算直接求得且較無規律，$\lfloor x \rfloor$為 floor function，$\{x\}$代表x的小數部分

證明：

首先$b_{t,m,i}$為該紫色列中紅球個數，且對於$t > m + 1$，新一列中的紅球個數少於該排總共空位數，故只需討論該排紅球的情況

統計剩餘的空格數量，可以發現在無增加紅球的情況下剩餘空格數量不變，故因為該列共有$a_{t-1,m,i} + 1$個空位，若$b_t = 0$，則不須額外修補，故為$a_{t-1,m,i} + 1 + \left\lfloor \frac{a_{t-1}+1-b_{t-1}}{m} \right\rfloor$，

若$b_t > 0$，則所需行數較原先多 1，需增加修補項$\left\lceil \frac{m-b_{t-1}}{m} \right\rceil = 1$

接著，假設通過至少k個紅球時的最小n值為n_{min}，觀察由該排開始之合併日式三角形，並計算當前塗色紅球排數與總排數之差值，可以發現只有當出現紫色排時，才能使差值減小，而差值為 0 時則可通過至少$k+1$個紅球

因此對於三維多球，可得以下遞迴答案：

定理 15：

給定m的情況下，對於$n<m$，須以暴力計算方式求得其對應k值，若最大之k值為k_{max}以暴力計算求出對應$k_{max}+1$的最小n值與此時對應的合併日式三角型種類M_i後，有以下遞迴關係：

令$\langle A_t\rangle$為$k=t$時的解答，$\langle B_t\rangle$為$k=t$時的合併日式三角型種類

則

$$\begin{cases} A_t = A_{t-1} + a_{A_{t-1},m,B_{t-1}} \\ B_t = b_{A_{t-1},m,B_{t-1}} \end{cases}, i \in \mathbb{N}$$

對於$t>k_{max}+1$均成立

證明：必須至少要有A_{t-1}個紫色排，由引理 14 即得結論

最後，對於暴力驗證的部分，可以利用引理 13 給出的塗色位置進行計算

(五) 高維情況構造與討論

沿用三維情況的正立方體定義，希望可以將原問題推廣到更高維度的情況，但此時並不存在確切可視構造，考慮以 hyper-cube(超立方體)的方式進行推廣：

在D 維情況下之定義：

- 給定一個邊長為n 的D 維立方體，並定義左下角為$(0,0,\cdots,0)$，在D 維向量空間下定義每個點之座標值
- 對於任意點座標$(x_1,x_2,\cdots,x_D)$，定義其位於第$x_1+x_2+\cdots+x_D$層
- 若兩個點座標$(x_1,x_2,\cdots,x_D),(y_1,y_2,\cdots,y_D)$滿足$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1$，則此兩點相鄰，否則不相鄰

此時，延伸題目可以表示如下：

(高維版本的題目)

對於正整數n, D ，定義日式建築是一個邊長為n 的D 維正方體，其中前n層中每層恰有一個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第 1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰的點。設k 為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

討論：透過三維情況的討論，希望估計出確切答案較為困難，以下著重類似三維方式的估計進行討論，並給出答案的下界

同樣定義：

- $T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}$為走至$(x_1, x_2, \cdots, x_D)$經過的最多紅球數
- $W_{x_1,x_2,\cdots,x_D} = 1$若$(x_1, x_2, \cdots, x_D)$為紅球，否則為$0$

則有$T_{x_1,x_2,\cdots,x_D} = \max\left(T_{x_1-1,x_2,\cdots,x_D}, T_{x_1,x_2-1,\cdots,x_D}, \cdots, T_{x_1,x_2,\cdots,x_D-1}\right) + W_{x_1,x_2,\cdots,x_D}$

首先，先猜測答案發生在與三維情況類似的定義下：

猜測 1：在D 維度情況下，最小值的達成方法中，其中一種方法為使得任意層m 中，將$(x_1, x_2, \cdots, x_D), \sum_{i=1}^{D} x_i = m$按照字典序排序後，$T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}$遞減，且
$\max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = m\right) - \min\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = m\right) = 1$

以下提出一種可以滿足此猜想的構造方式：

引理 16 第一層塗色位置位置為$(0,0,\cdots,0)$，對於第二層以後的情況，若上一層塗紅色之位置為$x_1, x_2, \cdots, x_n$，定義

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} (x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}-1,x_n+2), if\ \ x_{n-1}\neq 0 \\ (x_1,x_2,\cdots x_{n-2}-1,x_n+2,0), if\ \ x_{n-1}=0, x_{n-2}\neq 0 \\ (x_1,x_2,\cdots,x_i-1,x_n+2,0,\cdots,0,0,0), if\ \ x_{n-1}=0, x_{n-2}=0,\cdots,x_{i+1}=0,x_i\neq 0 \\ (x_n+1,0,\cdots,0), if\ x_1=0,x_2=0,\cdots,x_{n-1}=0 \end{cases}$$

代表下一層塗色位置，則此塗色方式滿足猜測 1，其中由此函數定義計算出之每層塗色位置可以參考附錄 2

另外，會使$\max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = m\right)$增加若且為若上層塗色位置滿足$\mathrm{x}_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_{n-1} = 0$

證明：

根據$T_{x_1,x_2,\cdots,x_D} = \max\left(T_{x_1-1,x_2,\cdots,x_D}, T_{x_1,x_2-1,\cdots,x_D}, \cdots, T_{x_1,x_2,\cdots,x_D-1}\right) + W_{x_1,x_2,\cdots,x_D}$利用與引理 11 相同的方法猜測上一層中滿足若塗色位置為$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$, 則$T_{a_1,a_2,\cdots,a_D} = \max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = \sum_{i=1}^{D} a_i\right)$且$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$為最大字典序滿足
$\max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = \sum_{i=1}^{D} a_i\right)$

以下使用數學歸納法證明此猜測與引理 13

對於第一層的情況，明顯符合

以下假設對於$\sum_{i=1}^{D} x_i = M$時，塗色位置為

$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$,則$T_{a_1,a_2,\cdots,a_D} = \max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = M\right)$且$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$為最大字典序滿足$\max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = M\right)$，欲證下一層塗色位置為$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$時仍符合歸納假設

若$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$中，$a_{D-1} \neq 0$，則根據歸納假設，$(y_1, y_2, \cdots, y_D), \sum_{i=1}^{D} y_i = M$字典序$\geq (a_1, a_2, \cdots, a_D)$，若且唯若$\mathrm{T}_{y_1,y_2,\cdots,y_D} = \mathrm{T}_{a_1,a_2,\cdots,a_D} = \max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = M\right)$

首先，證明$(a_1, a_2, \cdots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$不與上一層中最大值相鄰：

利用相鄰定義，易知與上一層之$(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$，$(a_1, a_2 - 1, \cdots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$，…，$(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{D-1} - 2, a_D + 2)$，$(a_1 - 1, a_2, \cdots, a_{D-1} - 1, a_D + 1)$相鄰，但所有之字典序均較$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$小，故$\mathrm{T}_{a_1,a_2,\cdots a_{D-1}-1,a_D+2}$在塗色前$\neq \max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = M\right)$

接著，需要說明對於$(y_1, y_2, \cdots, y_D), \sum_{i=1}^{D} y_i = M + 1$字典序大於$(a_1, a_2, \cdots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$且位於第$\mathrm{M} + 1$層之位置，均在新增塗色紅球前即有

$\mathrm{T}_{y_1,y_2,\cdots,y_D} = \max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}, \sum_{i=1}^{D} x_i = M\right)$：

若$(y_1, y_2, \cdots, y_{D-2})$之字典序大於$(a_1, a_2, \cdots, a_{D-2})$，則可以選取最靠近$a_D$且非0者減去1，令新形成之位置為$(y_1', y_2', \cdots, y_D')$，則與$(y_1, y_2, \cdots, y_D)$相鄰且字典序仍大於$(a_1, a_2, \cdots, a_D)$，故由歸納假設可得

若$(y_1, y_2, \cdots, y_{D-2})$之字典序等於$(a_1, a_2, \cdots, a_{D-2})$，則若$\mathrm{y}_{D-1} > \mathrm{a}_{D-1} - 1$，可取$(y_1', y_2', \cdots, y_D') = (y_1, y_2, \cdots, y_{D-2}, y_{D-1} - 1, y_D)$仍符合題意，而若$\mathrm{y}_{D-1} \leq \mathrm{a}_{D-1} - 1$，則最大字典序則為$(a_1, a_2, \cdots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$，得證

其他種類情況證明手法類似，惟特別注意到$(a_1, a_2, \cdots, a_D) = (0,0, \cdots, M)$，則下一層於塗色前即全部為相同數值，因此塗色後會導致最大值+1，其餘情況則不會改動最大值

接著，計算原問題的下界

定理 17 假設$A'(D, n)$代表在有D 維度的情況下，初始放置紅球位置為$(n, 0,0, \cdots, 0)$時，操作至放置紅球位置為$(n', 0, \cdots, 0,0)$時，$n' > n$的數值，則有$A'(D, n) =$

$$\underbrace{A'(D-1, A'(D-1, \cdots, (A'(D-1}_{A'(D,n-1)\text{個}}, A'(D-1,0) \underbrace{+1) + 1) \cdots + 1) + 1)}_{A'(D,n-1)\text{個}}$$

而最小滿足之n在此構造下為$\mathrm{A}'(D, A'(D, n-1)) + 1$，其中約定$\mathrm{A}'(1, n) = n + 1, A'(D, 0) = 1$對任一$\mathrm{D}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$均成立

證明：

$\mathrm{A}'(D, n-1)$之答案代表該層紅球放置於$(A'(D, n-1), 0, \cdots, 0,0)$，考慮每次更動第一項之情況，則有$(A'(D, n-1), 0, \cdots, 0,0) \to (A'(D, n-1) - 1, 2 = A'(D-1, 0) + 1, \cdots, 0,0) \to (A'(D, n-1) - 2, A'(D-1, A'(D-1,0) + 1) + 1, \cdots, 0,0) \to \cdots \to$

$$(\underbrace{A'(D-1, A'(D-1, \cdots, (A'(D-1}_{A'(D,n-1)\text{個}}, A'(D-1,0) \underbrace{+1) + 1) \cdots + 1) + 1)}_{A'(D,n-1)\text{個}}, 0, \cdots, 0) \blacksquare$$

利用此公式，一樣可以在$\mathrm{D} = 2, \mathrm{D} = 3$時得到與上述討論相同之結果

(六)高維多球問題探討

對於高維多球問題，沿用高維單球對於空間中的定義

(高維多球版本的題目)

對於正整數n, D, m ，定義日式建築是一個邊長為n 的D 維正方體，其中前n層中每層恰有m個點為紅色點。**若該層不足$\boldsymbol{m}$球，則全數塗色**。忍者通道是一串由日式建築第 1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰的點。

設k 為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

同樣利用高維的猜測 1，我們可構造出一種滿足猜測的答案

定理 18：

D維m球中最好的放置方法如下：

首先若該層點總數少於m，則將該層中所有位置均塗上紅色

將$\{(y_1, y_2, \dots, y_D), y_1 + y_2 + \cdots + y_D = x\}$按照字典序排序為

$\{x_1 = (x, 0,0, \dots, 0), x_2 = (x - 1,1,0, \dots, 0), \dots, x_{C_{D-1}^{x+D-1}} = (0,0, x)$

令第x層未加上$W_{y_1, y_2, \dots, y_D}$前，$\{T_{y_1, y_2, \dots, y_D}, y_1 + y_2 + \cdots + y_D = x\}$中最小值按照字典序排序第一次出現在$x_t$，則按字典序依序塗色$x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+m-1}$，其中若下標超過$C_{D-1}^{x+D-1}$，則取其模$C_{D-1}^{x+D-1}$

同樣可透過是否染色$(x, 0, \dots, 0)$判斷$\max(T_{y_1, y_2, \dots, y_D})$是否增加，僅有當塗色紅球包含$(x, 0, \dots, 0)$時才會使$k$值增加1

計算D維多球也可使用與三維多球相同的降維度方法，透過分類各合併$D-1$維多球情況得到結果，惟過程中需以遞迴方式計算且三維以上之結果以較為繁複，故此處認為定理 18 為較佳的計算方法

(七) 達到最小值的解總數

最後，我們對於最原始的問題，探討達到最小k 值的塗色方法總數，先觀察當 $n=2^m-1, m\in\mathbb{N}$ ，因為對給定的正整數m ，$n=2^m-1$為最大使得原始題目為m 的整數

引理 19 若$\{p_1,p_2,\cdots,p_{2^m-1}\}$滿足$p_i\le i, p_i\in\mathbb{N}$，使得
$\left\{W_{1,p_1}=1, W_{2,p_2}=1,\cdots,W_{2^m-1,p_{2^m-1}}=1\right\}$為一個滿足$M_{2^m-1}=m$塗色方式，則對應的$T_{2^i-1}$全為$i$
$\forall i\in\mathbb{N}, i\le m$

證明：

由引理 3 的證明，有$S_{2^m-1}\ge m\cdot(2^m-1)\forall m\in\mathbb{N}$

對於給定的m ，對$i=m,m-1,\dots,1$ 進行數學歸納法

若T_{2^m-1}有不為的數字，由S_{2^m-1}的條件，可以知道T_{2^m-1}中必有$>m$ 的數字，與 $M_{2^m-1}=m$不合

假設對於$i=j$ ，T_{2^j-1}均全為j ，欲證$i=j-1$ 時，$T_{2^{j-1}-1}$均全為$j-1$

觀察到由引理 1，有$S_{2^j-1}\ge S_{2^j-2}+M_{2^j-2}+1\ge\cdots\ge S_{2^{j-1}-1}+\sum_{l=2}^{2^{j-1}+1}M_{2^j-l}+2^{j-1}$

此時若$T_{2^{j-1}-1}$不全為$j-1$ ，由$S_{2^{j-1}-1}\ge(j-1)\cdot\left(2^{j-1}-1\right)$，可知$M_{2^{j-1}-1}\ge j$，搭配上式，即有$S_{2^j-1}\ge(j-1)\cdot\left(2^{j-1}-1\right)+\left(2^{j-1}\cdot j\right)+2^{j-1}=j\cdot 2^j-j+1>j\cdot\left(2^j-1\right)$ 與歸納假設不符，得證。

利用引理 19，可知若定義p_i代表在i 列的三角塔中，使$M_i=\lfloor\log_2 i\rfloor$的塗色方法數，則計算$M_{2^m-1}$，可由$M_{2^{m-1}-1}$乘上在已知$T_{2^{m-1}-1}$均為$m-1$ 的前提下，第2^{m-1}列至第 2^m-1列的塗色方法總數

引理 20 已知$T_{2^{m-1}-1}$均為$m-1$ ，則共有$2^{2^{m-1}-1}$個塗色方法使第2^{m-1}列至第2^m-1列的塗色方法，使得T_{2^m-1}均為m

證明：

由於$T_{2^{m-1}-1}$均為$m-1$ ，所以$T_{2^{m-1}}$僅有一個位置為m ，以下證明若$T_{2^{m-1},i}=1$，則塗色方法共有$C_{i-1}^{2^{m-1}-1}$種，因此相加後即為$2^{2^{m-1}-1}$

由於$S_{2^m-1}=m\cdot(2^m-1)$，$S_{2^{m-1}-1}=(m-1)\cdot(2^{m-1}-1)$，由上述推導，可知 $S_i=S_{i-1}+M_{i-1}+1$，因此對於所有$T_i, 2^{m-1}\le i\le 2^m-1$中為$m$ 的$T_{i,j}$必須相鄰，否則 $S_i>S_{i-1}+M_{i-1}+1$，因此$T_i=\{m-1,m-1,\cdots,m-1,m,m,\cdots,m,m-1,m-1,\cdots,m-1\}$，其中開頭與結尾允許沒有$m-1$

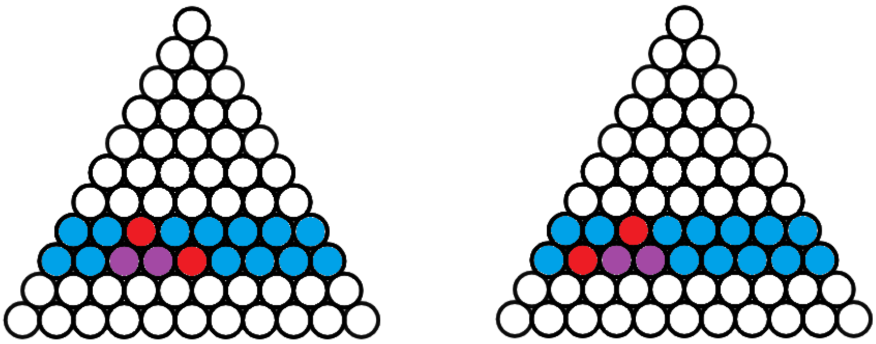


圖 6

圖 6提供了一種$W_{8,3}=1$之後，第九排可以進行選擇的示意圖，其中紅色代表塗色位置，紫色與紅色位置$T_{i,j}=m=4$，藍色位置$T_{i,j}=m-1=3$

觀察圖中關係，可以發現若沒有新增紅球，則藍色球數量固定，每次新增塗色位置可為紫色區段的最左邊或最右邊相鄰格子，因此，若$T_{2^m,i}=1$，則相當於有$i-1$次選擇染色左邊格子，有2^m-i次選擇染色右邊格子，以任意順序將選定左右後即可與塗色方法對應，故共有$C_{i-1}^{2^m-1}$種不同的塗色方式

例如以下$m=3$，選擇$W_{8,3}=1$的例子(前7 排暫時不考慮)

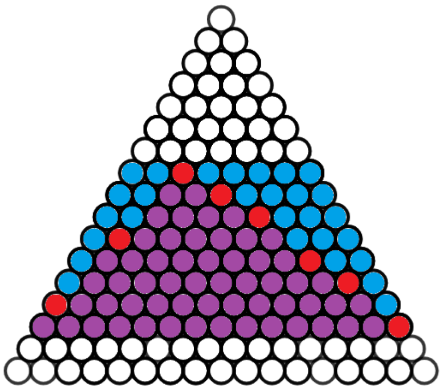


圖 7

圖片中呈現的著色方式，可記為R,R,L,R,R,L,R，其中R代表向右邊塗色，L代表向左邊塗色，另外，若給定R,R,L,R,R,L,R，也可以還原出圖 7 的著色方式，只需在塗完紫色後選擇最右邊的紫色格子旁邊的空格或最左邊的即可

故共有$\sum_{i=0}^{2^m-1}C_i^{2^m-1}=2^{2^m-1}$種可能的塗色，得證。

最後，由引理 19 和引理 20，可知$p_{2^m-1}=2^{2^{m-1}-1}\cdot 2^{2^{m-2}-1}\cdot\cdots\cdot 2^{2^1-1}=2^{2^m-m}$

接著，我們討論p_{2^m-2}的情況

引理 21 對於任一滿足$M_{2^m-2}=m+1$的塗色方式，必有$T_{2^{m-1}-2}=\{m,m,\cdots,m,m-1\}$或$T_{2^{m-1}-2}=\{m-1,m,\cdots,m,m\}$

證明：

由之前的討論，可知$S_{2^{m-1}-2}\geq(2^{m-1}-2)\cdot m-1$，若$S_{2^{m-1}-2}>(2^{m-1}-2)\cdot m-1$，則$S_{2^{m-1}-1}\geq(2^{m-1}-2)\cdot m+m+1=(2^{m-1}-1)\cdot m+1$，故$M_{2^{m-1}-1}>m$，因此$S_{2^{m-1}}\geq(2^{m-1}-1)\cdot m+1+(m+1)+1=(2^{m-1})\cdot m+3$，$S_{2^m-2}\geq S_{2^{m-1}}+\sum_{l=0}^{2^{m-1}-3}M_{2^{m-1}+l}+2^{m-1}-2\geq 2^{m-1}\cdot m+3+(1+m)\cdot(2^{m-1}-2)+2^{m-1}-2$化簡得到$S_{2^m-2}\geq(2^m-2)(m+1)+1$，由鴿籠原理可得矛盾

因此$S_{2^{m-1}-2}=(2^{m-1}-2)\cdot m-1$

可以發現無需直接計算S_{2^m-2}的最小可能，因為已知$S_{2^m-2}\geq(2^m-2)\cdot(m+1)-1$，且若達到最小值，則必須有$S_{i+1}=S_i+M_i+1$，且$M_i=\left\lceil\frac{S_i}{i}\right\rceil$，因此若存在2 個以上的$S_i$或$M_i$不為當下可能之最小值，則由鴿籠可證明不為合法塗色

使用此種觀點證明$T_{2^{m-1}-2}$中不可有數字$>m$：

因為此時$M_{2^{m-1}-2}>m$，至少會使$M_{2^{m-1}-2}$增加1，同時$M_{2^{m-1}-1}$也會增加1，故矛盾

最後，若$M_{2^{m-1}-2}$中$m-1$的位置不位於最左邊或最右邊，則$S_{2^{m-1}-1}>S_{2^{m-1}-2}+m+1$，故$S_{2^{m-1}-1}\geq(2^{m-1}-1)\cdot m+1$，此時$M_{2^{m-1}}>m-1$，因此$S_{2^{m-1}-1},M_{2^{m-1}}$不合，矛盾

結合以上結論，即得證

利用引理 19，可得$T_{2^{m-1}}=\{3,3,\cdots,3\}$或$\{2,3,\cdots,3,4,3,\cdots,3\}$或$\{3,\cdots,3,4,3,\cdots,3,2\}$，同樣允許4 之左邊或右邊無其他3

引理 22 若$M_{2^{m-1}}=m-1$，則2^{m-1}至2^m-2共有$3\cdot(2^{m-1}-1)\cdot\left(2^{2^{m-1}-3}\right)$種不同的塗色方法

證明：

由於$T_{2^{m-1}}$中均為$m-1$，故在2^{m-1}列至2^m-2列中，$T_{i,j}$均為$m-1$或m，類似引理 14 的想法，可知選取新染色位置大致為連續$T_{i,j}=m$的左側或右側，但此情況允許一個$S_{i+1}=S_i+M_i+2$，因此對於發生此情況的不同情況分類如下圖(以$m=4$舉例)

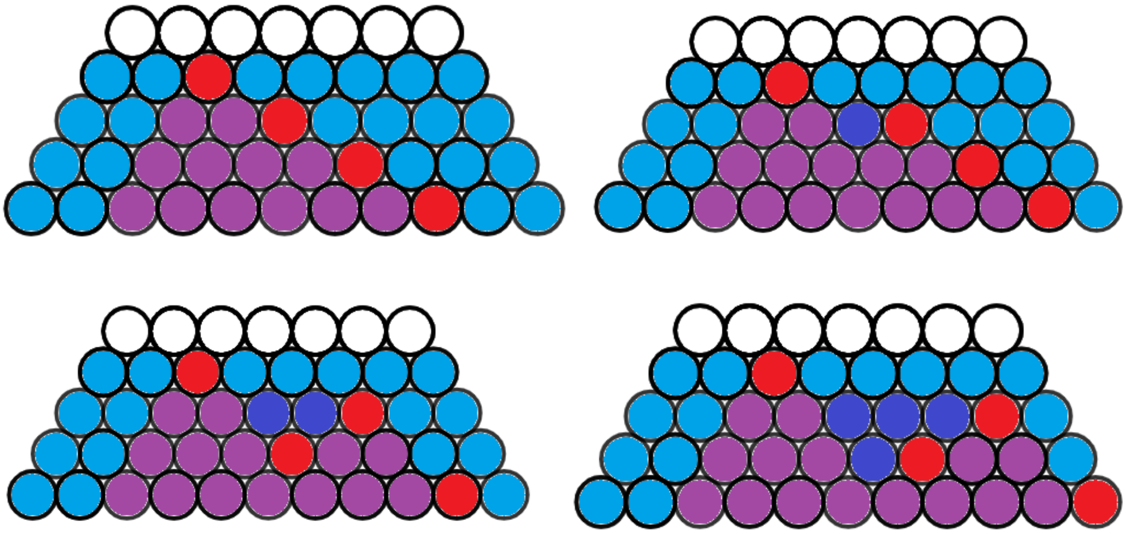


圖 8 其中 代表省略圓圈， 代表塗色圓圈， 代表$T_{i,j}=m$的非著色圓圈， 代表左側連續與右側連續滿足$T_{i,j}=m-1$的圓圈， 代表中間滿足$T_{i,j}=m-1$的圓圈

則可以注意到，若某一排新著色圓圈與$T_{i,j}=m$的非著色圓圈的

1. 距離超過3 的情況下，經過兩排後，會相較最佳情況(左上圖)中新增兩個紫色圓圈，不符合條件，若距離2^m-2兩排內(2^m-2或2^m-3)，則會因剩餘藍色格數過少而無法放置距離超過3 的著色圓圈
2. 距離為2 ，則下一排必須放置於兩個深藍圓圈中間，否則一樣會新增兩個紫色圓圈(左下圖第四排中的紅色圓圈若不塗色，也會在第五排變成紫色圓圈，外加其他紅色圓圈位置新增至第五排時新增的紫色圓圈，將比最少情況新增兩個以上)，對於第2^m-2排，則不可能放置距離為2 的點
3. 距離為1 的情況對於下一排則沒有特殊限制，可放置於紫色連續段的左邊或右邊，第2^m-2排仍有機會

一樣觀察淺藍色圓圈減少的情況，並嘗試轉換為組合計數模型

首先，若完全沒有任何一排與新著色圓圈的距離≥ 1 ，則答案即為$2^{2^{m-1}-1}$，因為此情況為唯一可使$M_{2^m-1}=m$的放置方法，且第2^m-1只有一種方法可塗色圓圈符合題意

若有一排存在紅色圓圈與紫色圓圈距離為1 ，則可將深藍色圓圈與紅色圓圈綁定，視為同一個圓圈，進行排列組合問題的思考，此時問題可改為在第2^{m-1}的第i 格塗紅色格後，左側有$i-1$ 格淺藍色圓圈，右側有$2^{m-1}-i$淺藍色圓圈，需要在其中一側綁定一組兩個相鄰的淺藍色圓圈，之後將其分成左與右排列在直線上，按順序依次表示每一排選擇左側或右側

此時按照不同i 值可以直接列出計算式

方法數

$$= \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-2}^{2^{m-1}-2} \cdot (i-2) + C_{2^{m-1}-i-1}^{2^{m-1}-2} \cdot (2^{m-1}-i-1) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-2}^{2^{m-1}-2} \cdot (i-2)$$

因為$C_{i-2}^{2^{m-1}-2} \cdot (i-2) = (2^{m-1}-2) \cdot C_{i-3}^{2^{m-1}-3}$

因此所求即為$2 \cdot (2^{m-1}-2) \cdot 2^{2^{m-1}-3} = (2^{m-1}-2) \cdot 2^{2^{m-1}-2}$

最後，對於距離為2 的情況，與距離為1 的情況類似，只是改為一次綁定3 個點，故方法數為$= \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-3}^{2^{m-1}-3} \cdot (i-3) + C_{2^{m-1}-i-2}^{2^{m-1}-3} \cdot (2^{m-1}-i-2) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-3}^{2^{m-1}-3} \cdot (i-3)$

使用幾乎一樣的簡化方式可得答案為$(2^{m-1}-3) \cdot 2^{2^{m-1}-3}$

將三種可能相加即為所求，得證■

性質 23 若$T_{2^{m-1}-1} = \{2,3,\cdots,3,4,3\cdots,3\}$的情況，考慮所有可能的4 的位置，在$2^{m-1}$至$2^m-2$總共有$(2^{m-1}-3) \cdot \left(2^{2^{m-1}-2}\right) + 1$種不同的塗色方法

證明：此時較難計算的問題是最左側的2 ，由先前的假設，知道若選擇$T_{i,j} = 3$的位置放置紅球，則只能緊連連續4 的段落，但對於2 的選擇則可以在任何時刻，因為不論何時染色最左側紅球，都只將使$T_{i,1} = 3$，不會產生矛盾

因此，考慮$T_{2^{m-1}-1,i} = 1, i \geq 2$，則可以將原命題改為有$i-1+1$ 次選擇左側的機會，其中有一個特殊選擇最左側的機會，和$2^{m-1}-1-i$次選擇右側的機會，而特殊選擇最左側的操作必須在左側全部選擇完成之前，直接計算可得共有$\sum_{i=2}^{2^m-1} C_i^{2^m-1} \cdot (i-1) = \sum_{i=1}^{2^m-1} C_i^{2^m-1} \cdot i - \sum_{i=1}^{2^m-1} C_i^{2^m-1} = (2^m-1) \cdot 2^{2^m-2} - 2^{2^m-1} + 1 = (2^{m-1}-3) \cdot \left(2^{2^{m-1}-2}\right) + 1$

故得證■

最後，由引理 21,引理 22, 性質 23，可得答案為

$$p_{2^{m-1}-1} \cdot (3 \cdot 2^{m-1}-1) \cdot \left(2^{2^{m-1}-3}\right) + p_{2^{m-1}-1} \cdot \left((2^{m-1}-3) \cdot \left(2^{2^{m-1}-2}\right) + 1\right)$$

(因為$T_{2^{m-1}-1} = \{m, m, \cdots, m\}$的方法數與$p_{2^{m-1}-1}$相同，而

$T_{2^{m-1}-1} = \{m-1, m, \cdots, m, m+1, m, \cdots, m\}$的方法數為$\frac{p_{2^{m-1}-1}}{2}$，

$T_{2^{m-1}-1} = \{m, \cdots, m, m+1, m, \cdots, m, m-1\}$的情況與上一種對稱)

化簡可得$p_{2^m-2} = \left((5 \cdot 2^m - 18) \cdot 2^{2^{m-1}-4} + 1\right) \cdot 2^{2^{m-1}-m}, \forall m \geq 3$

利用程式亦可得$p_6 = 46, p_{14} = 15888$，符合公式所得結果

透過p_{2^m-2}的討論過程，我們發現欲計算p_{2^m-3}需討論的情況會較多且規律較為複雜，推測對於任一項的表示方式並不簡單。

伍、研究結果與討論

(1) 對於原始 2023 IMO P5 的解答，為$k = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$

(2) 延伸至每排放置多球的情況，若每排有 m 個球，並在改編題目條件下，答案由以下遞迴式給出$a_1 = m, a_i = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{n-1} a_j}{m} \right\rfloor + m\ \forall i \geq 2$，其中$a_k$即為最少通過$k$ 個紅色圓圈的排數

(3) 延伸至三維空間下的問題，並改以向量空間進行定義，則至少通過k 個紅色圓圈的排數為$2^{\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{2}-1}}-1}-1}-1}_{k-1\text{ 個 }2}} - 2$

(4) 延伸至三維多球可使用定理 15 進行計算

(5) 對於高維情況下之問題，若$A'(D,n)$代表在有D 維度的情況下，初始放置紅球位置為$(n,0,0,\cdots,0)$時，操作至放置紅球位置為$(n',0,\cdots,0,0)$時，$n' > n$的數值，則有

$A'(D,n) = \underbrace{A'(D-1, A'(D-1, \cdots, (A'(D-1}_{A'(D,n-1)\text{個}}, A'(D-1,0) \underbrace{+1)+1)\cdots+1)+1)}_{A'(D,n-1)\text{個}}$

而至少通過k 個紅色圓圈的排數下界為$\mathrm{A}'(D, A'(D, k-1)) + 1$，其中約定

$\mathrm{A}'(1,n) = n+1, A'(D,0) = 1$對任一$\mathrm{D}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$均成立

(6) 延伸至高維多球可使用定理 18 進行計算

(7) 達到原始問題中最小值得塗色方法$< p_i >$有$p_{2^m-1} = 2^{2^m-m}$以及$p_{2^m-2} = \left((5 \cdot 2^m - 18) \cdot 2^{2^{m-1}-4} + 1\right) \cdot 2^{2^{m-1}-m}, \forall m \geq 3$

陸、 相關應用與未來展望

(1) 提出對於高維度情況下的估計

(2) 計算出任一項次的排列組數

柒、 參考資料

(1) 2023 年 IMO 第五題

(2) https://oeis.org 線上整數數列大全

(3) 高中數學課本第二冊(南一版)

※所有圖檔皆為作者自行製作

附錄 1：計算塗色任意維度下下界所給出之塗色方式

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
vector<int> find_answer(vector<int> Last1){
    vector<int> Last = Last1;

    int tmp = Last.back();
    if(Last[(int)Last.size()-2]!=0){
        Last[(int)Last.size()-1]+=2;
        Last[(int)Last.size()-2]-=1;
        return Last;
    }
    for(int i=(int)Last.size()-3;i>=0;i--){
        if(Last[i]>0){
            Last[i]-=1;
            Last[i+1]+=2+tmp;
            Last[(int)Last.size()-1]=0;
            return Last;
        }
    }
    Last[0]=tmp+1;
    Last[(int)Last.size()-1]=0;
    return Last;
}
int main(){
    int D,Total,Count = 0;
    cout << "請輸入維度與總排數，並以空格分隔"
    cin >> D >> Total;
    vector<int> Test;
    for(int i=0;i<D;i++) Test.push_back(0);
    for(int i=0;i<Total;i++){
    if(Test[0]==i){
        cout << "-------------\n";
        cout << "此段落中，最長路徑為" << Count << "\n";
        Count++;
    }
    vector<int> Test1 = find_answer(Test);
    for(int i:Test1) cout << i << " ";
```

```
  Test = Test1;
    cout << "\n";
    }
    cout << "-------------\n";
    cout << "在" << D << "維度" << Total << "排的情況，此構造的最長路徑為" <<    Count
<< "\n";
}
```

附錄 2：以枚舉法計算前 16 項的排列可能性

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define rep(i,n) for(int i=1;i<=n;i++)
#define rep2(i,n) for(int i=n;i>=1;i--)
int DP[50][50];
int W[50][50];
vector<int> Min_answer = {0,1,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5};
set<vector<int>> s;
int All_level,Total=0;
void init(int N){
	for(int j=0;j<=N;j++){
		DP[N][j]=0;
		W[N][j]=0;
	}
}
int find_answer(int level){
	int Max = 0;
	for(int j=1;j<=level;j++){
		DP[level][j] = max(DP[level-1][j-1],DP[level-1][j])+W[level][j];
		if(DP[level][j]>Min_answer[All_level]) return -1;
	}
	for(int i=1;i<=level;i++){
		Max = max(Max,DP[level][i]);
	}
	return Max;
}
void recursion(int Level){
```

```
	if(All_level==Level){
		rep(a1,Level){
			W[Level][a1]=1;
			int tmp = find_answer(Level);
			if(tmp==Min_answer[All_level]) Total+=1;
			init(Level);
		}
	}
	rep(a1,Level){
		W[Level][a1]=1;
	if(find_answer(Level)==-1) init(Level);
		else{
			//cout << "A1 = " << a1 << "\n";
			recursion(Level+1);
			init(Level);
		}
	}
}
int main(){
	cout << "請輸入總排數：";
	cin >> All_level;
	Total = 0;
	recursion(1);
	cout << Total << "\n";
}
```

【評語】050415

本作品是由 2023IMO 題目出發：將多個圓排成 n 列，使得由上而下的第 i 列恰有 i 個圓，而其公切線可以形成一個正三角形，在各列和各取一個圓著色，試問 n 要多大才能保證一定存在一條由上而下的路徑，其中經過至少 k 個著色圓？除了探討原問題也在原題目上考慮多種變化，其一是將各列的著色球數改成 m 個，其二是將問題由二維改成三維。作品有不錯的歸納思維且有脈絡，表達與呈現的部分上有一些更精進的空間，不過瑕不掩瑜，整體而言是相當優秀的作品。

作品簡報

圓緣相連—
關於忍者通道性質的探討

壹、研究動機

於練習IMO競賽試題時，特殊的第五題立刻引起了我們的興趣，看似雜亂無章，有著許多放置情況的日式三角形，在排數足夠大之情況下卻可以保證有任意長度的忍者通道，也因此，我們希望可以探索更多關於忍者通道的性質，並嘗試思考，不同的放置情況與高維度情況下，是否也能有如此漂亮之結果?

貳、研究目的

(1)討論每排放入不同球數，並對於所得結果進行探究
(2)討論並證明三維情況下單球與多球之解答
(3)採用hyper-cube，並討論高維度單球與多球堆體下界
(4)討論原始題目中在某些特定排數下達到最小值時的可能方法數

參、研究器材與設備

(1)電腦軟體：Geogebra,小畫家,C++ 17, wolfram alpha　　(2)紙，筆

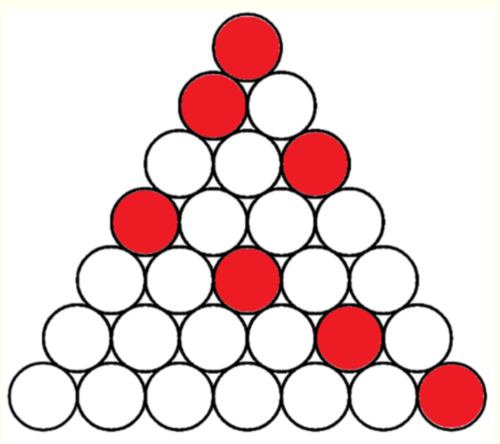
肆、研究過程或方法

(一) 原始題目：

(2023 IMO P5)
設 n 為正整數。日式三角形是將 $1+2+\cdots+n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有 $i=1,2,\cdots,n$ 由上往下數的第 i 列有i 個圓，且每一列都有一個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的忍者通道，是一串由最上列到最下列的n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。試找出k的最大值(以n表示)，保證在每一個日式三角形中，有一條包含至少k個紅色圓的忍者通道。

解答：
答案為$M_i=\lfloor\log_2(i)\rfloor+1$，以下給出其證明
- 定義$T_{n,m}$為抵達日式三角形第 n 列第 m個時，走過最多紅色圓的忍者通道數量
- 若第 n 列第 m 個為紅色，則定義$W_{n,m}=1$，否則$W_{n,m}=0$
- T_i代表集合$\{T_{i,1},T_{i,2},\dots,T_{i,i}\}$，$S_i=T_{i,1}+T_{i,2}+\cdots+T_{i,i}$，$M_i=\max(T_{i,1},T_{i,2},\cdots,T_{i,i})$

接著由題目敘述，可以發現$T_{i,j}=\max(T_{i-1,j-1},T_{i-1,j})+W_{i,j},1\le i\le n,1\le j\le i$
對每個日式三角形，包含最多個紅色圓的忍者通道的數量為$\max(T_{n,i}),1\le i\le n$，
以如下例子作為說明(左圖為$n=7$的其中一個例子)



此圖的$\mathrm{T}_{i,j}$值如下表所示

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$i=1$	1						
$i=2$	2	1					
$i=3$	2	2	2				
$i=4$	3	2	2	2			
$i=5$	3	3	3	2	2		
$i=6$	3	3	3	3	3	2	
$i=7$	3	3	3	3	3	3	3

定理1. $M_i\ge\lfloor\log_2 i\rfloor+1$，其中$\lfloor x\rfloor$為floor function，且$S_{2^{k+1}-1}\ge(2^{k+1}-1)\cdot(k+1)$

定理2. 存在$M_i\le\lfloor\log_2(i)\rfloor+1$的構造

證明：
設(i,j)代表將第i 行第j 格塗成紅色
以下證明$(1,1),(2,1),(3,3),(4,1),(5,3),(6,5),(7,7)$ ...的塗色法可以符合題意，即將$\left(i,2\left(i-2^{\lfloor\log_2(i)\rfloor}\right)+1\right)$塗成紅色成立
注意到可以證明若$\lfloor\log_2(i)\rfloor$的值相同，則這些紅色圓圈彼此互相不能到達，因為若$\lfloor\log_2(i)\rfloor$相同，則相當於塗色$(i,2i+1-c)$，c 是常數，而由相鄰兩排移動最多只能向右移動一格，假設存在為a,b，則有$(a,2a+1-c),(b,2b+1-c)$可以互相抵達，因此$2(b-a)\le b-a$，故$a=b$，矛盾
因此最多只有$0,1,2,\dots,\lfloor\log_2(i)\rfloor=\lfloor\log_2(i)\rfloor+1$種不同的取值
最後，由定理3與定理4，可以知道原題答案即為$M_i=\lfloor\log_2(i)\rfloor+1$

(二)每排放置多球的情況

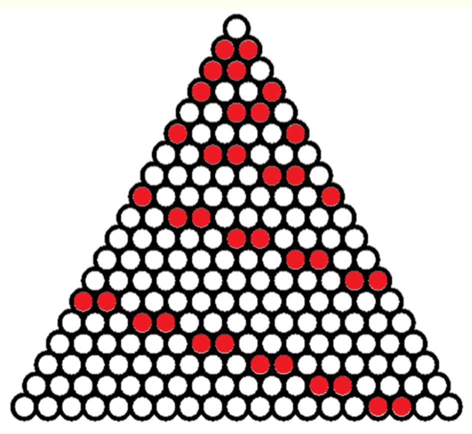
(延伸至多球情況下的題目)
設m為正整數，定義m-日式三角形是將$1+2+\cdots+n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有$i=1,2,\cdots,n$ 由上往下數的第 i 列有i 個圓，且前$m-1$ 列每列所有圓形**均不塗色**，之後每一列都有m個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的忍者通道是一串由最上列到最下列的n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。設k為正整數。試找到最小正整數n，使得保證在每一個m-日式三角形中，有一條包含至少k 個紅色圓的忍者通道。

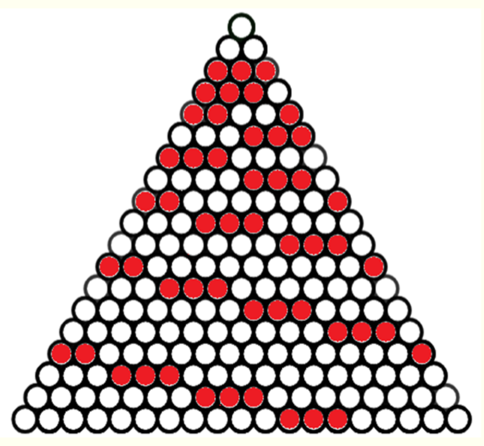
引理 5
若$T_i=\{T_{i,1},T_{i,2},\dots,T_{i,i}\}$滿足集合中只有至多兩種不同取值，且兩種取值相差1，所有較大取值均相連，或是全部相同，$\forall i\ge m\in\mathbb{N}$，則此為符合答案的最小構造，且不論m的取值，均存在相對應的構造

有了引理 5的幫助，可以構造出$m=2$和$m=3$的塗色答案(如下圖)
引理 6 給定m的情況下，若定義$\langle a_k\rangle$依次代表$k=1,2,\dots,$的答案，則

$$\begin{cases}a_i=a_{i-1}+\left\lfloor\frac{b_{i-1}}{m}\right\rfloor+1\\ b_i=a_i-m+m\times\{\frac{b_{i-1}}{m}\}\end{cases},i\in\mathbb{N}$$

其中$\langle b_k\rangle$為輔助數列，$a_1=m,b_1=0$，$\lfloor x\rfloor$為floor function，$\{x\}$代表x的小數部分





定理 7 $a_1=m,a_i=\left\lfloor\frac{\sum_{j=1}^{i-1}a_j}{m}\right\rfloor+m\ \forall i\ge 2$

使用數學歸納法證明定理 7： 首先，對於$i=1$，命題明顯成立
假設當$i=x$時命題成立，即$a_x=\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{x-1}a_i}{m}\right\rfloor+m$，欲證$a_{x+1}=\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}\right\rfloor+m$ 由引理 6，知道$a_{x+1}=a_x+\left\lfloor\frac{b_x}{m}\right\rfloor+1$
故可以等價證明$\left\lfloor\frac{b_x}{m}\right\rfloor+1=a_{x+1}-a_x=\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}\right\rfloor+m-a_x$，由性質2，知道$\left\lfloor\frac{b_x}{m}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}\right\rfloor=\frac{b_x}{m}-\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}$，
因此等價欲證$\frac{b_x}{m}-\frac{\sum_{i=1}^{x}a_i}{m}=m-a_x-1$，$b_x-\sum_{i=1}^{x}a_i+m(a_x+1-m)=0$ 但此時依然無法處理$\sum_{i=1}^{x}a_i$，因此希望再一次使用數學歸納法，同時證明這條式子：
對於$x=1$，$a_1=m,b_1=0$，成立，假設對於$x=y$，有$b_y-\sum_{i=1}^{y}a_i+m(a_y+1-m)=0$，欲證對於$x=y+1$時仍然成立，即$b_{y+1}-\sum_{i=1}^{y+1}a_i+m(a_{y+1}+1-m)=0$，考慮將兩式相減，等價欲證$b_{y+1}-b_y-a_{y+1}+m(a_{y+1}-a_y)=0$，又因為$b_{y+1}=a_{y+1}-m+m\cdot\left\{\frac{b_y}{m}\right\}$，
且$a_{y+1}=a_y+\left\lfloor\frac{b_y}{m}\right\rfloor+1$ 故等價證明$m\cdot\left\{\frac{b_y}{m}\right\}-m-b_y+m\left(\left\lfloor\frac{b_y}{m}\right\rfloor+1\right)$ 即$m\left(\left\lfloor\frac{b_y}{m}\right\rfloor\right)+m\cdot\left\{\frac{b_y}{m}\right\}=b_y$，成立! 故得證 ■

(三) 三維單球與多球情況探討

定義：

- 考慮三維座標空間中的非負整數點$(x,y,z), x,y,z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- 位於第n 層的點座標(x,y,z)滿足$x+y+z=n$ ，兩座標$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$相鄰若且唯若$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|=1$

(三維單球的題目)
對於正整數n ，定義日式建築是一個邊長n 的正方體，其中每一層恰有一個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰點之一。設k為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

定義 $T_{i,j,k}$為走至點(i,j,k)時最少通過的紅色點數量，此時類似於二維版本時有關係式
$T_{i,j,k}=\max(T_{i-1,j,k},T_{i,j-1,k},T_{i,j,k-1})+W_{i,j,k}$
同時定義$T_m=\{T_{i,j,k}, i+j+k=m\}, S_m=\sum_{i+j+k=m} T_{i,j,k}, W_m=\max(T_m)$
因此，計算S_m時就顯得較為困難，且若想以表格觀察規律也較為不便
較有可能之做法可能是以i 值進行討論，並採用拆開成許多子區塊，在每一層裡，按照不同i 值定義

- $T_{m,i}=\{T_{i,0,m-i},T_{i,1,m-i-1},\dots,T_{i,m-i,0}\}, S_{m,i}=\sum_{j+k=m-i} T_{i,j,k}$

引理 10 若$\max(T_m)-\min(T_m)=1$，則使S_{m+1}達到最小值的的所有方法中，其中一種是將所有$(i,j,k), i+j+k=m$按照字典序大小排列，並滿足排列後$T_{i,j,k}$所有數值遞減

引理 11 首先選擇(0,0,0)作為第一個紅球的位置，之後令上一個紅球放置於(i,j,k)，下一個紅球則選擇放置於$f(i,j,k)=\begin{cases}(i,j-1,k+2), if\ \ j\neq 0\\ (i-1,k+2,0), if\ i\neq 0, j=0, k\neq 0\\ (i+k+1,0,0), if\ i=0, j=0, k\neq 0\\ (i-1,2,0), if\ j=0, k=0\end{cases}$

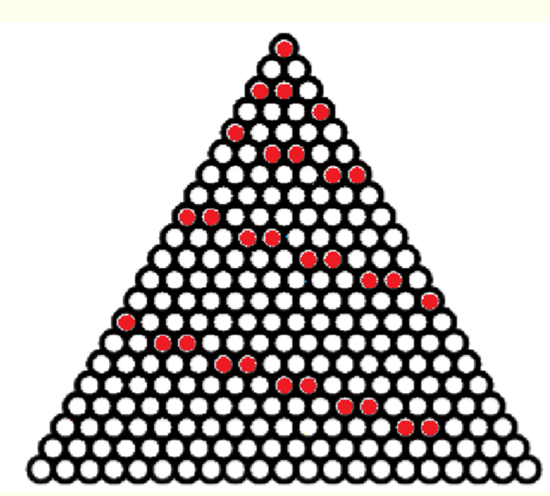
定理12 對於三維堆塔，對於任一k值，n的最小值為$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^2-1}-1}-1}-1}}_{k-1\text{個}2}-2$

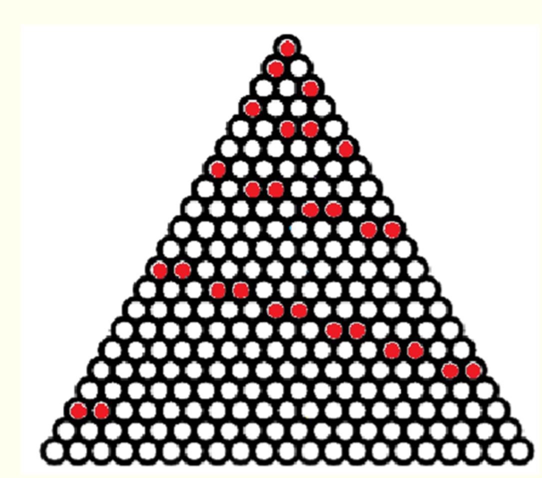
證明：
對於給定之k值，令所求之答案為$g(k)$
注意到$f(a,b,0)\to f(a,b-1,2)\to f(a,b-2,4),\cdots,\to f(a,0,2b)\to f(a-1,2b+2,0)$
因$k=m$的答案是$g(m)$，此時塗色紅球可表示為$(g(m)-1,0,0)$，由上述觀察，可得$f(g(m)-1,0,0)\to f(g(m)-2,2=2^2-2,0)\to f(g(m)-3,2\cdot 2+2=2^3-2,0)\to\cdots\to f(0,2^{g(m)}-2,0)\to\cdots\to f(0,0,2^{g(m)}-4)\to f(2^{g(m)+1}-3,0,0)$

故$k=m+1$的答案為$2^{g(m)+1}-2$而$k=0$的答案為1，故$k=1$的答案為2，$k=2$的答案為6，利用數學歸納法可$g(k)=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^2-1}-1}-1}-1}}_{k-1\text{個}2}-2$ ■

(三維多球的題目)
對於正整數n,m ，定義日式建築是一個邊長n 的正方體，其中每一層恰有m個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰點之一。其中若該層點總數少於m，則將該層中所有位置均塗上紅色，設k為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

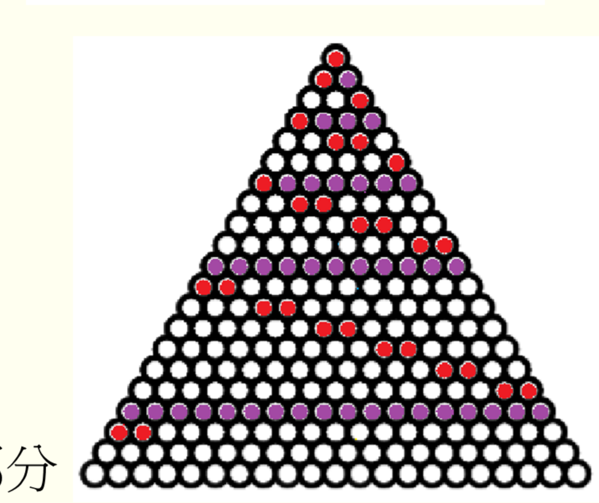
其中若該層有觸碰到最上層的圓圈，則按照$T_{i,j,k}$之值拆分成兩邊並放置於兩張圖中
先將這類合併的二維日式三角形區分為$M_0,M_1,M_2,\dots,M_m$，其中M_i代表第一次塗色該層時使用的紅球數，如左圖為M_1，而右圖為M_2





引理 14 給定m,i 的情況下，若定義$< a_{t,m,i} >$依次代表M_i合併日式三角形中第t次紫色排的排數(如右圖)，
則對於足夠大的$t>m+1$，有

$$\begin{cases} a_{t,m,i}=a_{t-1,m,i}+1+\left\lfloor\frac{a_{t-1,m,i}+1-b_{t-1,m,i}}{m}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m-b_{t-1,m,i}}{m}\right\rfloor \\ b_{t,m,i}=m-m\times\left\{\frac{a_{t-1,m,i}+1-b_{t-1,m,i}}{m}\right\}\end{cases}, i\in\mathbb{N}$$



其中$< b_k >$為輔助數列，$a_{m+1,m,i}, b_{m+1,m,i}$須以手算直接求得且較無規律，$\lfloor x\rfloor$為floor function，$\{x\}$代表x的小數部分

定理15：
給定m的情況下，對於$n<m$，須以暴力計算方式求得其對應k值，若最大之k值為k_{max}以暴力計算求出對應$k_{max}+1$的最小n值與此時對應的合併日式三角型種類M_i後，有以下遞迴關係：令$< A_t >$為$k=t$時的解答，$< B_t >$為$k=t$時的合併日式三角型種類
則$\begin{cases} A_t=A_{t-1}+a_{A_{t-1},m,B_{t-1}} \\ B_t=b_{A_{t-1},m,B_{t-1}}\end{cases}, i\in\mathbb{N}$，對於$t>k_{max}+1$均成立

(四) 高維情況構造與討論

沿用三維情況的正立方體定義，希望可以將原問題推廣到更高維度的情況，但此時並不存在確切可視構造，考慮以hyper-cube (超立方體)的方式進行推廣：
在D 維情況下之定義：

- 給定一個邊長為n 的D 維立方體，並定義左下角為$(0,0,\cdots,0)$，在D 維向量空間下定義每個點之座標值
- 對於任意點座標$(x_1,x_2,\cdots,x_D)$，定義其位於第$x_1+x_2+\cdots+x_D$層

若兩個點座標$(x_1,x_2,\cdots,x_D),(y_1,y_2,\cdots,y_D)$滿足$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1$，則此兩點相鄰，否則不相鄰
此時，延伸題目可以表示如下：

(高維版本的題目)
對於正整數n,D ，定義日式建築是一個邊長為n 的D 維正方體，其中前n層中每層恰有一個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰的點。設k 為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

猜測1：在D 維度情況下，最小值的達成方法中，其中一種方法為使得任意層m 中，將$(x_1,x_2,\cdots,x_D),\sum_{i=1}^{D}x_i=m$
按照字典序排序後，$T_{x_1,x_2,\cdots,x_D}$遞減，且$\max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D},\sum_{i=1}^{D}x_i=m\right)-\min\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D},\sum_{i=1}^{D}x_i=m\right)=1$

引理 13 第一層塗色位置位置為$(0,0,\cdots,0)$，對於第二層以後的情況，若上一層塗紅色之位置為$x_1,x_2,\cdots,x_n$，定義

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}-1,x_n+2), if\ \ x_{n-1}\neq 0\\ (x_1,x_2,\cdots x_{n-2}-1,x_n+2,0), if\ \ x_{n-1}=0,x_{n-2}\neq 0\\ (x_1,x_2,\cdots,x_i-1,x_n+2,0,\cdots,0,0,0), if\ \ x_{n-1}=0,x_{n-2}=0,\cdots,x_{i+1}=0,x_i\neq 0\\ (x_n+1,0,\cdots,0), if\ x_1=0,x_2=0,\cdots,x_{n-1}=0\end{cases}$ 代表下一層塗色位置，則此塗色方式滿足猜測1，
其中由此函數定義計算出之每層塗色位置可以參考附錄2
另外，會使$\max\left(T_{x_1,x_2,\cdots,x_D},\sum_{i=1}^{D}x_i=m\right)$增加若且為若上層塗色位置滿足$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_{n-1}=0$

定理 14 假設$A'(D,n)$代表在有D 維度的情況下，初始放置紅球位置為$(n,0,0,\cdots,0)$時，操作至放置紅球位置為$(n',0,\cdots,0,0)$時，$n'>n$的數值，則有$A'(D,n)=\underbrace{A'(D-1,A'(D-1,\cdots,(A'(D-1}_{A'(D,n-1)個},A'(D-1,0)\underbrace{+1)+1)\cdots+1)+1)}_{A'(D,n-1)個}$
而最小滿足之n在此構造下為$A'(D,A'(D,n-1))+1$ ，其中約定$A'(1,n)=n+1, A'(D,0)=1$對任一$D,n\in\mathbb{N}$均成立

利用此公式，一樣可以在$D=2, D=3$時得到與上述討論相同之結果

(高維多球版本的題目)
對於正整數n,D,m ，定義日式建築是一個邊長為n 的D 維正方體，其中前n層中每層恰有m個點為紅色點。**若該層不足m球，則全數塗色**。忍者通道是一串由日式建築第1 層到第n 層的n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰的點。設k 為正整數，試找到最小正整數n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條k 個紅色點的忍者通道。

定理18 D維m球中最好的放置方法如下：首先若該層點總數少於m，則將該層中所有位置均塗上紅色
將$\{(y_1,y_2,\dots,y_D), y_1+y_2+\cdots+y_D=x\}$按照字典序排序為
$\{x_1=(x,0,0,\dots,0), x_2=(x-1,1,0,\dots,0),\dots,x_{C_{D-1}^{x+D-1}}=(0,0,x)$
令第x層未加上$W_{y_1,y_2,\dots,y_D}$前，$\{T_{y_1,y_2,\dots,y_D}, y_1+y_2+\cdots+y_D=x\}$中最小值按照字典序排序第一次出現在$x_t$，則按字典序依序塗色$x_t,x_{t+1},x_{t+2},\dots,x_{t+m-1}$，其中若下標超過$C_{D-1}^{x+D-1}$，則取其模$C_{D-1}^{x+D-1}$

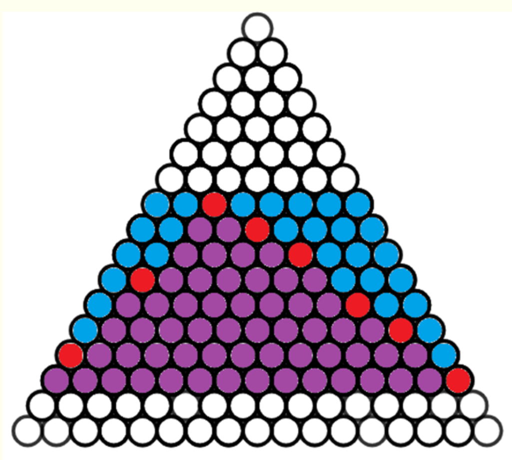
同樣可透過是否染色$(x,0,\dots,0)$判斷$\max(T_{y_1,y_2,\dots,y_D})$是否增加，僅有當塗色紅球包含$(x,0,\dots,0)$時才會使$k$值增加1

(五) 達到最小值的解總數

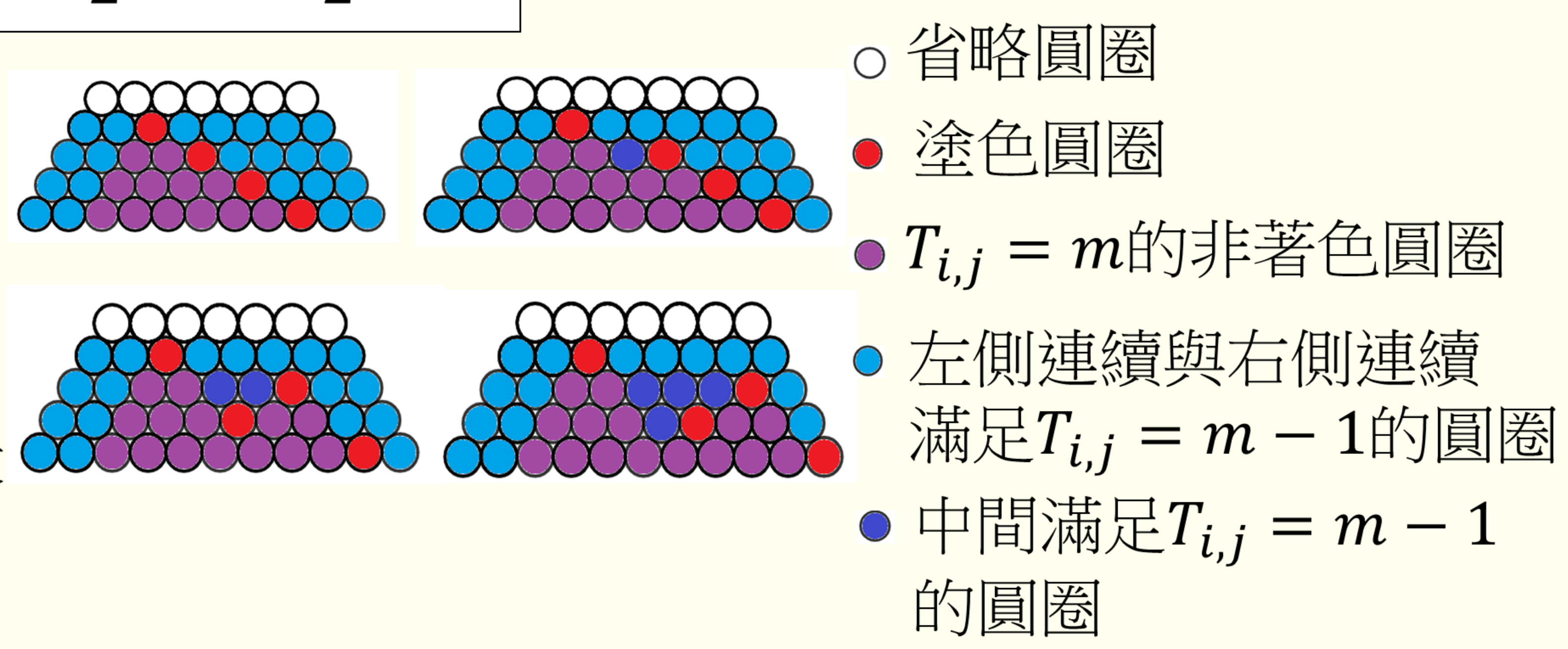
最後，我們對於最原始的問題，探討達到最小 k 值的塗色方法總數，先觀察當$n=2^m-1, m\in\mathbb{N}$ ，因為對給定的正整數$m, n=2^m-1$ 為最大使得原始題目答案為m 的整數。

引理 16 已知$T_{2^{m-1}-1}$均為$m-1$ ，則共有$2^{2^{m-1}-1}$個塗色方法使第2^{m-1}列至第2^m-1列的塗色方法，使得T_{2^m-1}均為m

由引理 15和引理 16 ，可知$p_{2^m-1}=2^{2^{m-1}-1}\cdot 2^{2^{m-2}-1}\cdot\dots\cdot 2^{2^1-1}=2^{2^m-m}$



圖片中呈現的著色方式，可記為R,R,L,R,R,L,R ，其中R 代表向右邊塗色，L 代表向左邊塗色，另外若給定R,R,L,R,R,L,R ，也可以還原出圖7的著色方式，只需在塗完紫色後選擇最右邊的紫色格子旁邊的空格或最左邊的即可



接著，我們討論p_{2^m-2}的情況:
引理 17 對於任一滿足$M_{2^m-2}=m+1$的塗色方式，必有$T_{2^{m-1}-2}=\{m,m,\cdots,m,m-1\}$或$T_{2^{m-1}-2}=\{m-1,m,\cdots,m,m\}$

引理 18 若$M_{2^{m-1}}=m-1$，則2^{m-1}至2^m-2共有$3\cdot(2^{m-1}-1)\cdot\left(2^{2^{m-1}-3}\right)$種不同的塗色方法

性質 19 若$T_{2^{m-1}-1}=\{2,3,\cdots,3,4,3\cdots,3\}$的情況，考慮所有可能的4 的位置，在$2^{m-1}$至$2^m-2$總共有$(2^{m-1}-3)\cdot\left(2^{2^{m-1}-2}\right)+1$種不同的塗色方法

最後，由引理 17,引理 18, 性質 19，可得答案為
$p_{2^{m-1}-1}\cdot(3\cdot 2^{m-1}-1)\cdot\left(2^{2^{m-1}-3}\right)+p_{2^{m-1}-1}\cdot\left((2^{m-1}-3)\cdot\left(2^{2^{m-1}-2}\right)+1\right)$
化簡可得$p_{2^m-2}=\left((5\cdot 2^m-18)\cdot 2^{2^{m-1}-4}+1\right)\cdot 2^{2^{m-1}-m}, \forall m\geq 3$

透過p_{2^m-2}的討論過程，我們發現欲計算p_{2^m-3}需討論的情況會較多且規律較為複雜，推測對於任一項的表示方式並不簡單。

伍、 研究結果與討論

(1) 對於原始問題的解答，為$k=\lfloor\log_2(i)\rfloor+1$
(2)延伸至每排放置多球的情況，若每排有m個球，並在改編題目條件下，答案由以下遞迴式給出
$a_1=m, a_i=\left\lceil\frac{\sum_{j=1}^{n-1}a_j}{m}\right\rceil+m\ \forall i\geq 2$，其中$a_k$即為最少通過$k$個紅色圓圈的排數
(3)延伸至三維空間下的問題，並改以向量空間進行定義，則至少通過k 個紅色圓圈的排數為
$2^{\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^2-1}}-1}-1}-1}_{k-1個2}}-2$
(4)延伸至三維多球可使用定理15進行計算
(5)對於高維情況下之問題，若$A'(D,n)$代表在有D 維度的情況下，初始放置紅球位置為$(n,0,0,\cdots,0)$時，操作至放置紅球位置為$(n',0,\cdots,0,0)$時，$n'>n$的數值，則有$A'(D,n)=$
$\underbrace{A'(D-1,A'(D-1,\cdots,(A'(D-1}_{A'(D,n-1)個},A'(D-1,0)\underbrace{+1)+1)\cdots+1)+1)}_{A'(D,n-1)個}$
而至少通過k 個紅色圓圈的排數下界為$A'(D,A'(D,k-1))+1$，其中約定$A'(1,n)=n+1, A'(D,0)=1$對任一$D,n\in\mathbb{N}$均成立
(6)延伸至高維多球可使用定理18進行計算
(7)達到原始問題中最小值得塗色方法$\langle p_i\rangle$有$p_{2^m-1}=2^{2^m-m}$以及
$p_{2^m-2}=\left((5\cdot 2^m-18)\cdot 2^{2^{m-1}-4}+1\right)\cdot 2^{2^{m-1}-m}, \forall m\geq 3$

陸、 相關應用與未來展望

(1) 提出對於高維度情況下的估計

(2) 計算出任一項次的排列組數

柒、 參考資料

(1) 2023年IMO第五題

(2) 線上整數數列大全

(3)高中數學課本第二冊(南一版)

註：所有圖形均為自行繪製