中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

(鄉土)教材獎

050413

化圓為方 — 四邊形的蝴蝶定理

學校名稱： 國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高二 辛佳佑 高二 廖昱喆 高二 陳威廷	楊玉星

關鍵詞： 蝴蝶定理、四邊形、多邊形

摘要

本研究是將**圓形蝴蝶定理**推廣至**四邊形**，首先將四邊形分成**梯形、平行四邊形、一對角線被另一對角線平分的四邊形**，再推廣至**任意四邊形**，發現**四邊形也有蝴蝶定理**。而**蝴蝶形的中心**可以是**四邊形兩對角線的交點**，若**一對角線被平分**時，則**以此對角線為蝴蝶線**就有**蝴蝶定理**，若**此對角線不被平分**就有**坎迪定理**；若**將此中心沿著另一對角線移動**就有**類坎迪定理**，**沿著原對角線移動**就有**坎迪延伸定理**，若**此對角線再被平分**，就有**等比例蝴蝶定理**。最後利用**三線共點的作圖法**，成功將**四邊形蝴蝶定理一般化**。並透過**不斷地延長多邊形不相鄰的邊**，將**多邊形退化成四邊形**，從而得到**多邊形的蝴蝶定理**，只是此時**蝴蝶形不一定內接在多邊形的邊上**，也可能接在**邊之延長線上**。

壹、前言

(本研究每張圖片皆為作者用 *Geometer's Sketchpad* 電腦動態幾何軟體繪製而成)

一、研究動機

關於**蝴蝶定理**（***Butterfly Theorem***），如圖 1-1-1，過圓內弦$\overline{PQ}$的中點 M 任作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，連接 A、D 和 C、B 分別交弦$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則$\overline{XM}=\overline{MY}$。如圖 1-1-2，若連接 A、C 和 B、D 分別與$\overline{PQ}$的延長線交於Y'、X'兩點，則同樣也有$\overline{X'M}=\overline{MY'}$。除此之外，文獻也針對**弦$\overline{PQ}$、M 點的位置**和**外接其他圓錐曲線**作發想，而有一些推廣的性質。

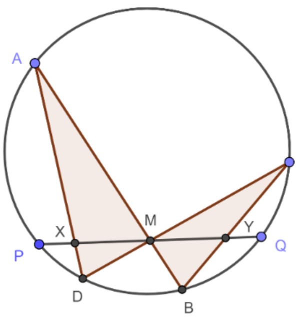


圖 1-1-1

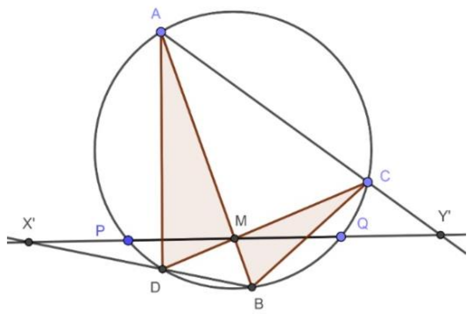


圖 1-1-2

如圖 1-1-3 和圖 1-1-4，若**將蝴蝶形外接的圓形改成四邊形**，那**蝴蝶形是否也會有類似的性質**？於是我們決定繼續推廣**蝴蝶定理**，看能否有更多不一樣的發現。

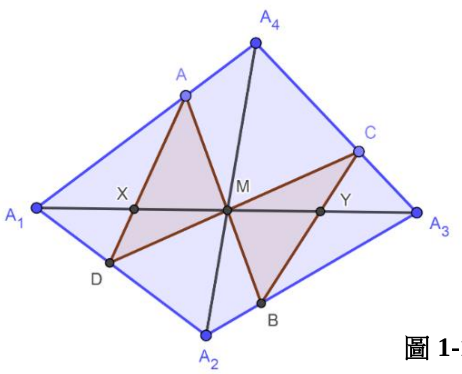


圖 1-1-3

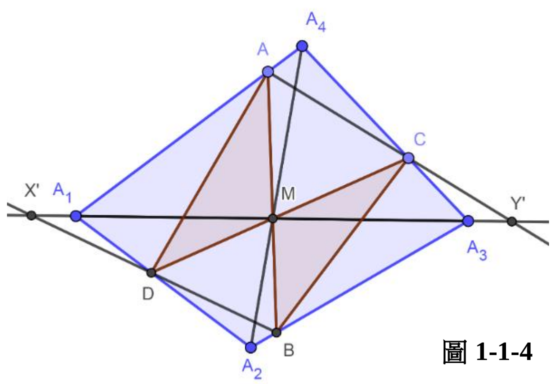


圖 1-1-4

二、研究目的

(一)考慮**梯形**的內接蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

(二)考慮**平行四邊形**的內接蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

(三)考慮**只有一對角線被平分四邊形**的內接蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

(四)考慮**任意四邊形**的內接蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

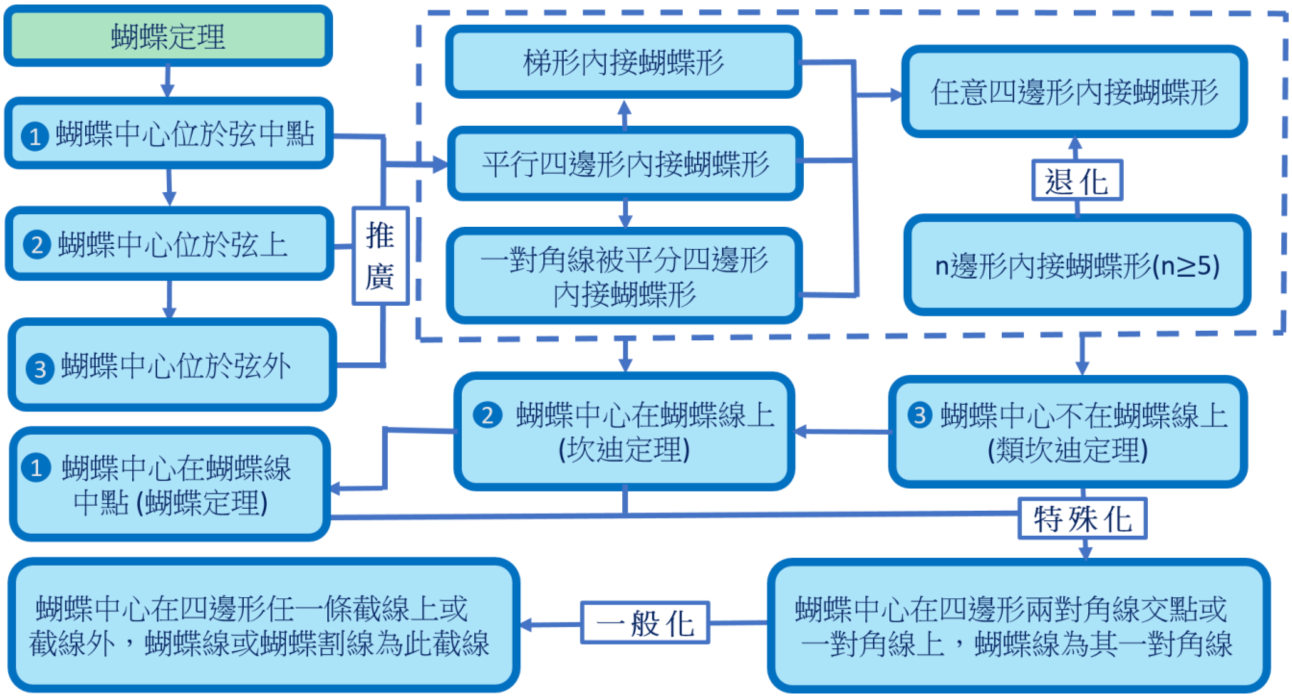
(五)考慮**圓外切四邊形**的內接於四個切點的蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

(六)考慮**任意多邊形**的內接蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

三、研究工具

本研究主要利用 ***Geometer's Sketchpad*** 和 ***Geogebra*** 電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

四、研究流程圖



五、研究特色

有別以往的研究大多**將圓內接蝴蝶形**推廣至**圓錐曲線內接蝴蝶形**，本研究是**將圓內接蝴蝶形**推廣至**四邊形及多邊形**，利用**三線共點的作圖法**成功將**四邊形的蝴蝶定理一般化**，並透過**不斷地延長多邊形不相鄰的邊**，將**多邊形退化成四邊形**，從而得到**多邊形的蝴蝶定理**。

貳、文獻探討與前置研究

一、蝴蝶定理 參[3]

蝴蝶定理（***Butterfly Theorem***）：如圖 2-1-1，過圓內弦$\overline{PQ}$的中點 M 任作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，若連接 A、D 和 C、B 分別交弦$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{XM}=\overline{MY}$。(內蝴蝶定理)

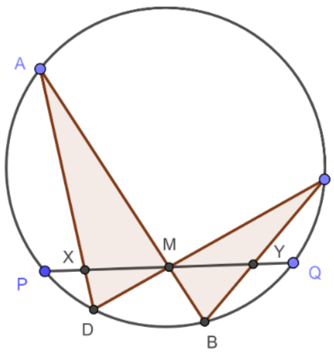


圖 2-1-1

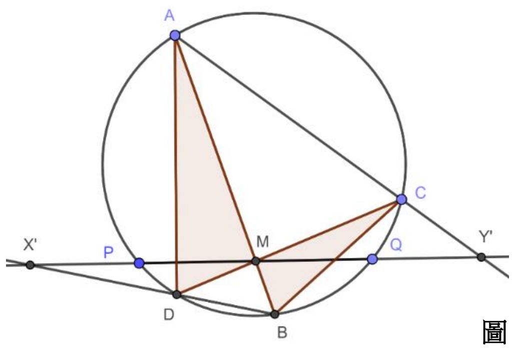


圖 2-2-1

二、蝴蝶定理的引申與推廣 參[3]

(一)推廣一：如圖 2-2-1，過圓內弦$\overline{PQ}$的中點 M 任作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，若連接 A、C 和 B、D 分別與$\overline{PQ}$的延長線交於Y′、X′兩點，則 $\overline{X'M}=\overline{MY'}$。

(二)推廣二：如圖 2-2-2，設$\overleftrightarrow{PQ}$為圓 O 外一直線，$\overline{OM}\perp\overleftrightarrow{PQ}$於 M，過 M 任作兩割線$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，若連接 A、D 和 C、B 分別與$\overleftrightarrow{PQ}$交於 X、Y 兩點，則 $\overline{XM}=\overline{MY}$。

(外蝴蝶定理)

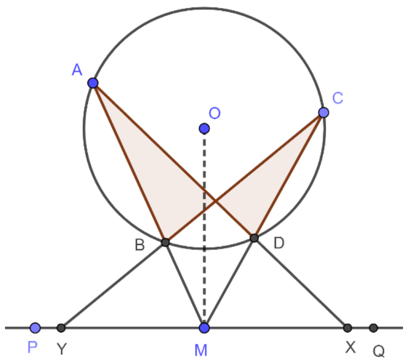


圖 2-2-2

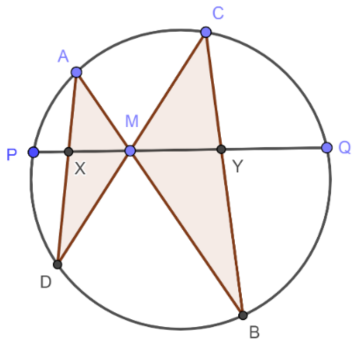


圖 2-2-3

(三)推廣三：如圖 2-2-3，設$\overline{PQ}$為圓內一條弦，過$\overline{PQ}$上一點 M 任作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，若連接 A、D 和 C、B 分別與$\overline{PQ}$交於 X、Y 兩點，則 $\frac{1}{\overline{XM}}-\frac{1}{\overline{YM}}=\frac{1}{\overline{PM}}-\frac{1}{\overline{QM}}$。

(*Candy Theorem* 坎迪定理)，也可改寫成 $\frac{\overline{PX}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YQ}}\times\frac{\overline{QM}}{\overline{MP}}=1$。

(四)推廣四：如圖 2-2-4，設 M 為圓內弦$\overline{PQ}$的中點，過圓內一點 G 作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，交$\overline{PQ}$於 H、K，連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{\overline{PX}}{\overline{XH}}\times\frac{\overline{KY}}{\overline{YQ}}\times\frac{\overline{QH}}{\overline{KP}}=1$，可改寫成$\frac{\left(\frac{\overline{HP}}{\overline{PK}}\right)}{\overline{HX}}-\frac{\left(\frac{\overline{KQ}}{\overline{QH}}\right)}{\overline{KY}}=\frac{1}{\overline{PK}}-\frac{1}{\overline{QH}}$ **(類坎迪定理)**。若已知$\overline{HM}=\overline{MK}$，則$\overline{XM}=\overline{MY}$。**(類蝴蝶定理)**

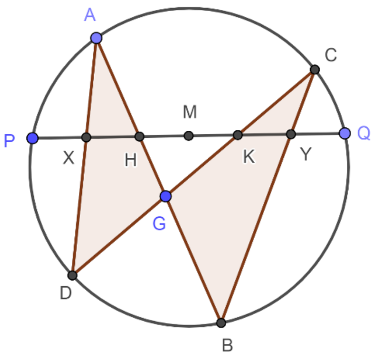


圖 2-2-4

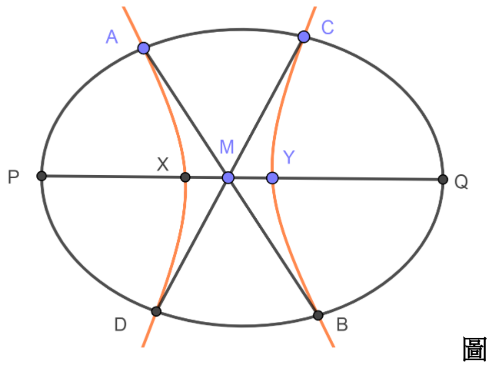


圖 2-2-5

(五)推廣五：如圖 2-2-5，設 M 為圓錐曲線Γ的弦$\overline{PQ}$上一點，過 M 任作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，再過 A、D、B、C 任作一圓錐曲線與$\overline{PQ}$交於 X、Y 兩點，則 $\frac{1}{\overline{XM}}-\frac{1}{\overline{YM}}=\frac{1}{\overline{PM}}-\frac{1}{\overline{QM}}$。若已知 $\overline{PM}=\overline{MQ}$，則 $\overline{XM}=\overline{MY}$。**(圓錐曲線的蝴蝶定理)**

三、張華恩、吳尚澂、葉承恩(2015)。正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究 參[1]

此作品的研究對象為**正方形**。**構造法**是探討正方形邊上兩個動點、正方形內一個定點以及邊上動點與內點的連線，延伸交四邊的另外兩點，所構成的蝴蝶形狀的蝴蝶線。主要利用兩個動點在邊的位置，及內點在正方形內的位置，尋找上述條件與蝴蝶線的關係。**研究結果**比較有趣的結果是蝶翼定理。**研究限制**為蝶翼四頂點在正方形上變動情形似乎沒有簡潔的規律，以至於**沒有得到一般性的結果**。

四、何碩宸、黃韻璇、張宗瑋(2019)。二次曲線上蝴蝶形的研究 參[2]

此作品的研究對象為**二次曲線**，主要是探討二次曲線之「拋物線」圖形。**構造法**多為「對稱型」的蝴蝶形線之探討，「非對稱型」之研究卻沒有展示出來。**研究結果**在圓、橢圓

、拋物線與雙曲線之重疊圖形上作出對稱與非對稱蝴蝶形，並對其面積、邊長、角度進行計算與歸納。**研究限制**為蝴蝶線固定，並**沒有得到一般性的結果**。

五、共邊定理 參[4]

如圖 2-5-1，設ΔABC和$\Delta A'B'C'$共邊($\overline{BC}=\overline{B'C'}$)，且 D 是$\overline{BC}$和$\overline{AA'}$的交點，$A'\neq D$，則$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D}}$。這裡$\Delta ABC$表示$\Delta ABC$的面積。

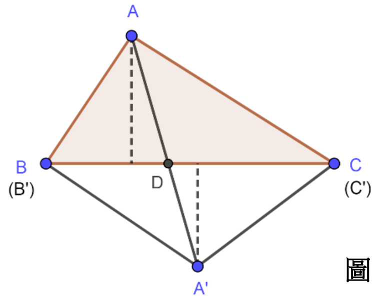


圖 2-5-1

六、共角定理 參[4]

如圖 2-6-1 和 2-6-2，設$\angle ABC$和$\angle A'B'C'$相等或互補，即$\angle ABC=\angle A'B'C'$或$\angle ABC+\angle A'B'C'=180°$，則$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\overline{A'B'}\times\overline{B'C'}}$。這裡$\Delta ABC$表示$\Delta ABC$的面積。

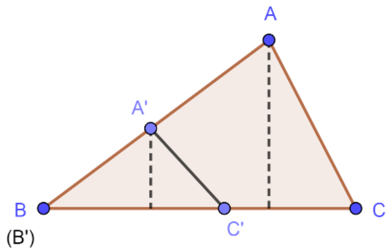


圖 2-6-1

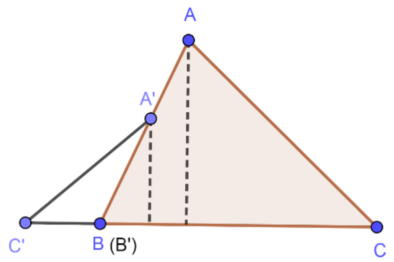


圖 2-6-2

七、*Philippe de la Hire* 定理 參[5]

如圖 2-7-1，給定$\overline{PQ}$，若(1)$L_1//L_2$，A、B 在L_2上；(2)$\overline{QA}$、$\overline{QB}$分別交L_1於A_1、B_1，則過A_1、B_1與$\overline{PA}$、$\overline{PB}$平行的直線與$\overline{PQ}$三線共點。

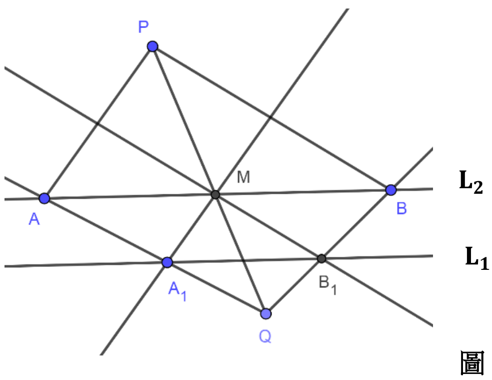


圖 2-7-1

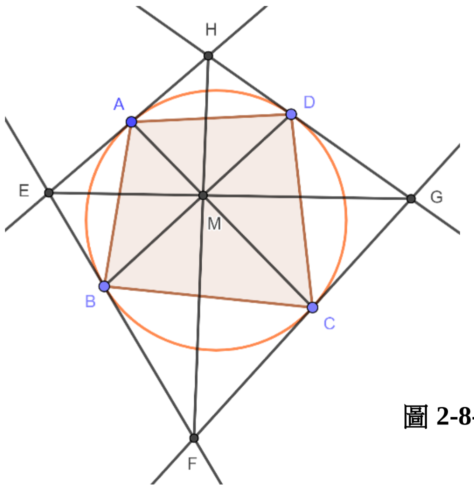


圖 2-8-1

八、牛頓幾何定理三 參[6]

如圖 2-8-1，圓外切四邊形對角線與切點四邊形對角線共交點。

參、研究方法與過程

一、名詞定義

為了方便研究的進行，我們做了以下名詞定義：

定義 1 蝴蝶形：如圖 3-1-1，凸四邊形的對角線相連，所產生四個角形，兩個不相鄰的三角形所構成。

定義 2 蝴蝶形的中心：如圖 3-1-1，蝴蝶形中，兩個三角形共用的頂點。

定義 3 蝴蝶線：如圖 3-1-2，通過蝴蝶形的中心並與蝴蝶形兩側相交的直線。

定義 4 蝴蝶割線：如圖 3-1-3，不過蝴蝶形的中心並與蝴蝶形兩側相交的直線。

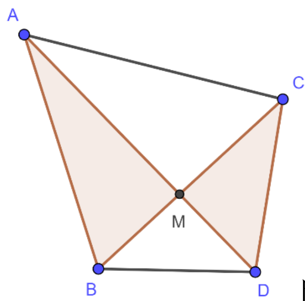


圖 3-1-1

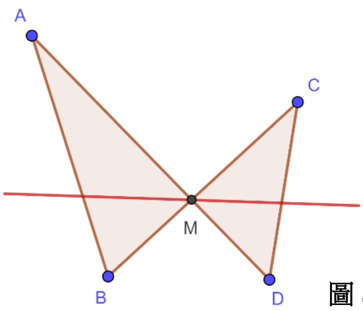


圖 3-1-2

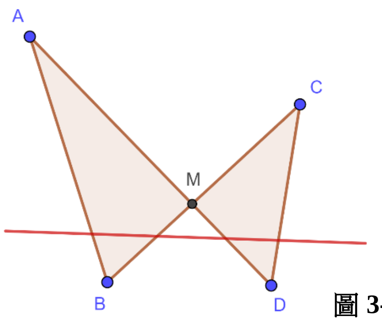


圖 3-1-3

二、研究過程

(一) 四邊形

1. 梯形

(1)考慮和上下底平行的截線段為蝴蝶線，不論蝴蝶中心**是否為此截線段的中點**，只要蝴蝶形的**四個頂點分別落在上下底**，都會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-1 (梯形之蝴蝶定理 1)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為梯形，$\overline{PQ}$為平行上下底$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_3A_4}$的截線段，以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，$\overline{PQ}$上任一點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在上下底，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

[證明]

如圖 3-2-1，因為 $\overline{PQ}//\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_4}$，

所以 $\frac{\overline{XM}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{DB}}$，從而 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

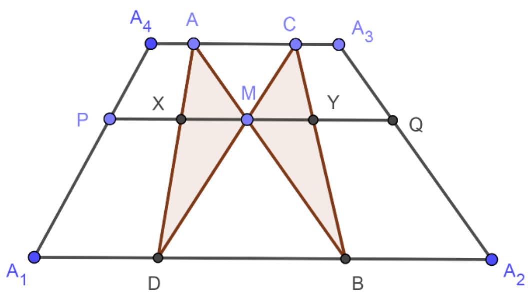


圖 3-2-1

(2)考慮和上下底平行的截線段為蝴蝶割線，不論蝴蝶中心**是否為此截線段的中點**，只要蝴蝶形的**四個頂點分別落在上下底**，都會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-2 (梯形之蝴蝶定理 2)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為梯形，$\overline{PQ}$為平行上下底$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_3A_4}$的截線段，以$\overline{PQ}$為蝴蝶割線，M 為$\overline{PQ}$上一點，$\overline{PQ}$外一點 G 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在上下底，而蝴蝶形和割線的一組交點 H、K 滿足$\overline{MH}=\overline{MK}$，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

[證明]

如圖 3-2-2，因為 $\overline{PQ}//\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_4}$，

所以 $\frac{\overline{XH}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DH}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BK}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{KY}}{\overline{AC}}$，從而 $\overline{XH}=\overline{KY}$。

又 $\overline{HM}=\overline{MK}$，推得 $\overline{XH}+\overline{HM}=\overline{MK}+\overline{KY}$，

故 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

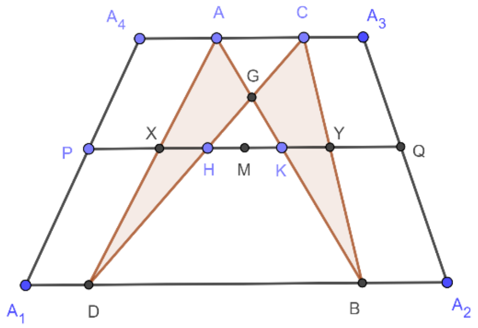


圖 3-2-2

(3)考慮**一組對邊中點的連線(中位線)**為蝴蝶線，**中位線的中點**為蝴蝶形的中心，只要蝴蝶形的**四個頂點分別落在上下底**，都會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-3 (梯形之蝴蝶定理 3)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為梯形，$\overline{PQ}$為一組對邊$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$的中點連線，以$\overline{PQ}$的中點 M 為蝴蝶中心，將$\overline{PQ}$旋轉成$\overline{P'Q'}$，並各自以$\overline{PQ}$、$\overline{P'Q'}$為蝴蝶線，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在上下底，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，交$\overline{P'Q'}$於X'、Y'兩點，

則 $\overline{MX}=\overline{MY}$且$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

[證明]

(1)如圖 3-2-3，由**定理 3-2-1** 可知：$\overline{MX}=\overline{MY}$。

(2)因為 $\overline{PQ}$為梯形$A_1A_2A_3A_4$的中位線，

所以 $\overline{AM}=\overline{BM}$，$\overline{DM}=\overline{CM}$，又 $\angle AMD=\angle BMC$，

推得 $\Delta AMD\cong\Delta BMC(SAS)$，從而 $\overline{AD}//\overline{CB}$。

因為 $\overline{AD}//\overline{CB}$，所以 $\angle MXX'=\angle MYY'$，

且 $\overline{MX}=\overline{MY}$、$\angle XMX'=\angle YMY'$，

推得 $\Delta MXX'\cong\Delta MYY'(ASA)$，故 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

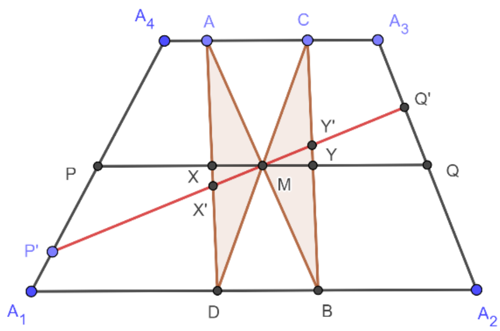


圖 3-2-3

2. 平行四邊形

(1)考慮**一組對邊中點的連線(中位線)**為蝴蝶線，**中位線的中點(恰為對角線的交點)**為蝴蝶形的中心，則不論蝴蝶形的四個頂點是否只落在一組對邊上，都會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-4 (平行四邊形之蝴蝶定理 1)

設四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$為平行四邊形，以對角線的交點 M 為蝴蝶中心，一組對邊$\overline{\mathbf{A_1A_4}}$、$\overline{\mathbf{A_2A_3}}$的中點連線$\overline{\mathbf{PQ}}$為蝴蝶線，若蝴蝶形 ABCD 的頂點不全落在一組對邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{\mathbf{PQ}}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{\mathbf{MX}}=\overline{\mathbf{MY}}$。若進一步以 M 為中心將蝴蝶線$\overline{\mathbf{PQ}}$旋轉成蝴蝶線$\overline{\mathbf{P'Q'}}$，且$\overline{\mathbf{AD}}$和$\overline{\mathbf{CB}}$分別交$\overline{\mathbf{P'Q'}}$於$\mathbf{X'}$、$\mathbf{Y'}$兩點，則 $\overline{\mathbf{MX'}}=\overline{\mathbf{MY'}}$。

[證明]

(1)如圖 3-2-4，因為$\overline{A_1A_4}//\overline{A_2A_3}$，所以$\angle APM=\angle BQM$，$\overline{PM}=\overline{QM}$，$\angle AMP=\angle BMQ$，推得$\Delta AMP\cong\Delta BMQ(ASA)$，從而$\overline{AM}=\overline{MB}$。又$\overline{PQ}//\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_4}$，所以$\overline{CM}=\overline{MD}$，且$\angle AMD=\angle BMC$，推得$\Delta AMD\cong\Delta BMC(SAS)$，從而$\angle MAX=\angle MBY$，推得$\Delta AMX\cong\Delta BMY(ASA)$，故$\overline{MX}=\overline{MY}$。

(2)因為$\angle MAD=\angle MBC$，所以$\overline{AD}//\overline{CB}$，從而$\angle MXX'=\angle MYY'$，且$\overline{MX}=\overline{MY}$、$\angle XMX'=\angle YMY'$，推得$\Delta MXX'\cong\Delta MYY'(ASA)$，故$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

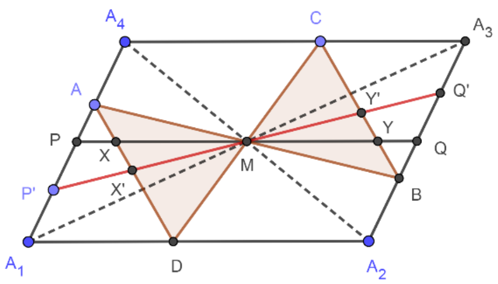


圖 3-2-4

(2)若考慮蝴蝶形**頂點不同的連接方式**，則會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-5 (平行四邊形之蝴蝶定理 2)

設四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$為平行四邊形，以對角線的交點 M 為蝴蝶中心，一組對邊$\overline{\mathbf{A_1A_4}}$、$\overline{\mathbf{A_2A_3}}$的中點連線$\overline{\mathbf{PQ}}$為蝴蝶線，若蝴蝶形 ABCD 的頂點不全落在一組對邊上，且連接 C、A 和 D、B 分別交$\overleftrightarrow{\mathbf{PQ}}$於X、Y兩點，則 $\overline{\mathbf{MX}}=\overline{\mathbf{MY}}$。若進一步以 M 為中心將蝴蝶線$\overline{\mathbf{PQ}}$旋轉成蝴蝶線$\overline{\mathbf{P'Q'}}$，且$\overleftrightarrow{\mathbf{CA}}$和$\overleftrightarrow{\mathbf{DB}}$分別交$\overleftrightarrow{\mathbf{P'Q'}}$於$\mathbf{X'}$、$\mathbf{Y'}$兩點，則 $\overline{\mathbf{MX'}}=\overline{\mathbf{MY'}}$。

[證明]

(1)如圖 3-2-5，由**定理 3-2-4 證明**得知：$\Delta AMD\cong\Delta BMC(SAS)$，推得$\Delta AMC\cong\Delta BMD(SAS)$，從而$\angle ACM=\angle BDM$，即$\angle XCM=\angle YDM$，$\overline{CM}=\overline{MD}$，且$\angle CMX=\angle DMY$，推得$\Delta CMX\cong\Delta DMY(ASA)$，故 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

(2)因為$\angle X'CM=\angle Y'DM$，所以$\overline{X'C}//\overline{Y'D}$，從而

$\angle MXX'=\angle MYY'$，且$\overline{MX}=\overline{MY}$、$\angle XMX'=\angle YMY'$，

推得$\Delta MXX'\cong\Delta MYY'(ASA)$，故$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

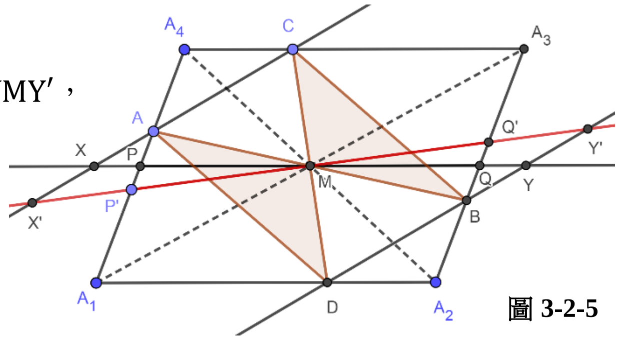


圖 3-2-5

3. 只有一條對角線被平分的四邊形

(1)考慮**此條被平分的對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**對角線的交點**，如果蝴蝶形的四個頂點**只落在四邊形的一組對邊**上，會有以下的蝴蝶定理：

> **定理 3-2-6 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理 1)**
>
> **設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為一條對角線$\overline{A_1A_3}$被另一條$\overline{A_2A_4}$平分的四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$的中點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點只落在四邊形的一組對邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。**

[證明]

如圖 3-2-6 和圖 3-2-7，由共邊、共角定理，及$\overline{A_1M}=\overline{A_3M}$可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta A_1AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta A_3BC}\times\frac{\Delta A_3BC}{\Delta A_3DC}\times\frac{\Delta A_3DC}{\Delta A_1DC}\times\frac{\Delta A_1DC}{\Delta A_1DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3D}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3D}}\times1\times\frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3A}{\Delta A_1A_3B}\times\frac{\Delta A_1A_3D}{\Delta A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}$$

由合比性質得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\Longrightarrow\frac{\overline{MX}}{\overline{MX}+\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MY}+\overline{A_3Y}}$，$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1M}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3M}}$，故 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

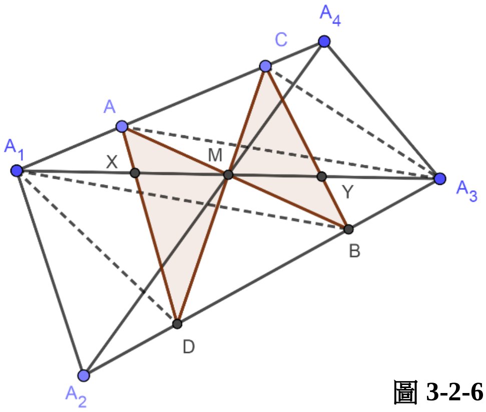


圖 3-2-6

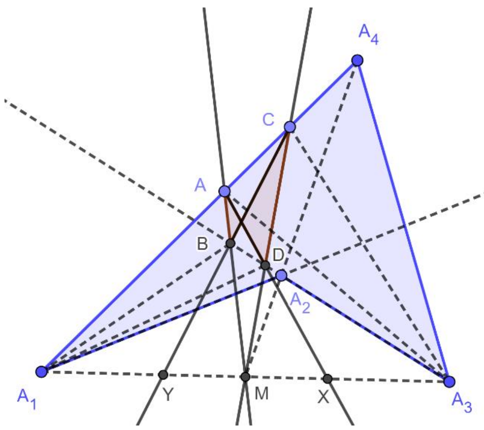


圖 3-2-7

(2)考慮**此條被平分的對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**對角線的交點**，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-7 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理 2)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為一條對角線$\overline{A_1A_3}$被另一條$\overline{A_2A_4}$平分的四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$的中點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。(四邊形的蝴蝶定理)

[證明]

如圖 3-2-8 和圖 3-2-9，由共邊、共角定理，及$\overline{A_1M}=\overline{A_3M}$可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta A_1AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta A_3BC}\times\frac{\Delta A_3BC}{\Delta A_3A_2A_4}\times\frac{\Delta A_3A_2A_4}{\Delta A_1A_2A_4}\times\frac{\Delta A_1A_2A_4}{\Delta A_1DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times 1\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3A}{\Delta A_1A_3B}\times\frac{\Delta A_1A_3D}{\Delta A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3A_2}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3A_4}\times\frac{\Delta A_1A_3A_2}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\Delta A_1A_3A_4}{\Delta A_1A_3A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}$$

由合比性質得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\Rightarrow\frac{\overline{MX}}{\overline{MX}+\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MY}+\overline{A_3Y}}$，$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1M}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3M}}$，故$\overline{MX}=\overline{MY}$。

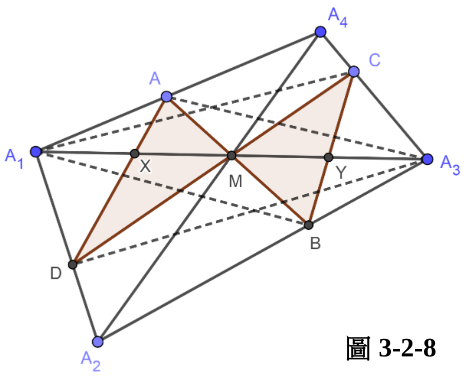


圖 3-2-8

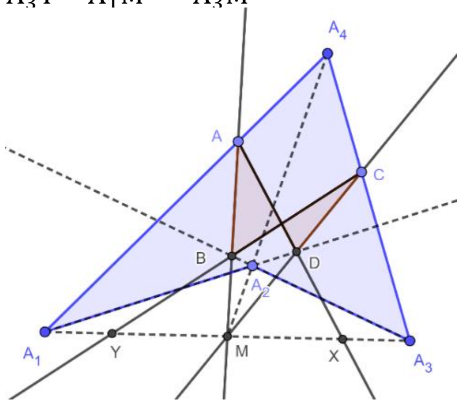


圖 3-2-9

(3)若考慮蝴蝶形**頂點不同的連接方式**，則會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-8 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理 3)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為一條對角線$\overline{A_1A_3}$被另一條$\overline{A_2A_4}$平分的四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$的中點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 C、A 和 D、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$X'$、$Y'$兩點，則 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

[證明]

如圖 3-2-10 和圖 3-2-11，由共邊、共角定理，及$\overline{MX}=\overline{MY}$可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{X'X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta X'AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta Y'BC}\times\frac{\Delta Y'BC}{\Delta Y'DC}\times\frac{\Delta Y'DC}{\Delta X'DC}\times\frac{\Delta X'DC}{\Delta X'DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{BY'}}{\overline{DY'}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{CX'}}{\overline{AX'}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{BY'}}{\overline{DY'}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{CX'}}{\overline{AX'}}$$

$$=\frac{\Delta X'Y'A}{\Delta X'Y'B}\times\frac{\Delta X'Y'D}{\Delta X'Y'C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\Delta X'Y'B}{\Delta X'Y'D}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\Delta X'Y'C}{\Delta X'Y'A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}$$

推得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{X'X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\Rightarrow\frac{1}{\overline{X'X}}=\frac{1}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}$，$\frac{\overline{Y'Y}}{\overline{X'X}}=\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}$，$\frac{\overline{Y'M}-\overline{MY}}{\overline{X'M}-\overline{MX}}=\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}$

由分比性質可知 $\frac{\overline{Y'M}-\overline{MY}}{\overline{X'M}-\overline{MX}}=\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}=\frac{\overline{Y'M}-(\overline{Y'M}-\overline{MY})}{\overline{X'M}-(\overline{X'M}-\overline{MX})}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MX}}\Rightarrow\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MX}}$，故$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

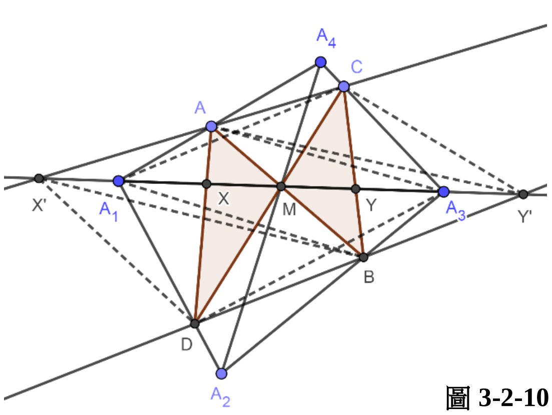


圖 3-2-10

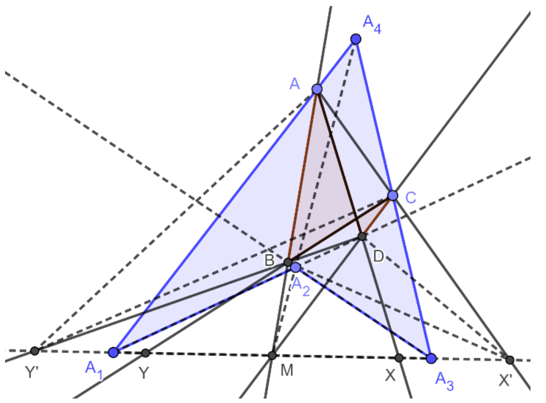


圖 3-2-11

(4)考慮**此條被平分的對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**此對角線上一點**，如果蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的蝴蝶定理：

定理 3-2-9 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理 4)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為一條對角線$\overline{A_1A_3}$被另一條$\overline{A_2A_4}$平分於 O 的四邊形，$\overline{A_1O}=\overline{A_3O}$，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$上一點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}}$。

可改寫成 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}=1$。(四邊形的等比例蝴蝶定理)

[證明]

如圖 3-2-12 和圖 3-2-13，由共邊、共角定理，及$\overline{A_1O}=\overline{A_3O}$可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta A_1AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta A_3BC}\times\frac{\Delta A_3BC}{\Delta A_3A_2A_4}\times\frac{\Delta A_3A_2A_4}{\Delta A_1A_2A_4}\times\frac{\Delta A_1A_2A_4}{\Delta A_1DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times 1\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3A}{\Delta A_1A_3B}\times\frac{\Delta A_1A_3D}{\Delta A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3A_2}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3A_4}\times\frac{\Delta A_1A_3A_2}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\Delta A_1A_3A_4}{\Delta A_1A_3A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}$$

由合比性質得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\Longrightarrow\frac{\overline{MX}}{\overline{MX}+\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MY}+\overline{A_3Y}}$，故 $\frac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}}$。若將原式的左式移項，可得 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}=1$。

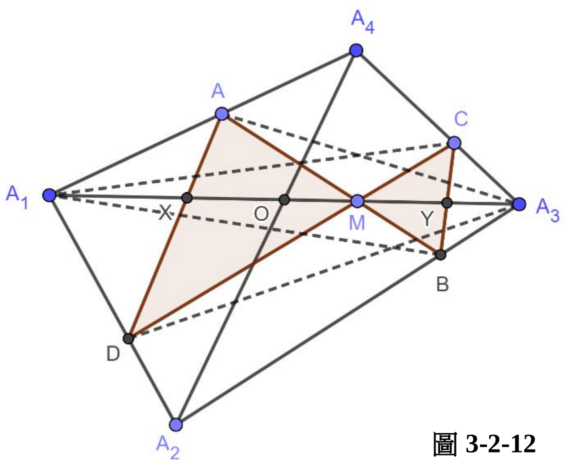


圖 3-2-12

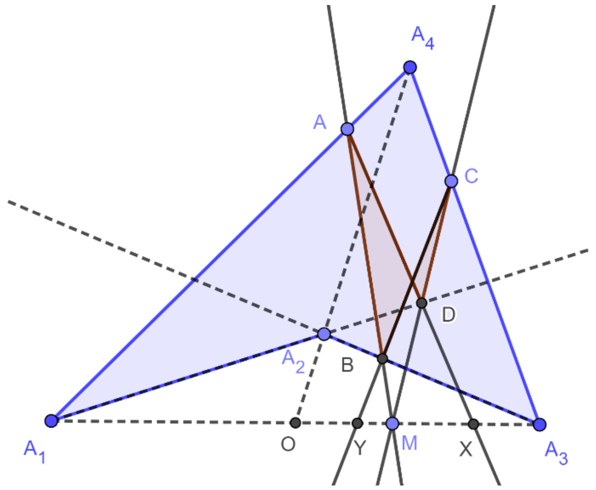


圖 3-2-13

4. 任意四邊形

(1)考慮**一條對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**兩對角線的交點**，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的坎迪定理：

> **定理 3-2-10 (四邊形的坎迪定理 1)**
>
> **設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，兩對角線交點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。可改寫成 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。**
>
> **(四邊形的坎迪定理)**

[證明]

如圖 3-2-14、圖 3-2-15、圖 3-2-16，由共邊、共角定理可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta A_1AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta A_3BC}\times\frac{\Delta A_3BC}{\Delta A_3A_2A_4}\times\frac{\Delta A_3A_2A_4}{\Delta A_1A_2A_4}\times\frac{\Delta A_1A_2A_4}{\Delta A_1DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3A}{\Delta A_1A_3B}\times\frac{\Delta A_1A_3D}{\Delta A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3A_2}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3A_4}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\Delta A_1A_3A_2}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\Delta A_1A_3A_4}{\Delta A_1A_3A}$$

$$=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}$$

推得$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\Longrightarrow\frac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}-\overline{MX}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}-\overline{MY}}\times\frac{\overline{MA_3}}{\overline{MA_1}}$，取倒數$\frac{\overline{MA_1}-\overline{MX}}{\overline{MX}}=\frac{\overline{MA_3}-\overline{MY}}{\overline{MY}}\times\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_3}}$

化簡 $\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MX}}-1=(\frac{\overline{MA_3}}{\overline{MY}}-1)\times\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_3}}$，推得 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MA_1}}=\frac{1}{\overline{MY}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$，

即 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。若將原式的左式移項，可得 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。

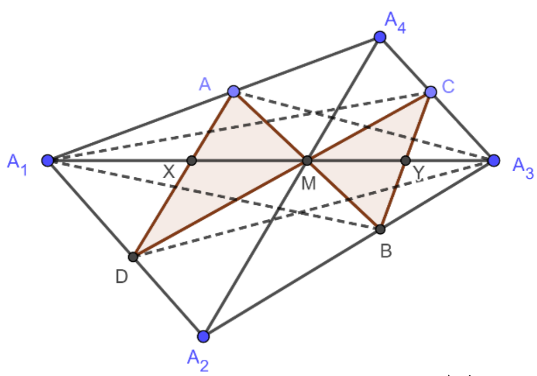


圖 3-2-14

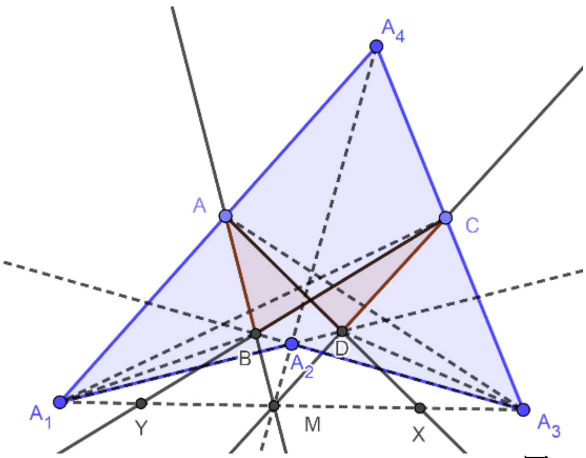


圖 3-2-15

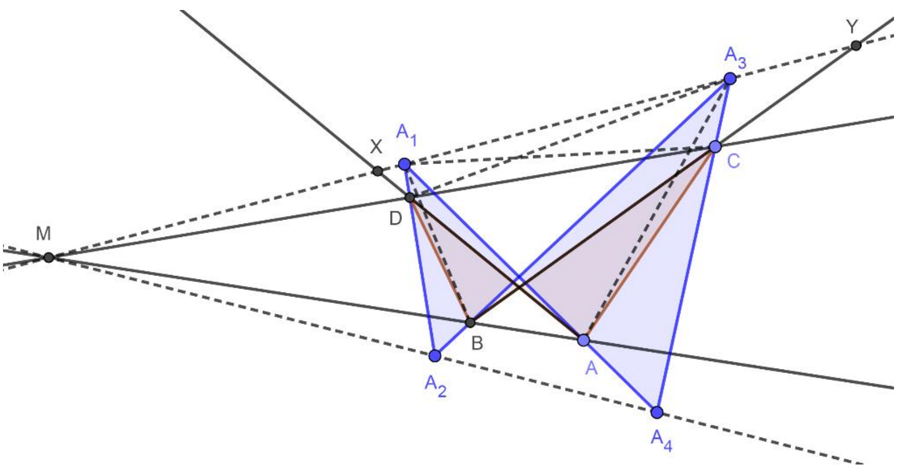


圖 3-2-16

(2)若考慮蝴蝶形**頂點不同的連接方式**，則會有以下的坎迪定理：

定理 3-2-11 (四邊形的坎迪定理 2)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，兩對角線交點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 C、A 和 D、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$X'$、$Y'$兩點，則 $\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。可改寫成 $\frac{\overline{A_1X'}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{MY'}}{\overline{Y'A_3}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。

[證明]

如圖 3-2-17、圖 3-2-18、圖 3-2-19，由共邊、共角定理可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{X'X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta X'AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta Y'BC}\times\frac{\Delta Y'BC}{\Delta Y'DC}\times\frac{\Delta Y'DC}{\Delta X'DC}\times\frac{\Delta X'DC}{\Delta X'DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'B}}{\overline{Y'D}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'B}}{\overline{Y'D}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'A}}$$

$$=\frac{\Delta X'Y'A}{\Delta X'Y'B}\times\frac{\Delta X'Y'D}{\Delta X'Y'C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\Delta X'Y'B}{\Delta X'Y'D}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\Delta X'Y'C}{\Delta X'Y'A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}$$

推得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{X'X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\Rightarrow\frac{\overline{MX}}{\overline{MX'}-\overline{MX}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MY'}-\overline{MY}}\times\frac{\overline{MY'}}{\overline{MX'}}$，取倒數 $\frac{\overline{MX'}-\overline{MX}}{\overline{MX}}=\frac{\overline{MY'}-\overline{MY}}{\overline{MY}}\times\frac{\overline{MX'}}{\overline{MY'}}$

化簡 $\frac{\overline{MX'}}{\overline{MX}}-1=(\frac{\overline{MY'}}{\overline{MY}}-1)\times\frac{\overline{MX'}}{\overline{MY'}}$，推得 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MX'}}=\frac{1}{\overline{MY}}-\frac{1}{\overline{MY'}}$，即$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}$。

又 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$，故 $\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。

若將原式的左式移項，可得 $\frac{\overline{A_1X'}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{MY'}}{\overline{Y'A_3}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。

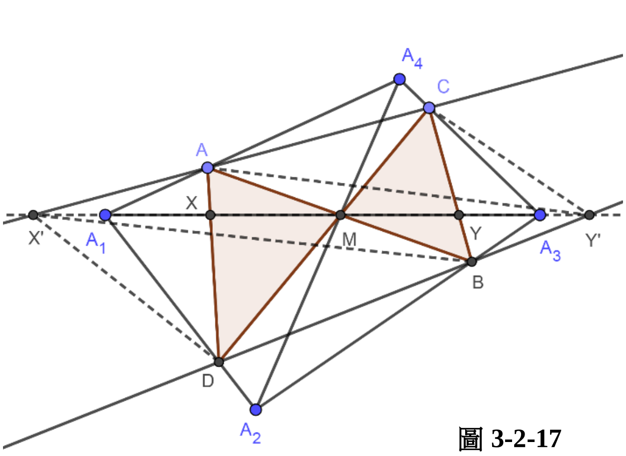


圖 3-2-17

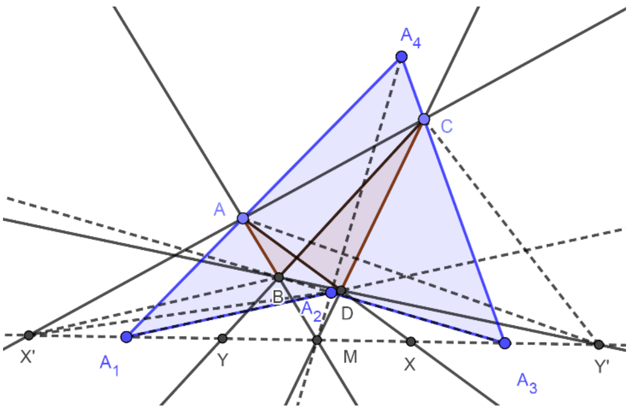


圖 3-2-18

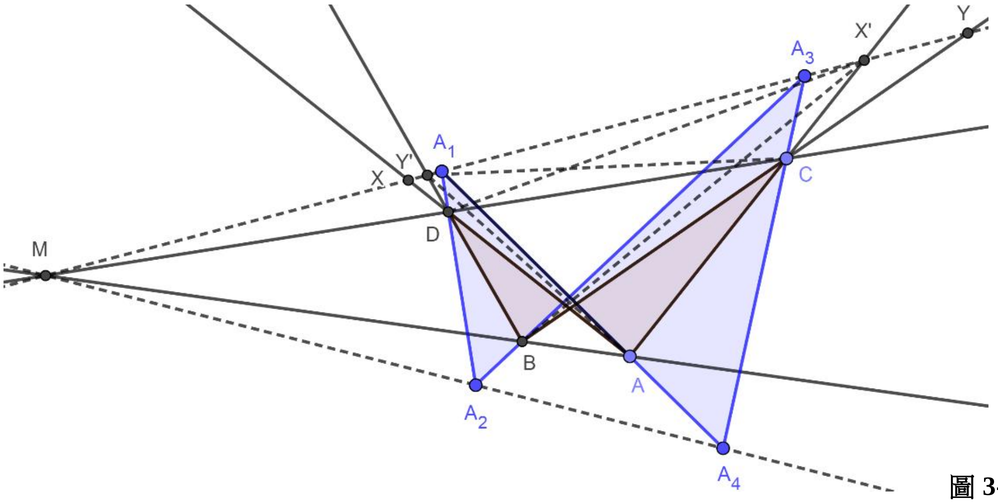


圖 3-2-19

(3)考慮**一條對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**此對角線上一點**，如果蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的坎迪定理：

定理 3-2-12 (四邊形的坎迪定理 3)

設四邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$為任意四邊形，以$\overline{\mathbf{A_1A_3}}$為蝴蝶線，$\overline{\mathbf{A_1A_3}}$上一點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{\mathbf{A_1A_3}}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{OA_1}}=1$。(四邊形的坎迪延伸定理)

[證明]

如圖 3-2-20 和圖 3-2-21，由共邊、共角定理可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta A_1AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta A_3BC}\times\frac{\Delta A_3BC}{\Delta A_3A_2A_4}\times\frac{\Delta A_3A_2A_4}{\Delta A_1A_2A_4}\times\frac{\Delta A_1A_2A_4}{\Delta A_1DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\Delta A_1A_3A}{\Delta A_1A_3B}\times\frac{\Delta A_1A_3D}{\Delta A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3A_2}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3A_4}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}\times\frac{\Delta A_1A_3A_2}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\Delta A_1A_3A_4}{\Delta A_1A_3A}$$

$$=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}$$

推得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}$，從而 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{OA_1}}=1$。

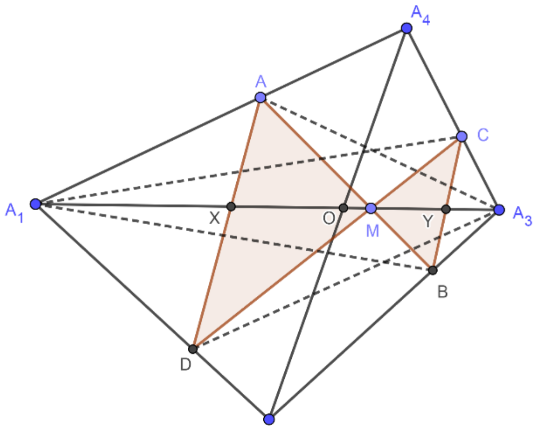


圖 3-2-20

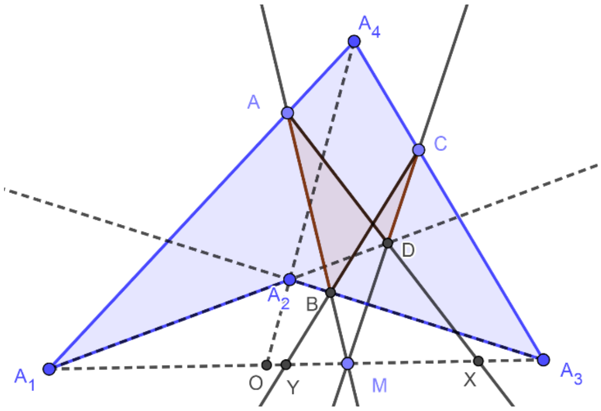


圖 3-2-21

(4)考慮**一條對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**兩對角線的交點**，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，並考慮蝴蝶形**頂點不同的連接方式**，會有以下的坎迪定理：

> **定理 3-2-13 (四邊形的坎迪定理 4)**
>
> **設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$上一點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，再連接 C、A 和 D、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$X'$、$Y'$兩點，**
>
> **則 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}$。**

[證明]

如圖 3-2-22、圖 3-2-23、圖 3-2-24，由共邊、共角定理可得

$$\frac{\overline{MX}}{\overline{X'X}}=\frac{\Delta MAD}{\Delta X'AD}=\frac{\Delta MAD}{\Delta MBC}\times\frac{\Delta MBC}{\Delta Y'BC}\times\frac{\Delta Y'BC}{\Delta Y'DC}\times\frac{\Delta Y'DC}{\Delta X'DC}\times\frac{\Delta X'DC}{\Delta X'DA}$$

$$=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'B}}{\overline{Y'D}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'A}}$$

$$=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'B}}{\overline{Y'D}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'A}}$$

$$=\frac{\Delta X'Y'A}{\Delta X'Y'B}\times\frac{\Delta X'Y'D}{\Delta X'Y'C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\Delta X'Y'B}{\Delta X'Y'D}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\times\frac{\Delta X'Y'C}{\Delta X'Y'A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}$$

推得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{X'X}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{Y'Y}}\times\frac{\overline{Y'M}}{\overline{X'M}}\Rightarrow\frac{\overline{MX}}{\overline{MX'}-\overline{MX}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MY'}-\overline{MY}}\times\frac{\overline{MY'}}{\overline{MX'}}$，取倒數$\frac{\overline{MX'}-\overline{MX}}{\overline{MX}}=\frac{\overline{MY'}-\overline{MY}}{\overline{MY}}\times\frac{\overline{MX'}}{\overline{MY'}}$

化簡 $\frac{\overline{MX'}}{\overline{MX}}-1=\left(\frac{\overline{MY'}}{\overline{MY}}-1\right)\times\frac{\overline{MX'}}{\overline{MY'}}$，推得 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MX'}}=\frac{1}{\overline{MY}}-\frac{1}{\overline{MY'}}$，即 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}$。

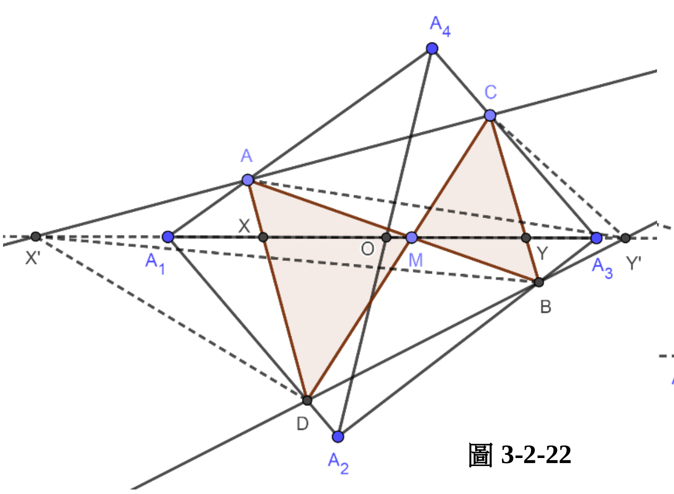


圖 3-2-22

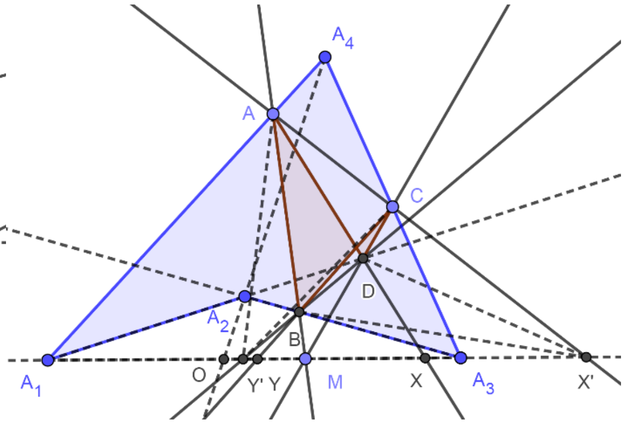


圖 3-2-23

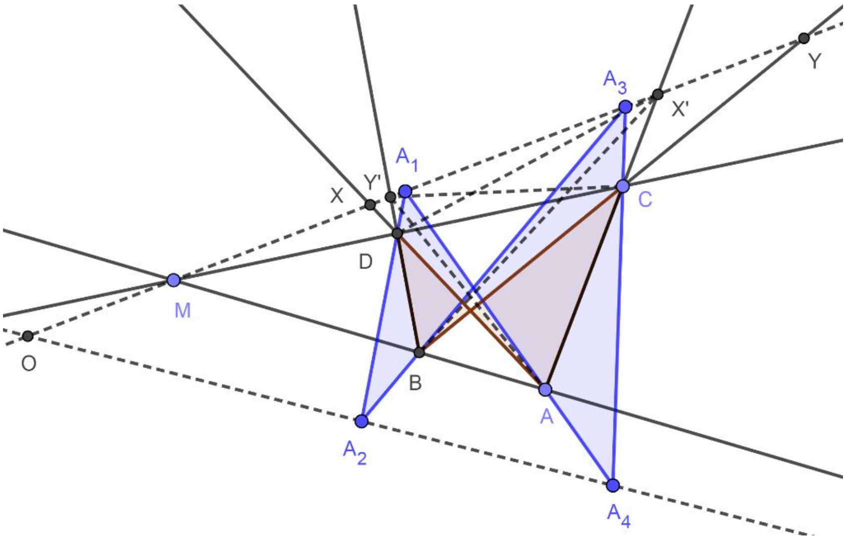


圖 3-2-24

(5)考慮**一條對角線**為蝴蝶線，蝴蝶中心為**另一條對角線上一點**，如果蝴蝶形的四個頂點分落在四邊形的四條邊上，會有以下的類坎迪定理：

定理 3-2-14 (四邊形的坎迪定理 5)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶割線，$\overline{A_2A_4}$上一點 N 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，再連接 A、B 和 C、D 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 T、S 兩點，則$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3S}}{\overline{TA_1}}=1$。

可改寫成 $\frac{(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}})}{\overline{XS}}-\frac{(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}})}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{A_1T}}-\frac{1}{\overline{A_3S}}$。(四邊形的類坎迪定理)

[證明]

如圖 3-2-25、圖 3-2-26，由共邊、共角定理可得

(1) $\dfrac{\overline{SX}}{\overline{A_1X}}=\dfrac{\Delta SAD}{\Delta A_1AD}=\dfrac{\Delta SAD}{\Delta NAD}\times\dfrac{\Delta NAD}{\Delta NBC}\times\dfrac{\Delta NBC}{\Delta TBC}\times\dfrac{\Delta TBC}{\Delta A_3BC}\times\dfrac{\Delta A_3BC}{\Delta A_3A_2A_4}\times\dfrac{\Delta A_3A_2A_4}{\Delta A_1A_2A_4}\times\dfrac{\Delta A_1A_2A_4}{\Delta A_1DA}$

$$=\frac{\overline{SD}}{\overline{ND}}\times\frac{\overline{NA}\times\overline{ND}}{\overline{NB}\times\overline{NC}}\times\frac{\overline{NB}}{\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3A_2}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3A_4}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\Delta A_1A_3A_2}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\Delta A_1A_3A_4}{\Delta A_1A_3A}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\Delta A_1A_3B}{\Delta A_1A_3A}\times\frac{\Delta A_1A_3C}{\Delta A_1A_3D}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{TB}}{\overline{TA}}\times\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}$$

$$=\frac{\overline{NA}\times\overline{SC}}{\overline{NC}\times\overline{TA}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}$$

(2)欲證 $\dfrac{\overline{NA}\times\overline{SC}}{\overline{NC}\times\overline{TA}}\times\dfrac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_1T}}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{NA}}{\overline{TA}}\times\dfrac{\overline{SC}}{\overline{NC}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_3M}}\times\dfrac{\overline{A_1M}}{\overline{A_1T}}$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta A_1A_4N}{\Delta A_1A_4T}\times\frac{\Delta A_3A_4S}{\Delta A_3A_4N}=\frac{\Delta A_3A_4S}{\Delta A_3A_4M}\times\frac{\Delta A_1A_4M}{\Delta A_1A_4T}$$

$\Leftrightarrow\dfrac{\Delta A_1A_4N}{\Delta A_3A_4N}=\dfrac{\Delta A_1A_4M}{\Delta A_3A_4M}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{A_1M}}{\overline{A_3M}}=\dfrac{\overline{A_1M}}{\overline{A_3M}}$，得證。

由(1)(2)可知：$\dfrac{\overline{SX}}{\overline{A_1X}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_1T}}\times\dfrac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}$，推得$\dfrac{\overline{SX}}{\overline{A_1S}-\overline{SX}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_1T}}\times\dfrac{\overline{TY}}{\overline{A_3T}-\overline{TY}}$，取倒數$\dfrac{\overline{A_1S}-\overline{SX}}{\overline{SX}}=\dfrac{\overline{A_1T}}{\overline{A_3S}}\times\dfrac{\overline{A_3T}-\overline{TY}}{\overline{TY}}$

化簡 $\dfrac{\overline{A_1S}}{\overline{SX}}-1=\dfrac{\overline{A_1T}}{\overline{A_3S}}\times\left(\dfrac{\overline{A_3T}}{\overline{TY}}-1\right)\Rightarrow\dfrac{\left(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}}\right)}{\overline{SX}}-\dfrac{1}{\overline{A_1T}}=\dfrac{\left(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}}\right)}{\overline{TY}}-\dfrac{1}{\overline{A_3S}}$，即$\dfrac{\left(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}}\right)}{\overline{XS}}-\dfrac{\left(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}}\right)}{\overline{YT}}=\dfrac{1}{\overline{A_1T}}-\dfrac{1}{\overline{A_3S}}$。

若將原式的左式移項，可得 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XS}}\times\dfrac{\overline{TY}}{\overline{YA_3}}\times\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{TA_1}}=1$。

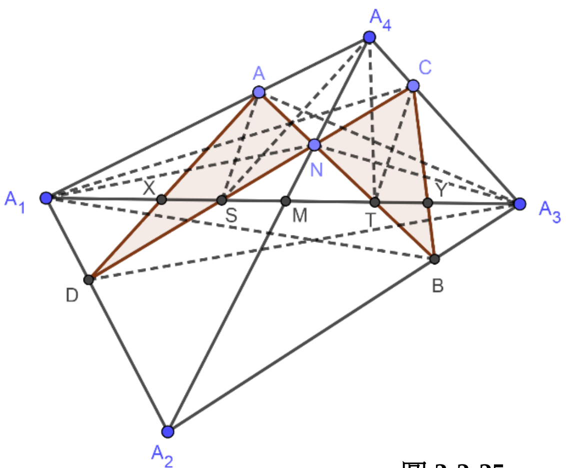


圖 3-2-25

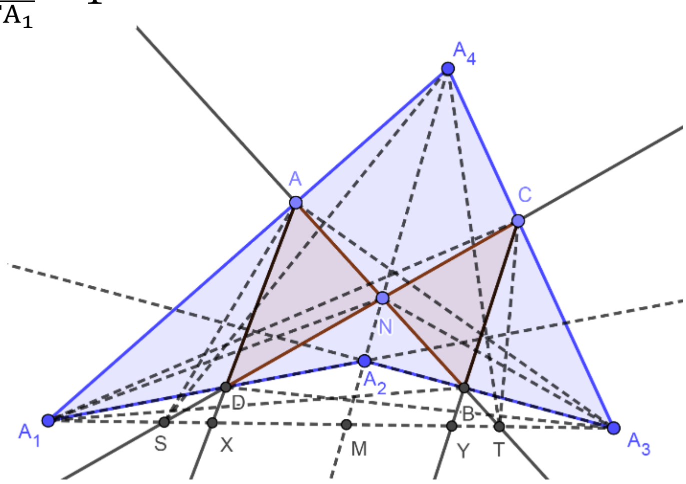


圖 3-2-26

(6)考慮**和四邊形一邊平行的截線段**為蝴蝶線，以**截線段上任一點**為蝴蝶中心，過此點再分別**對此邊兩鄰邊作平行線**，連接成蝴蝶形後會有以下的坎迪定理：

定理 3-2-15 (四邊形的坎迪定理 6)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，$\overline{PQ}$為平行$\overline{A_1A_2}$的截線段，以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，$\overline{PQ}$上任一點 M 為蝴蝶中心，過 M 點分別作$\overleftrightarrow{AB}//\overline{A_3A_2}$、$\overleftrightarrow{CD}//\overline{A_4A_1}$，若蝴蝶形 ABCD 的頂點 A、B、C、D 分別為兩直線與邊(或邊之延長線)的交點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MP}}-\frac{1}{\overline{MQ}}$。若 $\overline{MP}=\overline{MQ}$，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

(四邊形的坎迪平行線定理)

[證明]

如圖 3-2-27 和圖 3-2-28，設$\overleftrightarrow{A_1A_4}$和$\overleftrightarrow{A_2A_3}$相交於 E 點，$\overleftrightarrow{EM}$和$\overleftrightarrow{PD}$相交於 F 點，連接$\overline{FQ}$，設交$\overline{A_1A_2}$於$B'$點，再連接$\overleftrightarrow{B'M}$設交$\overleftrightarrow{A_1A_4}$於$A'$點，因為$\overline{CD}//\overline{A_4A_1}$，所以$\frac{\overline{FD}}{\overline{FP}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{FE}}$。又$\overline{PQ}//\overline{A_1A_2}$，所以$\frac{\overline{FD}}{\overline{FP}}=\frac{\overline{FB'}}{\overline{FQ}}$，推得$\frac{\overline{FM}}{\overline{FE}}=\frac{\overline{FB'}}{\overline{FQ}}$，從而$\overline{A'B'}//\overline{A_3A_2}$。因為$\overline{AB}$與$\overline{A'B'}$均為過 M 點與$\overline{A_3A_2}$平行的直線，且 B、$B'$都在$\overline{A_1A_2}$上；A、$A'$都在$\overleftrightarrow{A_1A_4}$上，故$A=A'$且$B=B'$，推知：$\overleftrightarrow{EM}$、$\overleftrightarrow{PD}$、$\overleftrightarrow{QB}$相交於 F 點。因此蝴蝶形 ABCD 可以視為以兩對角線交點 M 為中心的四邊形 PFQE 之蝴蝶形，故由**定理 3-2-10** 可知：$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MP}}-\frac{1}{\overline{MQ}}$。若$\overline{MP}=\overline{MQ}$，則$\overline{MX}=\overline{MY}$。

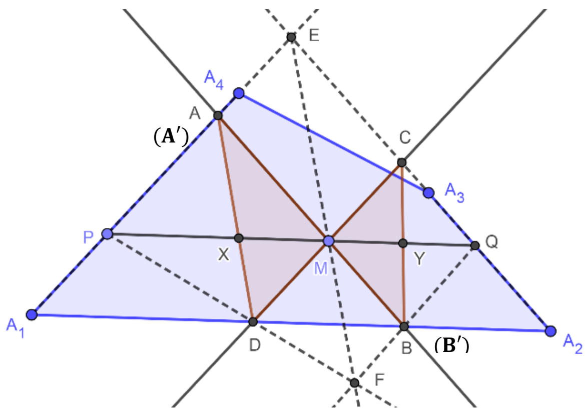


圖 3-2-27

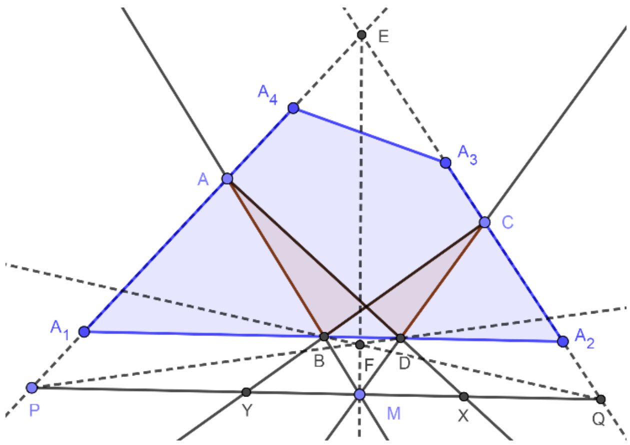


圖 3-2-28

(7)考慮**和四邊形一邊平行的截線段**為蝴蝶割線，**以截線段外一點**為蝴蝶中心，過此點再分別**對此邊兩鄰邊作平行線**，連接成蝴蝶形後會有以下的類坎迪定理：

定理 3-2-16 (四邊形的坎迪定理 7)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，$\overline{PQ}$為平行一邊$\overline{A_1A_2}$的截線段，以$\overline{PQ}$為蝴蝶割線，$\overline{PQ}$外一點 M 為蝴蝶中心，過 M 點分別作$\overleftrightarrow{AB}//\overline{A_3A_2}$、$\overleftrightarrow{CD}//\overline{A_4A_1}$，若蝴蝶形 ABCD 的頂點 A、B、C、D 分別為兩直線與邊(或邊之延長線)的交點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，再連接 A、B 和 C、D 分別交$\overline{PQ}$於 T、S 兩點，

則 $\frac{\overline{PX}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YQ}}\times\frac{\overline{QS}}{\overline{TP}}=1$。可改寫成 $\frac{(\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}})}{\overline{XS}}-\frac{(\frac{\overline{QT}}{\overline{QS}})}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{\overline{QS}}$。(四邊形的類坎迪平行線定理)

[證明]

如圖 3-2-29 和圖 3-2-30，仿照**定理 3-2-15 的證明**可推知：$\overleftrightarrow{EM}$、$\overleftrightarrow{PD}$、$\overleftrightarrow{QB}$相交於 F 點。因此蝴蝶形 ABCD 可以視為以一條對角線上一點 M 為中心的四邊形 PFQE 之蝴蝶形，

故由**定理 3-2-14** 可知：$\frac{(\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}})}{\overline{XS}}-\frac{(\frac{\overline{QT}}{\overline{QS}})}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{\overline{QS}}$。

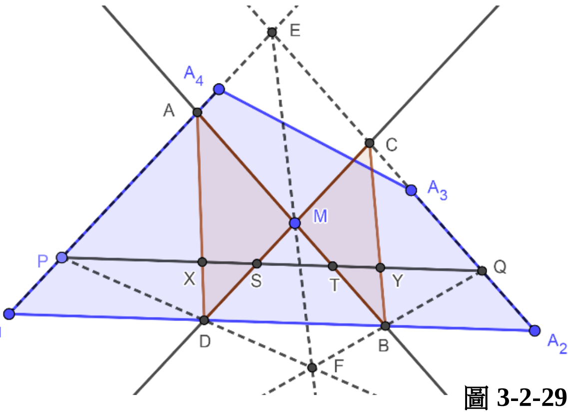


圖 3-2-29

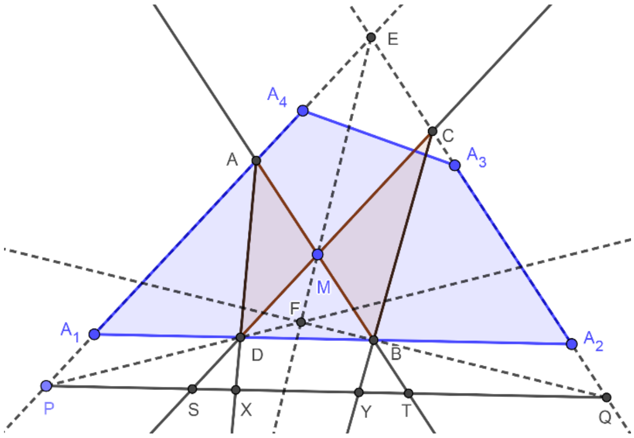


圖 3-2-30

(8)考慮**和四邊形一組對邊相交的截線段**為蝴蝶線，以**截線段上任一點**為蝴蝶中心，連接中心和此組對邊延長線交點之直線，再過中心另作一截線，並連接兩截線同一側端點的直線與原直線交於一點，又連接此點和蝴蝶線另一端點的直線交邊於一點，最後連接此點和中心的直線交另一邊於一點，連接成蝴蝶形後會有以下的坎迪定理：

定理 3-2-17 (四邊形的坎迪定理 8)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，$\overline{PQ}$為和兩邊$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$相交的截線段，以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，$\overline{PQ}$上任一點 M 為蝴蝶中心，設$\overleftrightarrow{A_1A_4}$和$\overleftrightarrow{A_2A_3}$相交於 E 點，過 M 點作一截線段$\overline{AB}$，連接$\overleftrightarrow{EM}$、$\overleftrightarrow{QB}$相交於 F 點，並連接$\overleftrightarrow{PF}$交$\overline{A_1A_2}$於 D 點，再連接$\overleftrightarrow{DM}$交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於 C 點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MP}}-\frac{1}{\overline{MQ}}$。

若 $\overline{MP}=\overline{MQ}$，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。(四邊形的坎迪三線共點定理)

[證明] 如圖 3-2-31 和圖 3-2-32，蝴蝶形 ABCD 可以視為以兩對角線交點 M 為中心的四邊形 PFQE 之蝴蝶形，故由**定理 3-2-10** 可知：$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MP}}-\frac{1}{\overline{MQ}}$。

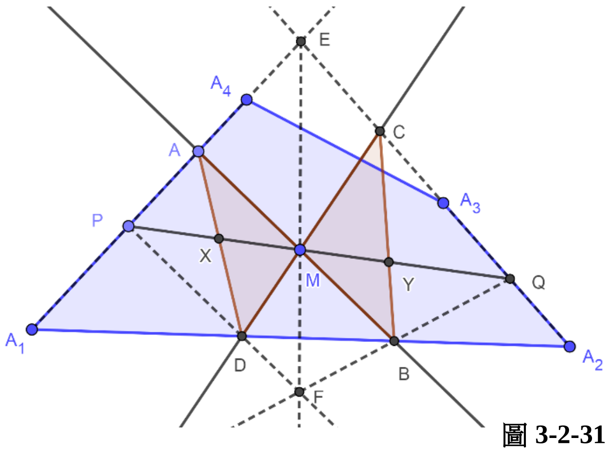


圖 3-2-31

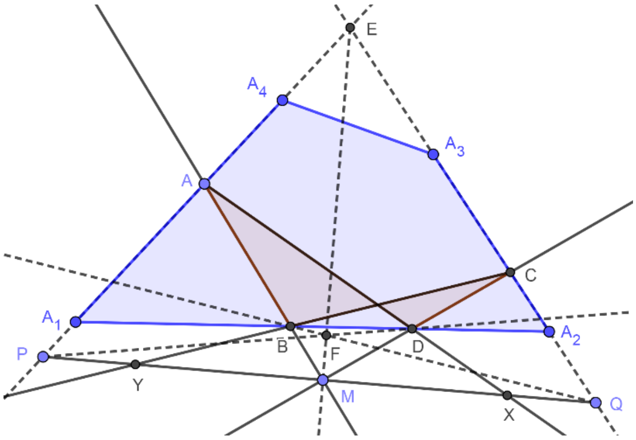


圖 3-2-32

(9)考慮**以截線段外任一點**為蝴蝶中心，則會有以下的類坎迪定理：

定理 3-2-18 (四邊形的坎迪定理 9)

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，$\overline{PQ}$為和兩邊$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$相交的截線段，以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，$\overline{PQ}$外任一點 M 為蝴蝶中心，設$\overleftrightarrow{A_1A_4}$和$\overleftrightarrow{A_2A_3}$相交於 E 點，過 M 點作一截線段$\overline{AB}$，連接$\overleftrightarrow{EM}$、$\overleftrightarrow{QB}$相交於 F 點，並連接$\overleftrightarrow{PF}$交$\overline{A_1A_2}$於 D 點，再連接$\overleftrightarrow{DM}$交$\overleftrightarrow{A_2A_3}$於 C 點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{PQ}$於 X、Y 兩點，又連接 A、B 和 C、D 分別交$\overline{PQ}$於 T、S 兩點，則$\frac{\overline{PX}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YQ}}\times\frac{\overline{QS}}{\overline{TP}}=1$。可改寫成$\frac{\left(\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}}\right)}{\overline{XS}}-\frac{\left(\frac{\overline{QT}}{\overline{QS}}\right)}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{\overline{QS}}$。(四邊形的類坎迪三線共點定理)

[證明] 如圖 3-2-33 和圖 3-2-34，蝴蝶形 ABCD 可以視為以一條對角線上一點 M 為中心的四邊形 PFQE 之蝴蝶形，故由**定理 3-2-14** 可知：$\frac{\left(\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}}\right)}{\overline{XS}}-\frac{\left(\frac{\overline{QT}}{\overline{QS}}\right)}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{\overline{QS}}$。

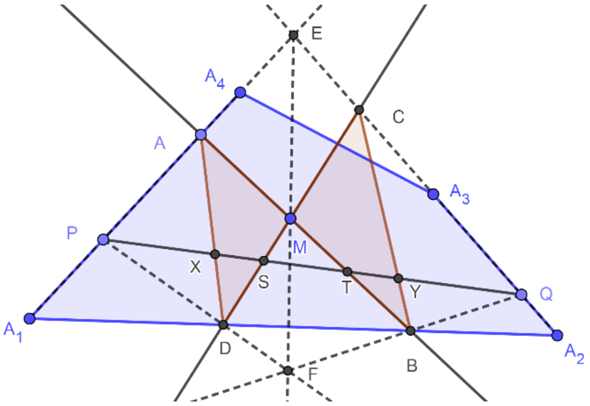


圖 3-2-33

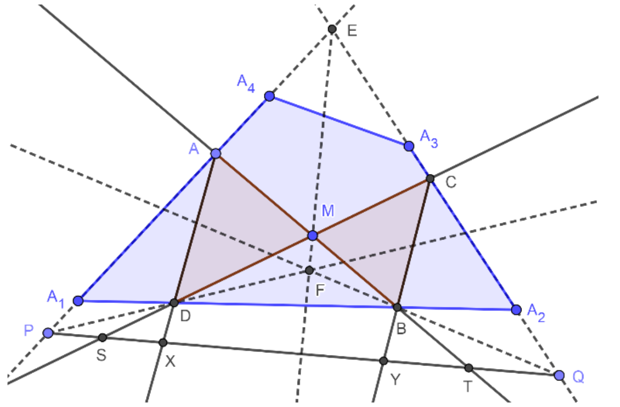


圖 3-2-34

5. 圓外切四邊形

以**圓內接蝴蝶形的頂點為切點**作一圓外切四邊形，**對邊切點連線的交點(恰為兩對角線的交點)**為蝴蝶中心，**過中心的任意截線段**為蝴蝶線，會有以下的坎迪定理：

> **定理 3-2-19 (圓外切四邊形的坎迪定理)**
>
> **設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為圓外切四邊形，A、B、C、D 為其切點，若 ABCD 為蝴蝶形，以兩對邊切點連線的交點 M 為蝴蝶中心，過 M 作$\overline{EF}$為蝴蝶線，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{EF}$於X'、Y'兩點，則 $\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}=\frac{1}{\overline{ME}}-\frac{1}{\overline{MF}}$。若 $\overline{ME}=\overline{MF}$，則 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$。**

[證明]

(1)如圖 3-2-35，設$\overleftrightarrow{CD}$交$\overline{HG}$於M_1點，則 $\frac{\Delta CM_1H}{\Delta DM_1G}=\frac{\overline{CM_1}\times\overline{HM_1}}{\overline{DM_1}\times\overline{GM_1}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{CM_1}\times\overline{CH}\times\sin\angle HCM_1}{\frac{1}{2}\times\overline{DM_1}\times\overline{DG}\times\sin\angle GDM_1}$

，且$\angle HCM_1+GDM_1=180°$，推得 $\frac{\overline{HM_1}}{\overline{GM_1}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{DG}}$。

(2)設$\overleftrightarrow{AB}$交$\overline{HG}$於M_2點，

則 $\frac{\Delta AM_2H}{\Delta BM_2G}=\frac{\overline{AM_2}\times\overline{HM_2}}{\overline{BM_2}\times\overline{GM_2}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AM_2}\times\overline{AH}\times\sin\angle HAM_2}{\frac{1}{2}\times\overline{BM_2}\times\overline{BG}\times\sin\angle GBM_2}$

推得 $\frac{\overline{HM_2}}{\overline{GM_2}}=\frac{\overline{AH}\times\sin\angle IAM_2}{\overline{BG}\times\sin\angle JBM_2}=\frac{\overline{AH}\times\sin\angle IAM_2}{\overline{BG}\times\sin\angle AIM_2}=\frac{\overline{AH}\times\overline{IM_2}}{\overline{BG}\times\overline{AM_2}}$。

(3)$\frac{\Delta IM_2H}{\Delta JM_2G}=\frac{\overline{IM_2}\times\overline{HM_2}}{\overline{JM_2}\times\overline{GM_2}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AM_2}\times\overline{AH}\times\sin\angle IAM_2+\frac{1}{2}\times\overline{AM_2}\times\overline{AI}\times\sin\angle IAM_2}{\frac{1}{2}\times\overline{JM_2}\times\overline{JG}\times\sin\angle GJM_2}$，

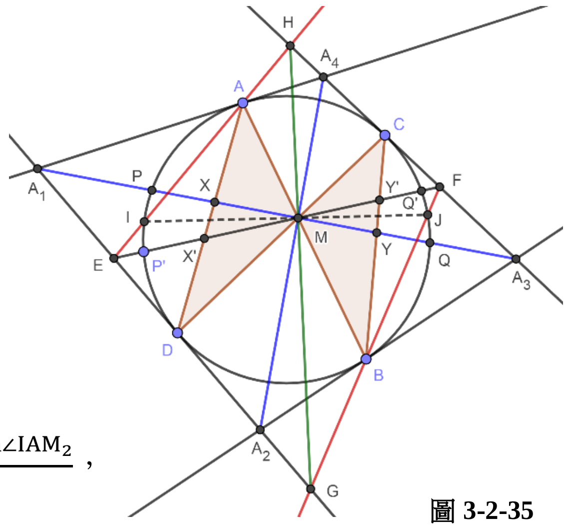


圖 3-2-35

推得 $\frac{\overline{HM_2}\times\overline{IM_2}}{\overline{GM_2}\times\overline{JM_2}}=\frac{\frac{1}{2}\times(\overline{HA}+\overline{AI})\times\overline{AM_2}\times\sin\angle IAM_2}{\frac{1}{2}\times\overline{JG}\times\overline{JM_2}\times\sin\angle BJM_2}=\frac{\overline{HI}\times\overline{AM_2}}{\overline{JG}\times\overline{JM_2}}$，從而 $\frac{\overline{HM_2}}{\overline{GM_2}}=\frac{\overline{HI}\times\overline{AM_2}}{\overline{JG}\times\overline{IM_2}}$。

將(2)(3)兩式相乘，推得 $\frac{\overline{HM_2}^2}{\overline{GM_2}^2}=\frac{\overline{AH}\times\overline{IM_2}}{\overline{BG}\times\overline{AM_2}}\times\frac{\overline{HI}\times\overline{AM_2}}{\overline{JG}\times\overline{IM_2}}=\frac{\overline{AH}\times\overline{HI}}{\overline{BG}\times\overline{JG}}=\frac{\overline{CH}^2}{\overline{DG}^2}$，從而$\frac{\overline{HM_2}}{\overline{GM_2}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{DG}}$。

又(1) $\frac{\overline{HM_1}}{\overline{GM_1}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{DG}}$，所以$\frac{\overline{HM_1}}{\overline{GM_1}}=\frac{\overline{HM_2}}{\overline{GM_2}}$，推得 $M_1=M_2$。

已知$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$交於 M 點，推得$M_1=M_2=M$，即$\overline{HG}$、$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$共交點 M。

已知$\overline{EF}$為過中心 M 的蝴蝶線，所以四邊形 EGFH 的對角線$\overline{EF}$、$\overline{HG}$交於 M 點，

故蝴蝶形 ABCD 內接於四邊形 EGFH 且中心為 M，從而 $\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}=\frac{1}{\overline{ME}}-\frac{1}{\overline{MF}}$。

若 $\overline{ME}$=$\overline{MF}$，則 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$，從而圓外切四邊形也有蝴蝶定理。

(二) 多邊形

1. 五邊形

(1)考慮五邊形**一對角線為蝴蝶線**，以此對角線端點**向邊數多的一側將邊延伸**，則此五邊形會**退化成一個四邊形**，再連接此四邊形另一條對角線，以**兩對角線的交點**為蝴蝶中心，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的坎迪定理：

定理 3-2-20 (五邊形的坎迪定理)

設五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$為任意五邊形，以對角線$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，延伸$\overline{A_1A_5}$、$\overline{A_3A_4}$，設兩線相交於A'_4，形成一個四邊形$A_1A_2A_3A'_4$，連接另一條對角線$\overline{A_2A'_4}$，兩對角線交於 M 點，以 M 為蝴蝶中心，過 M 分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$，若蝴蝶形 ABCD 的頂點 A、B、C、D 分別為兩直線與四邊形$A_1A_2A_3A'_4$各邊的交點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。

[證明]

如圖 3-2-36，蝴蝶形 ABCD 可以視為內接四邊形$A_1A_2A_3A'_4$之蝴蝶形，且此蝴蝶形以兩對角線交點 M 為中心，對角線$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，故由**定理 3-2-10** 可知：$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。

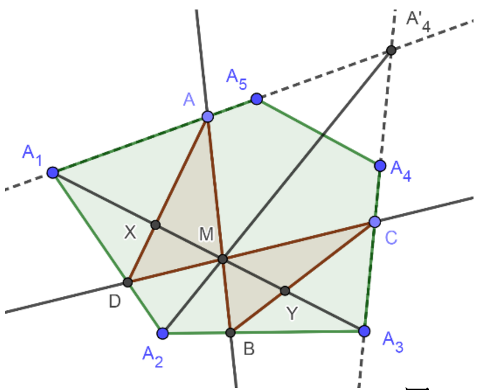


圖 3-2-36

(2)考慮五邊形**一對角線為蝴蝶割線**，以此對角線端點**向邊數多的一側將邊延伸**，則此五邊形會**退化成一個四邊形**，再連接此四邊形另一條對角線，以**此對角線上一點為蝴蝶中心**，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的類坎迪定理：

定理 3-2-21 (五邊形的類坎迪定理)

設五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$為任意五邊形，以對角線$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，延伸$\overline{A_1A_5}$、$\overline{A_3A_4}$，設兩線相交於A'_4，形成一個四邊形$A_1A_2A_3A'_4$，連接另一條對角線$\overline{A_2A'_4}$，兩對角線交於 M 點，以 M 點為蝴蝶中心，過 M 分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$，若蝴蝶形 ABCD 的頂點 A、B、C、D 分別為兩直線與四邊形$A_1A_2A_3A'_4$各邊的交點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，又連接 A、B 和 C、D 分別交$\overline{A_1A_3}$於 T、S 兩點，

則 $\frac{A_1X}{XS}\times\frac{TY}{YA_3}\times\frac{A_3S}{TA_1}=1$。可改寫成 $\frac{\left(\frac{A_1S}{A_1T}\right)}{XS}-\frac{\left(\frac{A_3T}{A_3S}\right)}{YT}=\frac{1}{A_1T}-\frac{1}{A_3S}$。

[證明]

如圖 3-2-37，蝴蝶形 ABCD 可以視為內接四邊形$A_1A_2A_3A'_4$之蝴蝶形，且此蝴蝶形以一條對角線$\overline{A_2A'_4}$上一點 M 為中心，另一對角線$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，故由**定理 3-2-14** 可知：$\frac{\left(\frac{A_1S}{A_1T}\right)}{XS}-\frac{\left(\frac{A_3T}{A_3S}\right)}{YT}=\frac{1}{A_1T}-\frac{1}{A_3S}$。

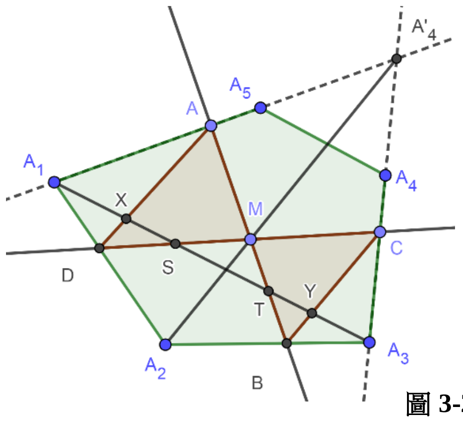


圖 3-2-37

2. 六邊形

(1)考慮六邊形三條不相鄰的邊，各自延伸後產生兩個交點，並與另一側的邊圍成一個四邊形，則此六邊形會退化成一個四邊形。再連接此四邊形兩對角線，以對角線的交點為蝴蝶中心，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的坎迪定理：

定理 3-2-22 (六邊形的坎迪定理)

設六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$為任意六邊形，延伸$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_4A_5}$、$\overline{A_1A_6}$，設三線依序相交於A'_3、A'_4，形成一個四邊形$A_1A_2A'_3A'_4$，連接兩條對角線交於 M 點，以 M 為蝴蝶中心，過 M 分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$，若蝴蝶形 ABCD 的頂點 A、B、C、D 分別為兩直線與四邊形$A_1A_2A'_3A'_4$各邊的交點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{A_1A'_3}$於 X、Y 兩點，

則 $\frac{1}{MX}-\frac{1}{MY}=\frac{1}{MA_1}-\frac{1}{MA'_3}$。

[證明]

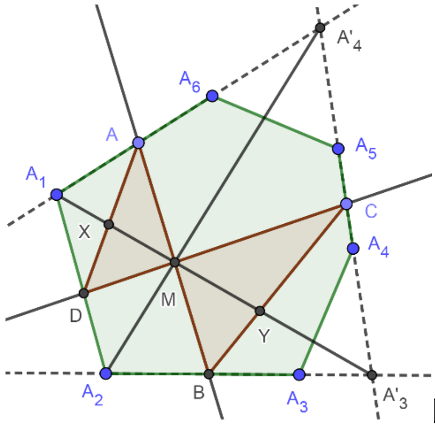


圖 3-2-38

如圖 3-2-38，蝴蝶形 ABCD 可以視為內接四邊形$\mathrm{A_1A_2A'_3A'_4}$之蝴蝶形，且此蝴蝶形以兩對角線交點 M 為中心，對角線$\overline{\mathrm{A_1A'_3}}$為蝴蝶線，故由**定理 3-2-10** 可知：$\frac{1}{\mathrm{MX}}-\frac{1}{\mathrm{MY}}=\frac{1}{\mathrm{MA_1}}-\frac{1}{\mathrm{MA'_3}}$。

(2)考慮六邊形三條不相鄰的邊，各自延伸後產生兩個交點，並與另一側的邊圍成一個四邊形，則此六邊形會退化成一個四邊形。再連接此四邊形兩對角線，以其中一條對角線上一點為蝴蝶中心，只要蝴蝶形的四個頂點分別落在四邊形的四條邊上，會有以下的類坎迪定理：

定理 3-2-23 (六邊形的類坎迪定理)

設六邊形$\mathbf{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$為任意六邊形，延伸$\overline{\mathbf{A_2A_3}}$、$\overline{\mathbf{A_4A_5}}$、$\overline{\mathbf{A_1A_6}}$，設三線依序相交於$\mathbf{A'_3}$、$\mathbf{A'_4}$，形成一個四邊形$\mathbf{A_1A_2A'_3A'_4}$，以其中一條對角線$\overline{\mathbf{A_2A'_4}}$上一點 M 為蝴蝶中心，過 M 分別作$\overleftrightarrow{\mathbf{AB}}$、$\overleftrightarrow{\mathbf{CD}}$，若蝴蝶形 ABCD 的頂點 A、B、C、D 分別為兩直線與四邊形$\mathbf{A_1A_2A'_3A'_4}$各邊的交點，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overline{\mathbf{A_1A'_3}}$於 X、Y 兩點，又連接 A、B 和 C、D 分別交$\overline{\mathbf{A_1A'_3}}$於 T、S 兩點，則 $\frac{\mathbf{A_1X}}{\mathbf{XS}}\times\frac{\mathbf{TY}}{\mathbf{YA'_3}}\times\frac{\mathbf{A'_3S}}{\mathbf{TA_1}}=\mathbf{1}$。可改寫成

$$\frac{\left(\frac{\mathbf{A_1S}}{\mathbf{A_1T}}\right)}{\mathbf{XS}}-\frac{\left(\frac{\mathbf{A'_3T}}{\mathbf{A'_3S}}\right)}{\mathbf{YT}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A_1T}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A'_3S}}。$$

[證明]

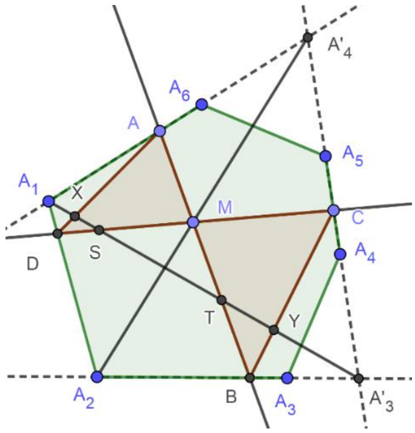


圖 3-2-39

如圖 3-2-39，蝴蝶形 ABCD 可以視為內接四邊形$\mathrm{A_1A_2A'_3A'_4}$之蝴蝶形，且此蝴蝶形以一條對角線$\overline{\mathrm{A_2A'_4}}$上一點 M 為中心，另一對角線$\overline{\mathrm{A_1A'_3}}$為蝴蝶線，故由**定理 3-2-14** 可知：$\frac{\left(\frac{\mathrm{A_1S}}{\mathrm{A_1T}}\right)}{\mathrm{XS}}-\frac{\left(\frac{\mathrm{A'_3T}}{\mathrm{A'_3S}}\right)}{\mathrm{YT}}=\frac{1}{\mathrm{A_1T}}-\frac{1}{\mathrm{A'_3S}}$。

3. $n(n\geq 5)$邊形

如圖 3-2-40 和圖 3-2-41，仿照六邊形的作圖方式，依序將多邊形不相鄰的邊延伸，一直到可以圍成四邊形為止，從而也會有 *n* 邊形的**蝴蝶定理、坎迪定理**和**類坎迪定理**。

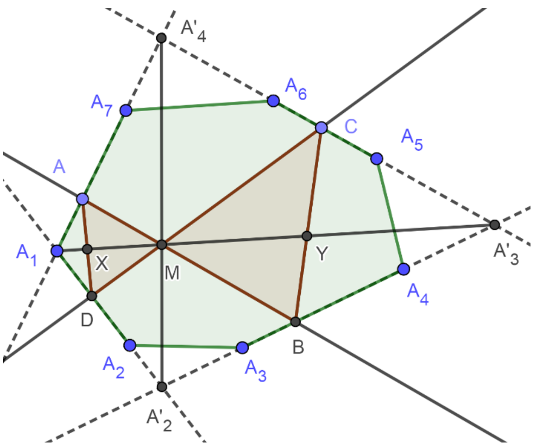


圖 3-2-40

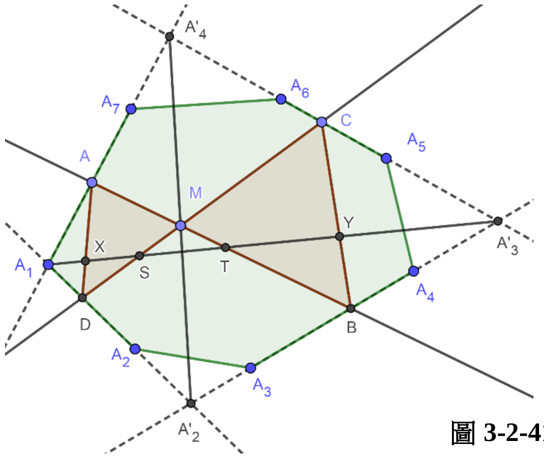


圖 3-2-41

肆、研究討論

一、如圖 4-1-1、4-1-2，設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為一條對角線$\overline{A_1A_3}$被另一條$\overline{A_2A_4}$平分的四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$的中點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的**四條邊或邊的延長線**上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\overline{MX} = \overline{MY}$。其證明方法與**定理 3-2-7 相同**。**(廣義四邊形的蝴蝶定理)**

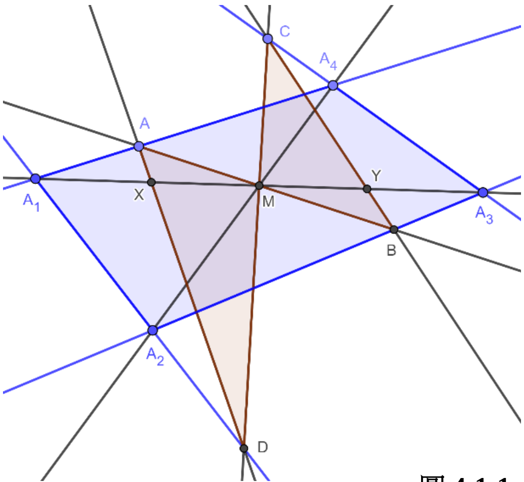


圖 4-1-1

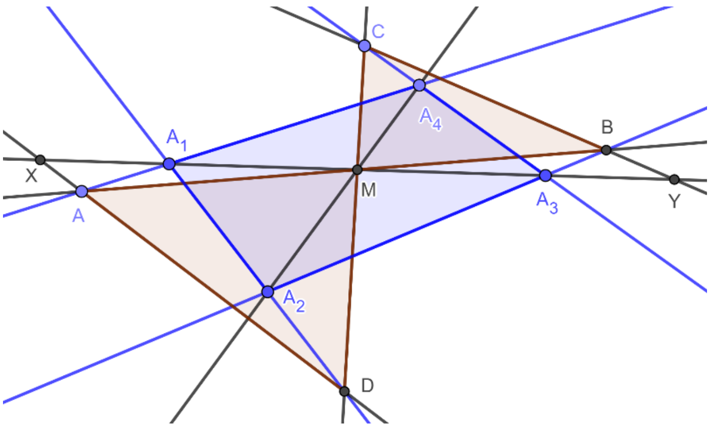


圖 4-1-2

二、如圖 4-2-1、4-2-2，設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，兩對角線交點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的**四條邊或邊的延長線**上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則 $\frac{\mathbf{A_1X}}{\mathbf{XM}} \times \frac{\mathbf{MY}}{\mathbf{YA_3}} \times \frac{\mathbf{A_3M}}{\mathbf{MA_1}} = \mathbf{1}$。其證明方法與**定理 3-2-10 相同**。**(廣義四邊形的坎迪定理)**

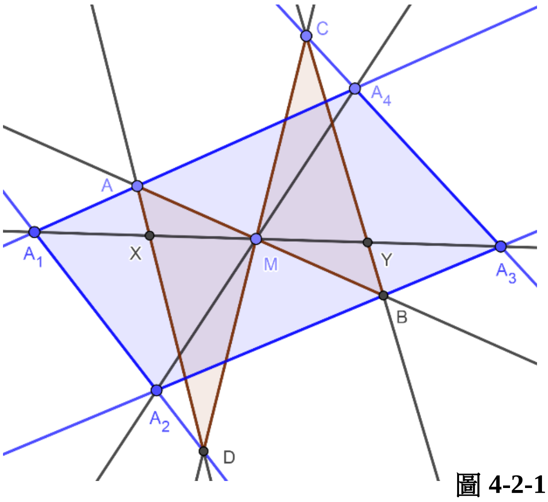


圖 4-2-1

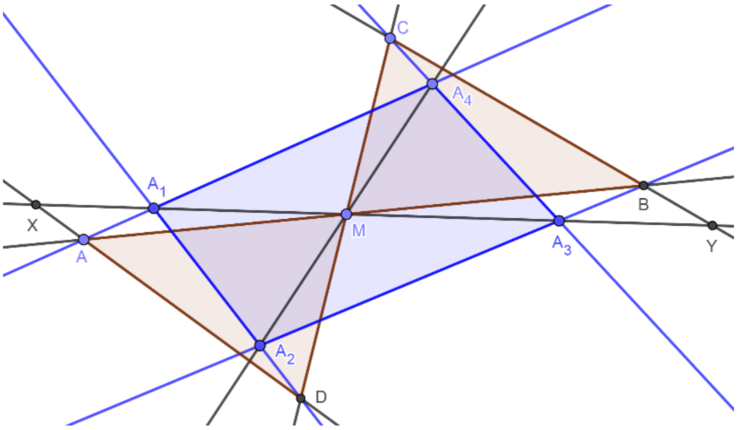


圖 4-2-2

三、如圖 4-3-1、4-3-2，設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶割線，$\overline{A_2A_4}$上一點 N 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的**四條邊或邊的延長線**上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，再連接 A、B 和 C、D 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 T、S 兩點，則 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3S}}{\overline{TA_1}}=1$。其證明方法與**定理 3-2-14 相同**。

(廣義四邊形的類坎迪定理)

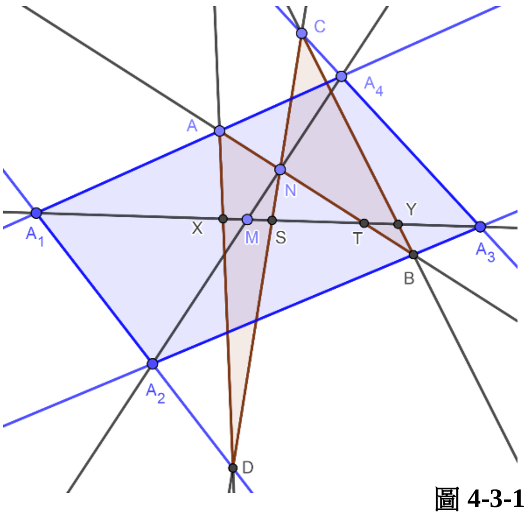


圖 4-3-1

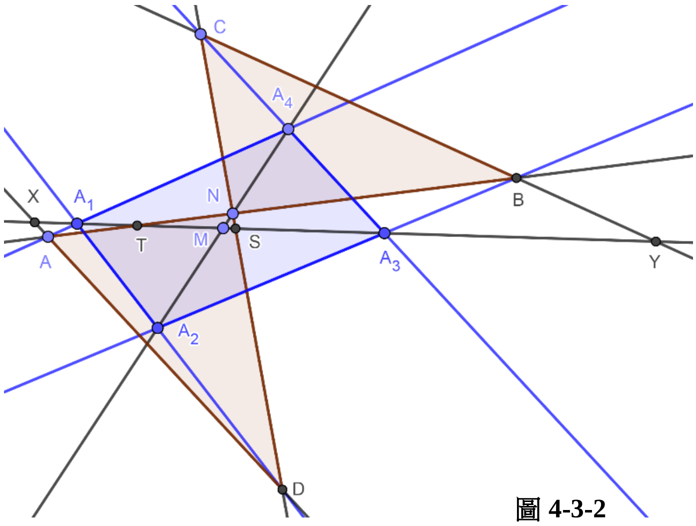


圖 4-3-2

四、如圖 4-4-1、4-4-2，設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$上一點 M 為蝴蝶中心，若蝴蝶形 ABCD 的頂點分別落在四邊形的**四條邊或邊的延長線**上，且連接 A、D 和 C、B 分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於 X、Y 兩點，則$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{OA_1}}=1$。若$\overline{A_1O}=\overline{A_3O}$，則$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}=1$。其證明方法與**定理 3-2-12 相同**。**(廣義四邊形的坎迪延伸定理)**

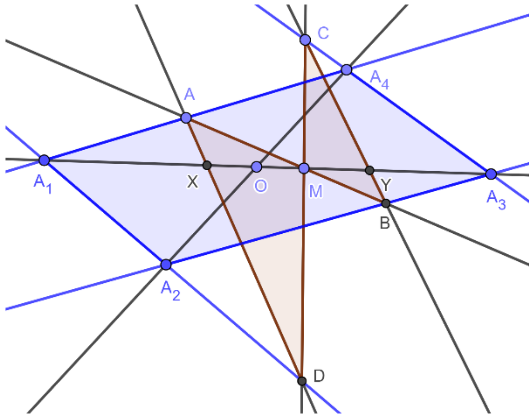


圖 4-4-1

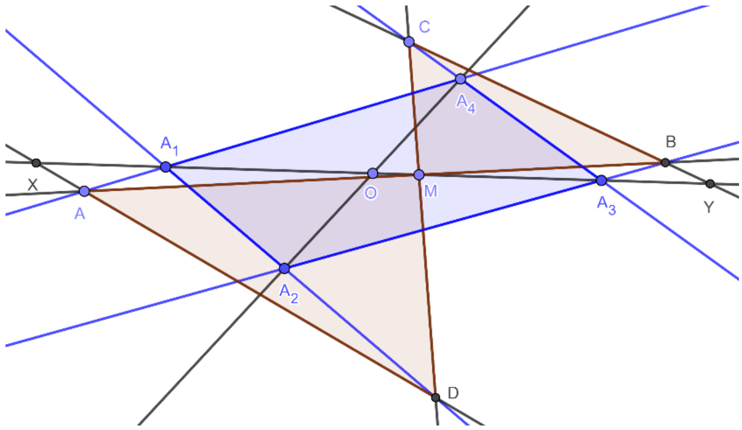


圖 4-4-2

五、如圖 4-5-1、4-5-2，若考慮和四邊形**一組鄰邊相交的截線段**為蝴蝶線，分別以截線段上任一點、線外一點為蝴蝶中心，並連接中心和此組鄰邊的頂點之直線，再過中心另作一截線與其一鄰邊和第三邊相交，並連接兩截線同一側端點的直線與原直線交於一點，又連接此點和蝴蝶線另一端點的直線交第三邊於一點，最後連接此點和中心的直線交另一鄰邊於一點，連接成蝴蝶形後也會有四邊形的**坎迪定理**和**類坎迪定理**，只是此時蝴蝶形**同樣只能內接四邊形於三邊**。

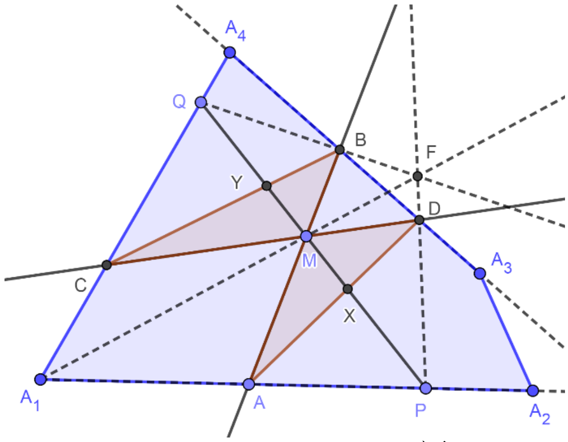


圖 4-5-1

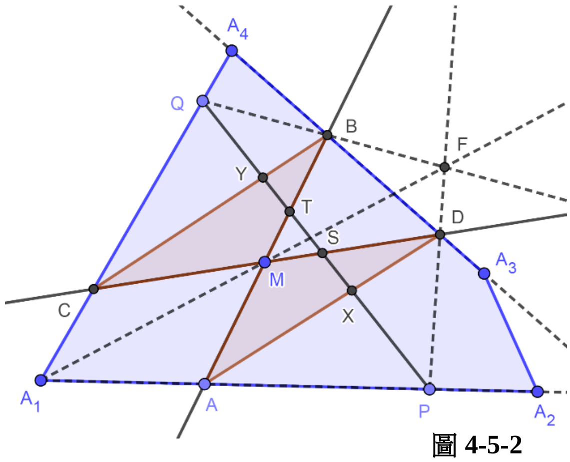


圖 4-5-2

六、如圖 4-6-1、4-6-2，若考慮和四邊形**一組鄰邊相交的截線段**為蝴蝶線，分別以截線段上任一點、線外一點為蝴蝶中心，連接中心和此組鄰邊的頂點之直線，再過中心另作一截線與其一鄰邊和第三邊相交，並連接兩截線同一側端點的直線與原直線交於一點，又連接此點和蝴蝶線另一端點的直線交第四邊於一點，最後連接此點和中心的直線交另一鄰邊於一點，連接成蝴蝶形後也會有四邊形的**坎迪定理**和**類坎迪定理**，若中心為**截線段的中點**時，則會有四邊形的**蝴蝶定理**，此時蝴蝶形**會內接四邊形於各邊(或延長線)**。

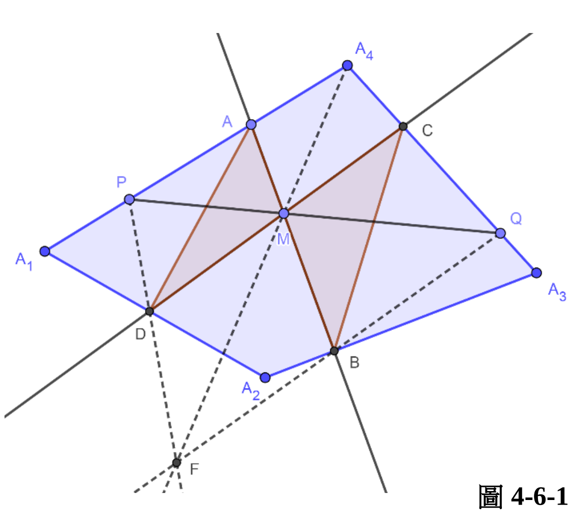


圖 4-6-1

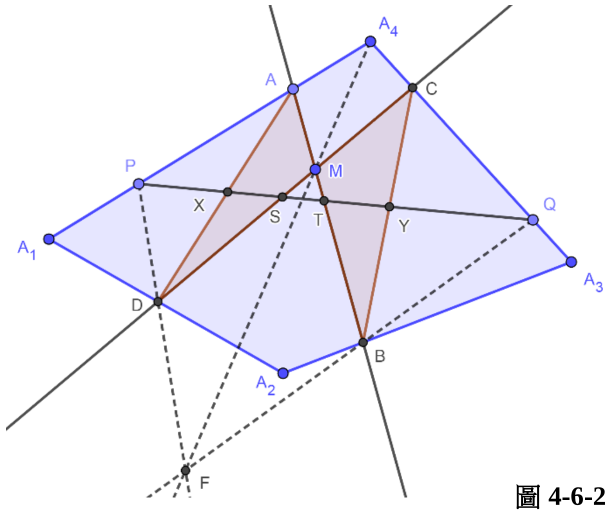


圖 4-6-2

七、如圖 4-7-1、4-7-2，若考慮和四邊形**一組對邊相交的截線段**為蝴蝶線，分別以截線段上任一點、線外一點為蝴蝶中心，連接中心和此組對邊延長線交點之直線，再過中心另作一截線與其一對邊和第三邊相交，並連接兩截線同一側端點的直線與原直線交於一點，又連接此點和蝴蝶線另一端點的直線交第四邊於一點，最後連接此點和中心的直線交另一對邊於一點，連接成蝴蝶形後也會有四邊形的**坎迪定理**和**類坎迪定理**，若中心為**截線段的中點**時，則會有四邊形的**蝴蝶定理**，此時蝴蝶形**會內接四邊形於各邊(或延長線)**。

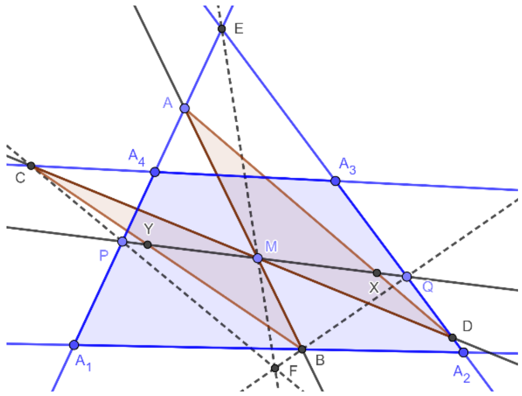


圖 4-7-1

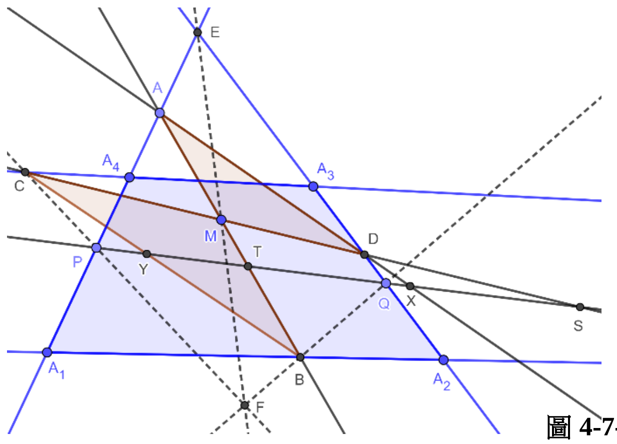


圖 4-7-2

伍、研究結果與結論

一、**圓的蝴蝶定理**推廣到**梯形**時，若蝴蝶線為**與上下底平行的截線段**，蝴蝶形的中心分別為**截線段上、截線外一點**，且蝴蝶形的頂點**分別落在上下底**，則有**梯形的蝴蝶定理、類蝴蝶定理**；若蝴蝶形的中心為**中位線的中點**，蝴蝶線為過中心的**任一截線段**，且蝴蝶形的頂點**分別落在上下底**，則也有**梯形的蝴蝶定理**。**圓的蝴蝶定理**推廣到**平行四邊形**時，若蝴蝶形的中心為**中位線的中點(兩對角線的交點)**，蝴蝶線為過中心的**任一截線段**，只要蝴蝶形內接平行四邊形，都會有**平行四邊形的蝴蝶定理**。

二、**圓的蝴蝶定理**推廣到**有一條對角線被平分的四邊形**時，蝴蝶形的中心分別為四邊形**兩對角線的交點**、**被平分的對角線上一點**，蝴蝶線為**被平分的對角線**，則有**四邊形的蝴蝶定理**、**等比例蝴蝶定理**；**圓的蝴蝶定理**推廣到**任意四邊形**時，此蝴蝶形的中心分別為四邊形**兩對角線的交點**、**另一條對角線上一點**、**此條對角線上一點**，蝴蝶線為**此條對角線**，則有**四邊形的坎迪定理**、**類坎迪定理**、**坎迪延伸定理**。特別地，**圓的蝴蝶定理**推廣到**圓外切四邊形**時，此蝴蝶形的中心是**對邊切點連線的交點(兩對角線的交點)**，若以**四個切點**為蝴蝶形的頂點，蝴蝶線是過中心的**任意截線段**，則有**圓外切四邊形的坎迪定理**，若**此截線段被中心平分**，則有**圓外切四邊形的蝴蝶定理**。

三、以**三線共點定理**為基礎，分別過四邊形內、外一點對四邊形**其中三邊作平行線**，則有**四邊形的坎迪平行線定理**、**類坎迪平行線定理**；進一步**利用三線共點的作圖法**，得到**更一般化**的**四邊形蝴蝶定理**，只是此時**蝴蝶形不一定內接在四邊形的邊上**，也可能接在**邊之延長線上**。**圓的蝴蝶定理**推廣到**多邊形**時，依序將多邊形**不相鄰的邊**延伸，一直到可以圍成四邊形為止，可將**多邊形的蝴蝶形**轉化成**四邊形的蝴蝶形**，從而 n 邊形($n \geq 5$)也有相對應的**蝴蝶定理**、**坎迪定理**和**類坎迪定理**，只是此時**蝴蝶形不一定內接在多邊形的邊上**，也可能接在**邊之延長線上**。

陸、參考資料

[1] 張華恩、吳尚澂、葉承恩(2015)。正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究。第 55 屆全國中小學科展高中數學科作品。

[2] 何碩宸、黃韻璇、張宗瑋(2019)。二次曲線上蝴蝶形的研究。第 59 屆全國中小學科展高中數學科作品。

[3] 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P195~203。

[4] 張景中著。幾何新方法和新體系。科學出版社，P24~34。

[5] 三線共點 http://www.mathsgreat.com/theorem/theorem_011.pdf。

[6] 牛頓幾何定理三 https://www.ixigua.com/6902702286816936460。

[7] SIDNEY KUNG(2005). A Butterfly Theorem for Quadrilateral. MATHEMATICS MAGAZINE 314–316。

[8] Zvonko Cerin(2006). On Butterflies Inscribed in a Quadrilateral. Forum Geometricorum Volume 6 241–246. https://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200628.pdf。

【評語】050413

本作品推廣平面幾何學中的蝴蝶定理。原本的蝴蝶形是圓內接四邊形，作者將圓先改成正方形，再逐步弱化，並一路推廣最後使得蝴蝶形是一般四邊形內接四邊形。隨著推廣的過程，公式也變得越發複雜，但仍保留了原先的數學結構。但是，原蝴蝶定理比較困難的地方在於外接圓是非線性，當外接圓被移除之後，作者便可以不斷使用類似射影幾何中的交比性質推導其證明，而這種手法實際上已十分成熟，如此一來，題目反而是變得簡單。本作品值得嘉許的部分是在這麼多複雜的公式之中找出規律，並整理成定理。作者可進一步比較本作品和討論圓上的及圓錐曲線上的蝴蝶定理，在處理時的差異，會更完善。

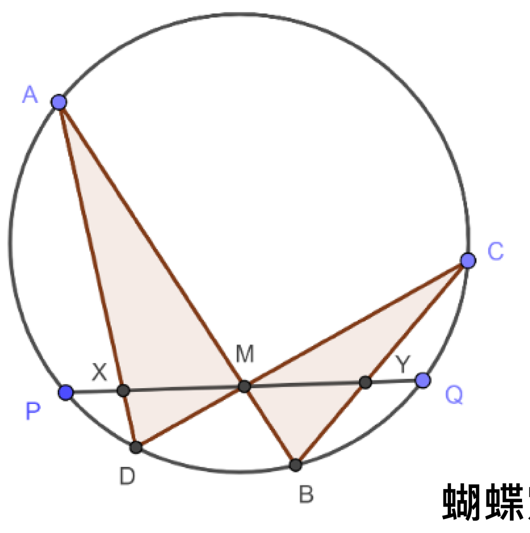
作品簡報

化圓為方

—四邊形的蝴蝶定理

壹、研究動機

關於**蝴蝶定理（*Butterfly Theorem*）**，過圓內弦$\overline{PQ}$的中點M任作兩弦$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，連接A、D和C、B分別交弦$\overline{PQ}$於X、Y兩點，則$\overline{XM}=\overline{MY}$。除此之外，文獻也針對**弦$\overline{PQ}$、M點的位置**和**外接其他圓錐曲線**作發想，而有一些推廣的性質。若**將蝴蝶形外接的圓形改成四邊形，那蝴蝶形是否也會有類似的性質**？於是我們決定繼續推廣**蝴蝶定理**，看能否有更多不一樣的發現。**(本研究每張圖片皆為作者用 *Geometer's Sketchpad* 電腦動態幾何軟體繪製而成)**



蝴蝶定理

貳、研究目的

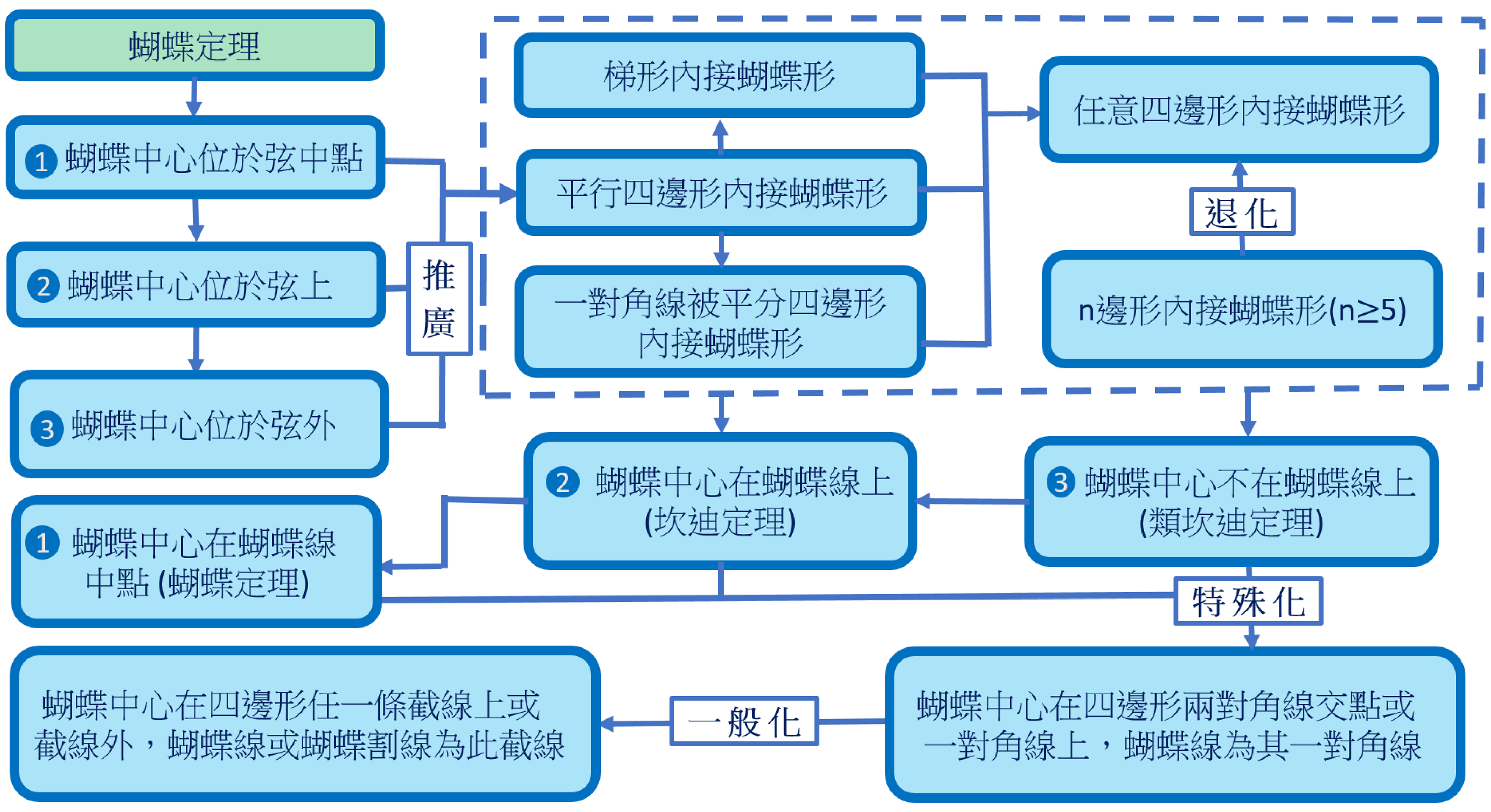
考慮**梯形、平行四邊形、只有一對角線被平分四邊形、任意四邊形、圓外切四邊形、任意多邊形**的內接蝴蝶形，連接不同的蝴蝶線或蝴蝶割線，觀察是否有圓內接蝴蝶形之線段關係？如果有，並試著加以證明。

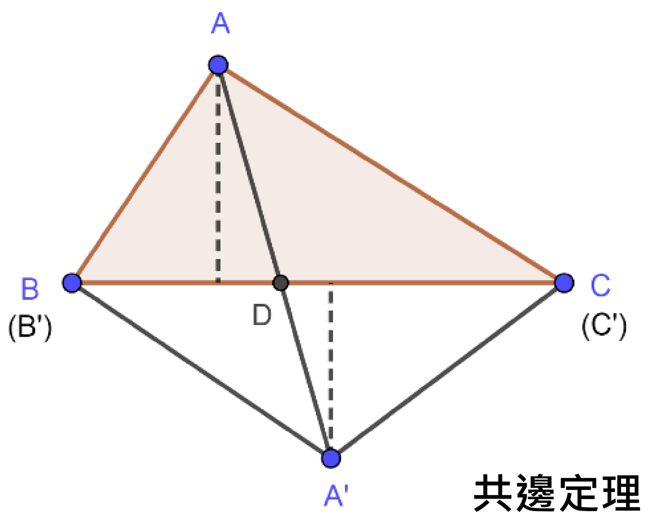
參、研究設備及器材

本研究主要利用***Geometer's Sketchpad***和***Geogebra***等電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

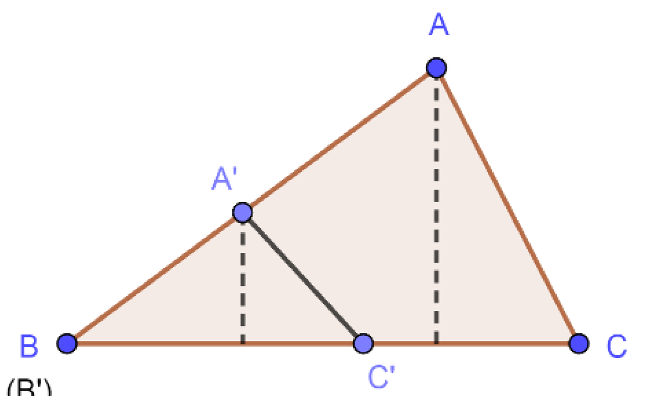
肆、研究過程或方法

一、研究架構

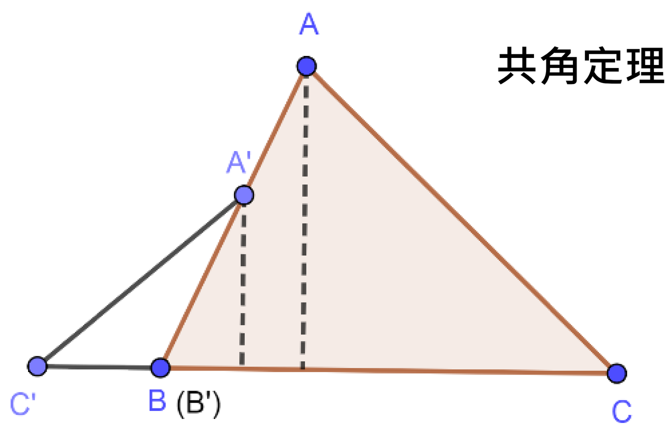




共邊定理



共角定理



二、文獻探討與前置研究

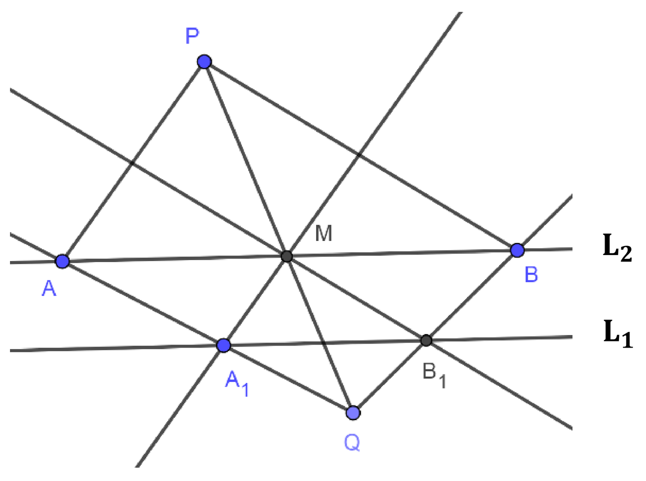
(一)共邊定理：設ΔABC和$\Delta A'B'C'$共邊$(\overline{BC}=\overline{B'C'})$，且D是$\overline{BC}$和$\overline{AA'}$的交點，$A'\neq D$，則$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\overline{AD}}{\overline{A'D}}$。這裡$\Delta ABC$表示$\Delta ABC$的面積。

(二)共角定理：設$\angle ABC$和$\angle A'B'C'$相等或互補，即$\angle ABC=\angle A'B'C'$或$\angle ABC+\angle A'B'C'=180°$，則$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\overline{A'B'}\times\overline{B'C'}}$。

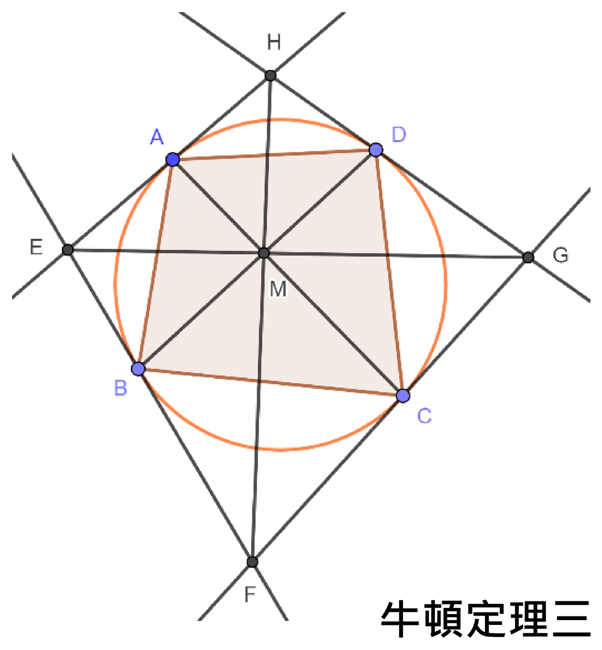
(三) *Philippe de la Hire*定理：

給定$\overline{PQ}$，若(1)$L_1//L_2$，A、B在L_2上；(2)$\overline{QA}$、$\overline{QB}$分別交L_1於A_1、B_1，則過A_1、B_1與$\overline{PA}$、$\overline{PB}$平行的直線與$\overline{PQ}$三線共點。

(四)牛頓定理三：圓外切四邊形對角線與切點四邊形對角線共點。



*Philippe de la Hire*定理



牛頓定理三

三、研究過程

設**四邊形$A_1A_2A_3A_4$為梯形**，$\overline{PQ}$為平行上下底$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_3A_4}$的截線段，若以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，蝴蝶形ABCD的頂點分別落在上下底，且連接A、D和C、B分別交$\overline{PQ}$於X、Y兩點，則$\overline{MX}=\overline{MY}$。

定理1 (梯形之蝴蝶定理1) 若以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，$\overline{PQ}$上任一點M為蝴蝶中心。

定理2 (梯形之蝴蝶定理2) 若以$\overline{PQ}$為蝴蝶割線，$\overline{PQ}$外一點G為蝴蝶中心，蝴蝶形和割線的一組交點H、K滿足$\overline{MH}=\overline{MK}$。

定理3 (梯形之蝴蝶定理3) 若蝴蝶線$\overline{PQ}$為梯形中線，$\overline{PQ}$的中點M為蝴蝶中心，將$\overline{PQ}$旋轉成$\overline{P'Q'}$，且$\overline{AD}$和$\overline{CB}$分別交$\overline{P'Q'}$於X'、Y'兩點，則$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

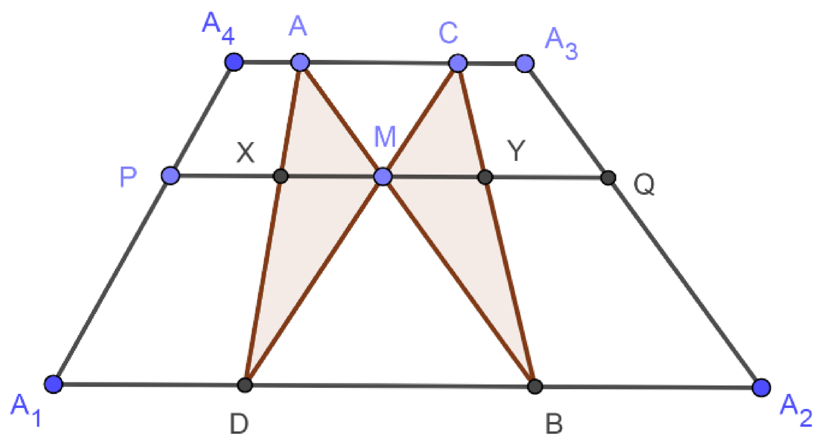


圖1

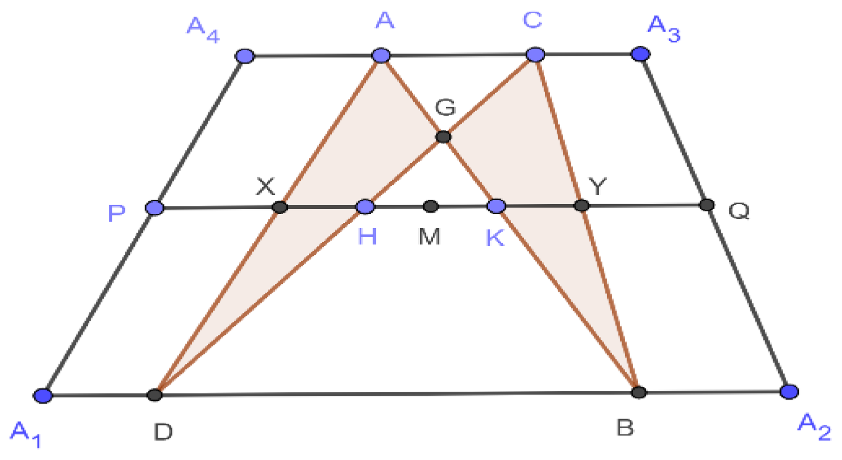


圖2

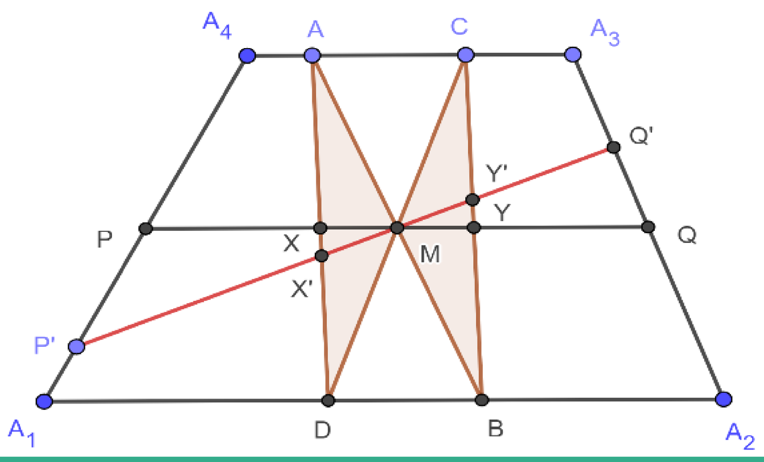


圖3

設**四邊形$A_1A_2A_3A_4$為平行四邊形**，以對角線的交點M為蝴蝶中心，一組對邊$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$的中點連線$\overline{PQ}$為蝴蝶線，若蝴蝶形ABCD的頂點不全落在一組對邊上，且連接A、D和C、B分別交$\overline{PQ}$於X、Y兩點，則$\overline{MX}=\overline{MY}$。

定理4 (平行四邊形之蝴蝶定理1) 若將蝴蝶線$\overline{PQ}$旋轉成蝴蝶線$\overline{P'Q'}$，且$\overline{AD}$和$\overline{CB}$分別交$\overline{P'Q'}$於X'、Y'兩點，則$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

定理5 (平行四邊形之蝴蝶定理2) 若將蝴蝶線$\overline{PQ}$旋轉成蝴蝶線$\overline{P'Q'}$，且$\overleftrightarrow{CA}$和$\overleftrightarrow{DB}$分別交$\overleftrightarrow{P'Q'}$於$X'$、$Y'$兩點，則$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

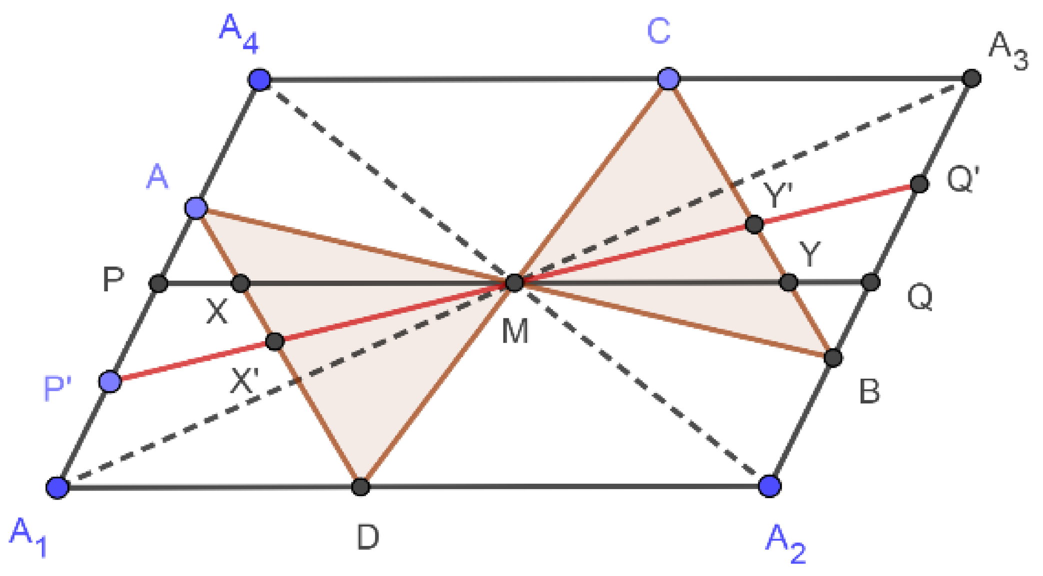


圖4

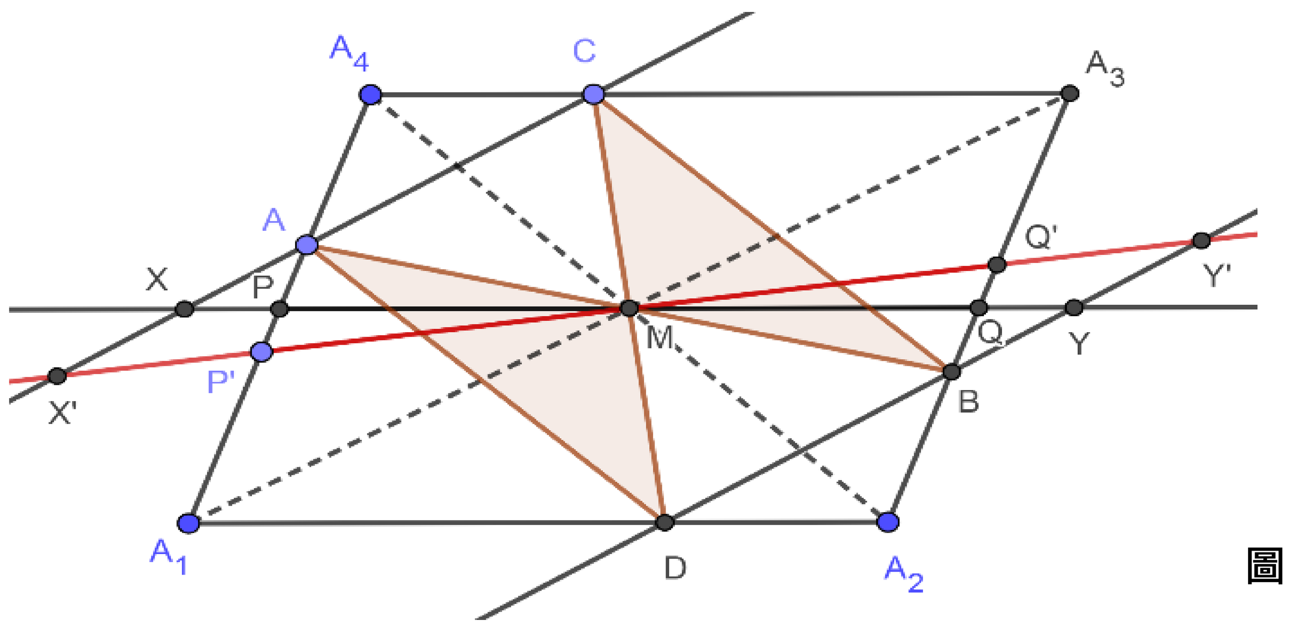


圖5

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為一條對角線$\overline{A_1A_3}$被另一條$\overline{A_2A_4}$平分的四邊形，若以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，$\overline{A_1A_3}$的中點M為蝴蝶中心，且連接A、D和C、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於X、Y兩點，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

定理6 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理1) 若蝴蝶形ABCD的頂點只落在四邊形的一組對邊上。

定理7 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理2) 若蝴蝶形ABCD的頂點分別落在四邊形的四條邊上。(四邊形的蝴蝶定理)

定理8 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理3) 若連接C、A和D、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$X'$、$Y'$兩點，則$\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

定理9 (一條對角線被平分四邊形之蝴蝶定理4) 若$\overline{A_1A_3}$上任一點M為蝴蝶中心，則$\frac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}}=\frac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}}$。可改寫成$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}=1$。(四邊形的等比例蝴蝶定理)

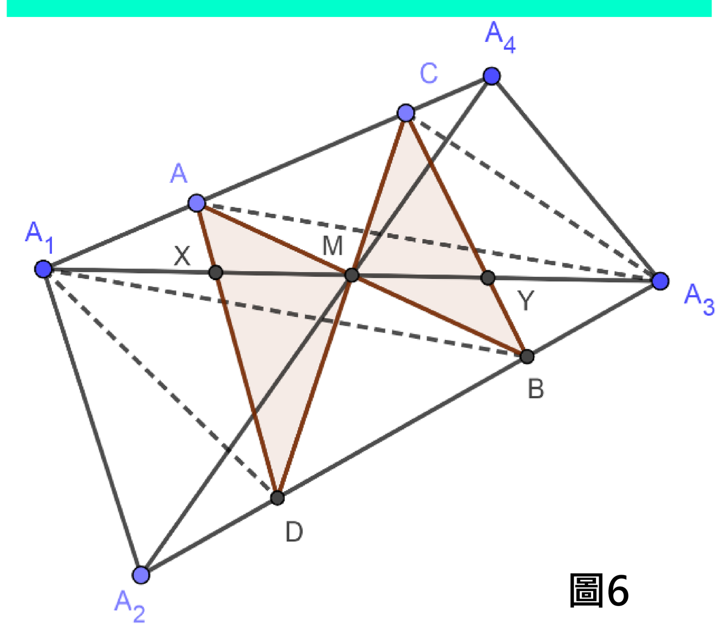


圖6

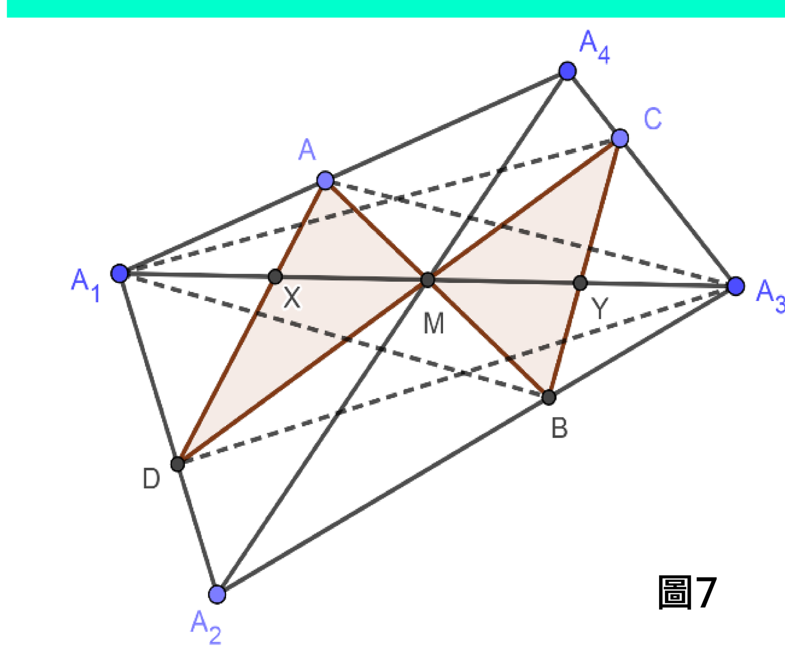


圖7

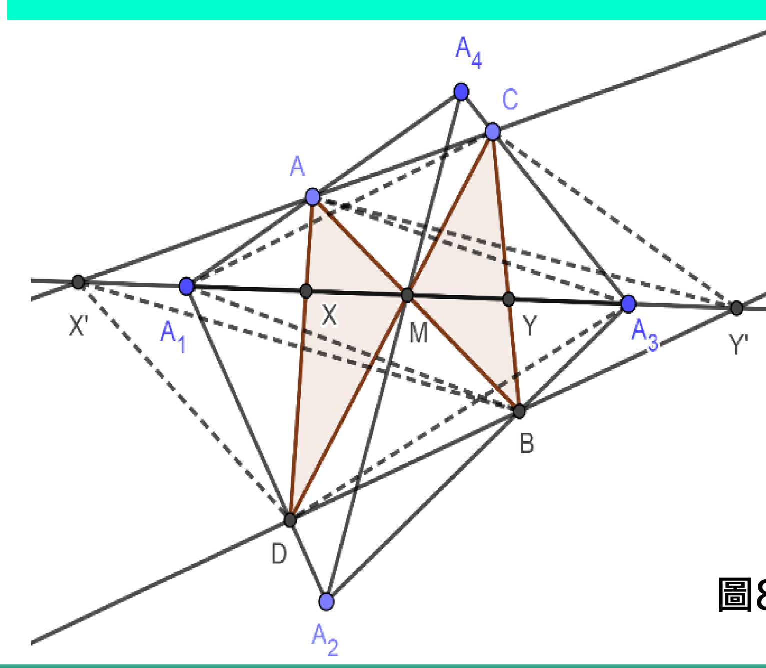


圖8

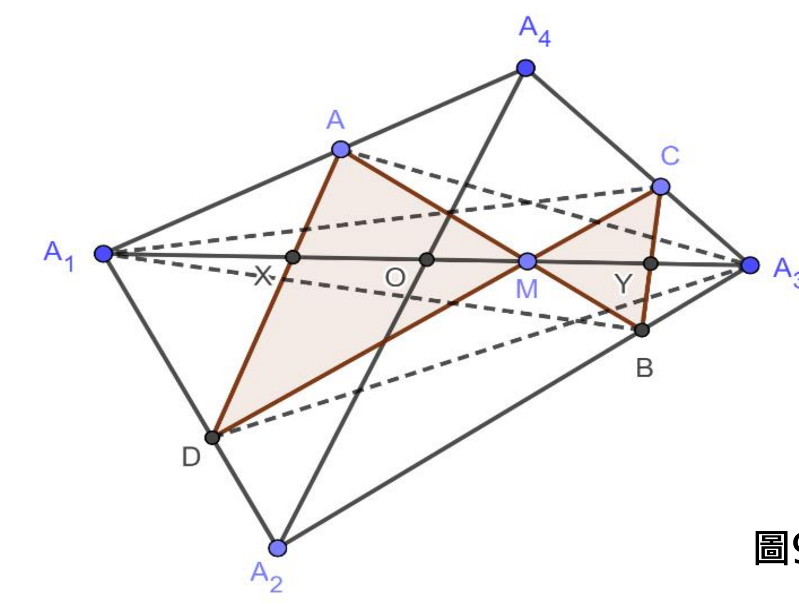


圖9

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，若以$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，兩對角線交點M為蝴蝶中心，蝴蝶形ABCD的頂點分別落在四邊形的四條邊上，且連接A、D和C、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於X、Y兩點。

定理10 (四邊形的坎迪定理1) 此時$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。可改寫成$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。(四邊形的坎迪定理)

定理11 (四邊形的坎迪定理2) 若連接C、A和D、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$X'$、$Y'$兩點，則$\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}=\frac{1}{\overline{MA_1}}-\frac{1}{\overline{MA_3}}$。可改寫成 $\frac{\overline{A_1X'}}{\overline{X'M}}\times\frac{\overline{MY'}}{\overline{Y'A_3}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。

定理12 (四邊形的坎迪定理3) 若以$\overline{A_1A_3}$上一點M為蝴蝶中心，則$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{OA_1}}=1$。(四邊形的坎迪延伸定理)

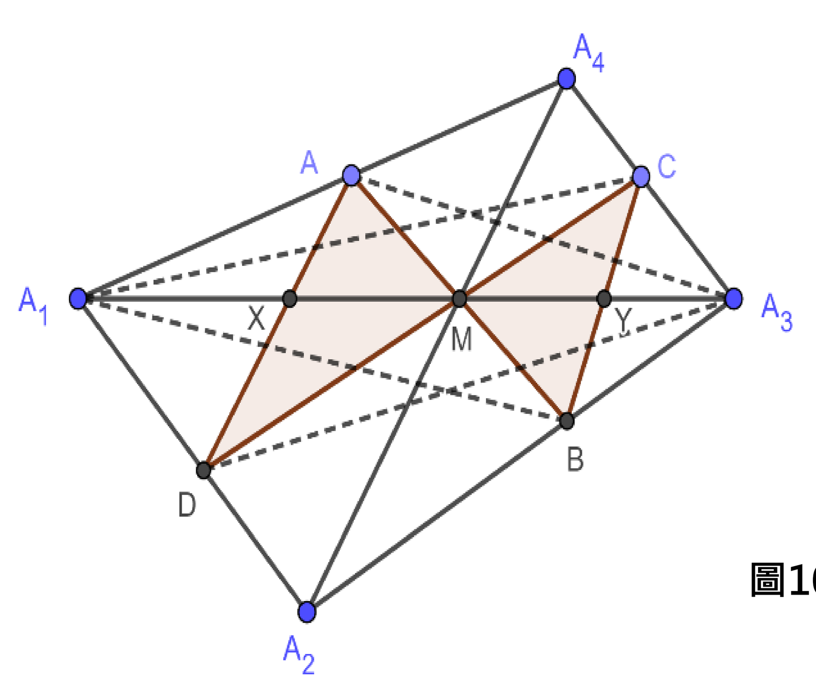


圖10

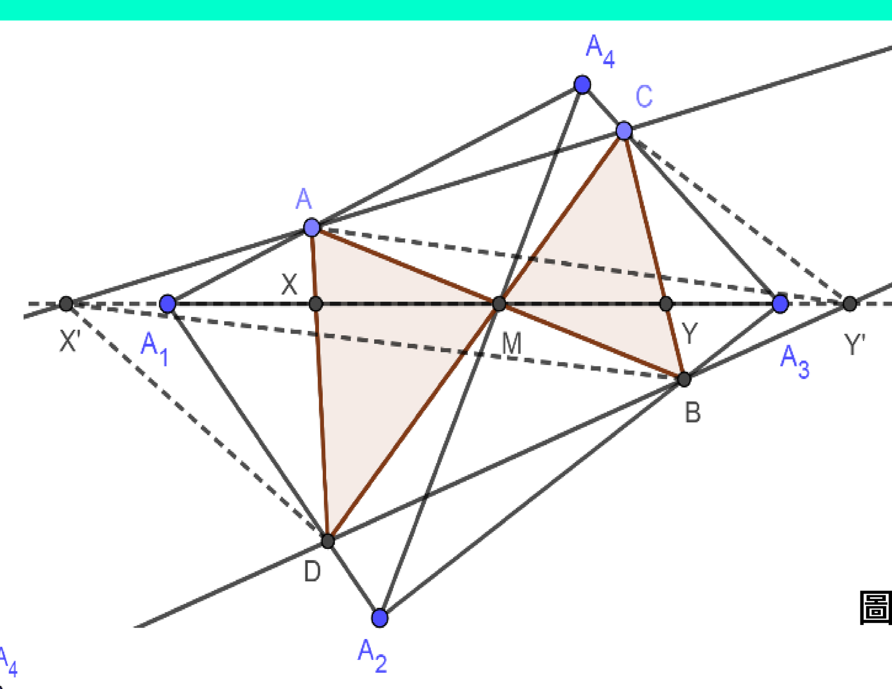


圖11

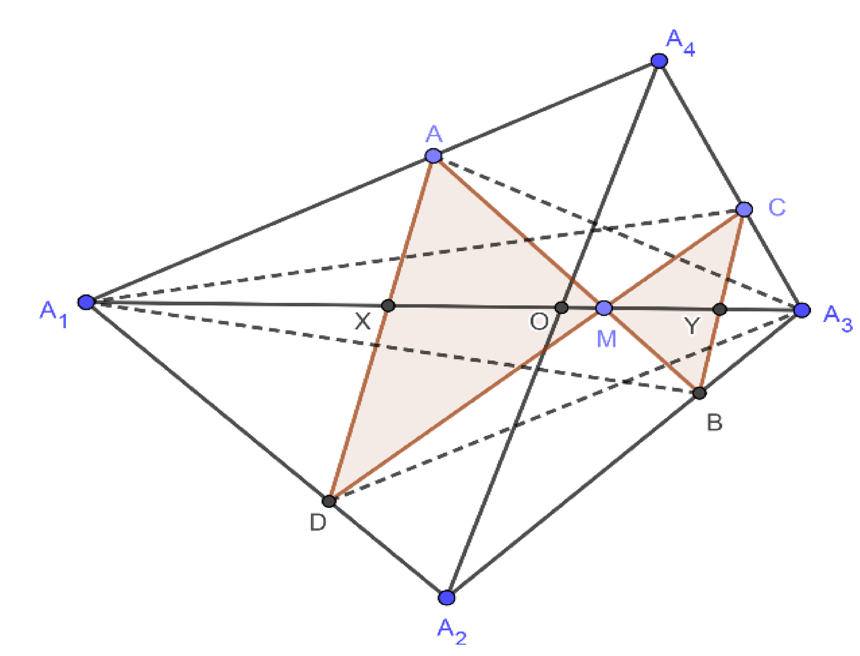


圖12

定理13 (四邊形的坎迪定理4) 若以$\overline{A_1A_3}$上一點M為蝴蝶中心，且連接C、A和D、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於$X'$、$Y'$兩點，則$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}$。

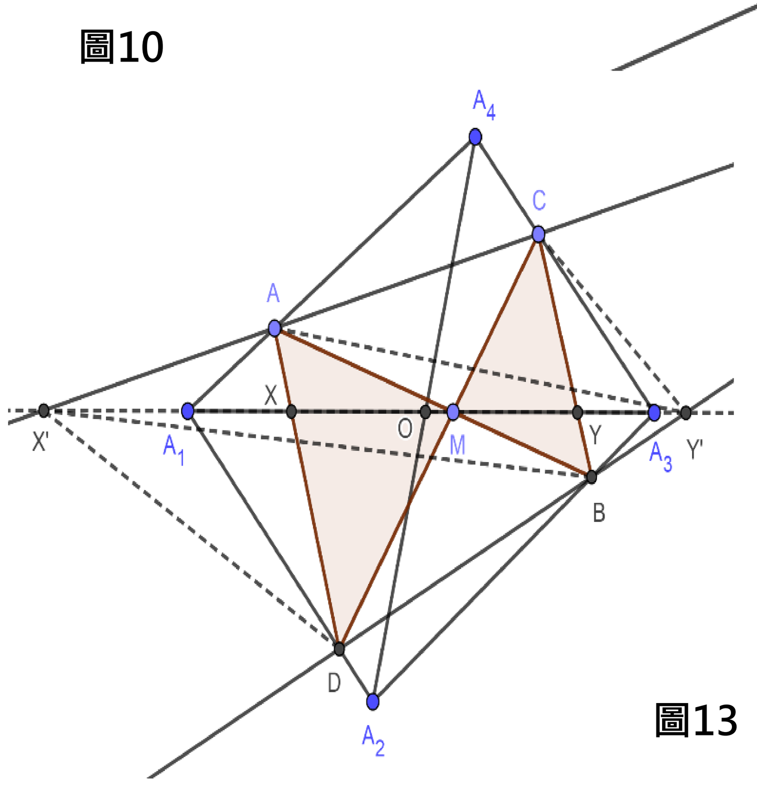


圖13

定理14 (四邊形的坎迪定理5) 若連接A、B和C、D分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於T、S兩點，則$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YA_3}}\times\frac{\overline{A_3S}}{\overline{TA_1}}=1$。

可改寫成$\frac{(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}})}{\overline{XS}}-\frac{(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}})}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{A_1T}}-\frac{1}{\overline{A_3S}}$。(四邊形的類坎迪定理)

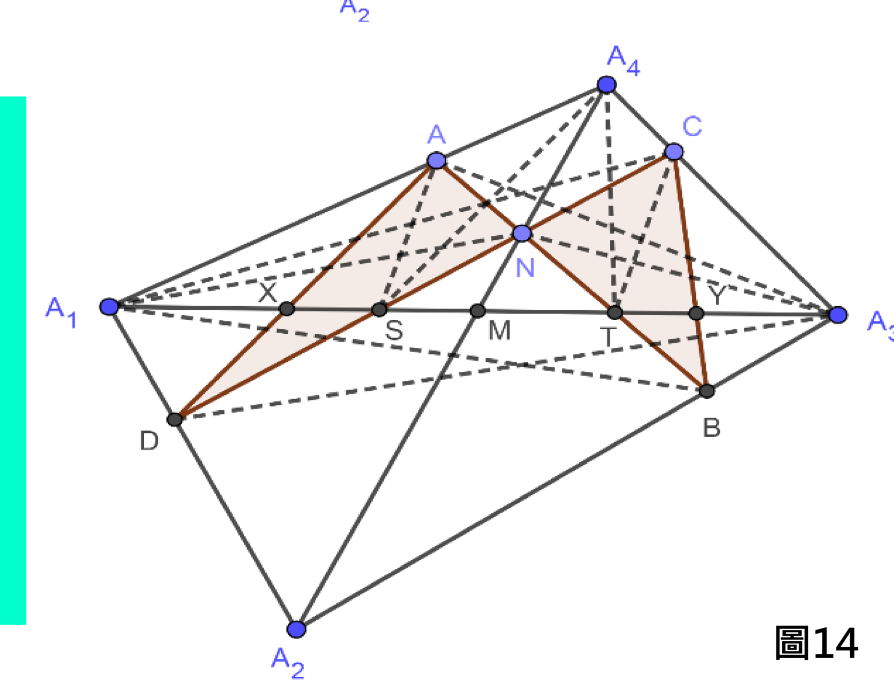


圖14

設四邊形$A_1A_2A_3A_4$為任意四邊形，若以$\overline{PQ}$為蝴蝶線，蝴蝶形ABCD的頂點A、B、C、D分別為兩直線與邊(或邊之延長線)的交點，且連接A、D和C、B分別交$\overline{PQ}$於X、Y兩點。

定理15 (四邊形的坎迪定理6) 若以$\overline{PQ}$為平行$\overline{A_1A_2}$的截線段，$\overline{PQ}$上任一點M為蝴蝶中心，且過M點分別作$\overleftrightarrow{AB}//\overline{A_3A_2}$、$\overleftrightarrow{CD}//\overline{A_4A_1}$，則$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MP}}-\frac{1}{\overline{MQ}}$。若$\overline{MP}=\overline{MQ}$，則$\overline{MX}=\overline{MY}$。(四邊形的坎迪平行線定理)

定理16 (四邊形的坎迪定理7) 若以$\overline{PQ}$為蝴蝶割線，$\overline{PQ}$外任一點M為蝴蝶中心，再連接A、B和C、D分別交$\overline{PQ}$於T、S兩點，則$\frac{\overline{PX}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YQ}}\times\frac{\overline{QS}}{\overline{TP}}=1$。可改寫成$\frac{(\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}})}{\overline{XS}}-\frac{(\frac{\overline{QT}}{\overline{QS}})}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{\overline{QS}}$。(四邊形的類坎迪平行線定理)

定理17 (四邊形的坎迪定理8) 若以$\overline{PQ}$為和兩邊$\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$相交的截線段，$\overline{PQ}$上任一點M為蝴蝶中心，則$\frac{1}{\overline{MX}}-\frac{1}{\overline{MY}}=\frac{1}{\overline{MP}}-\frac{1}{\overline{MQ}}$。若$\overline{MP}=\overline{MQ}$，則$\overline{MX}=\overline{MY}$。(四邊形的坎迪三線共點定理)

定理18 (四邊形的坎迪定理9) 若以$\overline{PQ}$外任一點M為蝴蝶中心，再連接A、B和C、D分別交$\overline{PQ}$於T、S兩點，則$\frac{\overline{PX}}{\overline{XS}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{YQ}}\times\frac{\overline{QS}}{\overline{TP}}=1$。可改寫成$\frac{(\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}})}{\overline{XS}}-\frac{(\frac{\overline{QT}}{\overline{QS}})}{\overline{YT}}=\frac{1}{\overline{PT}}-\frac{1}{\overline{QS}}$。(四邊形的類坎迪三線共點定理)

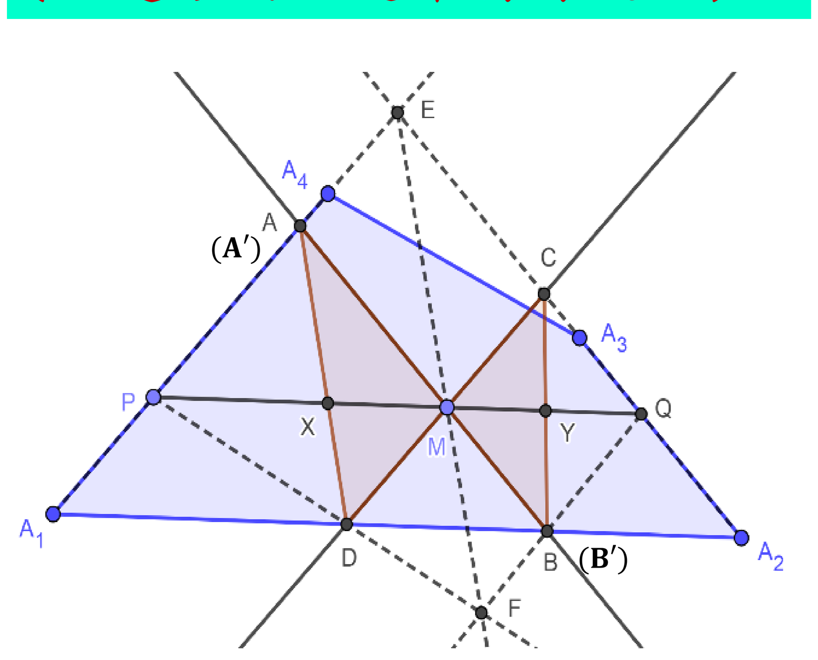


圖15

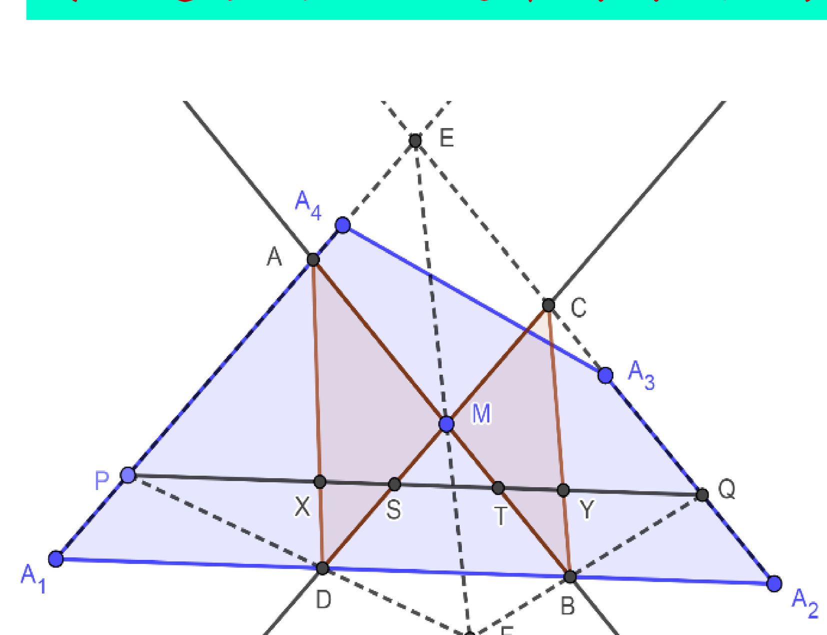


圖16

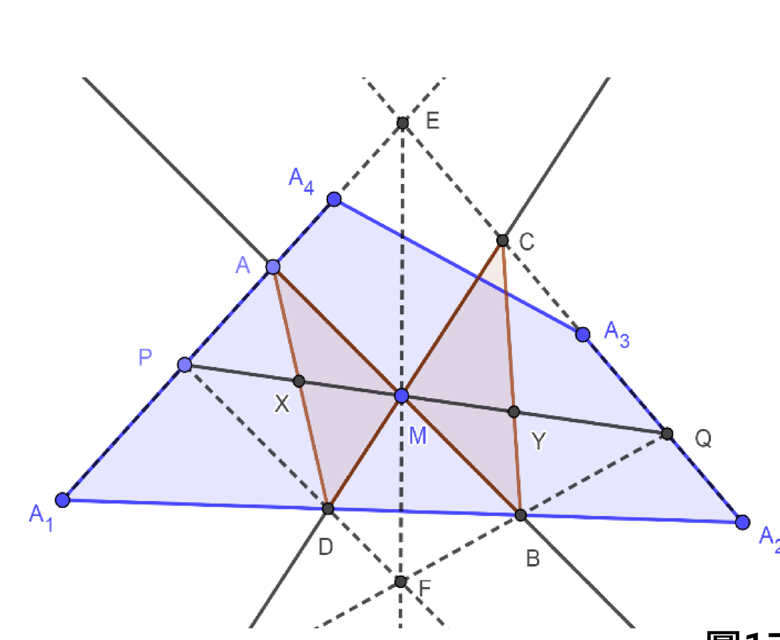


圖17

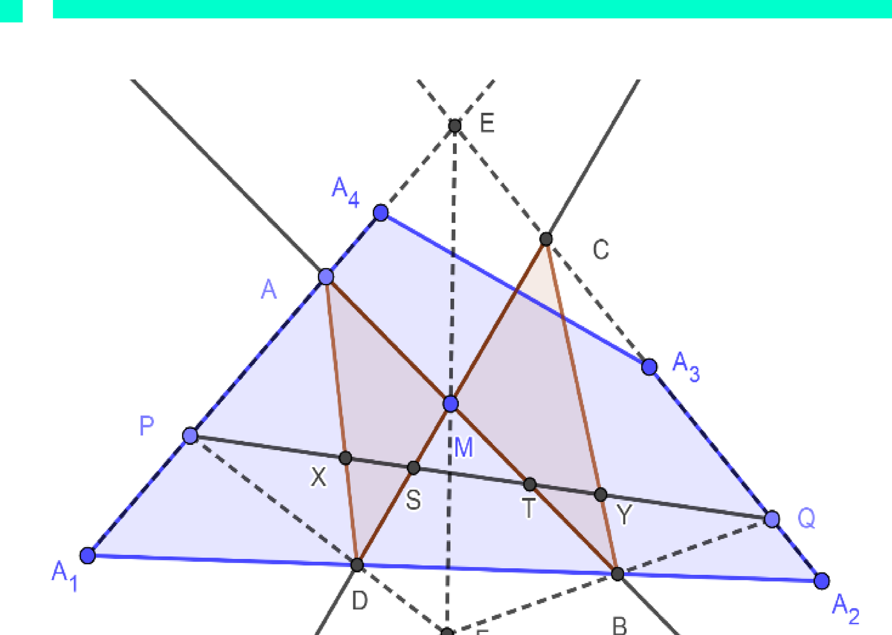


圖18

定理19 (圓外切四邊形的坎迪定理)

設圓外切四邊形$A_1A_2A_3A_4$的切點為A、B 、 C、D，若以ABCD為蝴蝶形，以兩對邊切點連線的交點M為蝴蝶中心，過M任作$\overline{EF}$為蝴蝶線，且連接A、D和C、B分別交$\overline{EF}$於X'、Y'兩點，

則 $\frac{1}{\overline{MX'}}-\frac{1}{\overline{MY'}}=\frac{1}{\overline{ME}}-\frac{1}{\overline{MF}}$。若 $\overline{ME}=\overline{MF}$，則 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

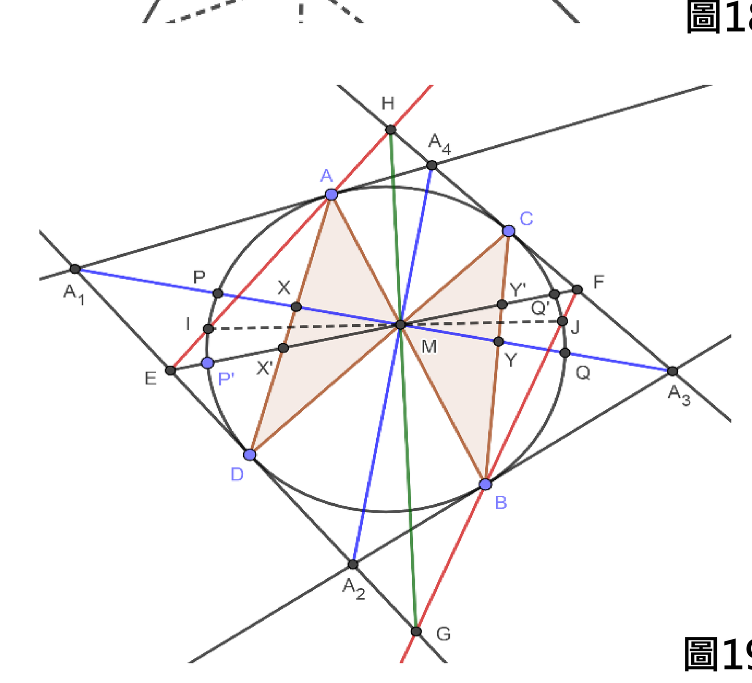


圖19

設五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$為任意五邊形，以對角線$\overline{A_1A_3}$為蝴蝶線，延伸$\overline{A_1A_5}$、$\overline{A_3A_4}$，設兩線相交於A'_4，形成一個四邊形$A_1A_2A'_3A'_4$，連接另一條對角線$\overline{A_2A'_4}$，兩對角線交於M點，以M為蝴蝶中心，過M分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$。

定理20 (五邊形的坎迪定理)
若連接A、D和C、B分別交$\overline{A_1A_3}$於X、Y兩點，則 $\frac{1}{MX}-\frac{1}{MY}=\frac{1}{MA_1}-\frac{1}{MA_3}$。

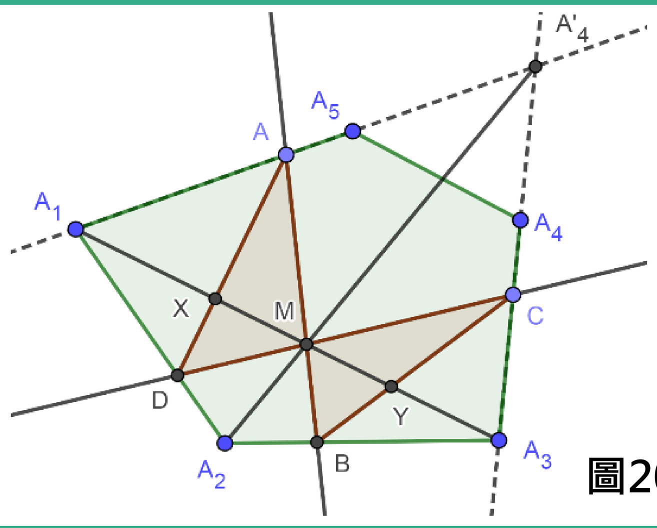


圖20

定理21 (五邊形的類坎迪定理)
若連接A、B和C、D分別交$\overline{A_1A_3}$於T、S兩點，則 $\frac{A_1X}{XS}\times\frac{TY}{YA_3}\times\frac{A_3S}{TA_1}=1$。

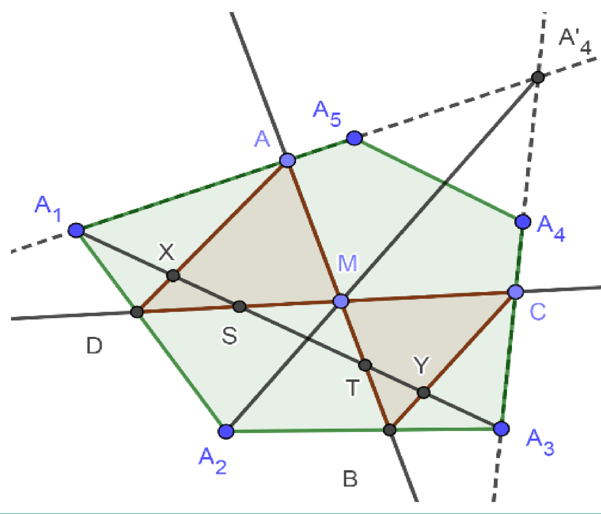


圖21

設六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$為任意六邊形，延伸$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_4A_5}$、$\overline{A_1A_6}$，設三線依序相交於A'_3、A'_4，形成一個四邊形$A_1A_2A'_3A'_4$，連接兩條對角線交於M點，以M為蝴蝶中心，過M分別作$\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$。

定理22 (六邊形的坎迪定理)
若連接A、D和C、B分別交$\overline{A_1A'_3}$於X、Y兩點，則 $\frac{1}{MX}-\frac{1}{MY}=\frac{1}{MA_1}-\frac{1}{MA'_3}$。

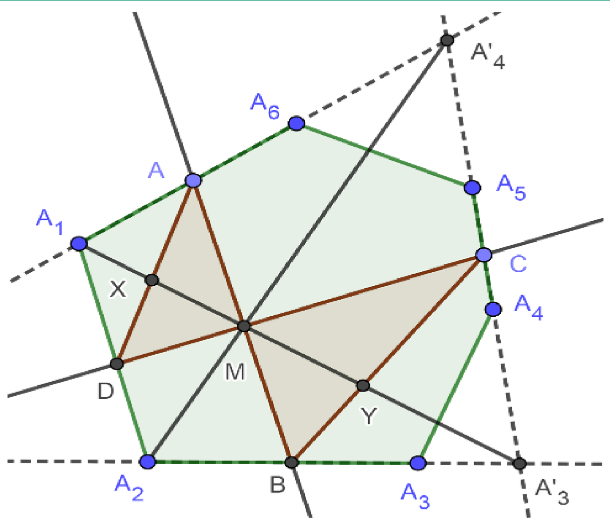


圖22

定理23 (六邊形的類坎迪定理)
若連接A、B和C、D分別交$\overline{A_1A'_3}$於T、S兩點，則 $\frac{A_1X}{XS}\times\frac{TY}{YA'_3}\times\frac{A'_3S}{TA_1}=1$。

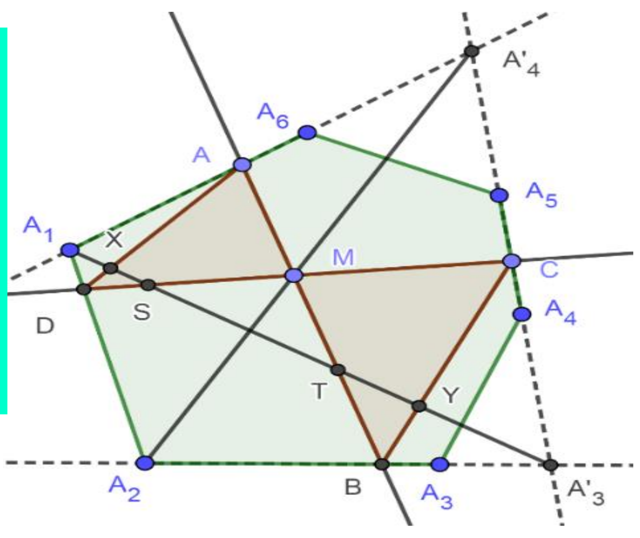
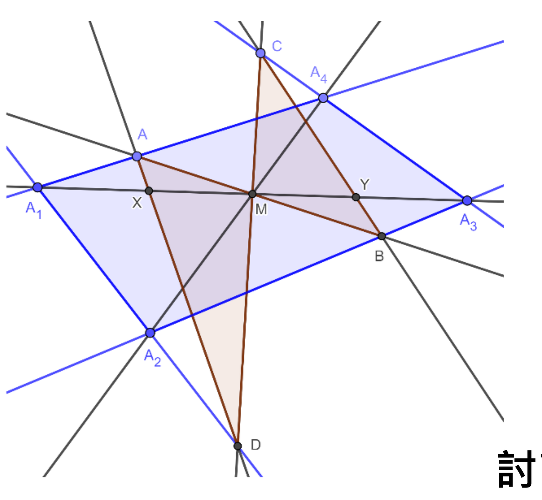


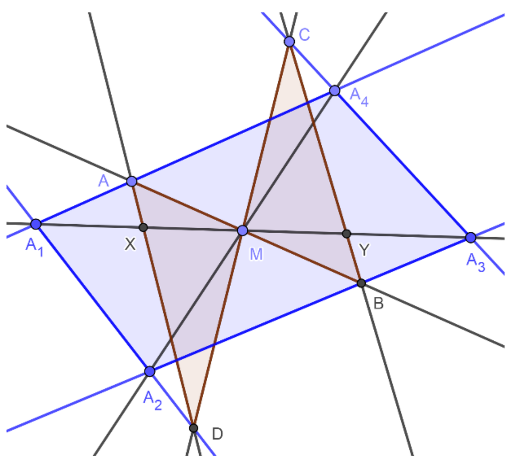
圖23

伍、研究討論

一、**廣義四邊形的蝴蝶定理**：若蝴蝶形ABCD的頂點分別落在四邊形的**邊或邊的延長線**上，蝴蝶中心M為$\overline{A_1A_3}$中點，且連接A、D和C、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於X、Y兩點，則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

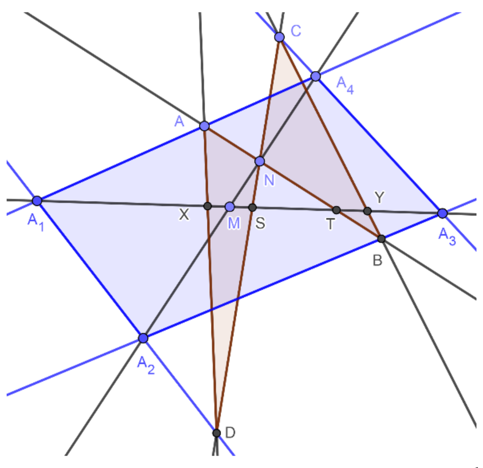
二、**廣義四邊形的坎迪定理**： 若蝴蝶形ABCD的頂點分別落在四邊形的**邊或邊的延長線**上，蝴蝶中心M為$\overline{A_1A_3}$上任一點，且連接A、D和C、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於X、Y兩點，則 $\frac{A_1X}{XM}\times\frac{MY}{YA_3}\times\frac{A_3M}{MA_1}=1$。

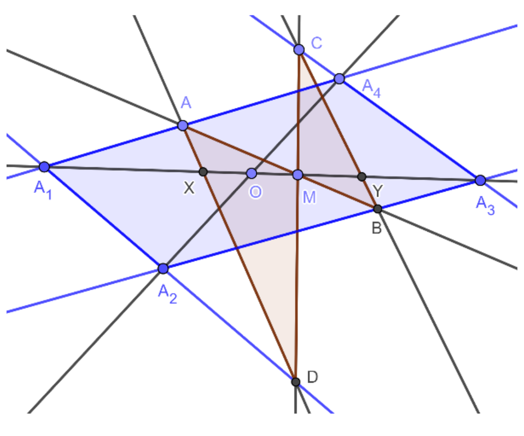

討論1


討論2

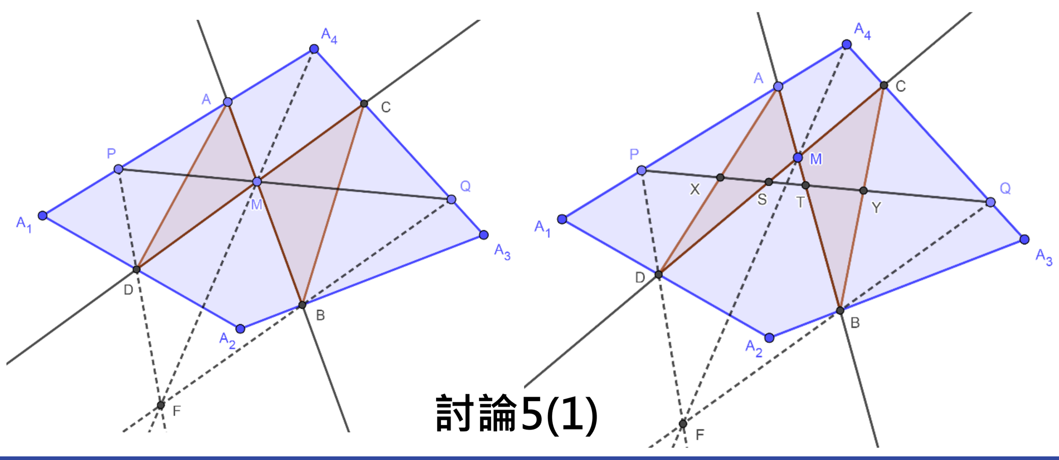
三、**廣義四邊形的類坎迪定理**：若蝴蝶形ABCD的頂點分別落在四邊形的**邊或邊的延長線**上，且連接A、D和C、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於X、Y兩點，再連接A、B和C、D分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於T、S兩點，則 $\frac{A_1X}{XS}\times\frac{TY}{YA_3}\times\frac{A_3S}{TA_1}=1$。

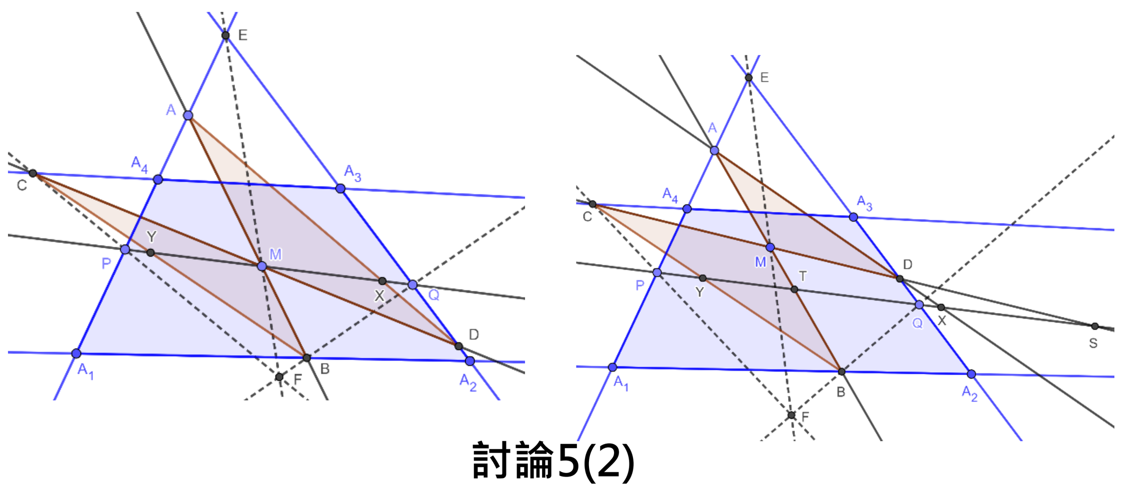
四、**廣義四邊形的坎迪延伸定理**：若蝴蝶形ABCD的頂點分別落在四邊形的**邊或邊的延長線**上，且連接A、D和C、B分別交$\overleftrightarrow{A_1A_3}$於X、Y兩點，則 $\frac{A_1X}{XM}\times\frac{MY}{YA_3}\times\frac{A_3O}{OA_1}=1$。若$\overline{A_1O}=\overline{A_3O}$，則 $\frac{A_1X}{XM}\times\frac{MY}{YA_3}=1$。


討論3


討論4

五、**四邊形蝴蝶定理、坎迪定理、類坎迪定理的一般化作圖**：
(一)以鄰邊的截線為蝴蝶線(割線)
(二)以對邊的截線為蝴蝶線(割線)


討論5(1)


討論5(2)

陸、研究結果與結論

一、**圓的蝴蝶定理**推廣到**梯形**時，若蝴蝶線為**與上下底平行的截線段**，蝴蝶形的中心分別為**截線段上**、**截線外一點**，且蝴蝶形的頂點**分別落在上下底**，則有**梯形的蝴蝶定理**、**類蝴蝶定理**；若蝴蝶形的中心為**中位線的中點**，蝴蝶線為過中心的**任一截線段**，且蝴蝶形的頂點**分別落在上下底**，則也有**梯形的蝴蝶定理**。**圓的蝴蝶定理**推廣到**平行四邊形**時，若蝴蝶形的中心為**中位線的中點(兩對角線的交點)**，蝴蝶線為過中心的**任一截線段**，只要蝴蝶形內接平行四邊形，都會有**平行四邊形的蝴蝶定理**。

二、**圓的蝴蝶定理**推廣到**有一條對角線被平分的四邊形**時，蝴蝶形的中心分別為四邊形**兩對角線的交點**、**被平分的對角線上一點**，蝴蝶線為**被平分的對角線**，則有**四邊形的蝴蝶定理**、**等比例蝴蝶定理**；**圓的蝴蝶定理**推廣**到任意四邊形**時，此蝴蝶形的中心分別為四邊形**兩對角線的交點**、**另一條對角線上一點**、**此條對角線上一點**，蝴蝶線為**此條對角線**，則有**四邊形的坎迪定理**、**類坎迪定理**、**坎迪延伸定理**。特別地，**圓的蝴蝶定理**推廣到**圓外切四邊形**時，此蝴蝶形的中心是**對邊切點連線的交點(兩對角線的交點)**，若以**四個切點**為蝴蝶形的頂點，以過中心的**任意截線段**為蝴蝶線，則有**圓外切四邊形的坎迪定理**，若**此截線段被中心平分**，則有**圓外切四邊形的蝴蝶定理**。

三、以**三線共點定理**為基礎，分別過四邊形內、外一點對四邊形**其中三邊作平行線**，則有**四邊形的坎迪平行線定理**、**類坎迪平行線定理**；進一步**利用三線共點的作圖法**，得到**更一般化**的**四邊形蝴蝶定理**，只是此時**蝴蝶形不一定內接在四邊形的邊上**，也可能接在**邊之延長線上**。**圓的蝴蝶定理**推廣到**多邊形**時，依序將多邊形**不相鄰的邊**延伸，一直到可以圍成四邊形為止，可將**多邊形的蝴蝶形**轉化成**四邊形的蝴蝶形**，從而n邊形($n\geq 5$)也有相對應的**蝴蝶定理**、**坎迪定理**和**類坎迪定理**，只是此時**蝴蝶形不一定內接在多邊形的邊上**，也可能接在**邊之延長線上**。

柒、參考資料及其他

1. 張華恩、吳尚澂、葉承恩(2015)。正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究。第55屆全國中小學科展高中數學科作品。
2. 何碩宸、黃韻璇、張宗瑋(2019)。二次曲線上蝴蝶形的研究。第59屆全國中小學科展高中數學科作品。
3. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P195~203。
4. 張景中著。幾何新方法和新體系。科學出版社，P24~34。
5. 三線共點。 http://www.mathsgreat.com/theorem/theorem_011.pdf。
6. 牛頓幾何定理三。 https://www.ixigua.com/6902702286816936460。