

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

佳作

050414

衍伸三角形之有向面積性質探究

學校名稱： 國立臺灣師範大學附屬高級中學

作者： 高二 呂昀廣 高二 曾琮鈞	指導老師： 孟慶霖 蕭偉智
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞： 圓錐曲線、Kiepert 雙曲線、外接圓

摘要

2021 年 Todor Zaharinov 在數學雜誌上提供了一道幾何證明題，題目為「給定任意三角形 ABC 與動點 P ，以 P 點和三角形邊（或其延長線）上的點，構造三個旁接三角形，並使得 A 、 B 、 C 點分別為其重心，再取旁接三角形的頂點構造兩個衍伸三角形，證明衍伸三角形恆面積相同」。

我們的研究在原題構造中發現了新性質，並創新將其中的「重心」更換為其他形心構造與剖析，並關心衍伸三角形的面積關係，更探討滿足特殊條件時，動點 P 在平面上的軌跡。

值得一提的是，當以三頂點為旁接三角形的「垂心」時，滿足衍伸三角形的有向面積的和與差為 0 的 P 點，其軌跡構成外接圓及著名的 Kiepert 雙曲線，這是一大亮點。

壹、前言

一、研究動機及文獻

（一）以三角形頂點為重心構造旁接三角形，探討衍伸三角形面積差

在 2021 年 10 月的數學期刊中，Todor Zaharinov 提出了證明題[1]，而在隔年 3 月的期刊中提供了透過重心坐標系統（Barycentric Coordinates）和仿射幾何等方法以成功證明[2]。

4673. Proposé par Todor Zaharinov.

Soit P un point dans le plan du triangle ABC , mais ne se trouvant pas sur les lignes rejoignant deux de ses sommets. Soit PA_1A_2 le triangle de centroïde A et sommets $A_1 \in BA$ et $A_2 \in AC$. Par permutation cyclique, on définit les triangles PB_1B_2 et PC_1C_2 de centroïdes B et C respectivement. Démontrer que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ ont la même surface.

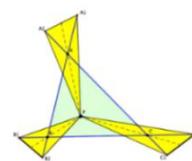


圖 1：Todor Zaharinov 提出的證明題
（註：圖片來自參考資料[1]）

（二）本研究進行的討論

我們好奇，在原題的構造中除了「衍伸三角形面積相等」外，是否存在其他的關係；又當頂點由旁接三角形的重心更換至其他形心（垂心、外心等）時，或者只保留部分重心中的構造，又會有什麼具有價值的幾何性質呢？

而文獻中所使用的「重心坐標系統」在研究與三角形有關的幾何問題時，能夠給出方便且簡潔的計算過程，因此在本研究中將大量使用此種手法幫助證明。

二、圖片來源說明

本研究除了圖 1 以外，其他所有圖片皆由作者透過 GSP 與 GeoGebra 軟體自行繪製。

三、研究目的

- （一）在原題的構造下進行刻劃，討論衍伸三角形頂點的關係。
- （二）以任意三角形頂點作為旁接三角形的垂心、外心等，探討衍伸三角形面積關係。
- （三）刻劃前述構造中的幾何性質。

貳、 研究設備及器材

軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0

軟體：繪圖運算工具 Geogebra

軟體：數學計算軟體 Wolfram Mathematica

參、 研究過程與方法（預備知識）

一、 符號及名詞定義

(一) 本研究約定 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = c$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ ；

令平面中有任一點 P 時， $\overline{AP} = l_a$ 、 $\overline{BP} = l_b$ 、 $\overline{CP} = l_c$ 。

(二) 定義「旁接三角形」為原三角形三邊所在直線上的點及任意 P 點為頂點的三角形。

(三) 定義「衍伸三角形」為以旁接三角形在原三角形三邊直線上頂點所構造的三角形。

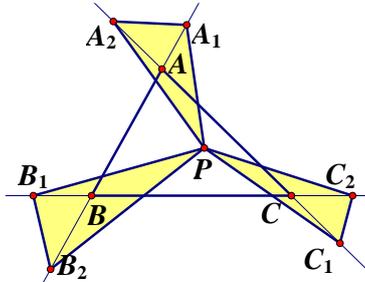


圖 2：旁接三角形

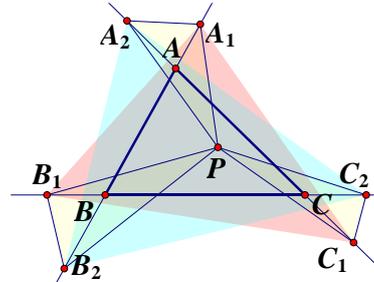


圖 3：衍伸三角形

(四) 令 $[A_1A_2 \dots A_n]$ 表示任意凸多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 之有向面積，且定義當頂點為逆時針排列時為正，反之則為負，並以 $|[A_1A_2 \dots A_n]|$ 表示凸多邊形面積。

二、 重心坐標 (Barycentric Coordinates) [3]

平面上任一點 P 與 $\triangle ABC$ 三頂點形成三個子三角形 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 、 $\triangle PAB$ ，其中 $\triangle PBC$ 的頂點 P 、 B 、 C 為逆時鐘方向，則定義面積為正；順時鐘方向，則定義面積為負，其餘亦同。利用這些三角形的有向面積比來定義此點的位置，就稱為 P 點的重心坐標

(Barycentric Coordinates)，即 $P(x:y:z) = P([PBC]:[PCA]:[PAB])$ 。

而當三個實數序對 (x,y,z) 滿足 $x+y+z=1$ 時，我們用逗號表示 P 點的重心坐標之三個分量，此時稱 $P(x,y,z)$ 為正規化的重心坐標 (Normalized Barycentric Coordinates)。因此，我們有三個頂點的坐標 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ ，且有以下。

(一) 二次曲線方程式

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$$

則全體點 $(x:y:z)$ 稱為二次曲線，其中 $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

(二) 無窮遠點 (point at infinity) 與無窮遠線 (line at infinity) [5]

若 $P(x, y, z)$ 滿足 $x + y + z = 0$ ，則 P 稱為無窮遠點。

而 $L_\infty: x + y + z = 0$ 稱為無窮遠線。

(三) 圓方程式

若點坐標 $P(x: y: z)$ 滿足二次方程

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

其中 $u, v, w \in \mathbb{R}$ ，則全體點 $(x: y: z)$ 為圓。

(四) 垂直充要條件

平面上有兩向量 $\overline{MN} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\overline{PQ} = (x_2, y_2, z_2)$ ，則當 $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ 時，可以得到

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0$$

可以將其簡記為

$$\sum_{cyc} a^2(z_1y_2 + y_1z_2) = 0$$

我們也可以將其化簡，得到與 \overline{BC} 垂直的直線方程式，其餘邊以此類推

$$a^2(z - y) + x(c^2 - b^2) = 0$$

(五) 面積與距離公式

考慮平面上有點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 、 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 、 $R(x_3, y_3, z_3)$ ，則其圍出的有向面積可用三階行列式表示

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

而考慮平面上有一向量 $\overline{PQ} = (x, y, z)$ ，則有距離公式

$$|\overline{PQ}|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$$

(六) 直線方程式

連接兩點 $A(x_1: y_1: z_1)$ 、 $B(x_2: y_2: z_2)$ 的直線方程式 \overline{AB} 為

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

等價於收集平面上點 $L(x: y: z)$ 使得 $[ABL] = 0$

(七) 兩直線交點

兩直線 $L_1: p_1x + q_1y + r_1z = 0$ 、 $L_2: p_2x + q_2y + r_2z = 0$ ，則兩線交點為

$$(q_1r_2 - q_2r_1: r_1p_2 - r_2p_1: p_1q_2 - p_2q_1)$$

肆、研究結果

一、以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之重心，構造衍伸三角形

我們查閱文獻，發現對於原本题目的證明已經完善，因此我們將聚焦在研究原題的幾何構造，首先給出符合題目條件的三角形幾何作圖，證明其存在性。

【求作】以 P 點和三角形邊直線上點為頂點，構造旁接三角形使其重心為原三角形頂點。

<p>步驟 1.對於 $A、B、C$，以 P 點作點反射得 $P_A、P_B、P_C$。</p> <p>步驟 2.令 $\overrightarrow{P_A P_B}、\overrightarrow{P_B P_C}、\overrightarrow{P_A P_C}$ 交三角形邊直線於 $A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2$。</p> <p>步驟 3.利用平行四邊形及重心性質得，$\triangle PA_1 A_2、\triangle PB_1 B_2、\triangle PC_1 C_2$ 即為所求。</p>	
--	--

我們觀察其幾何結構，值得一提的是，在衍伸三角形 $\triangle A_1 B_1 C_1、\triangle A_2 B_2 C_2$ 中，六個頂點皆在一圓錐曲線上，而考慮到利用更有效率處理三角形問題的手法，我們將使用重心坐標系統幫助證明。

首先我們需要以下卡諾定理 Carnot's theorem 以幫助證明六點位於圓錐曲線。

<p>引理 1 (Carnot's theorem) [4]:一圓錐曲線 Γ 交三角形三邊直線 $\overline{AB}、\overline{BC}、\overline{CA}$ 於 P, P', Q, Q', R, R'，若且唯若</p> $\left(\frac{AP}{PB} \times \frac{BQ}{QC} \times \frac{CR}{RA}\right) \times \left(\frac{AP'}{P'B} \times \frac{BQ'}{Q'C} \times \frac{CR'}{R'A}\right) = 1$	
--	--

以下證明在以頂點為重心構造的衍伸三角形中，六個頂點皆位於圓錐曲線 Γ 。

性質 2: $A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2$ 位於圓錐曲線 Γ 上。

證明：

1. 在重心坐標下令點 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，並透過重心性質推得衍伸三角形頂點坐標

$$A_1(1 + \mu_2, -\mu_2, 0)、A_2(1 + \mu_3, 0, -\mu_3)$$

$$B_1(0, 1 + \mu_3, -\mu_3)、B_2(-\mu_1, 1 + \mu_1, 0)$$

$$C_1(-\mu_1, 0, 1 + \mu_1)、C_2(0, -\mu_2, 1 + \mu_2)$$

2. 考慮到各點坐標分量和相等，則可以直接計算

$$\begin{aligned} & \left(\frac{AB_2}{B_2B} \times \frac{BC_2}{C_2C} \times \frac{CA_2}{A_2A}\right) \times \left(\frac{AA_1}{A_1B} \times \frac{BB_1}{B_1C} \times \frac{CC_1}{C_1A}\right) \\ &= \left(\frac{1+\mu_1}{-\mu_1} \times \frac{1+\mu_2}{-\mu_2} \times \frac{1+\mu_3}{-\mu_3}\right) \times \left(\frac{-\mu_2}{1+\mu_2} \times \frac{-\mu_3}{1+\mu_3} \times \frac{-\mu_1}{1+\mu_1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. 由引理 1 可得 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 皆位於圓錐曲線 Γ 上

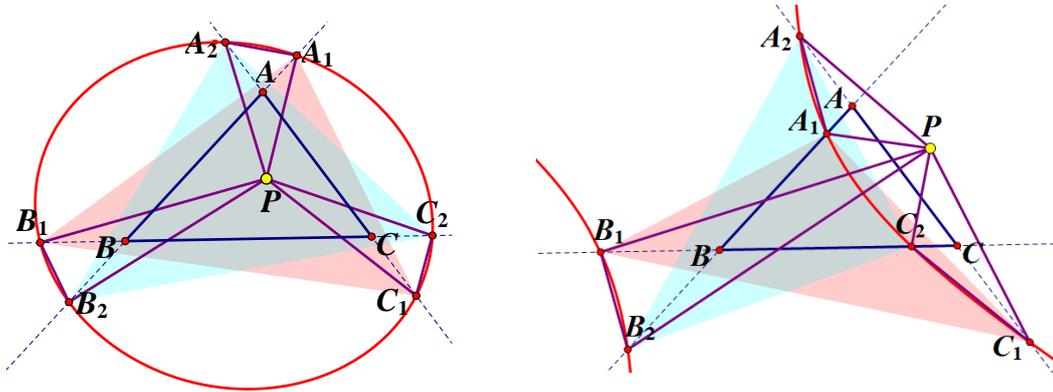


圖 4、5：衍伸三角形頂點與圓錐曲線 Γ

證明圓錐曲線 Γ 的存在性後，我們發現它具有橢圓、拋物線及雙曲線三種型態，因此我們好奇這三種型態的判別式。在此之前，我們需要知道圓錐曲線 Γ 的方程式。考慮到重心坐標中有二次曲線方程式 $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$ ，我們可以透過曲線上的六點推得曲線方程式中的係數，而有以下證明。

性質 3：過 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 的圓錐曲線有方程式

$$\Gamma \equiv \sum_{cyc} [(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3x^2 + (2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3xy] = 0$$

證明：

1. 在重心坐標下令點 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，並有衍伸三角形頂點坐標

$$A_1(1 + \mu_2, -\mu_2, 0), A_2(1 + \mu_3, 0, -\mu_3)$$

$$B_1(0, 1 + \mu_3, -\mu_3), B_2(-\mu_1, 1 + \mu_1, 0)$$

$$C_1(-\mu_1, 0, 1 + \mu_1), C_2(0, -\mu_2, 1 + \mu_2)$$

2. 依序代入圓錐曲線方程式而有

$$\begin{cases} A(1 + \mu_2)^2 + B\mu_2^2 = 2D\mu_2(1 + \mu_2) \\ B\mu_2^2 + C(1 + \mu_2)^2 = 2F\mu_2(1 + \mu_2) \\ B(1 + \mu_3)^2 + C\mu_3^2 = 2F\mu_3(1 + \mu_3) \\ C\mu_3^2 + A(1 + \mu_3)^2 = 2E\mu_3(1 + \mu_3) \\ C(1 + \mu_1)^2 + A\mu_1^2 = 2E\mu_1(1 + \mu_1) \\ A\mu_1^2 + B(1 + \mu_1)^2 = 2D\mu_1(1 + \mu_1) \end{cases}$$

3. 由克拉瑪公式可依序解得係數比

$$A:B:D = \begin{vmatrix} 2\mu_1(1+\mu_1) & (1+\mu_1)^2 \\ 2\mu_2(1+\mu_2) & \mu_2^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_1^2 & 2\mu_1(1+\mu_1) \\ (1+\mu_2)^2 & 2\mu_2(1+\mu_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_1^2 & (1+\mu_1)^2 \\ (1+\mu_2)^2 & \mu_2^2 \end{vmatrix}$$

$$B:C:F = \begin{vmatrix} 2\mu_2(1+\mu_2) & (1+\mu_2)^2 \\ 2\mu_3(1+\mu_3) & \mu_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_2^2 & 2\mu_2(1+\mu_2) \\ (1+\mu_3)^2 & 2\mu_3(1+\mu_3) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_2^2 & (1+\mu_2)^2 \\ (1+\mu_3)^2 & \mu_3^2 \end{vmatrix}$$

$$C:A:E = \begin{vmatrix} 2\mu_3(1+\mu_3) & (1+\mu_3)^2 \\ 2\mu_1(1+\mu_1) & \mu_1^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_3^2 & 2\mu_3(1+\mu_3) \\ (1+\mu_1)^2 & 2\mu_1(1+\mu_1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_3^2 & (1+\mu_3)^2 \\ (1+\mu_1)^2 & \mu_1^2 \end{vmatrix}$$

4. 化簡係數比得到

$$\Rightarrow A:B:C:D:E:F$$

$$= 2(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3 : 2(\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3\mu_1 : 2(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)\mu_1\mu_2$$

$$: (2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3 : (2\mu_3\mu_1 + 2\mu_3 + 2\mu_1 + \mu_2)\mu_2 : (2\mu_2\mu_3 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_1)\mu_1$$

5. 將係數代回圓錐曲線方程式即可得

$$\sum_{cyc} [(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3x^2 + (2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3xy] = 0$$

有了曲線方程式之後，我們可以透過係數得到判別式，而判別圓錐曲線型態的方法是討論其與無窮遠線 L_∞ 的相交情形，即當 Γ 與 L_∞ 相離時， Γ 為橢圓； Γ 與 L_∞ 相切時， Γ 為拋物線； Γ 與 L_∞ 相交兩點時， Γ 為雙曲線[5]。

考慮 L_∞ 上點滿足 $x + y + z = 0$ ，因此我們不失一般性令 L_∞ 上點 $(1, -t, (t-1))$ 並代入曲線方程式計算 t 有無實根的判別式，我們可以得到一個漂亮的結果。

定理 4： 過 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 的圓錐曲線 Γ 的型態判別式為

$$\Delta = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3)$$

(1) $\Delta < 0$ 時， Γ 為橢圓

(2) $\Delta = 0$ 時， Γ 為拋物線

(3) $\Delta > 0$ 時， Γ 為雙曲線

證明：

1. 令 L_∞ 上點 $(1, -t, (t-1))$ ，代入曲線方程式而有

$$(1 + \mu_1)\mu_2\mu_3 + (1 + \mu_2)\mu_3\mu_1 t^2 + (1 + \mu_3)\mu_1\mu_2 (t-1)^2 - (2\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 + 1)\mu_3 t + (2\mu_3\mu_1 + \mu_3 + \mu_1 + 1)\mu_2(t-1) - (2\mu_2\mu_3 + \mu_2 + \mu_3 + 1)\mu_1 t(t-1) = 0$$

2. 整理化簡可得

$$(-\mu_1)t^2 + (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)t - \mu_2 = 0$$

3. 我們可以得到 t 的判別式

$$\Delta = (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)^2 - 4\mu_1\mu_2$$

$$= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3)$$

而考慮到蒐集圓錐曲線 Γ 為拋物線時， P 點構成的軌跡滿足 $\Delta = 0$ ，這時

$$(x, y, z) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \text{ 滿足方程式 } x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 0$$

這是幾何中的特殊圓錐曲線 Steiner Inellipse[6] 之方程式，因此我們將之透過電腦軟體呈現（下圖中的黃色曲線即為 Steiner Inellipse）。

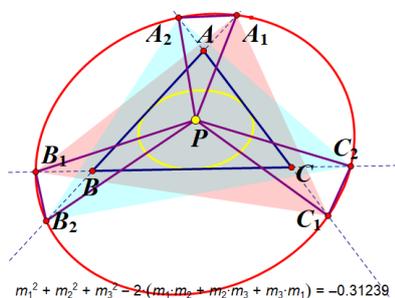


圖6： $\Delta < 0$ ， Γ 為橢圓

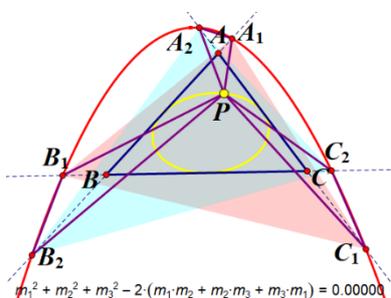


圖7： $\Delta = 0$ ， Γ 為拋物線

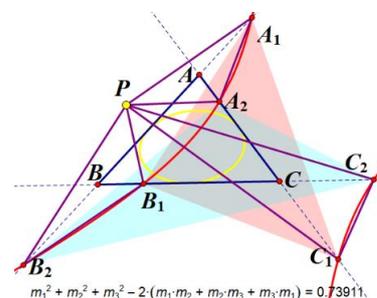
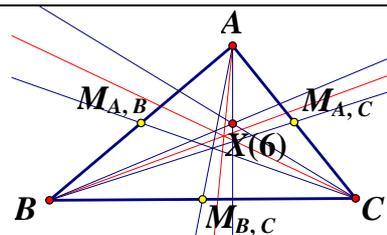


圖8： $\Delta > 0$ ， Γ 為雙曲線

此外，我們討論此圓錐曲線的特殊形態，發現當 P 點位於陪位重心時， Γ 會是一個圓，我們先給出關於陪位重心的引理。

引理 5 (陪位重心) [7]: 給定三角形，將三邊中線對角平分線反射得陪位中線，則三條陪位中線共點於陪位重心，即為重心之等角共軛點（在 ETC 中為編號 X(6)）。



定理 6: 當 P 點位於三角形 $\triangle ABC$ 的陪位重心上，即坐標為 $P(a^2 : b^2 : c^2)$ 時， Γ 為圓。

證明：

$$\begin{aligned} & \text{將 } \mu_1 = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \mu_2 = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, \mu_3 = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ 代入圓錐曲線方程式化簡得} \\ & \frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{a^2+b^2+c^2} + \sum_{cyc} [(2\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_2^2\mu_3 + \mu_2\mu_3^2)x^2 + (2\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 + \mu_2\mu_3)xy] = 0 \\ & \Rightarrow \frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{a^2+b^2+c^2} + \mu_1\mu_2\mu_3(x+y+z)^2 \\ & \quad + \sum_{cyc} [(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3x^2 + (\mu_3\mu_1 + \mu_2\mu_3)xy] = 0 \\ & \Rightarrow \frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{a^2+b^2+c^2} + \mu_1\mu_2\mu_3(x+y+z)^2 \\ & \quad + (\mu_2\mu_3x + \mu_3\mu_1y + \mu_1\mu_2z)(x+y+z) = 0 \\ & \Rightarrow -a^2yz - b^2zx - c^2xy \\ & \quad + (-a^2 - b^2 - c^2)[(1 + \mu_1)\mu_2\mu_3x + \\ & \quad (1 + \mu_2)\mu_3\mu_1y + (1 + \mu_3)\mu_1\mu_2z](x+y+z) = 0 \end{aligned}$$

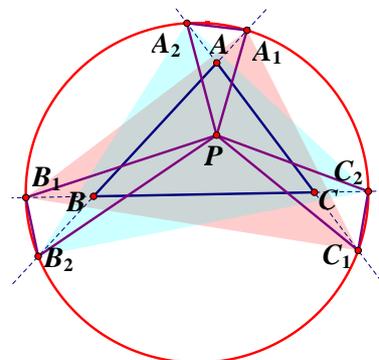


圖9： P 點為三角形陪位重心

討論完三角形的部分後，我們將之推廣，並好奇在任意四邊形中是否有同樣構造，而我們發現當 P 點位於任意四邊形對角線交點，衍伸四邊形的八個頂點皆落在二次曲線！

討論到這裡，我們需要卡諾定理的推廣以證明八點位於圓錐曲線。

<p>引理 7 (Extension of Carnot's theorem) [4]: 圓錐曲線 Γ 交任意四邊形四邊直線 \overrightarrow{AB}、\overrightarrow{BC}、\overrightarrow{CD}、\overrightarrow{DA} 於 $P, P', Q, Q', R, R', S, S'$，若且唯若</p> $\left(\frac{AP}{PB} \times \frac{BQ}{QC} \times \frac{CR}{RD} \times \frac{DS}{SA}\right) \times \left(\frac{AP'}{P'B} \times \frac{BQ'}{Q'C} \times \frac{CR'}{R'D} \times \frac{DS'}{S'A}\right) = 1$	
---	--

以下證明在以頂點為重心構造的衍伸四邊形中，當 P 點位於其對角線交點時，八個頂點皆位於圓錐曲線 Γ 。

性質 8: 當滿足 P 點位於任意四邊形對角線交點時，衍伸四邊形頂點 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ 位於圓錐曲線 Γ 上。

證明:

1. 在四邊形 $ABCD$ 中，我們以 $\triangle ABD$ 建立重心坐標系統， C 點為平面上任意一點，而有坐標 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $D(0, 0, 1)$ 、 $C(\alpha, \beta, \gamma)$
2. 考慮到 P 點為對角線交點，我們先由各點坐標得直線，而得 P 點坐標。

$$\overrightarrow{BD}: x = 0, \overrightarrow{AC}: -\gamma y + \beta z = 0$$

$$\Rightarrow P(0: -\beta: -\gamma) \Rightarrow P\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)$$

3. 在旁接三角形 PA_1A_2 中，令 $A_1(1-t_1, t_1, 0)$ 、 $A_2(t_2, 0, 1-t_2)$ ，並透過重心性質得到

$$\begin{cases} 0 + 1 - t_1 + t_2 = 3 \\ \frac{\beta}{\beta+\gamma} + t_1 + 0 = 0 \\ \frac{\gamma}{\beta+\gamma} + 0 + 1 - t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = -\frac{\beta}{\beta+\gamma}, t_2 = 1 + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

4. 其餘坐標透過相同方法可求得

$$A_1 = \left(\frac{2\beta+\gamma}{\beta+\gamma}, -\frac{\beta}{\beta+\gamma}, 0\right), A_2 = \left(\frac{\beta+2\gamma}{\beta+\gamma}, 0, -\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)$$

$$B_1 = \left(-\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{\beta+\gamma}, -\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right), B_2 = \left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}, 0\right)$$

$$C_1 = \left(\frac{\alpha(\beta+2\gamma)}{\beta+\gamma}, \frac{\beta(\beta+2\gamma)}{\beta+\gamma}, 1 - \frac{(\alpha+\beta)(\beta+2\gamma)}{\beta+\gamma}\right)$$

$$C_2 = \left(\frac{\alpha(2\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}, 1 - \frac{(\alpha+\gamma)(2\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma(2\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}\right)$$

$$D_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, 0, \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}\right), D_2 = \left(-\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, -\frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\alpha+2\beta+\gamma}{\beta+\gamma}\right)$$

5. 考慮到各點皆有標準化後的重心坐標，於是仿照前者作做法，將向量係數積代入計算：

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} \times \frac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}} \right) \times \left(\frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2B}} \times \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2C}} \times \frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2D}} \times \frac{\overline{DA_2}}{\overline{A_2A}} \right) \\
 &= \frac{\frac{\beta}{\beta+\gamma} - 0}{1 - \left(\frac{-\beta}{\beta+\gamma} \right)} \times \frac{\frac{-\alpha}{\beta+\gamma} - 0}{\alpha - \left(\frac{-\alpha}{\beta+\gamma} \right)} \times \frac{\frac{\alpha(\beta+2\gamma)}{\beta+\gamma} - \alpha}{0 - \frac{\alpha(\beta+2\gamma)}{\beta+\gamma}} \times \frac{\frac{\alpha}{\beta+\gamma} - 0}{1 - \frac{\alpha}{\beta+\gamma}} \times \frac{\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma} - 0}{1 - \left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma} \right)} \times \frac{\frac{\gamma(2\beta+\gamma)}{\beta+\gamma} - 0}{1 - \frac{\gamma(2\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}} \times \frac{\frac{-\beta}{\beta+\gamma} - \beta}{0 - \left(\frac{-\beta}{\beta+\gamma} \right)} \times \frac{\frac{-\gamma}{\beta+\gamma} - 1}{0 - \left(\frac{-\gamma}{\beta+\gamma} \right)} \\
 &= \frac{-\beta}{2\beta+\gamma} \times \frac{-\alpha}{\alpha+\alpha\beta+\alpha\gamma} \times \frac{\alpha\gamma}{-\alpha\beta-2\alpha\gamma} \times \frac{\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma} \times \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{\alpha} \times \frac{2\beta\gamma+\gamma^2}{-\beta\gamma} \times \frac{-\beta-\beta^2-\beta\gamma}{\beta} \times \frac{-\beta-2\gamma}{\gamma} \\
 &= \frac{-\beta}{2\beta+\gamma} \times \frac{-1}{1+\beta+\gamma} \times \frac{\gamma}{-\beta-2\alpha\gamma} \times \frac{2\beta+\gamma}{-\beta} \times \frac{-1-\beta-\gamma}{1} \times \frac{-\beta-2\gamma}{\gamma} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

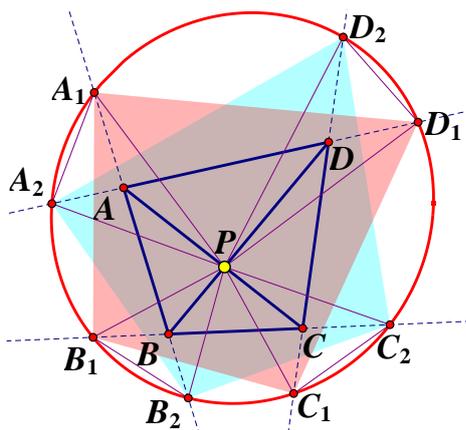


圖10：衍伸四邊形頂點與圓錐曲線

二、以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之垂心，構造衍伸三角形

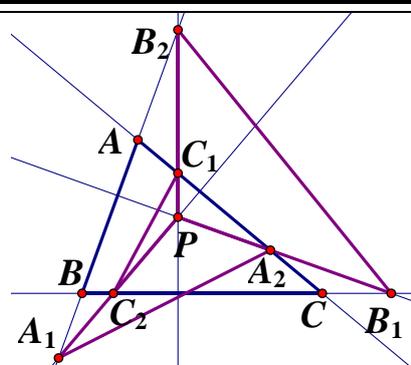
更改原題目要求，我們將任意三角形頂點作為垂心構造旁接三角形。

首先討論符合題目條件的三角形幾何作圖，在這裡我們利用到「在三角形中，兩頂點與垂心構成之三角形，其垂心為三角形其餘頂點」的垂心性質成功構圖。

【求作】以 P 點和三角形邊直線上點為頂點，構造旁接三角形使其垂心為原三角形頂點。

步驟 1. 分別過 P 點作 \overline{AC} 與 \overline{AB} 的垂直線交 \overline{AB} 與 \overline{AC} 於 A_1 、 A_2 ，同理可以得到其餘點 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 。

步驟 2. 利用垂心性質可以得知 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ 即為所求。



在任意三角形中透過這種方式構圖所得到的 $[A_1B_1C_1]$ 、 $[A_2B_2C_2]$ 並不恆等。於是我們從特殊化開始。透過軟體度量，我們發現 $\triangle ABC$ 為正三角形時，有 $|[A_1B_1C_1]| = |[A_2B_2C_2]|$ ；

而若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，需滿足 P 點位於對稱軸、底邊延長線或外接圓上才會有 $|[A_1B_1C_1]| = |[A_2B_2C_2]|$ 。

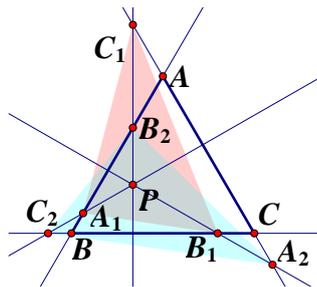


圖 11：正三角形，以垂心構造

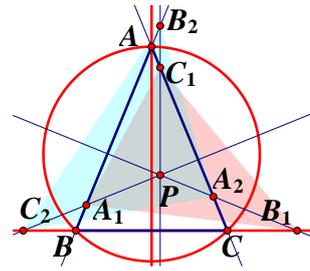


圖 12：等腰三角形，以垂心構造

當推廣至任意三角形時，我們發現當 P 點為三角形的重心、垂心、第一二費馬點、第一二拿破崙點時，皆能滿足 $|[A_1B_1C_1]| = |[A_2B_2C_2]|$

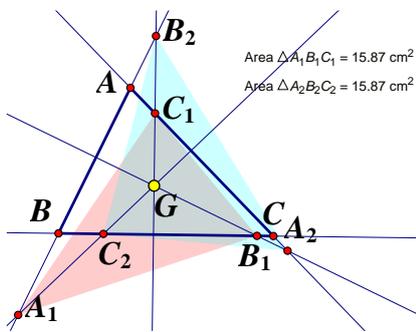


圖 13：P 點位於重心

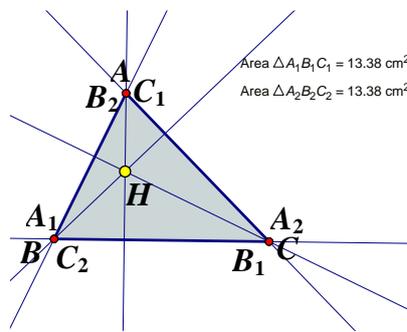


圖 14：P 點位於垂心

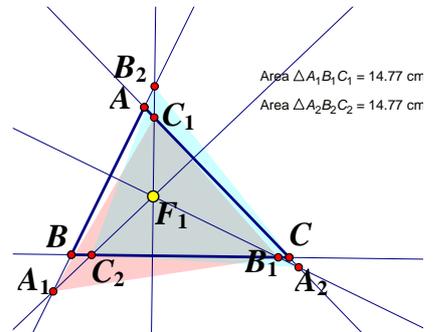


圖 15：P 點位於第一費馬點

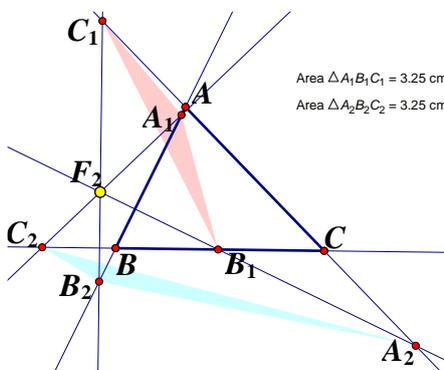


圖 16：P 點位於第二費馬點

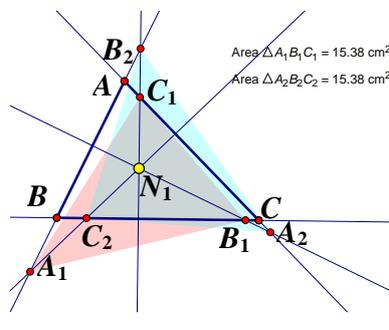


圖 17：P 點位於第一拿破崙點

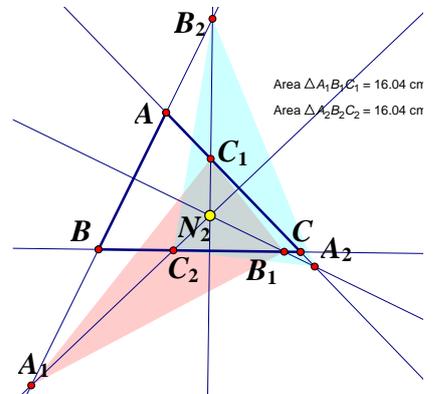


圖 18：P 點位於第二拿破崙點

而我們猜測，若蒐集使衍伸三角形相等的 P 點是否會有什麼幾何意義呢？透過軟體，我們發現使衍伸三角形面積相等的 P 點所構成的軌跡為 $\triangle ABC$ 外接圓及一條曲線。

我們起初嘗試透過三角函數來化簡等式，卻在過程中發現其過於繁複，無法進一步且有效率的解決問題，因此我們決定改變作法來解決三角形中的曲線問題。於是我們將在這

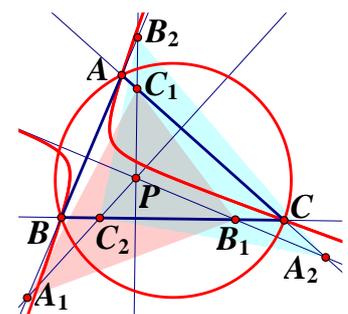


圖 19：垂心構造任意三角形

裡使用重心坐標及 Conway 符號，即用 S 表示 $\triangle ABC$ 的兩倍面積，對於實數 θ 將「 $S \cot \theta$ 」記為「 S_θ 」，這是在重心坐標的研究中常用的手法，且有以下引理。

引理 9 (Conway 符號)：對於任意 $\triangle ABC$ 有

$$(1) S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

$$(2) S_A + S_B = c^2, S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2$$

$$(3) S_A - S_B = b^2 - a^2, S_B - S_C = c^2 - b^2, S_C - S_A = a^2 - c^2$$

$$(4) S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = S^2$$

接著，考慮到重心坐標下的有向面積，使得面積相等時可能會有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ 及 $[A_1B_1C_1] = -[A_2B_2C_2]$ 兩種情形，於是我們分別討論 $[A_1B_1C_1]$ 及 $[A_2B_2C_2]$ 進行相減和相加，結果成功證明了 P 點軌跡即為外接圓及雙曲線，並且發現這條雙曲線是幾何學中著名的「Kiepert 雙曲線」！經過查詢相關網站[8]，並沒有發現這個特色，因此我們給出了 Kiepert 雙曲線的新性質。我們首先給出 Kiepert 雙曲線和外接圓在重心坐標下的公式：

定義 10 (Kiepert 雙曲線)：以任意三角形 $\triangle ABC$ 邊作相似等腰三角形 $\triangle ABC'$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle A'BC$ ，作 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 交於 P 點，則 P 點軌跡將構成 Kiepert 雙曲線，且滿足

$$(S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx + (S_A - S_B)xy = 0。$$

定義 11 (外接圓)：以任意三角形 $\triangle ABC$ 構造外接圓，則圓上動點 P 滿足

$$(S_B + S_C)yz + (S_C + S_A)zx + (S_A + S_B)xy = 0。$$

性質 12：作任意三角形 $\triangle ABC$ 及動點 P ，以頂點 A 、 B 、 C 作為垂心， P 點和原三角形延長邊上的點為頂點構造旁接三角形 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ ，則滿足衍伸三角形 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ ，若且唯若 P 點軌跡為原三角形的 **Kiepert 雙曲線**；滿足衍伸三角形 $[A_1B_1C_1] = -[A_2B_2C_2]$ ，若且唯若 P 點軌跡為原三角形的 **外接圓**。

證明：

1. 在重心坐標下令點

$$A_1(1 - t_{A_1}, t_{A_1}, 0), A_2(1 - t_{A_2}, 0, t_{A_2})$$

$$B_1(0, 1 - t_{B_1}, t_{B_1}), B_2(t_{B_2}, 1 - t_{B_2}, 0)$$

$$C_1(t_{C_1}, 0, 1 - t_{C_1}), C_2(0, t_{C_2}, 1 - t_{C_2})$$

2. 將之代入有向面積公式可以得到

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} 1-t_{A_1} & t_{A_1} & 0 \\ 0 & 1-t_{B_1} & t_{B_1} \\ t_{C_1} & 0 & 1-t_{C_1} \end{vmatrix} = t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + (1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1})$$

$$\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} 1-t_{A_2} & 0 & t_{A_2} \\ t_{B_2} & 1-t_{B_2} & 0 \\ 0 & t_{C_2} & 1-t_{C_2} \end{vmatrix} = t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2} + (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2})$$

3. 因為 $\overrightarrow{PA_1} \perp \overrightarrow{AB}$ ，我們可以得到

$$b^2(z-x+1-t_{A_1}) + (y-t_{A_1})(c^2-a^2) = 0$$

4. 整理上式並利用 Conway 代換，再以同理處理其餘部分可得

$$t_{A_1} = \frac{S_A(y+z) + S_Cz}{S_A}, t_{B_1} = \frac{S_B(z+x) + S_Ax}{S_B}, t_{C_1} = \frac{S_C(x+y) + S_By}{S_C}$$

$$t_{A_2} = \frac{S_A(y+z) + S_By}{S_A}, t_{B_2} = \frac{S_B(z+x) + S_Cz}{S_B}, t_{C_2} = \frac{S_C(x+y) + S_Ax}{S_C}$$

5. 代入面積公式計算兩有向面積差可以得出：

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} - \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]}$$

$$(t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} - t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2}) + [(1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) - (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2})] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \left\{ \frac{S_A^2x(z+y)[(z-y)(S_B+S_C)+x(S_B-S_C)]}{S_AS_BS_C} + \frac{2S_A^2x^2(S_Cz-S_By)}{S_AS_BS_C} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} S_A^2x(z+y)(z-y)(S_B+S_C) + S_A^2x^2(z+y)(S_B-S_C) + 2S_A^2x^2(S_Cz-S_By) = 0$$

$$\Rightarrow S_A^2x(z+y)(z-y)(S_B+S_C) + S_A^2x^2(S_B+S_C)(z-y) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} xy(-S_A^2S_B - S_A^2S_C + S_B^2S_C + S_B^2S_A) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} xy[S_AS_B(-S_A+S_B) - S_C(S_A^2-S_B^2)] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} xy[(S_B-S_A)[S_AS_B + S_C(S_B+S_A)]] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} (S_A-S_B)xy = 0, \text{ 即為 Kiepert 雙曲線。}$$

6. 再呈上過程改計算兩有向面積和可以得到

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} - \left(-\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} \right)$$

$$(t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2}) + [(1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) + (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2})] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{S_A^2x(S_B+S_C)(z+y)}{S_AS_BS_C} \right) + 2(xy+yz+zx) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} xy(S_A^2S_B + S_A^2S_C + S_B^2S_C + S_B^2S_A + 2S_AS_BS_C) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} xy[S_AS_B(S_A+S_B) + S_C(S_A^2+S_B^2+2S_AS_B)] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} xy[(S_A+S_B)S^2] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} (S_A+S_B)xy = 0, \text{ 即為外接圓。}$$

透過上面的結果，我們也能夠發現當 $\triangle ABC$ 為特殊三角形時有以下結論：

性質 13：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，無論 P 點在平面上的位置皆有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ ；且當 P 點位於外接圓上時有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$

證明：

1. 令在正三角形中有 $a = b = c = k$
2. 化簡 Conway 符號得 $S_A = S_B = S_C = \frac{k^2}{2}$
3. 則代入化簡過的 Conway 符號即可滿足有向面積差公式

$$(S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx + (S_A - S_B)xy = 0, x, y, z \in \mathbb{R}$$
4. 又當 P 點位於外接圓上時，同時滿足 $\sum_{cyc}(S_B - S_C)yz = 0$ 和 $\sum_{cyc}(S_A + S_B)xy = 0$ 可以得知有向面積和等於有向面積差，即 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$

性質 14：當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若 P 點位於其對稱軸、底邊直線，或外接圓時有 $|[A_1B_1C_1]| = |[A_2B_2C_2]|$

證明：

1. 令在等腰三角形中有 $a = b = k, k \neq c$
2. 化簡 Conway 符號得 $S_A = S_B = \frac{c^2}{2}$ 、 $S_C = \frac{2k^2 - c^2}{2}$
3. 代入有向面積差公式可以得到

$$(S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx + (S_A - S_B)xy = 0$$

$$\Rightarrow yz \left(\frac{c^2 - 2k^2 + c^2}{2} \right) + zx \left(\frac{2k^2 - c^2 - c^2}{2} \right) + xy(0) = 0$$

$$\Rightarrow yz(c^2 - k^2) + zx(k^2 - c^2) = 0 \Rightarrow z(y - x) = 0$$
4. 即可知當 $x = y$ 或 $z = 0$ ，即 P 點位於 $\triangle ABC$ 對稱軸、底邊直線時會有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ ，而當 P 點位於外接圓時，滿足 $\sum_{cyc}(S_A + S_B)xy = 0$

我們回顧作圖，考慮到兩個衍伸三角形的面積差和會隨原三角形而變大、變小許多，難以看出其中的關聯性，因此我們更改作法，試著討論兩者的面積比值。而值得關注的是，我們發現當面積比 r 為任意實數時， P 點軌跡便構成了二次曲線系！

而我們在此將曲線命名為 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P \mid [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$ ，並利用到無窮遠點的概念，求得其型態判別式。

性質 15：在三角形中有曲線 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P|[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$ ，並有以下型態判別：

$$r_1 = -\frac{S_A^2+S_B^2+S_C^2+2S\sqrt{S_A^2+S_B^2+S_C^2-S^2}}{S_A^2+S_B^2+S_C^2-2S^2}, \quad r_2 = -\frac{S_A^2+S_B^2+S_C^2-2S\sqrt{S_A^2+S_B^2+S_C^2-S^2}}{S_A^2+S_B^2+S_C^2-2S^2}$$

1. 若 $r_1 > r_2$
 - (1). $r > r_1 > r_2$ 或 $r_1 > r_2 > r$ ， $\Gamma_{P,r}$ 為橢圓。
 - (2). $r_1 > r > r_2$ ， $\Gamma_{P,r}$ 為雙曲線。
2. 若 $r_1 < r_2$
 - (1). $r > r_2 > r_1$ 或 $r_2 > r_1 > r$ ， $\Gamma_{P,r}$ 為雙曲線。
 - (2). $r_2 > r > r_1$ ， $\Gamma_{P,r}$ 為橢圓。
3. 若 $r = r_1$ 或 $r = r_2$ ， $\Gamma_{P,r}$ 為拋物線。

證明：

1. 我們重新個別計算化簡衍伸三角形面積，可以得到

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{S^2 \sum_{cyc}(S_A xy)}{S_A S_B S_C}; \quad \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \frac{S^2 \sum_{cyc}(S_A zx)}{S_A S_B S_C}$$

2. 寫出 $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$ 並代入無窮遠點 $(1, -t, (t-1))$

$$S_A xy + S_B yz + S_C zx = r(S_A zx + S_B xy + S_C yz)$$

$$\Rightarrow -S_A t - S_B(t^2 - t) + S_C(t - 1) = rS_A(t - 1) - rS_B t + rS_C(t^2 - t)$$

$$\Rightarrow (rS_C - S_B)t^2 + [(S_B - S_A)(1 + r) + S_C(1 - r)]t + (rS_A - S_C) = 0$$

3. 我們可以得到 t 的判別式

$$\Delta = [(S_B - S_A)(1 + r) + S_C(1 - r)]^2 - 4(rS_C - S_B)(rS_A - S_C)$$

4. 當 $\Delta = 0$ 時，即可整理得 $r = -\frac{S_A^2+S_B^2+S_C^2 \pm 2S\sqrt{S_A^2+S_B^2+S_C^2-S^2}}{S_A^2+S_B^2+S_C^2-2S^2}$

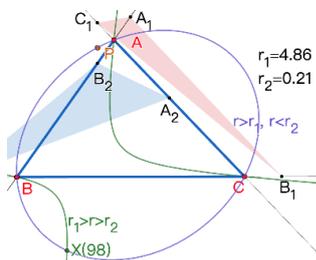


圖 20： $r_1 > r_2$ 的兩種曲線

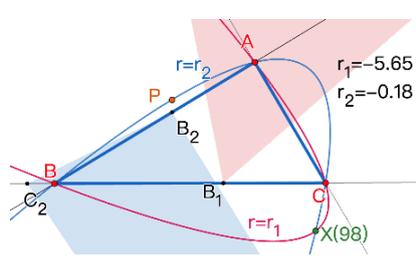


圖 21： $r = r_1, r = r_2$ 拋物線

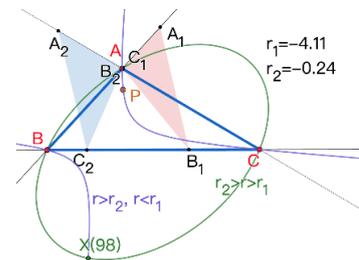


圖 22： $r_1 < r_2$ 的兩種曲線

有了二次曲線系，代表各曲線可能會有共同的交點，因此我們接著好奇這些交點與三角形的關係。我們發現二次曲線系會交於四個交點，分別是頂點 A 、 B 、 C ，以及 Tarry Point（在 ETC 中為編號 X(98)）[7]。

性質 16： 二次曲線系 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P|[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$ 交於頂點 A 、 B 、 C 及 Tarry Point

證明：

1. 考慮曲線交點滿足 $r \in \mathbb{R}$ ，可列得方程式
$$\begin{cases} \sum_{cyc}(S_Axy) = 0 \\ \sum_{cyc}(S_Azx) = 0 \end{cases}$$

2. 可以解得以下，即為三角形頂點與 Tarry Point。

$$(x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{S_A^2 - S_B S_C}, \frac{1}{S_B^2 - S_C S_A}, \frac{1}{S_C^2 - S_A S_B}\right)$$

在進行以頂點為重心構圖的研究時，我們討論了衍伸三角形共二次曲線的性質，因此我們好奇，若以頂點為垂心構造衍伸三角形，其頂點是否也具有這樣的性質，或者換句話說，是否在 P 點滿足特定條件時，衍伸三角形頂點會落在二次曲線上呢？

我們再次利用卡諾定理，並經過了巧妙的運算得到了一個漂亮的結果。

定理 17： 當滿足 P 點在 $\triangle ABC$ 外接圓上時，衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 皆在二次曲線上。

證明：

我們透過卡諾定理列式，試圖找出定理成立時 P 需滿足的條件。

1. 計算原三角形頂點與衍伸三角形頂點構成的向量，並代入卡諾定理而有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{AA_1}{A_1B} \times \frac{BB_1}{B_1C} \times \frac{CC_1}{C_1A}\right) \times \left(\frac{AB_2}{B_2B} \times \frac{BC_2}{C_2C} \times \frac{CA_2}{A_2A}\right) = 1 \\ \Rightarrow & \prod_{cyc} \frac{S_A(y+z)+S_Cz}{1-\frac{S_A(y+z)+S_Cz}{S_A}} \times \prod_{cyc} \frac{S_B(z+x)+S_Cz}{0-\frac{S_B(z+x)+S_Cz}{S_B}} = 1 \\ \Rightarrow & \prod_{cyc} \frac{S_A(y+z)+S_Cz}{S_Ax-S_Cz} \times \prod_{cyc} \frac{-S_By+S_Cz}{-S_B(z+x)-S_Cz} = 1 \\ \Rightarrow & -\frac{(S_A(y+z)+S_Cz)(S_B(z+x)+S_Ax)(S_C(x+y)+S_By)}{(S_B(z+x)+S_Cz)(S_C(x+y)+S_Ax)(S_A(y+z)+S_By)} = 1 \end{aligned}$$

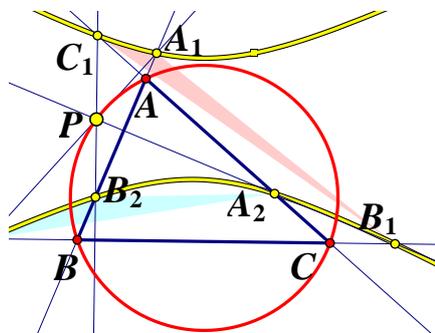


圖 23：衍伸三角形頂點在二次曲線上

$$\Rightarrow (S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A)(x + y + z)(S_Ax(y + z) + S_By(z + x) + S_Cz(x + y)) = 0$$

$$\Rightarrow (S_B + S_C)yz + (S_C + S_A)zx + (S_A + S_B)xy = 0, \text{ 即為外接圓。}$$

在作圖中，我們還在其中找到了以下有向線段不變量。

定理 18 (不變量)： P 點與衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 有向線段長比值為

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = 1$$

證明：

在重心坐標下， P 點及衍伸三角形頂點的三個分量和相等，可由係數積得有向線段比。

1. 先計算得以下向量

$$\overrightarrow{PA_1} = \left(-\frac{S_C z}{S_A}, \frac{(S_A+S_C)z}{S_A}, -z\right), \overrightarrow{PB_1} = \left(-x, -\frac{S_A x}{S_B}, \frac{(S_A+S_B)x}{S_B}\right), \overrightarrow{PC_1} = \left(\frac{(S_B+S_C)y}{S_C}, -y, -\frac{S_B y}{S_C}\right)$$

$$\overrightarrow{PA_2} = \left(-\frac{S_B y}{S_A}, -y, \frac{(S_A+S_B)y}{S_A}\right), \overrightarrow{PB_2} = \left(\frac{(S_B+S_C)z}{S_B}, -\frac{S_C z}{S_B}, -z\right), \overrightarrow{PC_2} = \left(-x, \frac{(S_A+S_C)x}{S_C}, -\frac{S_A x}{S_C}\right)$$

2. 因 P, A_1, C_2 共線； P, B_1, A_2 共線； P, C_1, B_2 共線，而有

$$\overrightarrow{PA_1} = n_1 \overrightarrow{PC_2}; \overrightarrow{PB_1} = n_2 \overrightarrow{PA_2}; \overrightarrow{PC_1} = n_3 \overrightarrow{PB_2}$$

$$n_1 = \frac{-\frac{S_C z}{S_A}}{-x} = \frac{S_C z}{S_A x}; n_2 = \frac{-x}{-\frac{S_B y}{S_A}} = \frac{S_A x}{S_B y}; n_3 = \frac{\frac{(S_B+S_C)y}{S_C}}{\frac{(S_B+S_C)z}{S_B}} = \frac{S_B y}{S_C z}$$

3. 所以我們有

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = n_1 n_2 n_3 = \frac{S_C z}{S_A x} \times \frac{S_A x}{S_B y} \times \frac{S_B y}{S_C z} = 1$$

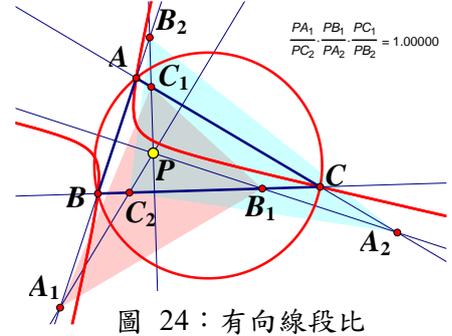


圖 24：有向線段比

三、以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之外心，構造衍伸三角形

將任意三角形頂點代換為旁接三角形的外心，我們發現構圖的結果不只一組，舉例來說， A 頂點與其中一個所求所構成的單位向量 $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 、 $\frac{\overrightarrow{AA_2}}{|\overrightarrow{AA_2}|} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ ，而其餘一組則為 $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{|\overrightarrow{AA_1}|} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 、 $\frac{\overrightarrow{AA_2}}{|\overrightarrow{AA_2}|} = -\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ ，因此我們將單位向量相等的所求定義為「向外」、反向則為「向內」，並將所求分類為「向外構造」及「向內構造」個別討論。

在構圖中， $[A_1 B_1 C_1]$ 和 $[A_2 B_2 C_2]$ 並不以 P 點在平面任意位置時皆相等，而我們在蒐集 P 點形成軌跡後，也得到了許多有趣的性質。

首先給出作圖步驟。

【求作】 以 P 點和三角形邊直線上點為頂點，構造旁接三角形使其外心為原三角形頂點。

<p>步驟 1. 以 P 為圓心，\overline{AP} 為半徑作圓交 \overline{AB}、\overline{AC} 於 A_1、A_2，其餘同理可得 B_1、B_2、C_1、C_2。</p> <p>步驟 2. $\triangle PA_1 A_2$、$\triangle PB_1 B_2$、$\triangle PC_1 C_2$ 即為所求。</p> <p>步驟 3. 注意到透過作圖，我們各邊都可以得到「向外」和「向內」兩種構圖方式。</p>	
---	--

我們決定仿照垂心的做法，先在重心坐標下令點

$$A_1(1 - t_{A_1}, t_{A_1}, 0) \cdot A_2(1 - t_{A_2}, 0, t_{A_2})$$

$$B_1(0, 1 - t_{B_1}, t_{B_1}) \cdot B_2(t_{B_2}, 1 - t_{B_2}, 0)$$

$$C_1(t_{C_1}, 0, 1 - t_{C_1}) \cdot C_2(0, t_{C_2}, 1 - t_{C_2})$$

而由面積公式計算有

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + (1 - t_{A_1})(1 - t_{B_1})(1 - t_{C_1})$$

$$\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2} + (1 - t_{A_2})(1 - t_{B_2})(1 - t_{C_2})$$

我們要開始利用已知項去表示各點重心坐標，在過程中卻因計算量過於龐大而難以化簡，且重複出現無法消去的根號，因此我們好奇根號中的幾何意義，打算針對其進行研究。

分析與討論

在研究一開始的時後，我們約定平面中有任一點 P 時， $\overline{PA} = l_a$ 、 $\overline{PB} = l_b$ 、 $\overline{PC} = l_c$ 。

透過距離公式確定 l_a 、 l_b 及 l_c 在重心坐標下的數值，以 l_a 為例計算，其於同理可證。

首先透過距離公式，並以 Conway 符號化簡

$$|\overline{PA}|^2 = -a^2yz - b^2(x - 1)z - c^2(x - 1)y = l_a^2$$

$$\Rightarrow l_a = \sqrt{-a^2yz + (b^2z + c^2y)(y + z)} = \sqrt{2S_Ayz + b^2z^2 + c^2y^2}$$

$$\because S_A = 2 \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right) \cot A = bc \cos A$$

$$l_a = \sqrt{b^2z^2 + c^2y^2 - 2bzc y \cos(\pi - A)}$$

$$l_b = \sqrt{c^2x^2 + a^2z^2 - 2cxa z \cos(\pi - B)}$$

$$l_c = \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - 2ayb x \cos(\pi - C)}$$

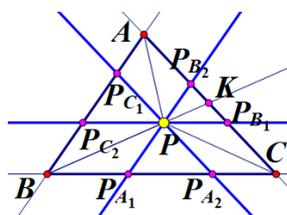


圖 25：過 P 點作三角形三邊平行線

若我們分別過 P 點對於三角形三邊作平行線，交三邊於 P_{A_1} 、 P_{A_2} 、 P_{B_1} 、 P_{B_2} 、 P_{C_1} 、 P_{C_2} ，也可從中看出這個性質，其中 $\overline{AP_{C_1}} = |cy|$ 、 $\overline{AP_{B_2}} = |bz|$ ，以下給出簡單的證明。

$$c \times y = c \times \frac{y}{x+y+z} = \frac{\overline{PK}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{P_{C_1}A}}{\overline{BA}}, \text{ 其餘同理。}$$

有了以上結果，我們接著計算坐標，因為有 $|\overline{AA_1}| = l_a$ ，所以再次透過距離公式得

$$|\overline{AA_1}|^2 = l_a^2$$

$$\Rightarrow -c^2(-t_{A_1})t_{A_1} = l_a^2$$

$$\Rightarrow t_{A_1} = \pm \frac{l_a}{c}$$

再以同理處理其餘部分可解出

$$t_{A_1} = \pm \frac{l_a}{c}, t_{A_2} = \pm \frac{l_a}{b}; t_{B_1} = \pm \frac{l_b}{a}, t_{B_2} = \pm \frac{l_b}{c}; t_{C_1} = \pm \frac{l_c}{b}, t_{C_2} = \pm \frac{l_c}{a}$$

從上面的結果可以看出，為正者為「向內」構造，為負者為「向外」構造。

解得各點重心坐標及衍伸三角形面積之後，我們開始進行個別討論。

(一) 「向內」構造衍伸三角形

先討論有向面積差，透過電腦軟體模擬，發現當兩塊所求有向面積相等時，蒐集 P 點所構成的軌跡竟類似於 Neuberg Cubic 三次曲線，我們好奇它與這個曲線的關係，所以我們將透過重心坐標解得有向面積差，並與 Neuberg Cubic 做比較。

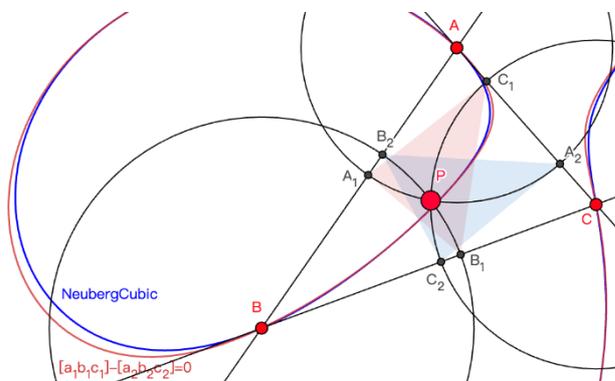


圖 26：P 點軌跡與 Neuberg Cubic 比較

定義 19 (Neuberg Cubic 三次曲線) [9]：考慮平面上有此三次曲線，則其方程式為

$$\sum_{cyc}[a^2(b^2 + c^2) + (b^2 - c^2)^2 - 2a^4]x(c^2y^2 - b^2z^2) = 0$$

性質 20：作任意三角形 ABC 及一動點 P ，以頂點 A, B, C 作外心、 P 點和三角形延長邊上的點為頂點向內構造旁接三角形，則當 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ 時有

$$\sum_{cyc} al_a[-b + c - l_b + l_c] = 0$$

證明：

1. 在向內構建時有

$$t_{A_1} = \frac{l_a}{c}, t_{A_2} = \frac{l_a}{b}; t_{B_1} = \frac{l_b}{a}, t_{B_2} = \frac{l_b}{c}; t_{C_1} = \frac{l_c}{b}, t_{C_2} = \frac{l_c}{a}$$

2. 我們僅將上述的有向面積相減並化簡即可得到

$$\begin{aligned} & \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} - \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} \\ &= t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + (1 - t_{A_1})(1 - t_{B_1})(1 - t_{C_1}) - t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2} - (1 - t_{A_2})(1 - t_{B_2})(1 - t_{C_2}) \\ &= \prod_{cyc} \left(1 - \frac{l_a}{c}\right) - \prod_{cyc} \left(1 - \frac{l_a}{b}\right) = \frac{\prod_{cyc}(c-l_a) - \prod_{cyc}(b-l_a)}{abc} \\ &= \sum_{cyc} \frac{[-b+c-l_b+l_c] \times l_a}{bc} \end{aligned}$$

3. 而當兩衍伸三角形有向面積相等時就能得到

$$\sum_{cyc} al_a[-b + c - l_b + l_c] = 0$$



將此曲線與 Neuberg Cubic 做比較，我們發現有 13 個特殊點同時位於 P 點軌跡及 Neuberg Cubic 之上！分別是三角形頂點、三邊向外、向內構造正三角形的頂點、以對邊反

射頂點所得的點，以及三角形外心，以下是我們的證明。

性質 21：Neuberg Cubic 與 P 點軌跡共點於三角形頂點、以三邊分別向外、向內構造正三角形的頂點 A_{e_1} 、 A_{e_2} 、 B_{e_1} 、 B_{e_2} 、 C_{e_1} 、 C_{e_2} 、以對邊反射頂點所得點 A_p 、 B_p 、 C_p ，及三角形外心 O ，共 13 點。

證明：

透過三角形的對稱性，僅須證明一邊情形，其餘兩邊同理可證。

1. P 點位於 A 點時有 $l_a = 0$ 、 $l_b = c$ 、 $l_c = b$ ，代入公式後得到

$$bc[-c + a - b + 0] + cb[-a + b - 0 + c] = 0$$

2. P 點位於 A_{e_1} 、 A_{e_2} 點時有 $l_b = l_c = a$ ，代入公式可得

$$\begin{aligned} &al_a[-b + c - a + a] + ba[-c + a - a + l_a] + ca[-a + b - l_a + a] \\ &= al_a[-b + c] + ba[-c + l_a] + ca[b - l_a] = 0 \end{aligned}$$

3. P 點位於 A_p 點時有 $l_b = c$ 、 $l_c = b$ ，代入公式得

$$\begin{aligned} &al_a[-b + c - c + b] + bc[-c + a - b + l_a] + cb[-a + b - l_a + c] \\ &= bc[-c + a - b + l_a] + cb[-a + b - l_a + c] = 0 \end{aligned}$$

4. P 點位於三角形外心 O 點時令 $l_a = l_b = l_c = k$ ，代入公式則有

$$\begin{aligned} &ak[-b + c - k + k] + bk[-c + a - k + k] + ck[-a + b - k + k] \\ &= ak[-b + c] + bk[-c + a] + ck[-a + b] = 0 \end{aligned}$$

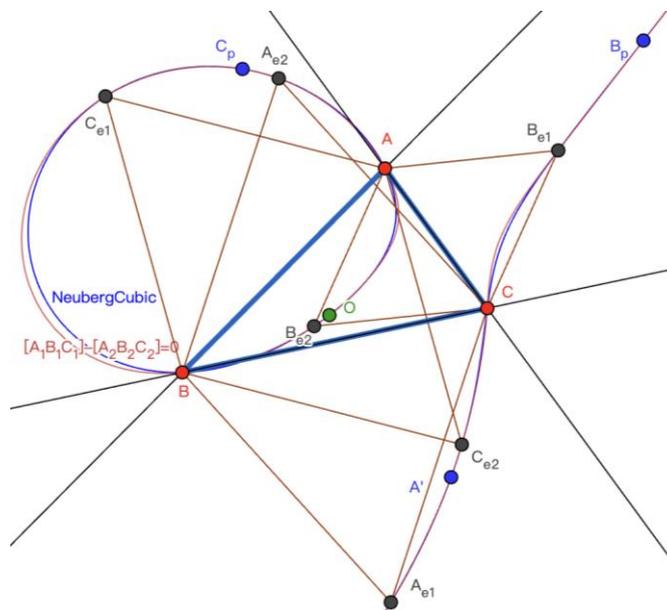


圖 27：P 點軌跡與 Neuberg Cubic 所共之 13 點

討論有向面積和時，我們發現其值恆 ≥ 0 ，且等號成立時 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$ ，但我們目前尚找不到較有效率的方法證明之，因此只能暫時給出猜想。

猜想 22：作任意三角形 ABC 及一動點 P ，以頂點 A 、 B 、 C 作外心、 P 點和三角形延長邊上的點為頂點「向內」構造三角形，則其有向面積和 $[A_1B_1C_1] + [A_2B_2C_2] \geq 0$ ，且等號成立時， P 點位於三角形頂點，並有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$ 。

我們還能夠在特殊三角形中得到一些性質。

性質 23：當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時， P 點位於 Neuberg Cubic 上，即在圓心為頂點、半徑為腰的圓，以及對稱軸上時有 $[A_1B_1C_1] - [A_2B_2C_2] = 0$ ；且當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，無論 P 點位置皆有 $[A_1B_1C_1] - [A_2B_2C_2] = 0$

證明：

1. 令在等腰三角形中有 $a = b = k$

2. 將之代入有向面積差公式

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} al_a[-b+c-l_b+l_c] &= 0 \\ \Rightarrow [-k+c-l_b+l_c] \times kl_a + [-c+k-l_c+l_a] \times kl_b + [-k+k-l_a+l_b] \times cl_c &= 0 \\ \Rightarrow -k^2(l_a-l_b) + ck(l_a-l_b) + kl_c(l_a-l_b) - cl_c(l_a-l_b) &= 0 \\ \Rightarrow (l_c-k)(k-c)(l_a-l_b) &= 0 \end{aligned}$$

3. 再將 $a = b = k$ 代入 Neuberg Cubic 公式化簡

$$\begin{aligned} \sum_{cyc}[a^2(b^2+c^2) + (b^2-c^2)^2 - 2a^4]x(c^2y^2 - b^2z^2) &= 0 \\ \Rightarrow [k^2(k^2+c^2) + (k^2-c^2)^2 - 2k^4](xc^2y^2 - xk^2z^2 + yk^2z^2 - yc^2x^2) \\ + (2c^2k^2 - 2c^4)(k^2x^2z - zk^2y^2) &= 0 \\ \Rightarrow (k^2-c^2)(-xc^2y^2 + yc^2x^2 + xk^2z^2 - yk^2z^2 + 2zk^2x^2 - 2zk^2y^2) &= 0 \\ \Rightarrow (k-c)(x-y)(c^2xy + k^2z^2 + 2k^2z - 2k^2z^2) &= 0 \\ \Rightarrow (k-c)(x-y)\{[k^2(z-1)x + k^2y(z-1) + c^2xy] + k^2x + k^2y + k^2z\} &= 0 \end{aligned}$$

4. 透過距離公式可得相同結果

$$\begin{aligned} \Rightarrow (k-c)(x-y)(-l_c^2 + k^2) &= 0 \\ \Rightarrow (k-c)(l_a-l_b)(k-l_c) &= 0 \end{aligned}$$

5. 由上述公式可看出當滿足以下任一條件時，有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$

(1) $(l_a - l_b) = 0$ ，即 P 點位於對稱軸時。

(2) $(k - l_c) = 0$ ，即 P 點位於圓心為頂點、半徑為腰的圓時。

(3) $(k - c) = 0$ ，即原圖形為正三角形時。

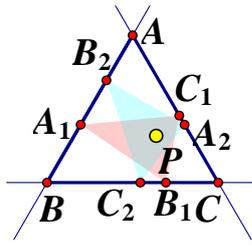


圖 28：正三角形，以外心向內構造

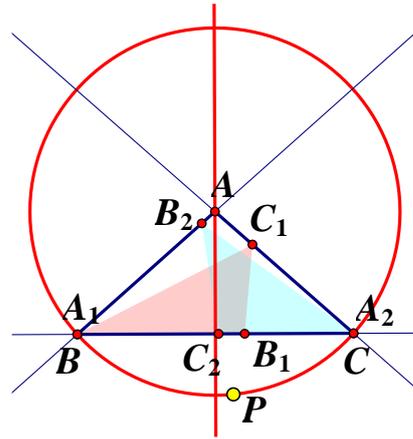


圖 29：等腰三角形，以外心向內構造

(二) 「向外」構造衍伸三角形

同樣先從有向面積差開始討論，我們利用相同方式計算化簡面積差公式，並透過電腦軟體模擬出兩塊所求有向面積相等時 P 點所構成的軌跡，可以得到以下性質。

性質 24：作任意三角形 ABC 及一動點 P ，以頂點 A 、 B 、 C 作外心、 P 點和三角形延長邊上的點為頂點向外構造旁接三角形，則當 $[A_1B_1C_1] - [A_2B_2C_2] = 0$ 時有

$$\sum_{cyc} al_a[b - c - l_b + l_c] = 0$$

證明：

1. 在向外構建時有

$$t_{A_1} = -\frac{l_a}{c}, t_{A_2} = -\frac{l_a}{b}; t_{B_1} = -\frac{l_b}{a}, t_{B_2} = -\frac{l_b}{c}; t_{C_1} = -\frac{l_c}{b}, t_{C_2} = -\frac{l_c}{a}$$

2. 參考類似三者向內構造時化簡有向面積差的步驟可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} - \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} \\ &= t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + (1 - t_{A_1})(1 - t_{B_1})(1 - t_{C_1}) - t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2} - (1 - t_{A_2})(1 - t_{B_2})(1 - t_{C_2}) \\ &= \sum_{cyc} \frac{l_a[b - c - l_b + l_c]}{bc} \end{aligned}$$

3. 在面積差等於 0 時即有

$$\sum_{cyc} al_a[b - c - l_b + l_c] = 0$$

而透過這個公式，我們可以繪製出一條曲線，並且發現原三角形的外心會在曲線上，即當令 $l_a = l_b = l_c = k$ 時，會有 $ak[b - c] + bk[b - c] + ck[b - c] = 0$

接著討論有向面積和，而得其值恆 ≥ 0 ；且等號成立時仍有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$ 。

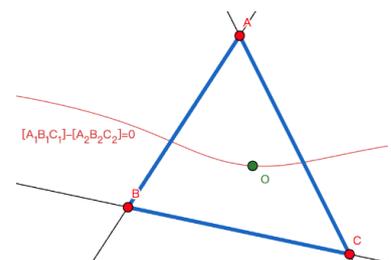


圖 30：向外構造所得 P 點軌跡

性質 25：作任意三角形 ABC 及一動點 P ，以頂點 $A、B、C$ 作外心、 P 點和三角形延長邊上的點為頂點「向外」構造三角形，則其有向面積和 $[A_1B_1C_1] + [A_2B_2C_2] > [ABC]$ 。

證明：

所求為兩個有向面積相加，因此只需證明其中一衍伸三角形面積即可滿足。

$$\begin{aligned} \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} &= t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + (1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) \\ &= 1 - t_{A_1} - t_{B_1} - t_{C_1} + t_{A_1}t_{B_1} + t_{B_1}t_{C_1} + t_{C_1}t_{A_1} \\ &= 1 + \frac{l_a}{c} + \frac{l_b}{a} + \frac{l_c}{b} + \frac{l_al_b}{ac} + \frac{l_b l_c}{ab} + \frac{l_c l_a}{bc} > 1 \end{aligned}$$

在特殊三角形中有以下性質。

性質 26：當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，當 P 點位於對稱軸時有 $[A_1B_1C_1] - [A_2B_2C_2] = 0$ ；且當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，無論 P 點位置皆有 $[A_1B_1C_1] - [A_2B_2C_2] = 0$

證明：

1. 令在等腰三角形中有 $a = b = k$

2. 代入有向面積差公式便有

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} al_a[b - c - l_b + l_c] &= 0 \\ \Rightarrow kl_a[k - c - l_b + l_c] + kl_b[c - k - l_c + l_a] + cl_c[k - k - l_a + l_b] &= 0 \\ \Rightarrow (l_a - l_b)(k^2 - ck - l_c k - cl_c) &= 0 \\ \Rightarrow (l_a - l_b)(k - c)(k + l_c) &= 0 \end{aligned}$$

3. 由上述公式可看出當滿足以下任一條件時，有 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$

(1) $(l_a - l_b) = 0$ ，即 P 點位於對稱軸時。

(2) $(k - c) = 0$ ，即原圖形為正三角形時。

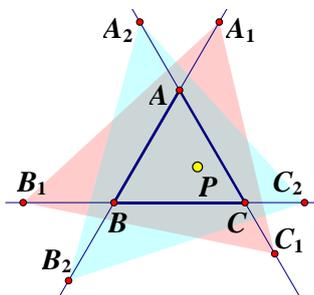


圖 31：正三角形，以外心向外構造

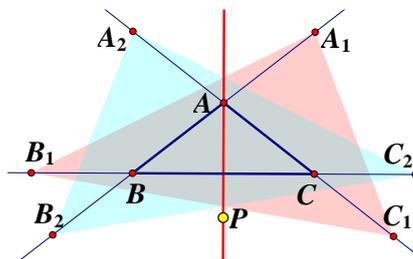


圖 32：等腰三角形，以外心向外構造

伍、 討論 (未來展望)

接續上述的研究，我們在垂心的推廣中發現以下：

1. P 點旋轉三邊垂線，構造滿足有向角 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \theta$ ，猜測當 P 點位於原三角形外接圓時，衍伸三角形有向面積比值不變。

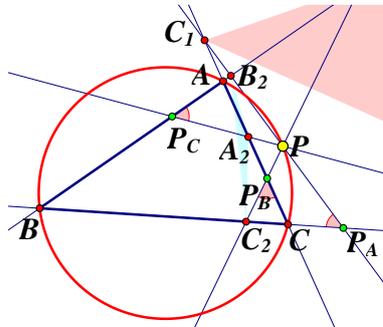


圖 30：以 P 點旋轉三邊垂線

2. 當之推廣至四邊形，滿足衍伸三角形面積相等時 P 點所構成的軌跡仍為一個圓及一條類似於 Kiepert 雙曲線的曲線，且至多邊形也有相同性質。

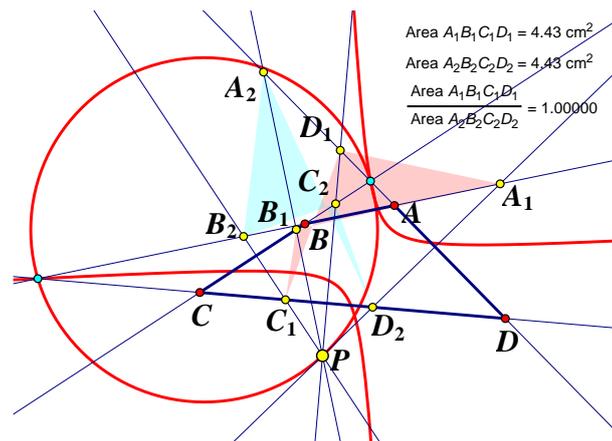


圖 31：任意四邊形中，衍伸四邊形面積相等時 P 構成軌跡

3. 將之推廣至任意多邊形時，仍保有有向線段比不變量。

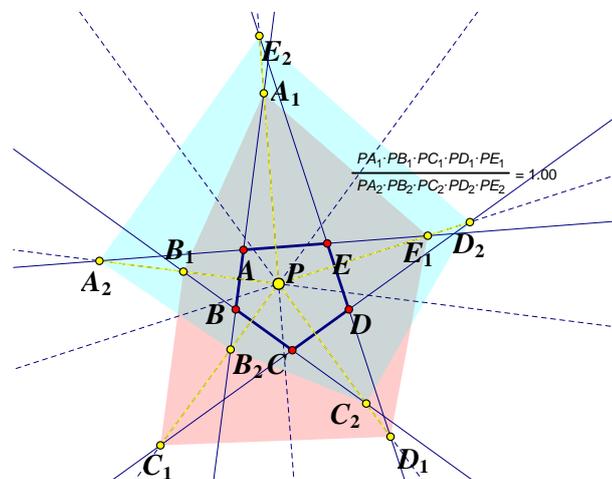


圖 32：任意多邊形線段比不變量(以五邊形為例)

陸、 結論

本研究探討 2021 年 Todor Zaharinov 所提出的衍伸三角形面積問題，相較於原始題目，我們透過更改不同的條件推廣，分別以三角形頂點作為旁接三角形的重心、垂心、外心等進行刻劃，並以重心坐標及 Conway 符號給出了簡潔的證明過程及結果。

我們可以將以上研究歸納為以下大項：

一、 以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之重心，構造衍伸三角形

- (一) 衍伸三角形頂點 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ 皆落在在一條二次曲線 Γ 上。
- (二) 進一步求得二次曲線 Γ 的方程式及型態判別式。
- (三) 發現當 P 點為原三角形的陪位重心時， Γ 為圓。
- (四) 推廣至任意四邊形，當 P 點為四邊形對角線交點時，衍伸四邊形頂點 $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ 皆落在在一條二次曲線上。

二、 以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之垂心，構造衍伸三角形

- (一) 當衍伸三角形的有向面積比值為 1 時， P 點軌跡為原三角形的 Kiepert 雙曲線。
- (二) 當衍伸三角形的有向面積比值為 -1 時， P 點軌跡為原三角形的外接圓。
- (三) 討論衍伸三角形有向面積比值，令 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P \mid [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2], r \in \mathbb{R}\}$ ，給出 $\Gamma_{P,r}$ 為二次曲線系，並進一步得到其型態判別式，以及二次曲線系的四個交點（原三角形頂點及 Tarry Point）。
- (四) 當 P 點位於原三角形外接圓上時，衍伸三角形頂點落於二次曲線上。
- (五) 刻劃出有向線段比不變量 $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PC_2}} \times \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PA_2}} \times \frac{\overline{PC_1}}{\overline{PB_2}} = 1$ 。

三、 以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之外心，構造衍伸三角形

- (一) 分別求得當衍伸三角形有向面積相等時，以三極坐標表示的 P 點曲線。
- (二) 「向內」構造中，衍伸三角形有向面積相等時， P 點軌跡類似三次曲線 Neuberg Cubic 且與之交於 13 點（三角形頂點、三邊向外、向內構造正三角形的頂點、以對邊反射頂點所得的點、三角形外心）。

柒、 參考文獻

- [1] Todor Zaharinov (2021) . Problem 4673. *Crux Mathematicorum*, 47 (10) , 395.
- [2] The UCLan Cyprus Problem Solving Group (2022) . J. Chris Fisher (2022) . Solutions 4673. *Crux Mathematicorum*, 48 (3) , 169-171.
- [3] Max Schindler, Evan Chen (2012) . *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*, available at <https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf>
- [4] Paris Pamfilos (2019) , *Carnot's theorem*, available at <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/CarnotConics.html>
- [5] 黃武雄 (1981) 。高中解析幾何後記 。*數學傳播季刊* , 5 (1) , 37-46 。
- [6] Alexander Bogomolny (2018) . *Steiner's Circumellipse in Barycentric Coordinates*, available at <https://www.cut-the-knot.org/triangle/SteinerCircumellipse.shtml>
- [7] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, available at <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [8] Wolfram MathWorld. *Kiepert hyperbola*, available at <https://mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html>
- [9] Bernard Gibert. *Cubics in the Trangle Plane*, available at <http://bernard-gibert.fr/index.html>

捌、 附錄

一、 重心坐標下的 Kiepert 雙曲線

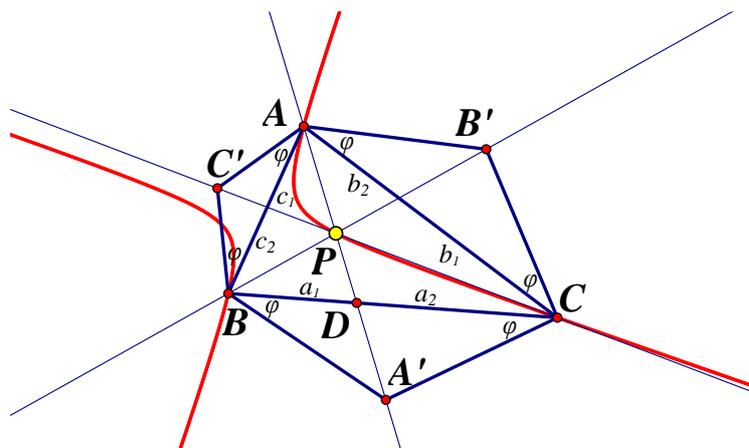


圖 37：三角形中的 Kiepert 雙曲線

定義：以任意三角形 $\triangle ABC$ 三邊構造相似等腰三角形 $\triangle ABC'$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle A'BC$ ，作 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 交於 P 點，則 P 點軌跡將構成 Kiepert 雙曲線，且滿足

$$(S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx + (S_A - S_B)xy = 0$$

證明：

1. 令等腰三角形底角為 φ ，且 $\overline{BD} = a_1$ 、 $\overline{DC} = a_2$ ，則同理令其餘邊為 b_1 、 b_2 、 c_1 、 c_2 。
2. 由正弦定理代換得 $a_1 : a_2 = \triangle ABD : \triangle ACD = c \sin \angle ABD : b \sin \angle DAC$
3. 又 $\because \frac{\sin \angle ABD}{\sin(B+\varphi)} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}}$ ， $\frac{\sin \angle DAC}{\sin(C+\varphi)} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}}$ ，有 $a_1 : a_2 = c \sin(B + \varphi) : b \sin(C + \varphi)$ ，同理得 $b_1 : b_2 = a \sin(C + \varphi) : c \sin(A + \varphi)$
4. 令 P 點重心坐標 $(x : y : z)$ ，則有 $x : y : z = a \sin(B + \varphi) \sin(C + \varphi) : b \sin(C + \varphi) \sin(A + \varphi) : c \sin(A + \varphi) \sin(B + \varphi)$
5. 則當 $x, y, z \neq 0$ ，Kiepert 雙曲線公式有

$$\begin{aligned} & \frac{S_B - S_C}{x} + \frac{S_C - S_A}{y} + \frac{S_A - S_B}{z} \\ &= \sum_{cyc} \frac{S_B - S_C}{a \sin(B+\varphi) \sin(C+\varphi)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{(S_B - S_C)bc \sin(A+\varphi)}{abc \sin(A+\varphi) \sin(B+\varphi) \sin(C+\varphi)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{(S_B - S_C)(bc \sin A \cos \varphi + bc \cos A \sin \varphi)}{abc \sin(A+\varphi) \sin(B+\varphi) \sin(C+\varphi)} \\ &= \frac{(S_B - S_C)[2\Delta ABC \cos \varphi + S_A \sin \varphi] + (S_C - S_A)[2\Delta ABC \cos \varphi + S_B \sin \varphi] + (S_A - S_B)[2\Delta ABC \cos \varphi + S_C \sin \varphi]}{abc \sin(A+\varphi) \sin(B+\varphi) \sin(C+\varphi)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

二、 重心坐標下的外接圓

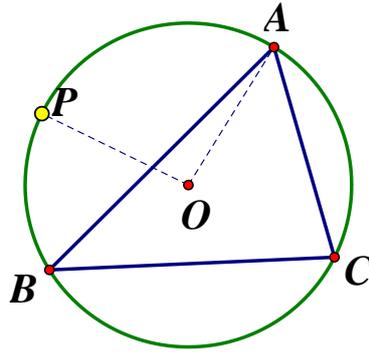


圖 36：三角形中的外接圓

定義：以任意三角形 $\triangle ABC$ 構造外接圓，則圓上動點 P 滿足

$$(S_B + S_C)yz + (S_C + S_A)zx + (S_A + S_B)xy = 0, \text{ 即}$$

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0$$

證明：

1. 由 $|\overline{OP}|^2 = |\overline{OA}|^2$ 可得：

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} -a^2 \left(y - \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \left(z - \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \\ &= -a^2 \left(-\frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \left(-\frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \\ & \quad - b^2 \left(-\frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \left(1 - \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \\ & \quad - c^2 \left(1 - \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \left(-\frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \right) \end{aligned}$$

2. 我們可以整理出

$$\begin{aligned} & a^2yz + b^2xz + c^2xy \\ &= \frac{a^2(z \sin 2B + y \sin 2C) + b^2((x-1) \sin 2C + z \sin 2A) + c^2(y \sin 2A + (x-1) \sin 2B)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \\ &= \frac{y(a^2 \sin 2C + c^2 \sin 2A - b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B) + z(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A - b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B)}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \\ &= \frac{8R^2[y(\sin A \sin C \sin(A+C) - \sin B \sin C \sin(B+C)) + z(\sin A \sin B \sin(A+B) - \sin B \sin C \sin(B+C))]}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \\ &= 0 \end{aligned}$$

【評語】 050414

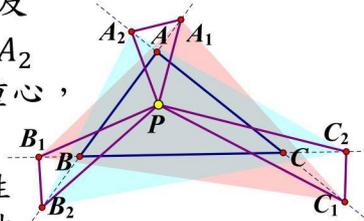
作者研究三角形有關的幾何性質，考慮給定三角形 ABC 以及平面上任一點 P ，要求在直線 AB 、 AC 上各取一點，使得這兩點與 P 點所形成的三角形的重心為 A 點；用同樣的手法對 B 點及 C 點各操作一次，最終會得到六個點，而作者可以證明這六點共圓錐曲線，並且找出唯一能使此圓錐曲線為圓的 P 點。此外，作者將重心改成垂心，發現有些 P 點能有面積相等的特性，且這些 P 點的軌跡可成為一雙曲線。作者熟練的運用射影幾何與重心座標的諸多工具，創造出許多十分有趣的結果，對於相關的平面幾何也給了完整的呈現與證明，是一個不錯的作品。

作品簡報

衍伸三角形之
有向面積性質探究

壹、前言

Todor Zaharinov 在數學雜誌上提供了幾何證明題：「在平面上給定 $\triangle ABC$ 及任意點 P ，以 P 點和三角形邊直線 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 上點構造旁接三角形 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ ，使得原三角形頂點 A 、 B 、 C 分別為旁接三角形之重心，則兩衍伸三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 面積相等」[1]。



▲圖1：幾何證明題構圖

本研究探討原題構造中的幾何性質，以及其延伸推廣，並刻劃豐富有趣的性質。其中，我們將頂點由「旁接三角形重心」更換為其他特殊形心，討論衍伸三角形面積、 P 點位於特定位置的性質，以及衍伸三角形的頂點關係。

【註：本研究說明版海報使用之圖檔皆為作者以幾何繪圖軟體繪製】

貳、預備知識

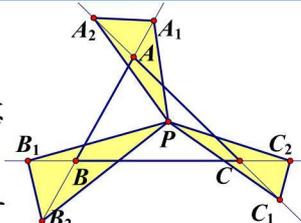
一、本研究符號及名詞定義

定義 1. 約定 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = c$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 。

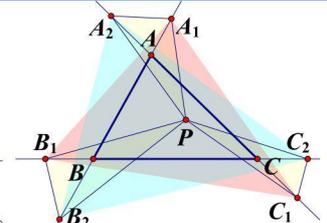
定義 2. 平面中有任一點 P 時， $\overline{AP} = l_a$ 、 $\overline{BP} = l_b$ 、 $\overline{CP} = l_c$ 。

定義 3. 「旁接三角形」為原三角形三邊所在直線上點及任意 P 點為頂點的三角形。

定義 4. 「衍伸三角形」為以旁接三角形在原三角形邊直線上的頂點所構造的 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 。



▲圖2：旁接三角形



▲圖3：衍伸三角形

二、卡諾定理 Carnot's theorem [3]

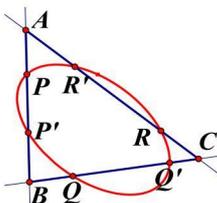
預備性質 5. 令三角形三邊直線

\overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 分別交一圓錐曲線 Γ

於 P, P', Q, Q', R, R' ，若且唯若

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BQ}{QC} \times \frac{CR}{RA} \times \frac{AP'}{P'B} \times \frac{BQ'}{Q'C} \times \frac{CR'}{R'A} = 1$$

並可推廣至任意多邊形。



▲圖4：卡諾定理

三、康歲符號 Convey's notation

定義 6. 以 S 表示 $\triangle ABC$ 的兩倍面積，對於實數 θ 將「 $S \cot \theta$ 」記為「 S_θ 」。其中：

- (1) $S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}$, $S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$.
- (2) $S_A + S_B = c^2$ 、 $S_B + S_C = a^2$ 、 $S_C + S_A = b^2$.
- (3) $S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = S^2$.

四、重心坐標 Barycentric coordinates [4]

定義 7. P 點位於 $\triangle ABC$ 所在平面，有向面積比定義坐標 $P(x:y:z) = P(\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB)$ 。

定義 8. 若 $P(x,y,z)$ 滿足 $x+y+z=0$ ，則 P 為無窮遠點；而 $L_\infty: x+y+z=0$ 為無窮遠線。

預備性質 9. 點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 、 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 、 $R(x_3, y_3, z_3)$ ，有向面積 $\frac{[PQR]}{[ABC]}$ 為三點構造三階行列式值。

預備性質 10. 向量 $\overline{PQ} = (x, y, z)$ ，距離公式為 $|\overline{PQ}|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$ 。

預備性質 11. 兩向量 $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ 充要條件。

預備性質 12. 二次曲線方程式、圓方程式、 $\triangle ABC$ 的外接圓與 Kiepert hyperbola 方程式。

參、研究結果

一、以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之重心，構造衍伸三角形

(一) 衍伸三角形頂點與圓錐曲線 γ_3 的關係

我們發現衍伸三角形的六個頂點皆位於圓錐曲線 γ_3 上，並給出 γ_3 型態判別的定性性質。

令 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 構造兩個衍伸三角形，從而有

性質 2. 衍伸三角形頂點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 位於圓錐曲線 γ_3 上。

性質 3. $\gamma_3 \equiv \sum_{cyc} [(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3x^2 + (2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3xy] = 0$ 。

定理 4. γ_3 的型態判別式為 $\Delta = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3)$ 。

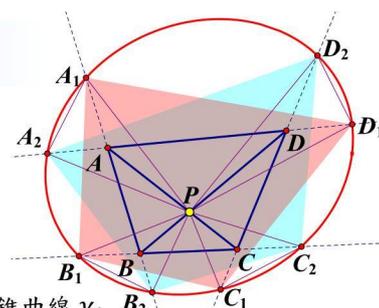
注意到，我們給出幾何意義，利用 P 點在 $\triangle ABC$ 的 Steiner Inellipse 位置刻劃決定 γ_3 的型態。

$\Delta < 0$ 時 P 在 Steiner inellipse 內	$\Delta = 0$ 時 P 在 Steiner inellipse 上	$\Delta > 0$ 時 P 在 Steiner inellipse 外	P 點為陪位重心時
Case 1. γ_3 為橢圓	Case 2. γ_3 為拋物線	Case 3. γ_3 為雙曲線	Case 4. γ_3 為圓
 $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) = -0.31239$	 $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) = 0.00000$	 $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) = 0.73911$	
▲圖5：橢圓	▲圖6：拋物線	▲圖7：雙曲線	▲圖8：圓

(二) 衍伸四邊形頂點與圓錐曲線 γ_4 的關係

性質 8. 當 P 點是對角線交點，衍伸四邊形頂點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 、 D_1 、 D_2 位於圓錐曲線 γ_4 上。

證明. 以 $\triangle ABC$ 為參考三角形，建立重心坐標系統，令 D 為任意點，求出對角線交點 P ，透過向量係數積與卡諾定理得證。



▲圖9：衍伸四邊形與圓錐曲線 γ_4

二、以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之垂心，構造衍伸三角形

推廣到垂心時，我們先關注滿足兩個衍伸三角形面積相等的 P 點的軌跡（存在性），接著刻劃 P 點位置與 $\triangle ABC$ 特殊曲線的關聯，再討論衍伸三角形頂點關係與構造中的不變量，這是本研究的亮點！

(一) 衍伸三角形有向面積相等

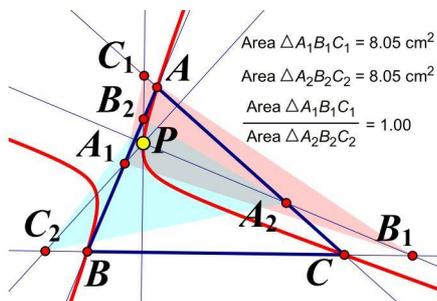
考慮到重心坐標下的面積有向性，面積相等可分為「比值為 1」、「比值為 -1」討論。

令 $P(x, y, z)$ ，給出有向面積分別為 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{S^2}{S_A S_B S_C} \sum_{\text{cyc}} S_A xy$ 與 $\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \frac{S^2}{S_A S_B S_C} \sum_{\text{cyc}} S_B xy$ 。

性質 12. 有向面積 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ ，若且唯若 P 點軌跡為 $\triangle ABC$ 的 **Kiepert hyperbola** [6]。
有向面積 $[A_1B_1C_1] = -[A_2B_2C_2]$ ，若且唯若 P 點軌跡為 $\triangle ABC$ 的**外接圓**。

$$[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$$

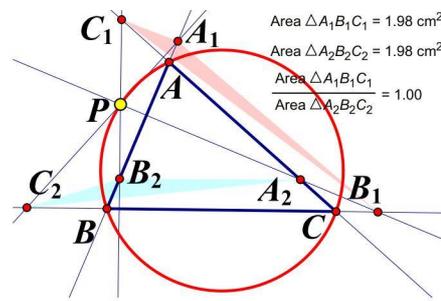
證明. $\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} - \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (S_A - S_B)xy = 0$



▲圖10：Kiepert 曲線

$$[A_1B_1C_1] = -[A_2B_2C_2]$$

證明. $\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} + \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = 0 \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (S_A + S_B)xy = 0$



▲圖11：外接圓

(二) 推廣衍伸三角形有向面積比值為實數 r

滿足 $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$ 的 P 點軌跡為二次曲線系，共點於頂點 A 、 B 、 C 及 Tarry Point $X(98)$ [7]。

令 $P(x, y, z)$ ， $\Gamma_{P,r} \equiv \{P \mid [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$ ，從而有以下性質。

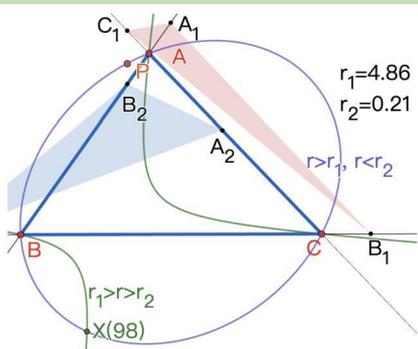
性質 15. $\Gamma_{P,r}$ 的型態判別式由 $r_1 = -\frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + 2S\sqrt{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - S^2}}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S^2}$ 、 $r_2 = -\frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S\sqrt{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - S^2}}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S^2}$ 刻劃。

Case 1. 當 $r_1 > r_2$ ，則若 r 在 (r_1, r_2) 區間， $\Gamma_{P,r}$ 為雙曲線；若 r 不在 (r_1, r_2) 區間外， $\Gamma_{P,r}$ 為橢圓。

Case 2. 當 $r_1 < r_2$ ，則若 r 在 (r_1, r_2) 區間， $\Gamma_{P,r}$ 為橢圓；若 r 不在 (r_1, r_2) 區間外， $\Gamma_{P,r}$ 為雙曲線。

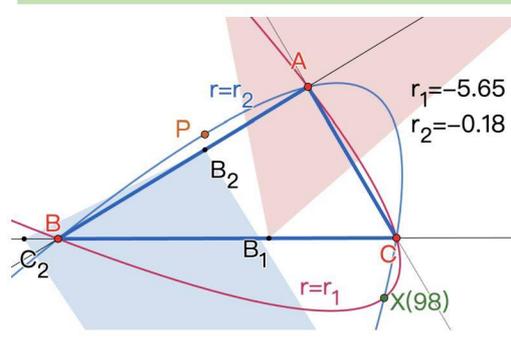
Case 3. 當 $r = r_1$ 或 $r = r_2$ 時， $\Gamma_{P,r}$ 為拋物線。

當 $r_1 > r_2$ 時



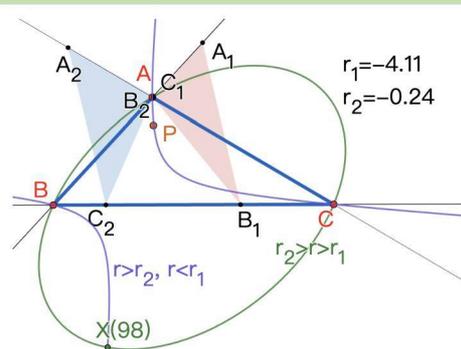
▲圖12： $r_1 > r_2$ 的兩種曲線

當 $r = r_1$ 或 $r = r_2$ 時



▲圖13： $r = r_1, r = r_2$

當 $r_1 < r_2$ 時



▲圖14： $r_1 < r_2$ 的兩種曲線

注意到， P 點位於頂點 A 、 B 、 C 、Tarry Point 時，衍伸三角形退化為直線，即 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$ 。

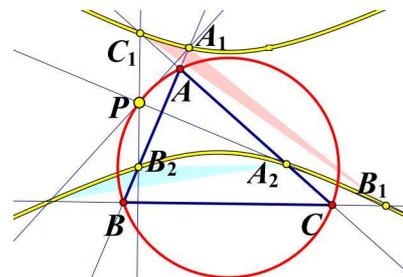
(三) 衍伸三角形六個頂點何時共一個圓錐曲線？

好奇以垂心為條件構圖下的衍伸三角形頂點關係，我們發現當 P 點在原三角形的外接圓時，若且惟若六個頂點皆在圓錐曲線上。

定理 17. 若 P 點在 $\triangle ABC$ 外接圓上時，若且惟若衍伸三角形六個頂點

A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 在一個圓錐曲線上。

證明. 透過卡諾定理成立的條件列式，解得原三角形的外接圓方程式。



▲圖15：衍伸三角形頂點關係

(四) 有向線段比值不變量

定理 18. 有向線段比為 $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PC_2}} \times \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PA_2}} \times \frac{\overline{PC_1}}{\overline{PB_2}} = 1$ 。

證明. 計算係數積乘積可得 $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PC_2}} \times \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PA_2}} \times \frac{\overline{PC_1}}{\overline{PB_2}} = \frac{S_{CZ}}{S_{AX}} \times \frac{S_{AX}}{S_{BY}} \times \frac{S_{BY}}{S_{CZ}} = 1$ 。

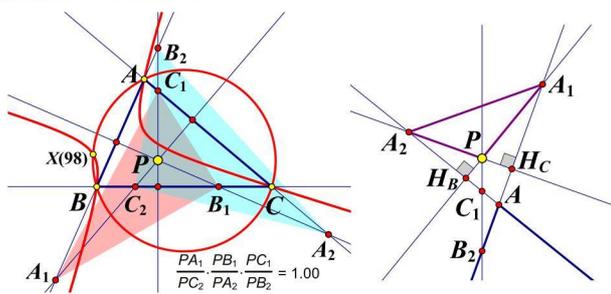
注意到這個不變量性質在多邊形仍成立，我們給出純幾何觀點。

在旁接三角形 $\triangle PA_1A_2$ 中， C 為 $\triangle PA_1A_2$ 的垂心，從而有 P 也為

$\triangle CA_1A_2$ 的垂心，由圓幂定理可得 $\overline{PA_1} \times \overline{PH_B} = \overline{PA_2} \times \overline{PH_C}$ ，同理

$\overline{PB_1} \times \overline{PH_C} = \overline{PB_2} \times \overline{PH_A}$ 與 $\overline{PC_1} \times \overline{PH_A} = \overline{PC_2} \times \overline{PH_B}$ ，並考慮有向性

即可得證。此方法可推廣至任意多邊形構圖中的線段比不變量。



▲圖16：線段比值不變量

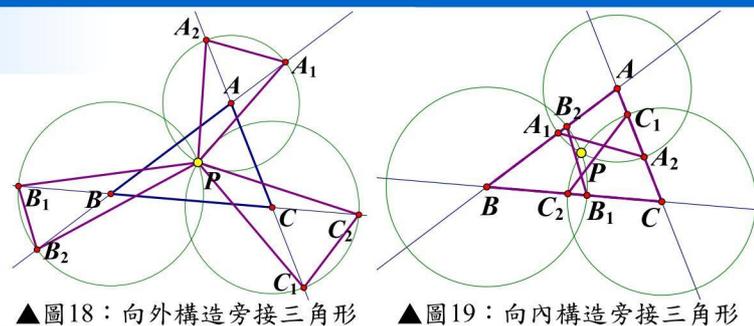
▲圖17：旁接三角形

三、以 $\triangle ABC$ 頂點為旁接三角形之外心，構造衍伸三角形

(一) 作圖步驟：構造旁接三角形

步驟. 以 P 為圓心， \overline{AP} 為半徑作圓交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 A_1 、 A_2 ，其餘同理可得 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 ， $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ 即為所求。

此種構圖方式中存在「向外」及「向內」兩種衍伸三角形的構造，因此我們將分別討論。

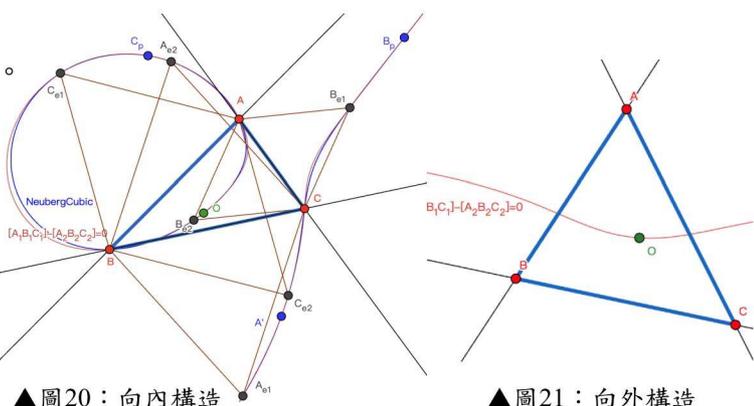


(二) 幾何性質

我們分別給出兩種構造下使得衍伸三角形面積相等時的 P 點軌跡方程式。值得一提的是，在向內構造中，發現 P 點軌跡曲線與著名三次曲線 Neuberg Cubic [8]，交於 13 個特殊點！

性質 20. 向內構造，當 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ 時， P 點軌跡為 $\sum_{cyc} a l_a [-b + c - l_b + l_c] = 0$ 。
向外構造，當 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ 時， P 點軌跡為 $\sum_{cyc} a l_a [b - c - l_b + l_c] = 0$ 。

性質 21. 向內構造， P 點軌跡與 Neuberg Cubic 共點於三角形頂點、以三邊分別向外、向內構造正三角形的頂點 A_{e_1} 、 A_{e_2} 、 B_{e_1} 、 B_{e_2} 、 C_{e_1} 、 C_{e_2} 、以對邊反射頂點所得點 A_p 、 B_p 、 C_p ，及三角形外心 O 。

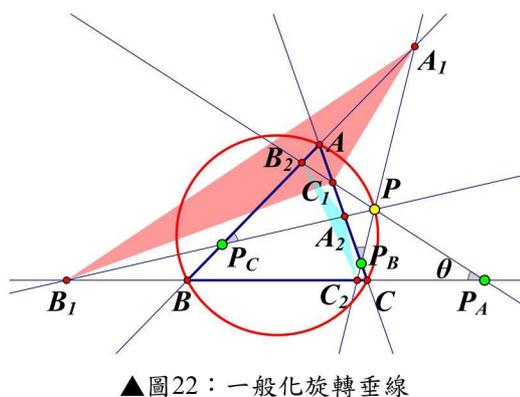


四、有關垂心的研究項目之推廣與新發現

本研究的項目二，過 P 點構造三邊垂直線，並以之與三角形邊直線的交點構造衍伸三角形，若將之推廣，以 P 點為中心旋轉原垂線 $\overline{PP_A}$ 、 $\overline{PP_B}$ 、 $\overline{PP_C}$ ，使得 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \theta$ 時，則可得到更一般化的理論。

定理 27. 若 P 點位於外接圓上，若且唯若有向面積比值為定值 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -\prod_{cyc} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$

定理 28. 若 P 點位於 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合二次曲線系上，若且唯若有向面積比值為定值 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \prod_{cyc} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$

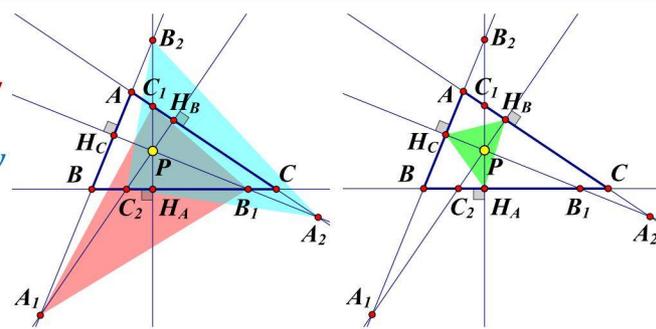


肆、討論

本研究的亮點在於垂心項目！我們討論 Kiepert hyperbola 與外接圓為什麼會使得兩衍伸三角形的有向面積比值分別為 1 與 -1？而不僅是止於發現其代數式吻合。

我們給出其幾何意義，發現其關聯為「垂足三角形」。

$$\begin{aligned} \text{令 } P(x, y, z) \text{ 從而有} \\ \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} &= \frac{S^2}{S_A S_B S_C} \sum_{cyc} S_A xy \\ \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} &= \frac{S^2}{S_A S_B S_C} \sum_{cyc} S_B xy \\ \frac{[H_A H_B H_C]}{[ABC]} &= \frac{S^2}{a^2 b^2 c^2} \sum_{cyc} (S_A + S_B) xy \end{aligned}$$



討論 (1) 當 P 點在 Kiepert hyperbola 上；(2) 當 P 點在外接圓上。

伍、結論

- 本研究推廣原幾何證明題，並給出許多有趣的刻劃。
 - 證明衍伸三角形頂點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 位於圓錐曲線 γ_3 上。
 - 給出圓錐曲線 γ_3 的型態判別式，並以 P 點與 Steiner inellipse 的相對位置表示型態。
 - 發現 P 點為 $\triangle ABC$ 陪位重心時， γ_3 是一個圓。
 - 證明任意四邊形中，當 P 為對角線交點時，衍伸四邊形頂點位於圓錐曲線 γ_4 上。
- 設定新條件，以頂點為旁接三角形的其他特殊點，並對於 P 點軌跡及性質進行研究。
 - 以頂點為旁接三角形的垂心
 - 衍伸三角形面積相等時， P 點軌跡為 Kiepert hyperbola 及外接圓。
 - 研究衍伸三角形面積比，得到 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P | [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2], r \in \mathbb{R}\}$ 的型態判別式。
 - 證明當 P 點在外接圓時，衍伸三角形的六個頂點共圓錐曲線。
 - 刻畫出有向面積相等的衍伸三角形與 Kiepert hyperbola 及外接圓的幾何必然性。
 - 以頂點為旁接三角形的外心
 - 以三極坐標表示衍伸三角形相等時的 P 點軌跡方程式。
 - 向內構造中， P 點軌跡與 Neuberg Cubic 曲線交於 13 個特殊點。

陸、主要參考資料

[1] Todor Zaharinov (2021). Problem 4673. *Crux Mathematicorum*, 47(10), 395.
 [2] The UCLan Cyprus Problem Solving Group(2022). J. Chris Fisher (2022). Solutions 4673. *Crux Mathematicorum*, 48(3), 169-171.
 [3] Alexander Bogomolny (2020), *Carnot's Theorem for Conics*.
 [4] Max Schindler, Evan Chen (2012). *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*.
 [5] 黃武雄 (1981)。高中解析幾何後記。數學傳播季刊，5(1)，37-46。
 [6] Wolfram MathWorld. *Kiepert hyperbola*.
 [7] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*.
 [8] Bernard Gibert. *Cubics in the Triangle Plane*.