中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050412

內切圓的突發奇想

學校名稱：臺中市立忠明高級中學

作者：	指導老師：
高二 呂奕濓	陳柏仁
高二 林承樂	黃國銘

關鍵詞：內切圓的條件、八點共線、面積周長比

摘要

我們對內切圓研究一開始是從四邊形出發再延伸到多邊形，而研究的方向有兩個，其中一個是探討圓外切多邊形與圓內接多邊形（即圓與切線交點之切點多邊形）之間的關係。首先得到凸多邊形內切圓的成立條件，依據圓外切多邊形的邊角關係、邊長關係，得到不同的結論；接下來對圓外切四邊形與切點四邊形的關係做分類，並討論這兩種四邊形的面積公式後，進而觀察這兩種四邊形的面積與周長比值的關係，最後衍伸至 n 邊形，因而得到凸多邊形之面積與周長比值的關係。另一個方向則是由圓外切四邊形與切點四邊形的對角線交點，以及兩四邊形之邊長延伸線的交點、內外頂點延伸線的交點，去探討其共點共線的關係。

壹、研究動機

在國中的課本中，介紹了圓外切四邊形與內接四邊形的關係式和面積，到了高二的教科書中，提到了運用三角函數計算面積的技巧，在我們閱讀了文獻 [6] 的文章後，就思考是否能從不同角度出發，讓四邊形以三角函數的方式計算其面積與周長，並以此觀察外切及內接四邊形的關係並推導出關係式，首先我們利用 GeoGebra 繪圖軟體來觀察圓內切四邊形與圓外接四邊形在圖形上的特性，進而思考外切四邊形與內接四邊形是否有更多令我們意想不到的共通性能夠實踐操作。

貳、研究目的

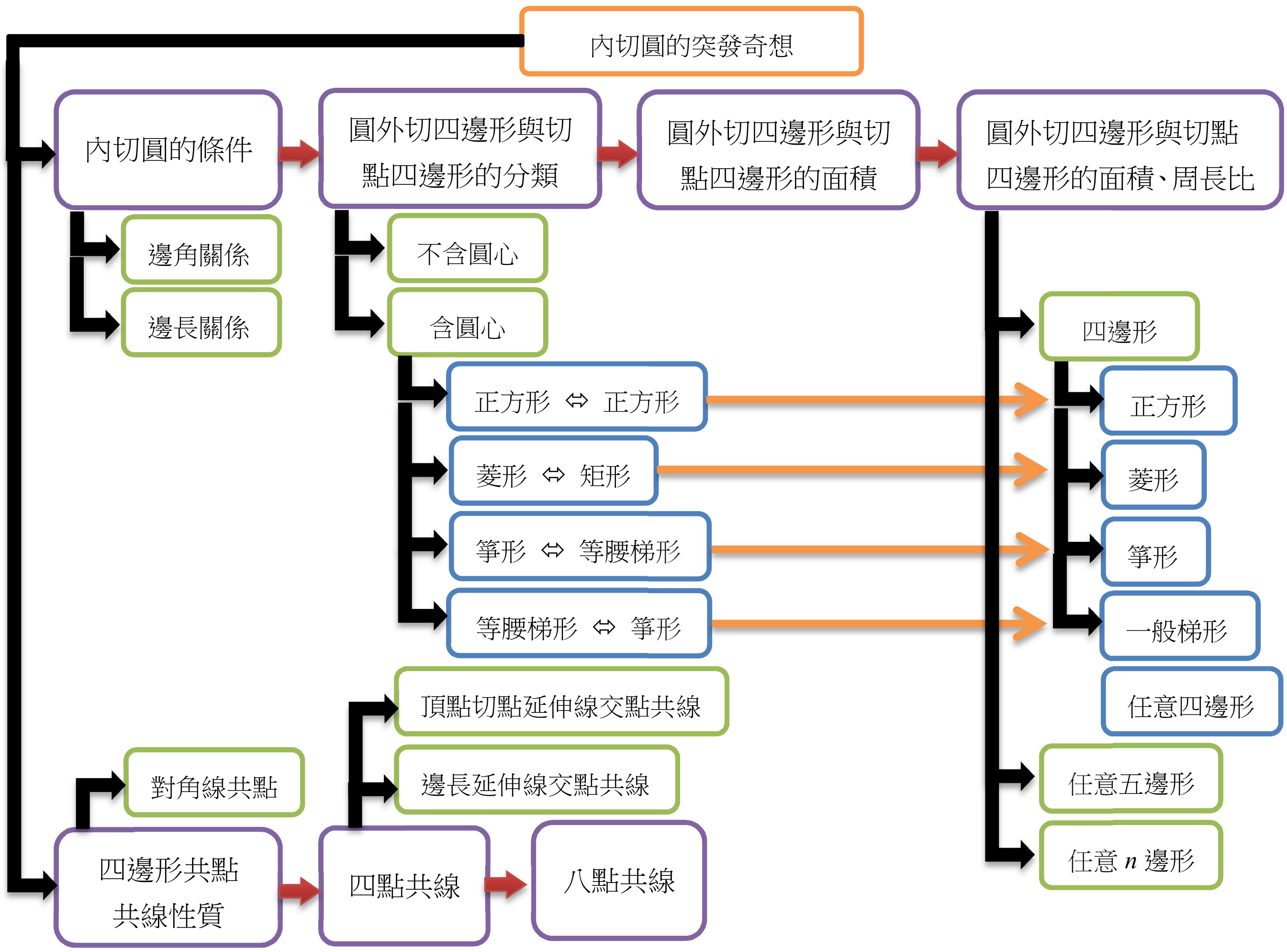
1. 利用三角函數簡化內切圓的成立的兩個條件，分別透過邊角關係與邊長關係得到結論。
2. 對圓內切特殊四邊形及圓內接特殊四邊形的關係做分類，進而探討這兩種四邊形的面積。
3. 依據前面得到的兩種四邊形面積，再深入討論這兩種四邊形面積、周長的比值，最後衍伸至 n 邊形。
4. 利用 GeoGebra 觀察出圓外切四邊形與內接四邊形邊長延長線、頂點切點延長線的交點關係。

參、研究設備及器材

紙、筆等文書用具、電腦、GeoGebra 軟體。

肆、研究過程或方法

一、研究架構



二、文獻探討

（一）內切圓的存在條件

由文獻 [6] 可知，內切圓成立條件不須過於複雜，作品中把各邊長分段後，所形成的聯立方程式利用高斯消去法所得到的結果，做出下面的推論。

在六邊形 $ABCDEF$ 中（如右圖 4-2-01），將各邊長可分解

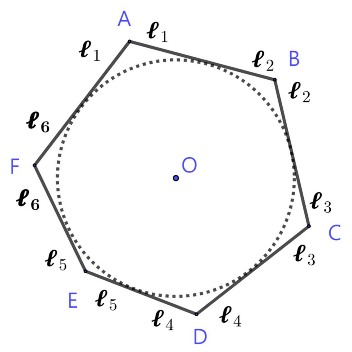


圖 4-2-01，作者繪製

為 $\overline{AB}=\ell_1+\ell_2$、$\overline{BC}=\ell_2+\ell_3$、$\overline{CD}=\ell_3+\ell_4$、$\overline{DE}=\ell_4+\ell_5$、$\overline{EF}=\ell_5+\ell_6$、$\overline{FA}=\ell_6+\ell_1$（其中 $\ell_i>0,\ i=1,\cdots,6$），若滿足

$$\ell_1\cdot\tan\frac{A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{D}{2}=\ell_5\cdot\tan\frac{E}{2}=\ell_6\cdot\tan\frac{F}{2}$$

則此六邊形有『**無限多個內切圓**』。 透過數學歸納法進而得到：在偶數多邊形中，若各邊長的分組解，透過高斯消去法可得到正實數解，則間隔一邊取邊長和，兩組邊長和必相等，且偶數多邊形在不同內角的組合下有『**無限多個內切圓**』。

透過偶數多邊形的結論，進一步找出奇數凸多邊形的規律。在七邊形 $ABCDEFG$ 中，將各邊長可分解為 $\overline{AB}=\ell_1+\ell_2$、$\overline{BC}=\ell_2+\ell_3$、$\overline{CD}=\ell_3+\ell_4$、$\overline{DE}=\ell_4+\ell_5$、$\overline{EF}=\ell_5+\ell_6$、$\overline{FG}=\ell_6+\ell_7$、$\overline{GA}=\ell_7+\ell_1$（其中 $\ell_i>0,\ i=1,\cdots,7$），若滿足

$$\ell_1\cdot\tan\frac{A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{D}{2}=\ell_5\cdot\tan\frac{E}{2}=\ell_6\cdot\tan\frac{F}{2}=\ell_7\cdot\tan\frac{G}{2}$$

則七邊形 $ABCDEFG$ 有『**一個內切圓**』。同樣透過數學歸納法得到：在奇數邊形中，若各邊長的分組解，透過高斯消去法可得到正實數解，則多邊形在特定的角度條件下有『**一個內切圓**』。

前面的文獻 [6] 中，得到多邊形中內切圓的邊角關係；而在另一篇文獻 [3] 的結論中提到，圓外切 n 邊形的邊長關係：假設 L_p 為第 p 個邊的邊長，

1. 若 n 為奇數，則其邊長關係式為

$$L_{2k-1}+L_{2k+1}+\cdots+L^{-}_{2k+2t-3} = L_{2k+2t-4}+L_{2k+2t-6}+\cdots+L^{+}_{2k-2}$$

（其中 $k=1,\cdots,n$；$t=\dfrac{n+1}{2}$；以切點 p_{2k-2} 為分割點）

2. 若 n 為偶數，則其邊長關係式為 $L_1+L_3+\cdots+L_{2k-1} = L_2+L_4+\cdots+L_{2k}$

（其中 $k=1,\cdots,n$）

均共有 n 個關係式。

（二）共點與共線的性質

1. 共點的性質

在探討圓外切四邊形與切點四邊形的性質時，文獻 [7] 有一個定理，稱之為牛頓幾何定理三：**圓的外切四邊形的對角線的交點和以切點為頂點的四邊形對角線交點重合**。

【證明】

在平面上找任意點 O，以 O 為圓心，r 為半徑作一圓，於圓上找任意四點 P、Q、R、S 並做過四點與圓的切線，切線相交於 A、B、C、D 四點，連接 $\overline{AC}$、$\overline{SQ}$ 且 $\overline{AC}$、$\overline{SQ}$ 交於 I 點。

設 $\angle AIS=\angle CIQ=\theta_1$、$\angle SQC=\angle QSD=\alpha$，$\Delta AOS$ 面積 $=A_1$、ΔCOQ 面積 $=A_2$

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{\frac{1}{2}\overline{IA}\times\overline{IS}\times\sin\theta_1}{\frac{1}{2}\overline{IQ}\times\overline{IC}\times\sin\theta_1}=\frac{\frac{1}{2}\overline{IS}\times\overline{SA}\times\sin\left(180^\circ-\alpha\right)}{\frac{1}{2}\overline{IQ}\times\overline{CQ}\times\sin\alpha}\Rightarrow\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{CQ}}$$ （如下圖 4-2-02）

同理可證，連接 $\overline{AC}$、$\overline{PR}$ 且 $\overline{AC}$、$\overline{PR}$ 交於點 I'，則 $\frac{\overline{AI'}}{\overline{CI'}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{CR}}$ （如下圖 4-2-03）

$\because\overline{AP}=\overline{AS}$、$\overline{CQ}=\overline{CR}$ $\quad\therefore\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{CQ}}=\frac{\overline{AI'}}{\overline{CI'}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{CR}}$

又 I、I' 皆在 $\overline{AC}$ 上 $\Rightarrow$ $\overline{AC}$、$\overline{SQ}$、$\overline{PR}$ 交於一點（如下圖 4-2-04）

同理可證，$\overline{AC}$、$\overline{SQ}$、$\overline{BD}$ 交於一點（如下圖 4-2-05）

故 $\overline{AC}$、$\overline{SQ}$、$\overline{BD}$、$\overline{PR}$ 交於一點（如下圖 4-2-06）

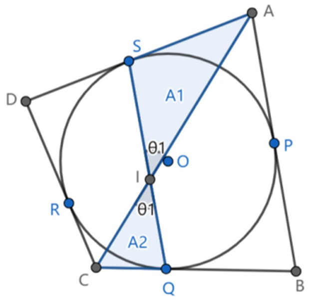


圖 4-2-02，作者繪製

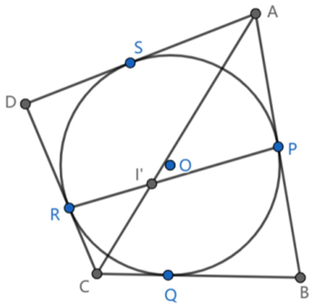


圖 4-2-03，作者繪製

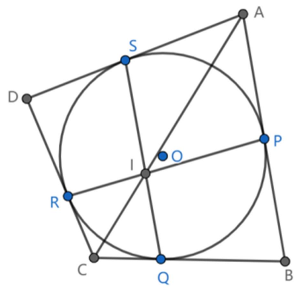


圖 4-2-04，作者繪製

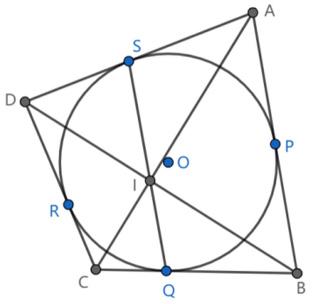


圖 4-2-05，作者繪製

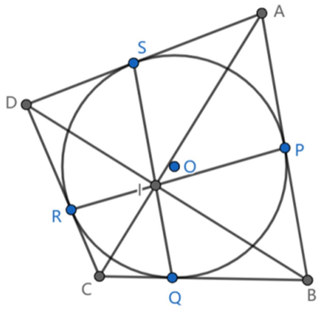


圖 4-2-06，作者繪製

□

我們把上面的定理重新敘述，由三角形面積公式及兩次三線共點性質得知圓外切四邊形 $ABCD$ 之對角線及切點四邊形 $PQRS$ 之對角線四線共點。而在 Brianchon **定理**中提到**圓外切六邊形的三條對角線共交點**，此結果也是 Brianchon 定理中由六邊形退化到四邊形的情形。

2. 共線的性質

而與 Brianchon 定理有對偶性質的 Pascal **定理**提到，**圓錐曲線的內接六邊形其三條對邊的交點共線**，由此定理與文獻 [8] 中的結論可得到：

> 【定理 1】（作者不明，[8]）
>
> 圓外切四邊形 $ABCD$ 與圓內接四邊形 $PQRS$，此兩個四邊形邊長的延伸共交於四點，則此四點共線（如下圖 4-2-07）。

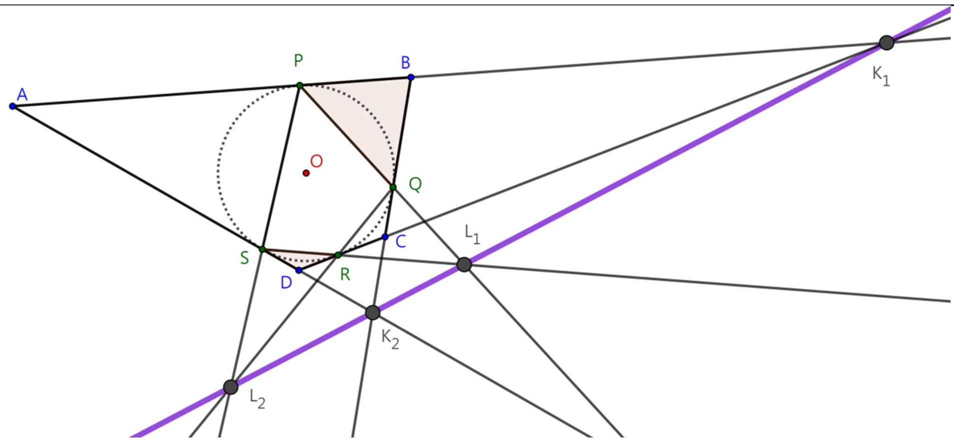


圖 4-2-07，作者繪製

【證明】

令 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 交於點 K_1 ；$\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 交於點 K_2 ；

$\overline{PQ}$ 、$\overline{SR}$ 交於點 L_1 ；$\overline{PS}$ 、$\overline{QR}$ 交於點 L_2 。

Desargues 定理：

若三直線 Aa 、Bb 、Cc 共點，則 $AB\cap ab$ 、$AC\cap ac$ 、$BC\cap bc$ 三點共線。

由上述的 Desargues 定理可知 $\Delta BPQ, \Delta DSR$ 中，$\overline{BD}$ 、$\overline{PS}$ 、$\overline{RQ}$ 交於一點 L_2 ，

則 K_1 、K_2 、L_2 共線；

同理，在 $\Delta ASP, \Delta CRQ$ 中，$\overline{AC}$ 、$\overline{PQ}$ 、$\overline{SR}$ 交於一點 L_1 ，則 K_1 、K_2 、L_1 共線。

故 K_1 、K_2 、L_1 、L_2 四點共線。

□

（三）圓外切四邊形與圓內切點四邊形的面積

在文獻 [5] 中提到圓外切四邊形 $ABCD$（如下圖 4-2-08），若其內切圓之半徑 r，四個頂點所對應的圓心角分別為 α 、β 、γ 、δ，則四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{r^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}$；而四個切點 P、Q、R、S 所形成之四邊形 $PQRS$（如下圖 4-2-09）面積為 $2r^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$ 。

由於 [5] 中的四邊形面積是利用圓心角來表示，後面的討論中，我們則利用頂點的角度來討論面積，進而探討圓外切四邊形與切點四邊形的面積比。

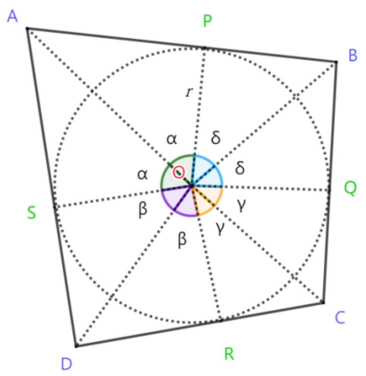


圖 4-2-08，作者繪製

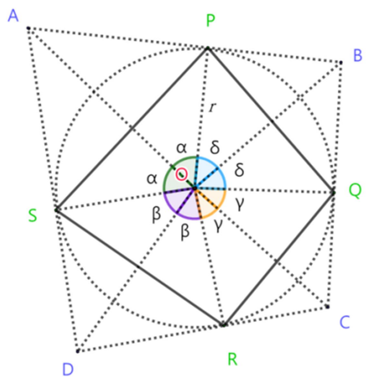


圖 4-2-09，作者繪製

三、研究過程

首先本篇作品所探討的內切圓相關性質是在『**凸多邊形**』的條件下所得到的一些結論。在前面文獻探討中可知，文獻 [5] 是由多邊形各邊長的分段組合所形成之聯立方程式，利用<u>高斯消去法</u>的解 去探討內切圓存在的條件；而我們反過來討論，若已知圓的存在，由圓的切線所形成的多邊形，來探討在多邊形中，內切圓存在的條件。

（一）內切圓的成立條件

1. 邊角關係

(1) 偶數多邊形（以四邊形為例，如下圖4-3-01。）

已知有一半徑 r 的圓存在，由 4 條切線形成任意四邊形 $ABCD$，

而其切點形成四邊形 $PQRS$。

令 $\ell_1=\overline{AP}=\overline{AS}$、$\ell_2=\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\ell_3=\overline{CQ}=\overline{CR}$、$\ell_4=\overline{DR}=\overline{DS}$，

今取圖 4-3-01 中的 ΔAOP 如下圖 4-3-02，則 $\tan\frac{\angle A}{2}=\frac{r}{\ell_1}\Rightarrow r=\ell_1\tan\frac{\angle A}{2}$

同理可得 $r=\ell_1\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\tan\frac{\angle D}{2}$

因此，滿足 $\ell_1\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\tan\frac{\angle D}{2}$ 的四邊形必有內切圓。

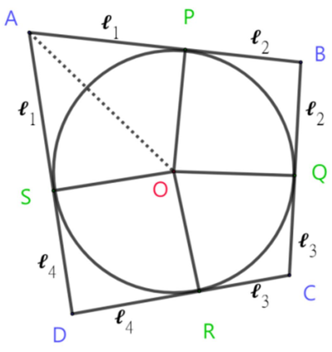


圖 4-3-01，作者繪製

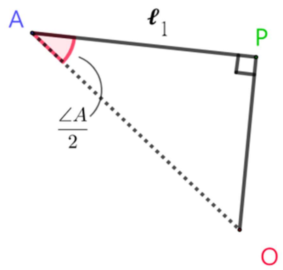


圖 4-3-02，作者繪製

因此，整理上面的結論可得到下面的性質：

【性質 1】

設有一半徑為 r 的圓，任取四條相異切線形成四邊形 $ABCD$，其切點形成四邊形 $PQRS$。若 $\ell_1=\overline{AP}=\overline{AS}$、$\ell_2=\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\ell_3=\overline{CQ}=\overline{CR}$、$\ell_4=\overline{DR}=\overline{DS}$，其中 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 為各頂點的切線段長，如圖 4-3-01 所示，則 $\ell_1\cdot\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{\angle D}{2}=r$。

(2) 奇數多邊形（以五邊形為例）

仿上面【性質1】的方法，可得到五邊形亦有相同的性質：

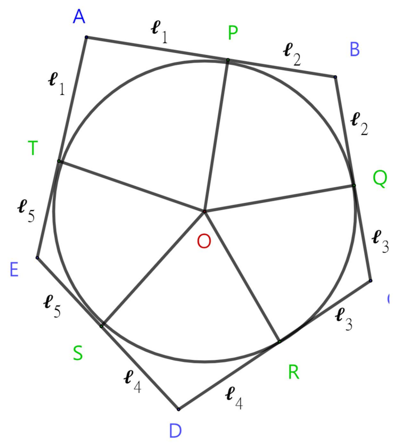


圖 4-3-03，作者繪製

【性質2】

已知有一半徑為 r 的圓，任取五條相異切線形成五邊形 $ABCDE$，其切點形成五邊形 $PQRST$，若 $\ell_1=\overline{AP}=\overline{AT}$、$\ell_2=\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\ell_3=\overline{CQ}=\overline{CR}$、$\ell_4=\overline{DR}=\overline{DS}$、$\ell_5=\overline{ES}=\overline{ET}$，其中 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 為各頂點的切線段長，如右圖 4-3-03 所示，則 $\ell_1\cdot\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{\angle D}{2}=\ell_5\cdot\tan\frac{\angle E}{2}=r$

【證明】

設五邊形 $ABCDE$ 內角平分線接交於 O 點，

則點 O 到各邊的距離 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{OS}=\overline{OT}=r$

設 $\angle OAP=\angle OAT=\frac{1}{2}\angle A \Rightarrow \tan\frac{1}{2}\angle A=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{OP}}{\ell_1} \Rightarrow \overline{OP}=\ell_1\times\tan\frac{1}{2}\angle A$

同理可證

$$\overline{OQ}=\ell_2\times\tan\frac{1}{2}\angle B \text{、} \overline{OR}=\ell_3\times\tan\frac{1}{2}\angle C \text{、} \overline{OS}=\ell_4\times\tan\frac{1}{2}\angle D \text{、} \overline{OT}=\ell_5\times\tan\frac{1}{2}\angle E$$

又因 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{OS}=\overline{OT}$，

故 $\ell_1\cdot\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{\angle D}{2}=\ell_5\cdot\tan\frac{\angle E}{2}=r$

□

(3) n 邊形

由上述的【性質1】、【性質2】推導，可衍生至 n 邊形亦有相同類似的結果。

【定理 2】

已知一半徑為 r 的圓，任取 n 條相異切線形成 n 邊形，其切線之交點分別為 A_1、A_2、…、A_n 形成圓外切 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，而 B_1、B_2、…、B_n 為內切圓之切點，

形成圓內接 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$（如下圖 4-3-04）。

若 $\begin{cases}\ell_i=\overline{A_iB_i}=\overline{A_iB_{i-1}}\\ \ell_1=\overline{A_1B_1}=\overline{A_1B_n}\end{cases}$，其中 $i=2,\cdots,n$， 則滿足 $\ell_1\tan\dfrac{\angle A_1}{2}=\ell_2\tan\dfrac{\angle A_2}{2}=...=\ell_n\tan\dfrac{\angle A_n}{2}=r$。

【證明】

仿【性質1】、【性質2】的方法，以及數學歸納法，可得到上述的結論。

□

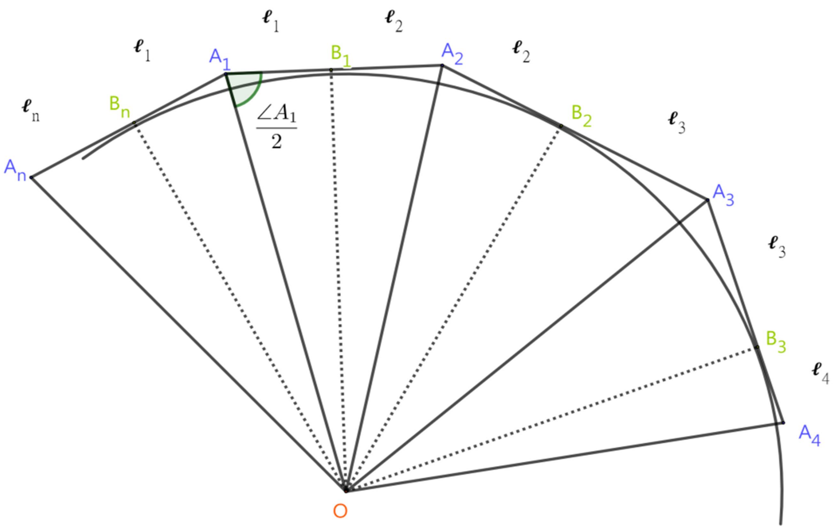


圖 4-3-04，作者繪製

可發現我們所得到的結論與文獻 [5] 的結論是相互呼應的。

2. 邊長關係

接下來我們從另一個角度來探討多邊形之邊長與內切圓的關係。

在國中的數學中，圓外切四邊形有下面的性質：圓外切四邊形兩組對邊長之和相等。

由這個角度進而思考，是否能把前面探討的邊角關係，再去除一個條件來討論：

(1) 偶數多邊形

假設任意四邊形 $ABCD$ 各邊與圓 O 相切於 P, Q, R, S ，則 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ 。

簡單的推導如下：

就四邊形而言，如右圖 4-3-05，由

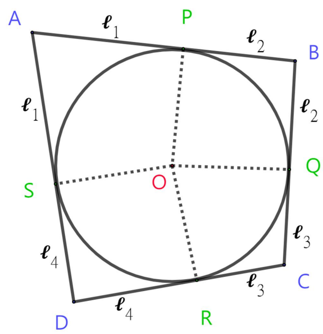


圖 4-3-05，作者繪製

$$\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4=\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4$$

可得 $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}=\overline{AS}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$$

若考慮任意凸六邊形 $ABCDEF$ 如右圖 4-3-06，

內切圓的切點 P, Q, R, S, T, U 六點

仿上面相同的方法可得到

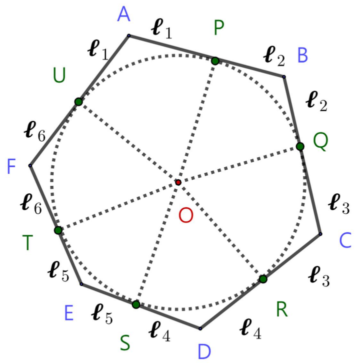


圖 4-3-06，作者繪製

$$\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5+\ell_6=\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5+\ell_6$$

$$\Rightarrow \overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}+\overline{ET}+\overline{FT}$$

$$=\overline{AU}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}+\overline{ES}+\overline{FA}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{EF}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{FA}$$

因此可推得如下結論：

【性質 3】

已知偶數多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ ，其中 $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$ 。

若邊長滿足 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2k-1}A_{2k}}=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2k}A_1}$ 的關係，必然存在內切圓。

(2) 奇數多邊形

若考慮五邊形 $ABCDE$ 如右圖 4-3-07，

內切圓的切點 P, Q, R, S, T 五點，可得到

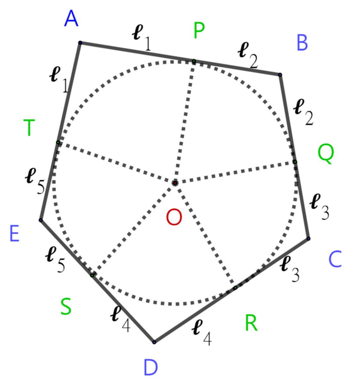


圖 4-3-07，作者繪製

$$\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5=\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5$$

$$\Rightarrow \overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}+\overline{ET}=\overline{AT}+\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}+\overline{ES}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{CD}+\overline{ET}=\overline{BC}+\overline{DE}+\overline{AT}$$

因此可推得仿【性質 3】的結論：

【性質 4】

已知奇數多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ ，其中 $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$ ，

若邊長滿足 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2k-1}A_{2k}}+\overline{A_1B_{2k+1}}=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2k+1}B_{2k+1}}$ 的關係，

其中 B_{2k+1} 為 $\overline{A_1A_{2k+1}}$ 的內切圓切點，則必然存在內切圓。

由【性質 3】、【性質 4】所討論出的結論，我們可以整理成下面的定理：

【定理3】

設有一 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，

若其邊長滿足下列條件：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}\right)-\overline{A_{n+1}A_1}=0$$

其中 A_{n+1} 為 $\overline{A_nA_1}$ 之切點，

則 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 必存在一內切圓。

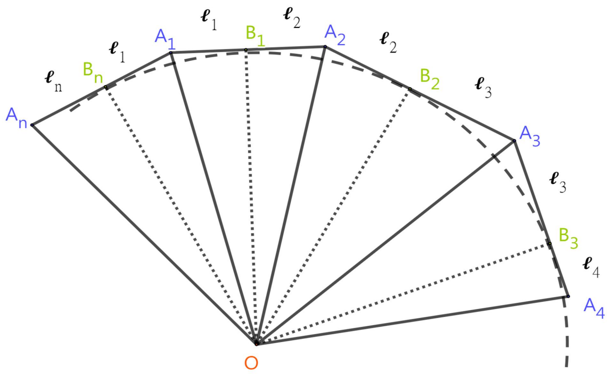


圖 4-3-08，作者繪製

【證明】

仿【性質3】、【性質4】的方法，以及數學歸納法，可得到上述的結論。

□

以 四邊形 $A_1A_2A_3A_4$（$n=4$）為例，邊長滿足下列條件必有內切圓

$$\begin{aligned}&\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}-\overline{A_4A_5}-\overline{A_5A_1}\\&=\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}-(\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_1})\\&=\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}-\overline{A_4A_1}\\&=0\end{aligned}$$

其中 A_5 為 $\overline{A_4A_1}$ 之切點。

另以五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$（$n=5$）為例，邊長滿足下列條件必有內切圓

$$\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}-\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_6}-\overline{A_6A_1}=0$$

其中 A_6 為 $\overline{A_5A_1}$ 之切點。

（二）八點共線

由文獻 [4] 可知，把圓外切六邊形及切點六邊形之頂點連線會有共線的性質，於是我們利用 GeoGebra 嘗試將圓外切四邊形及切點四邊形的頂點連線，以及邊長作延伸，我們發現不管怎麼調整四邊形 $ABCD$ 都會有 $K_1K_2L_1L_2M_1M_2M_3M_4$ 八點共線(下圖 6-2-03 紫色線)，我們在前面定理 1 已證明其中的 $K_1K_2L_1L_2$ 四點共線（如下圖 6-2-01），證明如下。

【定理4】

已知圓外切四邊形 $ABCD$ 及切點四邊形 $PQRS$，作外切四邊形 $ABCD$ 四邊之延長線交於 K_1、K_2 兩點，作切點四邊形 $PQRS$ 四邊之延長線交於 L_1、L_2 兩點，連接外切四邊形 $ABCD$ 及切點四邊形 $PQRS$ 之對角頂點，使 $\overleftrightarrow{AQ}$、$\overleftrightarrow{SC}$ 交於 M_1，$\overleftrightarrow{PC}$、$\overleftrightarrow{AR}$ 交於 M_2，$\overleftrightarrow{BR}$、$\overleftrightarrow{PD}$ 交於 M_3，$\overleftrightarrow{BS}$、$\overleftrightarrow{QD}$ 交於 M_4，發現 $K_1K_2L_1L_2M_1M_2M_3M_4$ 八點始終會共線。如下圖 4-3-09 紫色線。

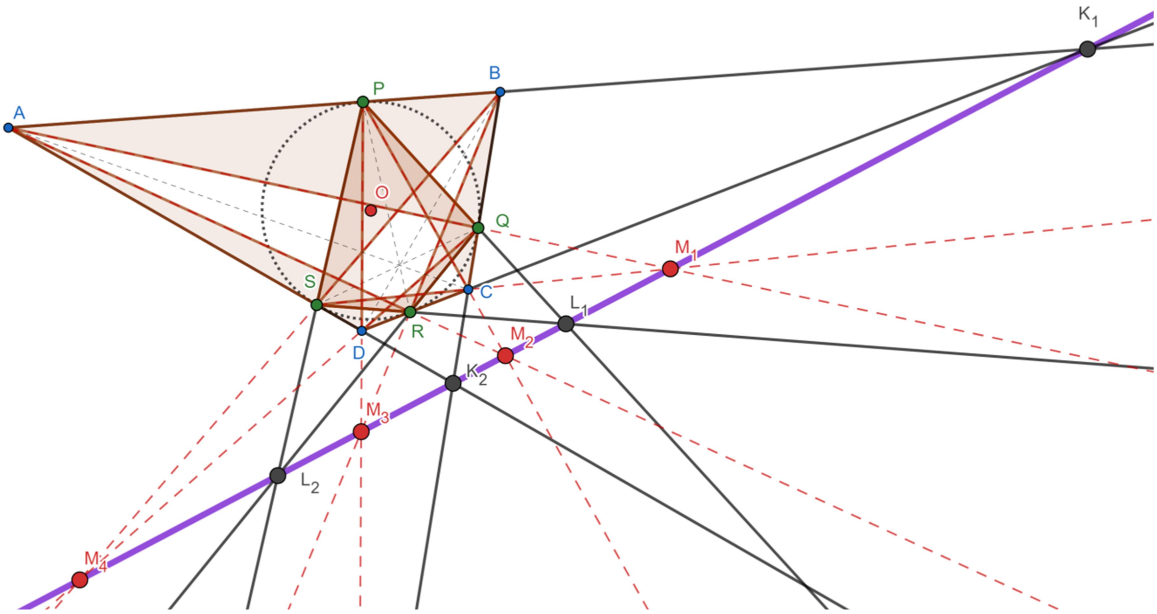


圖 4-3-09

【證明】

在 ΔQCP 與 ΔSAR 中，連接 $\overleftrightarrow{SQ}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{PR}$

由牛頓幾何定理三可知，$\overleftrightarrow{SQ}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{PR}$ 三線交於一點，

作 $\overleftrightarrow{PQ}$、$\overleftrightarrow{SR}$ 交於 L_1，$\overleftrightarrow{PC}$、$\overleftrightarrow{AR}$ 交於 M_2，$\overleftrightarrow{AS}$、$\overleftrightarrow{QC}$ 交於 K_2，

由 Desargues 定理可知，L_1、M_2、K_2 三點共線

同理可證

(1) 由 ΔPQA 與 ΔRSC 邊長延伸線可知，L_1、M_1、K_1 三點共線

(2) 由 ΔQBR 與 ΔSDP 邊長延伸線可知，L_2、M_3、K_2 三點共線

(3) 由 ΔRQP 與 ΔPSB 邊長延伸線可知，L_2、M_4、K_1 三點共線

又由前面定理 1 的共線性質可知，K_1、K_2、L_1、L_2 四點共線，

$\therefore M_1$、M_2、M_3、M_4 與 K_1、K_2、L_1、L_2 八點共線。

□

（三）四邊形之切點分類

在確定了內切圓存在之後，接著我們利用 GeoGebra 繪圖軟體作圖，從切點的角度出發去作出四邊形，並將其依切點及特殊四邊形分類，分類如下：

我們先作一圓（其圓心 O），及切點 P、Q、R、S，過此四點作出切線，可分為內切四邊形包含內切圓圓心 O（如下圖 4-3-10）及不包含圓心 O（如下圖 4-3-11）兩種。

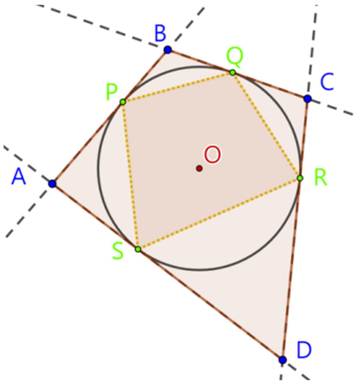


圖 4-3-10，作者繪製

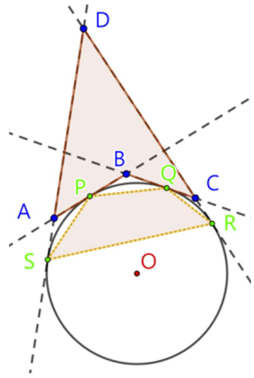


圖 4-3-11，作者繪製

可發現包含圓心之外切四邊形為凸四邊形，而不包含圓心之切線延伸所形成之凹四邊形則不予討論，本篇作品僅就凸四邊形與圓的關係來探討。

接下來我們進一步從特殊的凸四邊形：正方形（圖 4-3-12）、菱形（圖 4-3-13）、箏形（圖 4-3-14）、等腰梯形（圖 4-3-15）去分類，並觀察其外切四邊形與切點四邊形之關係。

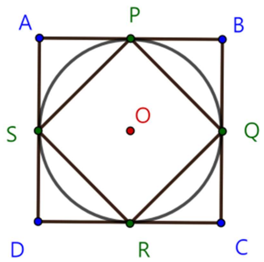


圖 4-3-12，作者繪製

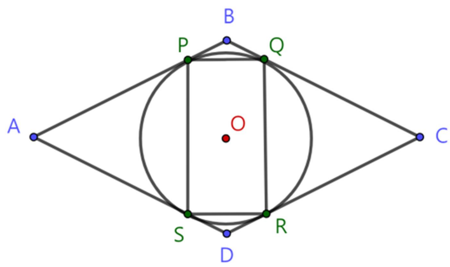


圖 4-3-13，作者繪製

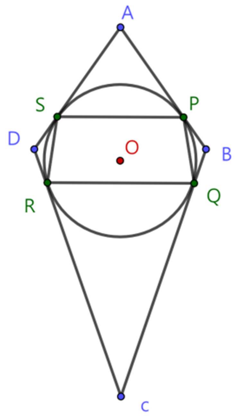


圖 4-3-14，作者繪製

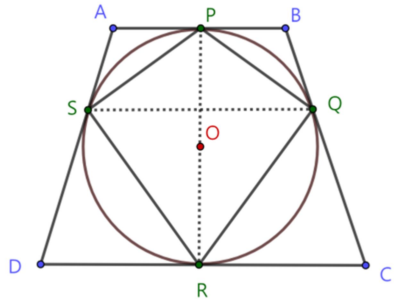


圖 4-3-15，作者繪製

1. 正方形：

從圖 4-3-12 可發現若圓外切四邊形為正方形，則切點四邊形亦為正方形。

2. 菱形：

從圖 4-3-13 可發現若圓外切四邊形為菱形，則切點四邊形為矩形。

【證明】

設 $\angle ABO=\theta_1$，又 $\overline{BD}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線 $\Rightarrow \angle PBO=\theta_1$

設 $\angle BCO=\theta_2$，又 $\overline{AC}$ 為 $\angle BCD$ 的角平分線 $\Rightarrow \angle DCO=\theta_2$

在四邊形 $PBCR$ 中

$\because \angle BPR=\angle PRC=90^\circ \quad \therefore \overline{PB}//\overline{RC} \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1+2\theta_2=180^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_1+\theta_2=90^\circ$

$\therefore \angle BOC=180^\circ-90^\circ=90^\circ \Rightarrow \angle BOC=\angle DOC=90^\circ$

$$\because \begin{cases} \angle BOC=\angle DOC=90^\circ \\ \angle BCO=\angle DCO=\theta_2 \\ \quad \overline{OC}=\overline{OC} \end{cases} \qquad \therefore\ \Delta BOC\cong\Delta DOC\ (AAS)$$

同理可證，$\Delta BOC\cong\Delta DOC\cong\Delta BOA\cong\Delta DOA$

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AB}=\overline{AD} \quad \Rightarrow$ 四邊形 $ABCD$ 為菱形

□

3. 箏形：

從圖 4-3-14 可發現若圓外切四邊形為箏形，則切點四邊形為等腰梯形。

【證明】

以 O 為圓心，r 為半徑做一圓，並於圓外切一箏形 $ABCD$

設切點為 P、Q、R、S，並連接 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{SP}$ 為圓內接四邊形

(1) Check $\overline{PS}//\overline{BD}//\overline{QR}$

$\because$ P、S 為切點 $\therefore$ $\angle APO=\angle ASO=90^\circ$ $\Rightarrow$ ΔAPO、ΔASO 為直角Δ

又 $\overline{AO}=\overline{AO}$、$\overline{AP}=\overline{AQ}$ (切線線段等長) $\Rightarrow$ $\Delta APO\cong\Delta ASO(RHS)$

$\because$ $\overline{AP}=\overline{AS}$、$\overline{OP}=\overline{OS}$

$\therefore$ 四邊形 $APOS$ 為箏形 $\Rightarrow$ $\overline{PS}\perp\overline{AO}$ (對角線互相垂直)

取 $\overline{PS}$ 之中點 M，$\overline{BD}$ 之中點 N

$\Rightarrow$ $\angle AMS=90^\circ=\angle AND$ $\Rightarrow$ $\overline{PS}//\overline{BD}$ (同位角相等)

同理，四邊形 $OQCR$ 亦為箏形 $\Rightarrow$ $\overline{QR}//\overline{BD}//\overline{PS}$ $\Rightarrow$ $\overline{QR}//\overline{PS}$

(2) Check $\overline{PQ}=\overline{SR}$

在四邊形 $OSDR$ 中，已知 $\overline{DS}=\overline{DR}$ (切線線段等長)，

又四邊形 $ABCD$ 為箏形左右對稱 $\Rightarrow$ $\overline{DS}=\overline{DR}=\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\angle ABCD=\angle ADC$

$\therefore\Delta PBQ\cong\Delta SDR\ (SAS)$ $\Rightarrow$ $\overline{PQ}=\overline{SR}$

由 (1)、(2) 可知，四邊形 $PQRS$ 為等腰梯形。

□

4. 等腰梯形：

從圖 4-3-15 可發現若圓外切四邊形為等腰梯形，則切點四邊形為箏形。

【證明】

作一等腰梯形 $ABCD$ 及其內切圓，切點為 P、Q、R、S，

連接 P、Q、R、S 四點，使四邊形 $PQRS$ 為切點四邊形，並連接 $\overline{PR}$、$\overline{SQ}$

(1) Check $\overline{PQ}=\overline{PS}$

連接 $\overline{OQ}=\overline{OS}$，四邊形 $OPBQ$ 及四邊形 $OPAS$ 中，

已知 $\overline{BP}=\overline{BQ}$ 、 $\overline{AP}=\overline{AS}$ (切線線段等長)

又四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形且左右對稱 $\Rightarrow$ $\overline{BP}=\overline{BQ}=\overline{AP}=\overline{AS}$ 、 $\angle A=\angle B$

$\therefore\ \Delta SAP\cong\Delta BDQ\ (SAS)\ \Rightarrow \overline{PQ}=\overline{PS}$

(2) 同理，在四邊形 $OSDR$ 中，$\overline{DS}=\overline{DR}=\overline{CR}=\overline{CQ}$ 、 $\angle C=\angle D$

$\therefore\ \Delta SDR\cong\Delta QCR\ (SAS)\ \Rightarrow \overline{SR}=\overline{RQ}$

由 (1)、(2) 可知，四邊形 $PQRS$ 為箏形。

□

（四）圓外切四邊形、切點四邊形的面積

在文獻 [5] 中，是利用圓心角來表示圓外切四邊形與切點四邊形的面積，我們反過來利用四邊形的頂點與內切圓半徑來表示它們的面積。

【定理 5】

在平面上找任意點 O，以 O 為圓心，r 為半徑做一圓，於圓上找任意四點 P、Q、R、S 並作過此四點與圓的切線，切線相交於 A、B、C、D 四點（如右圖 4-3-16），則四邊形 $ABCD$ 的面積為

$$\frac{r^2\sin\left(\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\frac{\angle A+\angle D}{2}\right)}{\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\sin\frac{\angle D}{2}}$$

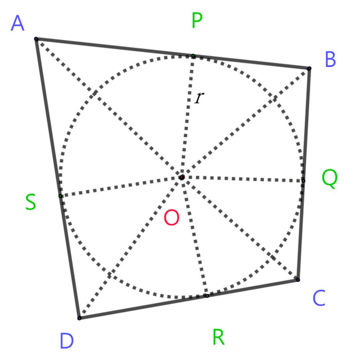


圖 4-3-16，作者繪製

【證明】

設 $\angle SOP=180°-\angle A$ 、 $\angle POQ=180°-\angle B$ 、 $\angle QOR=180°-\angle C$ 、 $\angle ROS=180°-\angle D$

則 $\angle AOP=\angle AOS=90°-\dfrac{\angle A}{2}$ 、 $\angle BOP=\angle BOQ=90°-\dfrac{\angle B}{2}$ 、

$\angle COQ=\angle COR=90°-\dfrac{\angle C}{2}$ 、 $\angle DOR=\angle DOS=90°-\dfrac{\angle D}{2}$

文獻 [5] 提到外切四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{r^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}$，

其中 α、β、γ、δ 為 A、B、C、D 四個頂點所對應的圓心角。

$$\text{四邊形 } ABCD \text{ 面積} = \frac{r^2\sin\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle B}{2}\right)\sin\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)\sin\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle D}{2}\right)}{\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\sin\frac{\angle D}{2}}$$

$$=\frac{r^2\sin\left(\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\frac{\angle A+\angle D}{2}\right)}{\sin\frac{\angle A}{2}\sin\frac{\angle B}{2}\sin\frac{\angle C}{2}\sin\frac{\angle D}{2}}$$

□

【定理 6】

連接四邊形 $ABCD$ 內切圓的切點 $PQRS$，（如下圖 4-3-17），

則四邊形 $PQRS$ 的面積為 $2r^2\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle D}{2}\right)$

【證明】

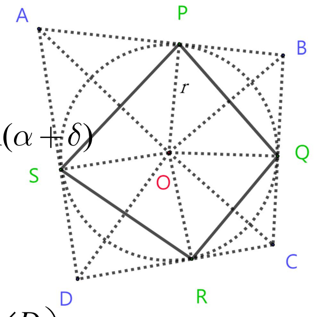


圖 4-3-17，作者繪製

文獻 [5] 提到切點四邊形 $PQRS$ 面積為 $2r^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$

故四邊形 $PQRS$ 面積

$$=2r^2\sin\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle B}{2}\right)\sin\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}\right)\sin\left(180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle D}{2}\right)$$

$$=2r^2\sin\left(\frac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\frac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\frac{\angle A+\angle D}{2}\right)$$

□

由定理 3、4 觀察可知，於是我們求得兩面積之比值為

$$\frac{\text{四邊形 } ABCD \text{ 面積}}{\text{四邊形 } PQRS \text{ 面積}}$$

$$=\frac{\dfrac{r^2\sin\left(180^\circ-\dfrac{\angle A}{2}-\dfrac{\angle B}{2}\right)\sin\left(180^\circ-\dfrac{\angle A}{2}-\dfrac{\angle C}{2}\right)\sin\left(180^\circ-\dfrac{\angle A}{2}-\dfrac{\angle D}{2}\right)}{\sin\dfrac{\angle A}{2}\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}\sin\dfrac{\angle D}{2}}}{2r^2\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle D}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sin\dfrac{\angle A}{2}\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}\sin\dfrac{\angle D}{2}}$$

（五）圓外切四邊形、切點四邊形的面積比與周長比

討論完（三）特殊四邊形的切點分類以及（四）圓外切四邊形、切點四邊形的面積後，接著我們依照這些條件去探討圓外切四邊形及切點四邊形的面積比與周長比關係，研究如下：

1. 正方形

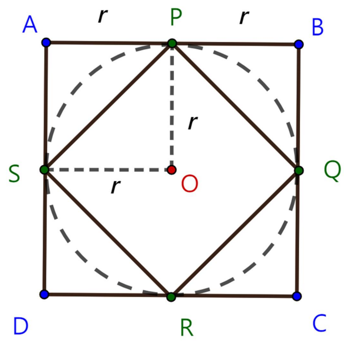


圖 4-3-18，作者繪製

作正方形 $ABCD$，連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$，交於點 O 並作一內切圓，設切點為 P、Q、R、S，並以 P、Q、R、S 為頂點，作一圓內接四邊形，且圓的半徑為 $r=\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{OS}$，如上圖 4-3-18。

又 $ABCD$ 為正方形

$\therefore \overline{AP}=\overline{PB}=\overline{BQ}=\overline{QC}=\overline{CR}=\overline{RD}=\overline{DS}=\overline{SA}=r$

在正方形 $ABCD$ 中，邊長 $=\overline{AB}=2r$ $\Rightarrow$ 正方形 $ABCD$ 面積 $=2r\times 2r=4r^2$

(1) 面積比：

$\because \Delta PBQ$ 、ΔPAS 為等腰直角三角形

$\therefore \angle APS=\angle BPQ=45^\circ \Rightarrow \angle SPQ=180^\circ-\left(45^\circ\times 2\right)=90^\circ$

同理可證，$\angle PQR = \angle QRS = \angle RSP = 90°$

因此可知，四邊形 $PQRS$ 為正方形，且 $PQRS$ 面積為$\left(\sqrt{2}r\right)^2 = 2r^2$

$\Rightarrow$ 正方形 $ABCD$ 面積 $=$ $2 \times$ 正方形 $PQRS$ 面積

$\Rightarrow$ 正方形 $ABCD$ 面積：正方形 $PQRS$ 面積 $=1:2$

(2) 周長比：

在ΔPBQ 中，$\because \overline{PB} = \overline{BQ} = r$ 、$\angle BPQ = 90°$

$\therefore$ ΔPBQ 為等腰直角三角形 $\Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$ ，

同理 $\overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP} = \sqrt{2}r$

$\Rightarrow$ 正方形 $ABCD$ 周長 $=$ $\sqrt{2} \times$ 正方形 $PQRS$ 周長

$\Rightarrow$ 正方形 $ABCD$ 周長：正方形 $PQRS$ 周長 $=1:\sqrt{2}$

2. 菱形

作菱形 $ABCD$，連接對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$，交於點 O 並作一內切圓，設切點為 P、Q、R、S，連接 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{SP}$ 為切點四邊形 $PQRS$，如右圖 4-3-19。

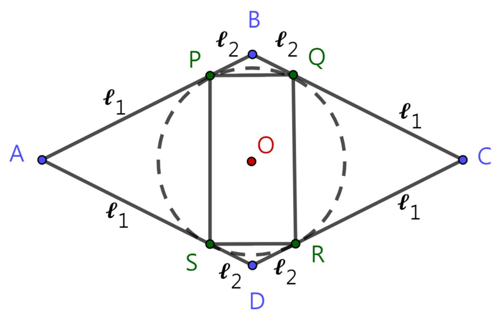


圖 4-3-19，作者繪製

設 $\overline{AP} = \overline{AS} = \overline{CQ} = \overline{CR} = \ell_1$ 、$\overline{BP} = \overline{BQ} = \overline{DR} = \overline{DS} = \ell_2$ ，

(1) 面積比：

菱形 $ABCD$ 面積$=4 \times \Delta AOB$ 面積$= 4 \times \dfrac{r\left(\ell_1 + \ell_2\right)}{2} = 2r\left(\ell_1 + \ell_2\right)$ 、

矩形 $PQRS$ 面積$=\frac{1}{2}r^2\sin\left(180°-\angle A\right)\times 2 + \frac{1}{2}r^2\sin\left(180°-\angle B\right)\times 2$

$$=r^2(\sin\angle A+\sin\angle B)$$

$\Rightarrow$ 菱形 $ABCD$ 面積：矩形 $PQRS$ 面積 $= 2r\left(\ell_1+\ell_2\right)$ ： $r^2\left(\sin\angle A+\sin\angle B\right)$

$$= 2\left(\ell_1+\ell_2\right) : r\left(\sin\angle A+\sin\angle B\right)$$

(2) 周長比：

菱形 $ABCD$ 周長$=4\left(\ell_1+\ell_2\right)$，

矩形 $PQRS$ 周長$=r\sin\left(90°-\frac{\angle A}{2}\right)\times 4+r\sin\left(90°-\frac{\angle B}{2}\right)\times 4=4r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}\right)$

$\Rightarrow$ 菱形 $ABCD$ 周長：矩形 $PQRS$ 周長

$$= 4\left(\ell_1+\ell_2\right) : 4r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}\right)$$

$$= \left(\ell_1+\ell_2\right) : r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}\right)$$

3. 箏形

以 O 為圓心，r 為半徑做一圓，並於圓外切一箏形 $ABCD$。設切點為 P、Q、R、S，並連接 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{SP}$ 為圓內接四邊形，如右圖 4-3-20。

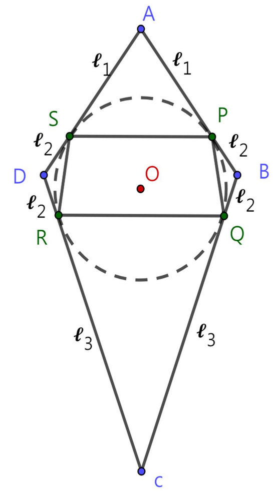


圖 4-3-20，作者繪製

設 $\overline{AP}=\overline{AS}=\ell_1$、$\overline{BP}=\overline{BQ}=\overline{DR}=\overline{DS}=\ell_2$、$\overline{CQ}=\overline{CR}=\ell_3$

(1) 面積比：

箏形 $ABCD$ 面積$=\frac{1}{2}\left(\ell_1+\ell_2\right)^2\sin\angle A+\frac{1}{2}\left(\ell_2+\ell_3\right)^2\sin\angle C$

等腰梯形 $PQRS$ 面積

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\left(180°-\angle A\right)+2\times\frac{1}{2}r^2\sin\left(180°-\angle B\right)+\frac{1}{2}r^2\sin\left(180°-\angle C\right)$$

$$=\frac{1}{2}r^2\left(\sin\angle A+2\sin\angle B+\sin\angle C\right)$$

箏形 $ABCD$ 面積：等腰梯形 $PQRS$ 面積

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\ell_1+\ell_2\right)^2\sin\angle A+\left(\ell_2+\ell_3\right)^2\sin\angle C\right]:\frac{1}{2}r^2\left(\sin\angle A+2\sin\angle B+\sin\angle C\right)$$

$$=\left(\ell_1+\ell_2\right)^2\sin\angle A+\left(\ell_2+\ell_3\right)^2\sin\angle C:r^2\left(\sin\angle A+2\sin\angle B+\sin\angle C\right)$$

(2) 周長比：

箏形 $ABCD$ 周長 $=2\left(\ell_1+2\ell_2+\ell_3\right)$，

在等腰梯形 $PQRS$ 中，

$$\overline{SP}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\left(180^\circ-\angle A\right)=2r^2\left(1+\cos\angle A\right)=4r^2\left(\frac{1+\cos\angle A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \overline{SP}=2r\cos\frac{\angle A}{2}$$

同理可得 $\overline{PQ}=\overline{SR}=2r\cos\frac{\angle B}{2}$ 、$\overline{QR}=2r\cos\frac{\angle C}{2}$ ，

等腰梯形 $PQRS$ 周長 $=2r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+2\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}\right)$

$\Rightarrow$ 箏形 $ABCD$ 周長：等腰梯形 $PQRS$ 周長

$$=2\left(\ell_1+2\ell_2+\ell_3\right):2r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+2\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}\right)$$

$$=\left(\ell_1+2\ell_2+\ell_3\right):r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+2\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}\right)$$

4. 梯形

前面在探討切點四邊形的分類時，我們是以圓外切等腰梯形則其內接四邊形為箏形來做討論。由於等腰梯形為一般梯形的特例，因此接下來我們就以一般梯形來探討。

以 O 為圓心，r 為半徑作一圓，作一外切梯形 $ABCD$，且 $\overline{AB}//\overline{CD}$，圓 O 外切梯形 $ABCD$ 於

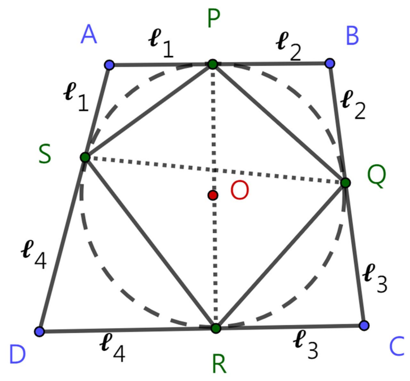


圖 4-3-21，作者繪製

P、Q、R、S 四點，連接 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RS}$、$\overline{SP}$ 為四邊形 $PQRS$，如上圖 4-3-21。

設 $\overline{AP}=\overline{AS}=\ell_1$、$\overline{BP}=\overline{BQ}=\ell_2$、$\overline{CQ}=\overline{CR}=\ell_3$、$\overline{DR}=\overline{DS}=\ell_4$

(1) 面積比：

梯形 $ABCD$ 面積 $=\dfrac{2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\cdot r}{2}=r(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)$

四邊形 $PQRS$ 面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\left[\sin\left(180°-\angle A\right)+\sin\angle A+\sin\left(180°-\angle B\right)+\sin\angle B\right]$

$$=r^2\sin\angle A+r^2\sin\angle B$$

$$=r^2(\sin\angle A+\sin\angle B)$$

梯形 $ABCD$ 面積：四邊形 $PQRS$ 面積 $=r\left(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4\right):r^2\left(\sin\angle A+\sin\angle B\right)$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):r(\sin\angle A+\sin\angle B)$$

(2) 周長比：

梯形 $ABCD$ 周長 $=2\left(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4\right)$

在四邊形 $PQRS$ 中，$\overline{PS}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\left(180°-\angle A\right)=2r^2\left(1+\cos\angle A\right)$

$$\Rightarrow\ \overline{PS}=2r\cos\frac{\angle A}{2}$$

同理可得 $\overline{SR}=2r\sin\dfrac{\angle A}{2}$、$\overline{RQ}=2r\sin\dfrac{\angle B}{2}$、$\overline{QP}=2r\cos\dfrac{\angle B}{2}$，

四邊形 $PQRS$ 的周長 $=2r\sin\dfrac{\angle A}{2}+2r\sin\dfrac{\angle B}{2}+2r\cos\dfrac{\angle A}{2}+2r\cos\dfrac{\angle B}{2}$

$$=2r\left(\sin\frac{\angle A}{2}+\sin\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}\right)$$

梯形 $ABCD$ 周長：四邊形 $PQRS$ 周長

$$=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):2r(\sin\frac{\angle A}{2}+\sin\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2})$$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):r(\sin\frac{\angle A}{2}+\sin\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2})$$

5. 任意四邊形

在平面上找任意點 O，以 O 為圓心，r 為半徑做一圓，於圓上找任意四點 P、Q、R、S，並作過此四點與圓的切線，切線相交於 A、B、C、D 四點，如右圖 4-3-22。

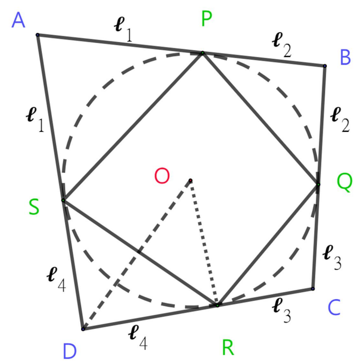


圖 4-3-22，作者繪製

設 $\overline{AP}=\overline{AS}=\ell_1$、$\overline{BP}=\overline{BQ}=\ell_2$、$\overline{CQ}=\overline{CR}=\ell_3$、$\overline{DR}=\overline{DS}=\ell_4$

(1) 面積比：

四邊形 $ABCD$ 面積 $=\dfrac{2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)\times r}{2}=r(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)$

四邊形 $PQRS$ 面積 $=\Delta OPQ+\Delta OQR+\Delta ORS+\Delta OSP$

$$=\frac{1}{2}r^2(\sin\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)$$

四邊形 $ABCD$ 面積：四邊形 $PQRS$ 面積

$$= r(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4) : \frac{1}{2}r^2(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D)$$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4) : \frac{1}{2}r(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D)$$

(2) 周長比：

四邊形 $ABCD$ 周長 $=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4)$

在四邊形 $PQRS$ 中，

$$\overline{RS}^2=r^2+r^2-2r^2\cos(180°-\angle D)=2r^2(1+\cos\angle D)\Rightarrow\overline{RS}=2r\cos\frac{\angle D}{2}$$

同理可得 $\overline{QR}=2r\cos\dfrac{\angle C}{2}$、$\overline{PQ}=2r\cos\dfrac{\angle B}{2}$、$\overline{SP}=2r\cos\dfrac{\angle A}{2}$

四邊形 $PQRS$ 周長 $=2r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}+\cos\frac{\angle D}{2}\right)$

四邊形 $ABCD$ 周長：四邊形 $PQRS$ 周長

$$=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):2r(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}+\cos\frac{\angle D}{2})$$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):r(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}+\cos\frac{\angle D}{2})$$

另連接 $\overline{OD}$，由 ΔODS 可知 $\overline{RS}$ 為 ΔODS 之高的兩倍

$$\Rightarrow \overline{RS}=2\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}$$

同理可得 $\overline{QR}=2\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}$、$\overline{PQ}=2\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}$、$\overline{SP}=2\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}$

四邊形 $PQRS$ 周長 $=2\left(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}\right)$

四邊形 $ABCD$ 周長：四邊形 $PQRS$ 周長

$$=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):2(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2})$$

$$=\left(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4\right):\left(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}\right)$$

統整完四邊形後，接著我們討論五邊形以及 n 邊形是否也會有一樣的性質。

6. 任意五邊形

在平面上找任意點 O，以 O 為圓心，r 為半徑做一圓，於圓上找任意五點 P、Q、R、S、T，並作過五點與圓的切線，切線相交於 A、B、C、D、E 五點，如右 4-3-23。

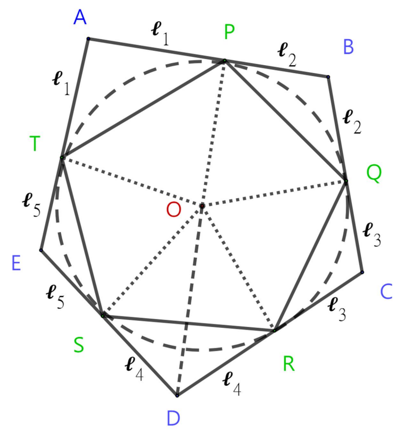


圖 4-3-23，作者繪製

設 $\overline{AP}=\overline{AT}=\ell_1$、$\overline{BP}=\overline{BQ}=\ell_2$、$\overline{CQ}=\overline{CR}=\ell_3$、 $\overline{DR}=\overline{DS}=\ell_4$、$\overline{ES}=\overline{ET}=\ell_5$

(1) 面積比：

五邊形 $ABCDE$ 面積$=\dfrac{2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5)\times r}{2}=r(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5)$

五邊形 $PQRST$ 面積

$$=\Delta OTP+\Delta OPQ+\Delta OQR+\Delta ORS+\Delta OST$$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-\angle A)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-\angle B)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-\angle C)$$
$$+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-\angle D)+\frac{1}{2}r^2\sin(180^\circ-\angle E)$$

$$=\frac{1}{2}r^2(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D+\sin\angle E)$$

五邊形 $ABCDE$ 面積：五邊形 $PQRST$ 面積

$$=r(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5)\ :\ \frac{1}{2}r^2(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D+\sin\angle E)$$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5)\ :\ \frac{1}{2}r(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D+\sin\angle E)$$

(2) 周長比：

五邊形 $ABCDE$ 周長$=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5)$

在五邊形 $PQRST$ 中，$\overline{TP}^2=r^2+r^2-2r^2\cos(180^\circ-\angle A)=2r^2(1+\cos\angle A)$

$$\Rightarrow\ \overline{TP}=2r\cos\frac{\angle A}{2}$$

同理可得 $\overline{PQ}=2r\cos\dfrac{\angle B}{2}$、$\overline{QR}=2r\cos\dfrac{\angle C}{2}$、$\overline{RS}=2r\cos\dfrac{\angle D}{2}$、$\overline{ST}=2r\cos\dfrac{\angle E}{2}$

五邊形 $PQRST$ 周長$=2r\left(\cos\dfrac{\angle A}{2}+\cos\dfrac{\angle B}{2}+\cos\dfrac{\angle C}{2}+\cos\dfrac{\angle D}{2}+\cos\dfrac{\angle E}{2}\right)$

五邊形 $ABCDE$ 周長：五邊形 $PQRST$ 周長

$$=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5):2r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}+\cos\frac{\angle D}{2}+\cos\frac{\angle E}{2}\right)$$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5):r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}+\cos\frac{\angle D}{2}+\cos\frac{\angle E}{2}\right)$$

另外連接 $\overline{OD}$，由 ΔODR 可知 $\overline{RS}$ 為 ΔODR 之高的兩倍 $\Rightarrow \overline{RS}=2\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}$

同理可得 $\overline{ST}=2\ell_5\sin\frac{\angle E}{2}$、$\overline{QR}=2\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}$、$\overline{PQ}=2\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}$、$\overline{TP}=2\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}$

五邊形 $PQRST$ 周長 $=2\left(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}+\ell_5\sin\frac{\angle E}{2}\right)$

五邊形 $ABCDE$ 周長：五邊形 $PQRST$ 周長

$$=2(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5):2\left(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}+\ell_5\sin\frac{\angle E}{2}\right)$$

$$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5):\left(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}+\ell_5\sin\frac{\angle E}{2}\right)$$

7. n 邊形

n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 有內切圓，內切圓圓心為 O，半徑為 r，切點為 B_1、B_2、…、B_n，而 $B_1B_2\ldots B_n$ 為切點 n 邊形，如右圖 4-3-24。

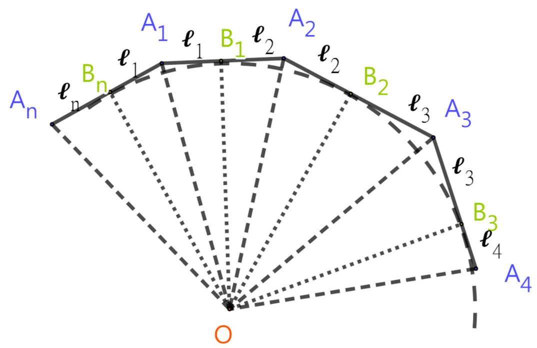


圖 4-3-24，作者繪製

設 $\overline{A_1B_1}=\overline{A_1B_n}=\ell_1$、$\overline{A_2B_1}=\overline{A_2B_2}=\ell_2$、$\overline{A_3B_2}=\overline{A_3B_3}=\ell_3$、⋯、$\overline{A_nB_{n-1}}=\overline{A_nB_n}=\ell_n$

(1) 面積比：

$$\frac{n\text{ 邊形 }A_1A_2\ldots A_n\text{ 面積}}{n\text{ 邊形 }B_1B_2\ldots B_n\text{ 面積}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\ell_1+\ell_2\right)+\left(\ell_2+\ell_3\right)+\ldots+\left(\ell_n+\ell_1\right)\right]\times r}{\frac{1}{2}r^2\left[\sin\left(180^\circ-\angle A_1\right)+\sin\left(180^\circ-\angle A_2\right)+\ldots+\sin\left(180^\circ-\angle A_n\right)\right]}$$

$$=\frac{\left(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n\right)}{\frac{1}{2}r\left(\sin\angle A_1+\sin\angle A_2+\ldots\sin\angle A_n\right)}$$

$$=\frac{2}{r}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\sin\angle A_k}$$

(2) 周長比：

$$\frac{n\text{ 邊形 }A_1A_2\ldots A_n\text{ 周長}}{n\text{ 邊形 }B_1B_2\ldots B_n\text{ 周長}}$$

$$=\frac{2\left(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n\right)}{2r\left(\cos\frac{A_1}{2}+\cos\frac{A_2}{2}+\ldots\cos\frac{A_n}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n\right)}{r\left(\cos\frac{A_1}{2}+\cos\frac{A_2}{2}+\ldots\cos\frac{A_n}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{A_k}{2}}$$

另一種表示法

$$\frac{n\text{ 邊形 }A_1A_2\ldots A_n\text{ 周長}}{n\text{ 邊形 }B_1B_2\ldots B_n\text{ 周長}}$$

$$=\frac{2\left(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n\right)}{2\left(\ell_1\sin\frac{A_1}{2}+\ell_2\sin\frac{A_2}{2}+\ldots+\ell_n\sin\frac{A_n}{2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_n\right)}{\left(\ell_1\sin\frac{A_1}{2}+\ell_2\sin\frac{A_2}{2}+\ldots+\ell_n\sin\frac{A_n}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\ell_k\cdot\sin\frac{A_k}{2}}$$

【定理 7】

已知 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 有一內切圓，其切點為 B_1、B_2、...、B_n，而 $B_1B_2...B_n$ 形成切點 n 邊形，若 $\begin{cases} \overline{A_1B_1}=\overline{A_1B_n}=\ell_1 \\ \overline{A_iB_{i-1}}=\overline{A_iB_i}=\ell_i\text{ , } i=2,\cdots n \end{cases}$，其中 ℓ_1, ℓ_i 為各邊的切線段長，

則 (1) $\dfrac{n\text{ 邊形 } A_1A_2...A_n\text{ 面積}}{n\text{ 邊形 } B_1B_2...B_n\text{ 面積}}=\dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\sin\angle A_k}$

(2) $\dfrac{n\text{ 邊形 } A_1A_2...A_n\text{ 周長}}{n\text{ 邊形 } B_1B_2...B_n\text{ 周長}}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{A_k}{2}}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\ell_k\cdot\sin\dfrac{A_k}{2}}$

伍、研究結果

我們在本篇作品中整理出 6 個定理(定理 2~7)。首先我們歸納出內切圓存在的兩個條件，一是邊角關係 $\ell_1\tan\dfrac{\angle A_1}{2}=\ell_2\tan\dfrac{\angle A_2}{2}=...=\ell_n\tan\dfrac{\angle A_n}{2}=r$（其中 ℓ_i 為各邊切點，定理 2），二是邊長關係$\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}\right)-\overline{A_{n+1}A_1}=0$（其中 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 為各邊的邊長，而點 A_{n+1} 為 $\overline{A_nA_1}$ 之切點，定理 3）。再來是利用四邊形的頂角與內切圓半徑找到外切四邊形的面積

$$\frac{r^2\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle D}{2}\right)}{\sin\dfrac{\angle A}{2}\sin\dfrac{\angle B}{2}\sin\dfrac{\angle C}{2}\sin\dfrac{\angle D}{2}}$$

（定理 5）與切點四邊形的面積 $2r^2\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle B}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle C}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\angle A+\angle D}{2}\right)$（定理 6）。進而探討兩個四邊形之間的關聯性，先從特殊四邊形（正方形 → 菱形 → 箏形 → 等腰梯形）來觀察，延伸到任意四邊形，進而推導原四邊形與切點四邊形的面積與周長之間的關係；再來觀察任意五邊形是否有相同的性質，最後才延伸到 n 邊形的面積比：

$\dfrac{\text{外切 } n\text{ 邊形面積}}{\text{內接 } n\text{ 邊形面積}}=\dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\sin\angle A_k}$ 與 $\dfrac{\text{外切 } n\text{ 邊形周長}}{\text{內接 } n\text{ 邊形周長}}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{A_k}{2}}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\ell_k\cdot\sin\dfrac{A_k}{2}}$（定理

7）。另外我們也得到圓外切四邊形與切點四邊形之各邊長延伸線交點（有四個交點），以及內外兩個四邊形頂點延伸線之交點（亦有四個交點），得到一個此八點共線的性質（定理 4）。

陸、結論與未來展望

在討論的過程中，曾思考過如果把圓外切四邊形及切點四邊形座標化，是否能與我們得到的結果相呼應？我們嘗試將四邊形的一邊貼齊 x 軸（如下圖 6-1-01），並將其他點座標化，進而嘗試計算其面積，雖然沒有得到漂亮的結果，但或許能夠在算式更精簡一些，結果如下：

1. 四邊形 $ABCD$ 面積 $=\frac{1}{2}\left[(b+c)(c+d)\sin\gamma+(a+d)(c+d)\sin\delta-(a+d)(b+c)\sin(\delta+\gamma)\right]$

2. 點 $E\left(\frac{b(a+d)\cos\delta+a\left[(c+d)-(b+c)\cos\gamma\right]}{a+b},\frac{b(a+d)\sin\delta+a(b+c)\sin\gamma}{a+b}\right)$

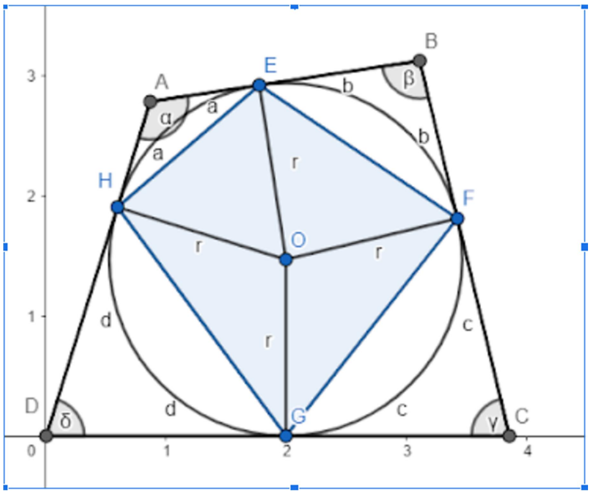


圖 6-1-01，作者繪製

3. $EFGH$ 面積

$$=\frac{1}{2(a+b)}\begin{bmatrix}c\sin\gamma(ad+bd+ac+ad)+d\sin\delta(ac+ad-ad-bd)+bc(a+d)\sin(\delta-\gamma)\\+2ac(b+c)\sin\gamma\cos\gamma-ad(b+c)\sin(\delta+\gamma)\end{bmatrix}$$

或者考慮在單位圓上的條件，或許會有更好的結果。最後，本篇作品是在凸多邊形的條件下進行討論，未來亦可考慮凹多邊形是否有類似的結論？

柒、參考資料及其他

1. 李孟龍，莊耀鈞。*層層疊疊—雙心多邊形面積的一個有趣性質*。中華民國第 56 屆中小學科學展覽會。2016 年 7 月。
2. 陳品銘，王鈞翔。*我們要畫這樣的四邊形*。金門縣第 60 屆科學展覽。2020 年。
3. 宋瑞傑、陳奕勛。*當圓外切多邊形遇上 Brianchon 定理 — Brianchon 定理在多邊形上的探討*。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。2018 年 7 月。
4. 張霈萱、林侑萱、游雅涵。*層出不窮的彩蛋有心跡 — 圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質*。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會。2015 年 7 月。
5. 張騰達、張業叡。*圓外切多邊形之旁心與內切點多邊形性質之研究*。中華民國第 59 屆中小學科學展覽會。2019年7月。
6. 葉懿琦，盧宥妏。*以邊追圓 — 多邊形內切圓形成規律之探討*。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。2021 年 7 月。
7. 牛頓幾何定理三（無日期）。2024/2/29，取自 https://www.bilibili.com/video/BV1Ua4y1W7pK/。
8. 姜很犟。圓外切四邊形的四線共點（無日期）。2024/2/29，取自 https://zhuanlan.zhihu.com/p/395232557?utm_id=0。

【評語】050412

本作品探討多邊形內切圓的相關性質，作者首先給出了多邊形有內切圓的必要條件，但卻誤認為也是充分條件，但其實反例可以如下構造：給定正六邊形，朝對稱軸壓縮，當快接近線段時，會符合對邊長相等卻沒有內切圓的反例。接著作者討論了內切圓相關的共線性質以及面積計算，雖然計算詳實，但都是可以直接計算就得到，建議考慮一些較深入的問題。

作品簡報

內切圓的突發奇想

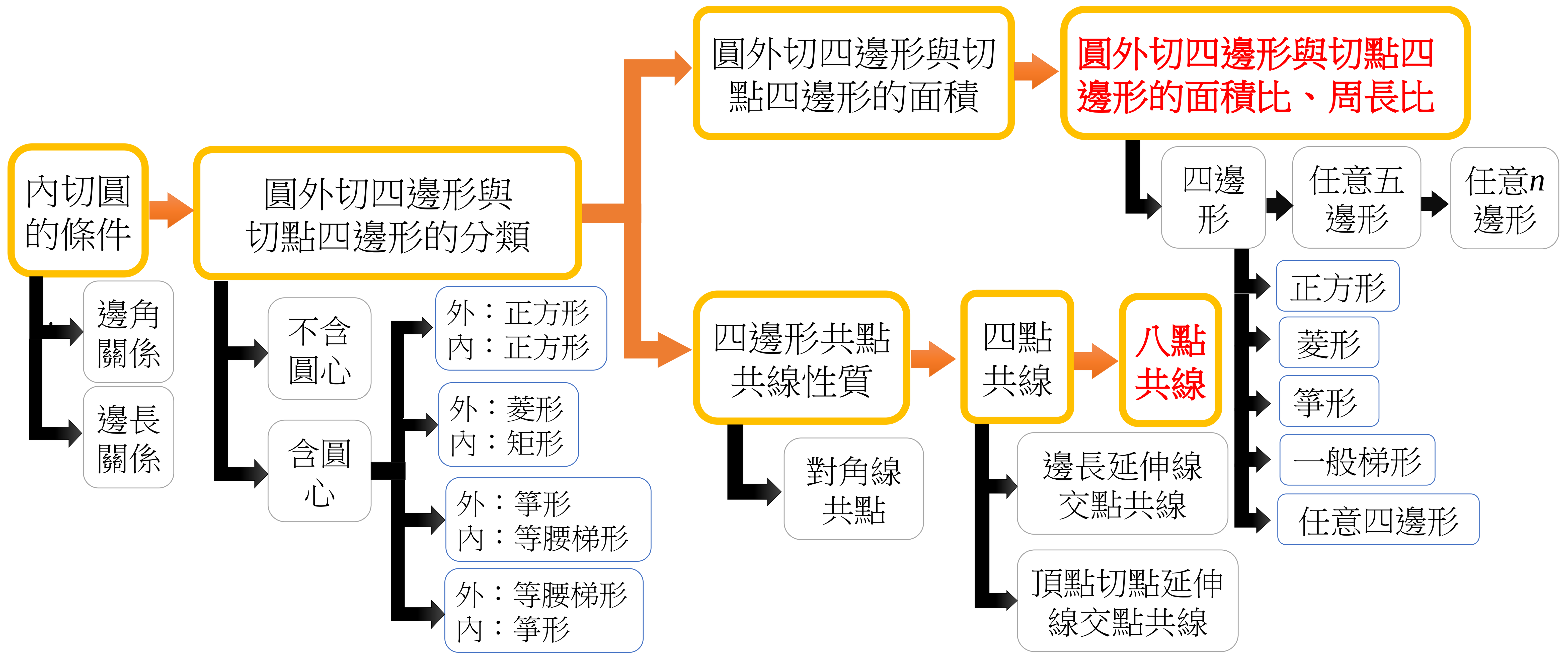
摘　　要

我們對內切圓研究一開始是從四邊形出發再延伸到多邊形，而研究的方向有兩個，其中一個是探討**圓外切多邊形**與圓內接多邊形（即圓與切線交點之**切點多邊形**）之間的關係。首先得到凸多邊形內切圓的成立條件，依據圓外切多邊形的邊角關係、邊長關係，得到不同的結論；接下來對圓外切四邊形與切點四邊形的關係做分類，並討論這兩種四邊形的面積公式後，進而觀察這兩種四邊形的面積與周長比值的關係，最後衍伸至 n 邊形，因而得到凸多邊形之面積與周長比值的關係。另一個方向則是由圓外切四邊形與切點四邊形的對角線交點，以及兩四邊形之邊長延伸線的交點、內外頂點延伸線的交點，去探討其共點共線的關係。

研究目的

1. 利用三角函數簡化內切圓的成立的兩個條件，分別透過邊角關係與邊長關係得到結論。
2. 對圓內切特殊四邊形及圓內接特殊四邊形的關係做分類，進而探討這兩種四邊形的面積。
3. 依據前面得到的兩種四邊形面積，再深入討論這兩種四邊形面積、周長的比值，最後衍伸至n 邊形。
4. 利用 GeoGebra 觀察出圓外切四邊形與內接四邊形邊長延長線、頂點切點延長線的交點關係。

研究架構

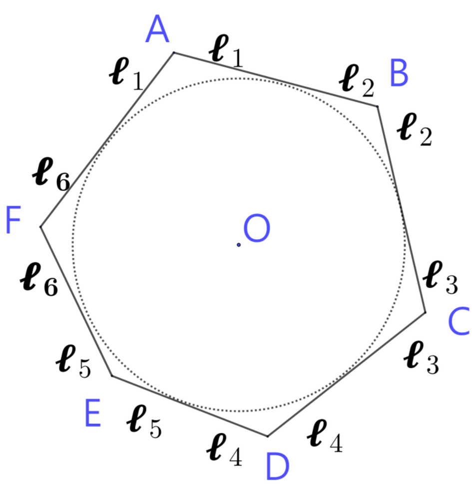


文獻探討

一、內切圓的存在條件

1. 邊角關係

文獻 [6]（以邊追圓， 2021）提到把凸多邊形各邊長分段後，所形成的聯立方程式利用 **高斯消去法** 所得到的結果，做出下面的推論。



圖一，作者繪製

在六邊形 $ABCDEF$ 中，將各邊長之切點分解為兩個線段的和，若每個頂角之半角的正切值與相鄰線段之乘積值（如 $\ell_1 \cdot \tan\frac{A}{2}$）均相等，則此六邊形有『**無限多個內切圓**』。

在**偶數多邊形**中，若各邊長的分組解，透過高斯消去法可得到正實數解，則間隔一邊取邊長和，兩組邊長和必相等，且偶數多邊形在不同內角的組合下有『**無限多個內切圓**』。在**奇數多邊形**中，若各邊長的分組解，透過高斯消去法可得到正實數解，則多邊形在特定的角度條件下有『**一個內切圓**』。

2. 邊長關係

在文獻 [3]（當圓外切多邊形遇上Brianchon 定理 ， 2018）圓外切 n 邊形中，假設 L_p 為第 p 個邊的邊長

(1) 若 n 為奇數，則其邊長關係式為

$$L_{2k-1}+L_{2k+1}+\cdots+L^{-}_{2k+2t-3} = L_{2k+2t-4}+L_{2k+2t-6}+\cdots+L^{+}_{2k-2}$$

(2) 若 n 為偶數，則其邊長關係式為

$$L_1+L_3+\cdots+L_{2k-1} = L_2+L_4+\cdots+L_{2k}$$

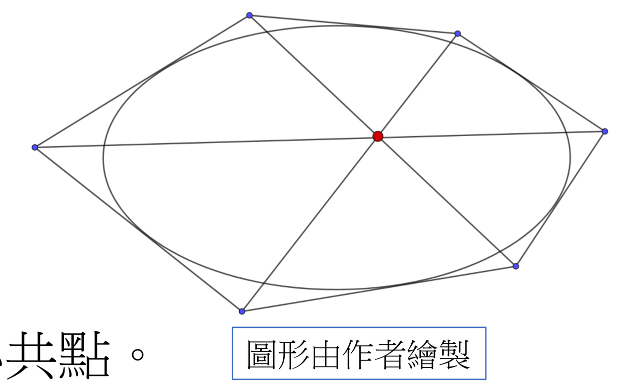
均共有 n 個關係式。（其中$k=1,\cdots,n$；$t=\frac{n+1}{2}$；切點p_{2k-2} 為分割點）

二、共點與共線的性質

1. 共點的性質

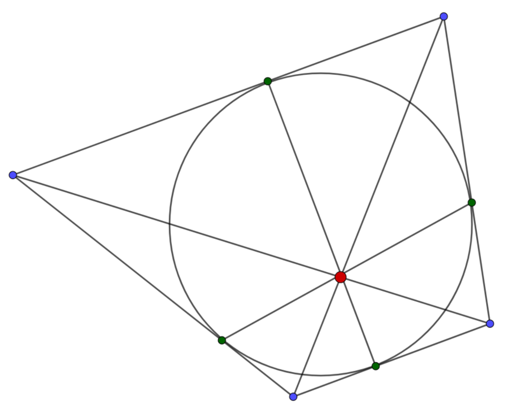
Brianchon 定理：

圓錐曲線外切六邊形三條對角線必共點。



圖形由作者繪製

由 **Brianchon 定理** 的退化情形可以得到一個性質：**圓的外切四邊形的對角線的交點和以切點為頂點的四邊形對角線交點重合。**



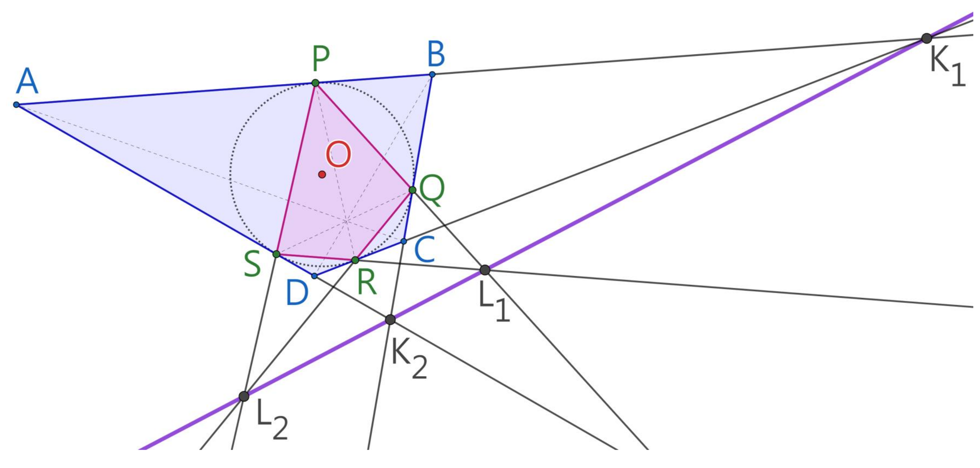
圖形由作者繪製

2. 共線的性質

文獻 [4]（層出不窮的彩蛋有心跡 ， 2015）提到：

【定理1】（張霈萱、林侑萱、游雅涵，[4]）

圓外切四邊形 $ABCD$與圓內接四邊形 $PQRS$，此兩個四邊形邊長的延伸共交於四點 K_1、K_2、L_1、L_2，則此四點共線（如右圖二）。



圖二，作者繪製

【證明】

原文獻 [4] 是利用 Brianchon 定理有對偶性質的 **Pascal 定理**證明。

『**Pascal 定理：圓錐曲線的內接六邊形其三條對邊的交點共線。**』

而我們則利用 **Desargues 定理** 來證明。

『**Desargues 定理**：若三直線Aa 、Bb 、Cc共點，

則 $AB\cap ab$ 、$AC\cap ac$ 、$BC\cap bc$三點共線。』

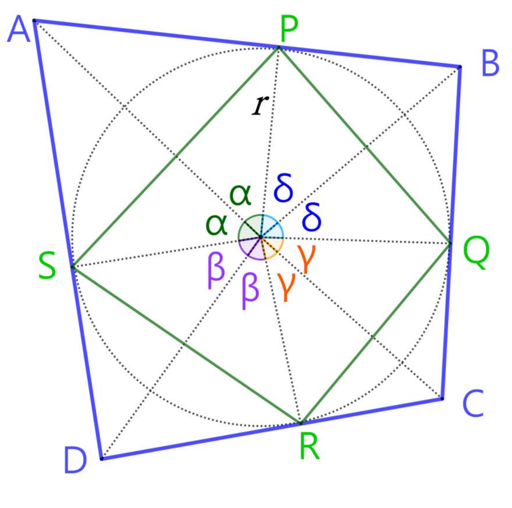
三、圓外切四邊形與圓內切點四邊形的面積

在文獻 [5]（圓外切多邊形之旁心與內切點多邊形性質之研究， 2019）中提到圓外切四邊形$ABCD$，若其內切圓之半徑r，四個頂點所對應的圓心角分別為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，則

四邊形 $ABCD$ 的面積為

$$\frac{r^2\cdot sin(\alpha+\beta)sin(\alpha+\gamma)sin(\alpha+\delta)}{cos\alpha\cdot cos\beta\cdot cos\gamma\cdot cos\delta};$$

而四個切點 P, Q, R, S 所形成之四邊形 $PQRS$ 面積為 $2r^2\cdot sin(\alpha+\beta)sin(\alpha+\gamma)sin(\alpha+\delta)$。



圖三，作者繪製

研究過程

本作品所探討的內切圓相關性質是在『**凸多邊形**』的條件下所得到的結論。

一、內切圓內切圓的成立條件

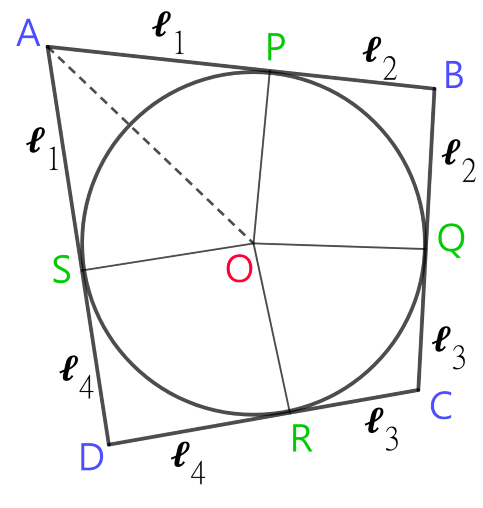
1. 邊角關係

【性質1】偶數多邊形（以四邊形為例）

設有一半徑為 r 的圓，任取四條相異切線形成四邊形 $ABCD$，其切點形成四邊形 $PQRS$。若 $\ell_1=\overline{AP}=\overline{AS}$、$\ell_2=\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\ell_3=\overline{CQ}=\overline{CR}$、$\ell_4=\overline{DR}=\overline{DS}$，

其中 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4$ 為各頂點的切線段長，則

$$\ell_1\cdot\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{\angle D}{2}=r$$



圖四，作者繪製

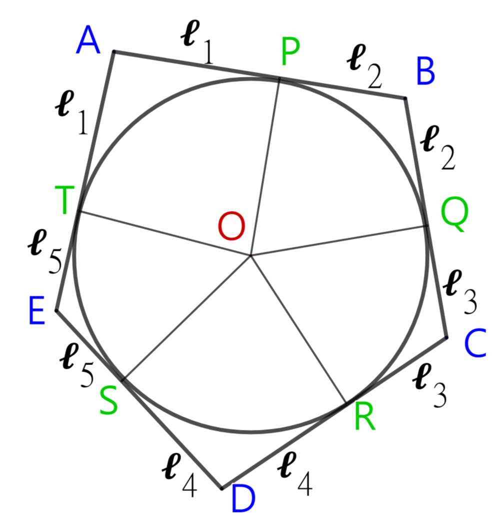
【性質2】奇數多邊形（以五邊形為例）

設有一半徑為 r 的圓，任取五條相異切線形成五邊形 $ABCDE$，其切點形成四邊形 $PQRST$。

若 $\ell_1=\overline{AP}=\overline{AT}$、$\ell_2=\overline{BP}=\overline{BQ}$、$\ell_3=\overline{CQ}=\overline{CR}$、$\ell_4=\overline{DR}=\overline{DS}$、$\ell_5=\overline{ES}=\overline{ET}$，

其中 $\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4,\ell_5$ 為各頂點的切線段長，

則 $\ell_1\cdot\tan\frac{\angle A}{2}=\ell_2\cdot\tan\frac{\angle B}{2}=\ell_3\cdot\tan\frac{\angle C}{2}=\ell_4\cdot\tan\frac{\angle D}{2}=\ell_5\cdot\tan\frac{\angle E}{2}=r$



圖五，作者繪製

【定理2】

已知一半徑為 r 的圓，任取 n 條相異切線形成 n 邊形，

其切線之交點分別為 A_1、A_2、⋯、A_n

形成圓外切 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，

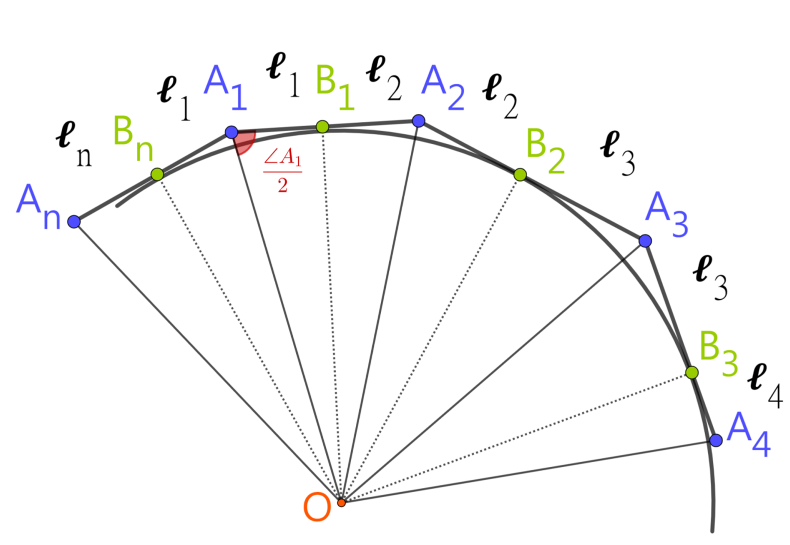
而 B_1、B_2、⋯、B_n 為內切圓之切點，

形成圓內接 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$，

若 $\begin{cases}\ell_i=\overline{A_iB_i}=\overline{A_iB_{i-1}}\\ \ell_1=\overline{A_1B_1}=\overline{A_1B_n}\end{cases}$，

其中 $i=2,\cdots,n$，（如圖六）

則滿足 $\ell_1\tan\frac{\angle A_1}{2}=\ell_2\tan\frac{\angle A_2}{2}=\ldots=\ell_n\tan\frac{\angle A_n}{2}=r$



圖六，作者繪製

【定理3】

已知一半徑為 r 的圓，任取 n 條相異切線形成 n 邊形，

其切線之交點分別為 A_1、A_2、⋯、A_n 形成圓外切 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，

而 B_1、B_2、⋯、B_n 為內切圓之切點，形成圓內接 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$。

此 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 存在內切圓

$$\Leftrightarrow\ \ell_1\tan\frac{\angle A_1}{2}=\ell_2\tan\frac{\angle A_2}{2}=\ldots=\ell_n\tan\frac{\angle A_n}{2}=r$$

其中 $\ell_1=\overline{A_1B_1}=\overline{A_1B_n}$，$\ell_i=\overline{A_iB_i}=\overline{A_iB_{i-1}}$，$i=2,\cdots,n$。

2. 邊長關係

【性質3】偶數多邊形

已知偶數多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，其中 $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$。

若邊長滿足 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2k-1}A_{2k}}=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2k}A_1}$ 的關係，

則必然存在內切圓。

【性質4】奇數多邊形

已知奇數多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，其中 $n=2k,\ k\in\mathbb{N}$。

若邊長滿足 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2k-1}A_{2k}}+\overline{A_1B_{2k+1}}$

$=\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2k+1}B_{2k+1}}$ 的關係，

其中 B_{2k+1} 為 $\overline{A_1A_{2k+1}}$ 的內切圓切點，

則必然存在內切圓。

【定理4】

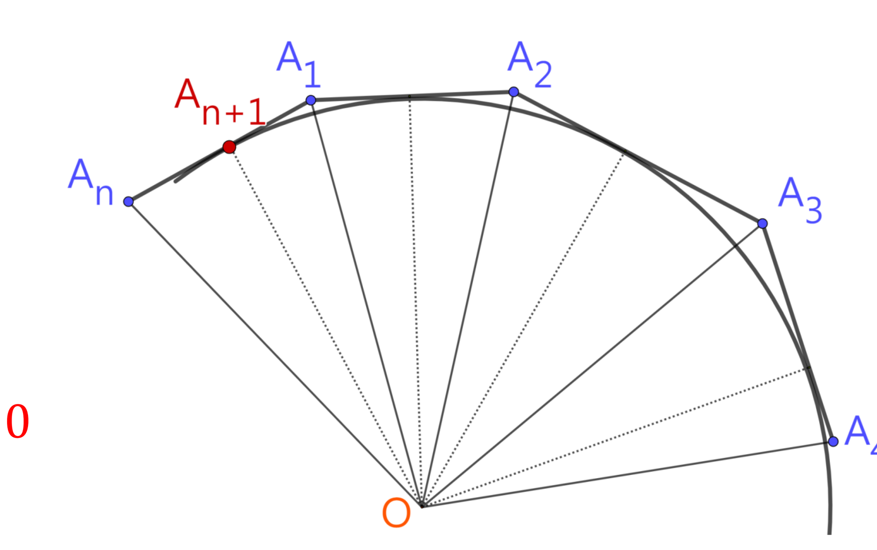
設有一 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，

若其邊長滿足下列條件：

$\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}\right)-\overline{A_{n+1}A_1}=0$

其中 A_{n+1} 為 $\overline{A_nA_1}$ 之切點，

則 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 必然存在內切圓。



圖七，作者繪製

二、四邊形之切點分類

先作一圓（其圓心 O），

及切點 P、Q、R、S，

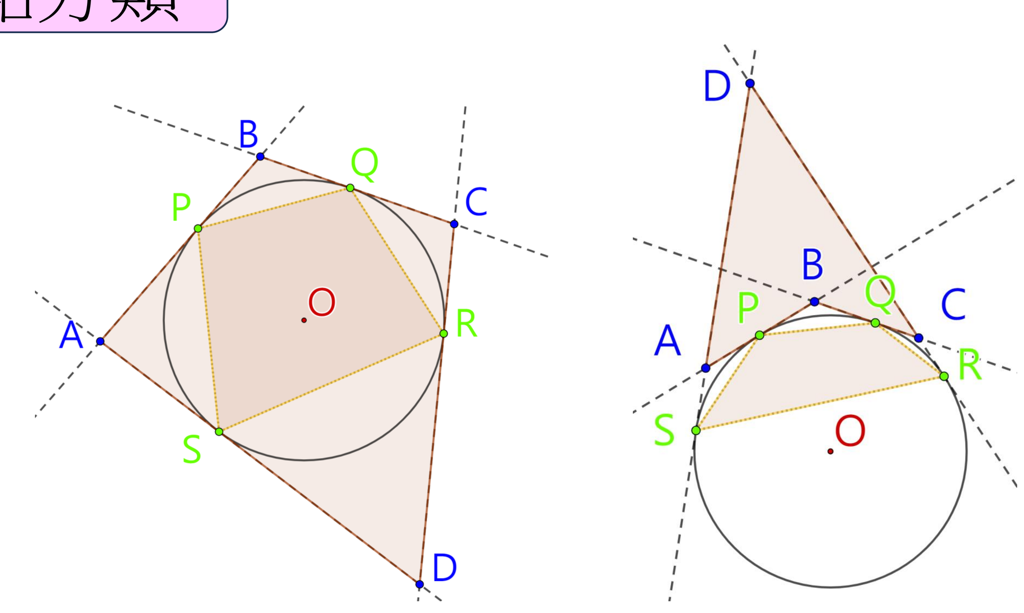
過此四點作出切線，

可分為內切四邊形

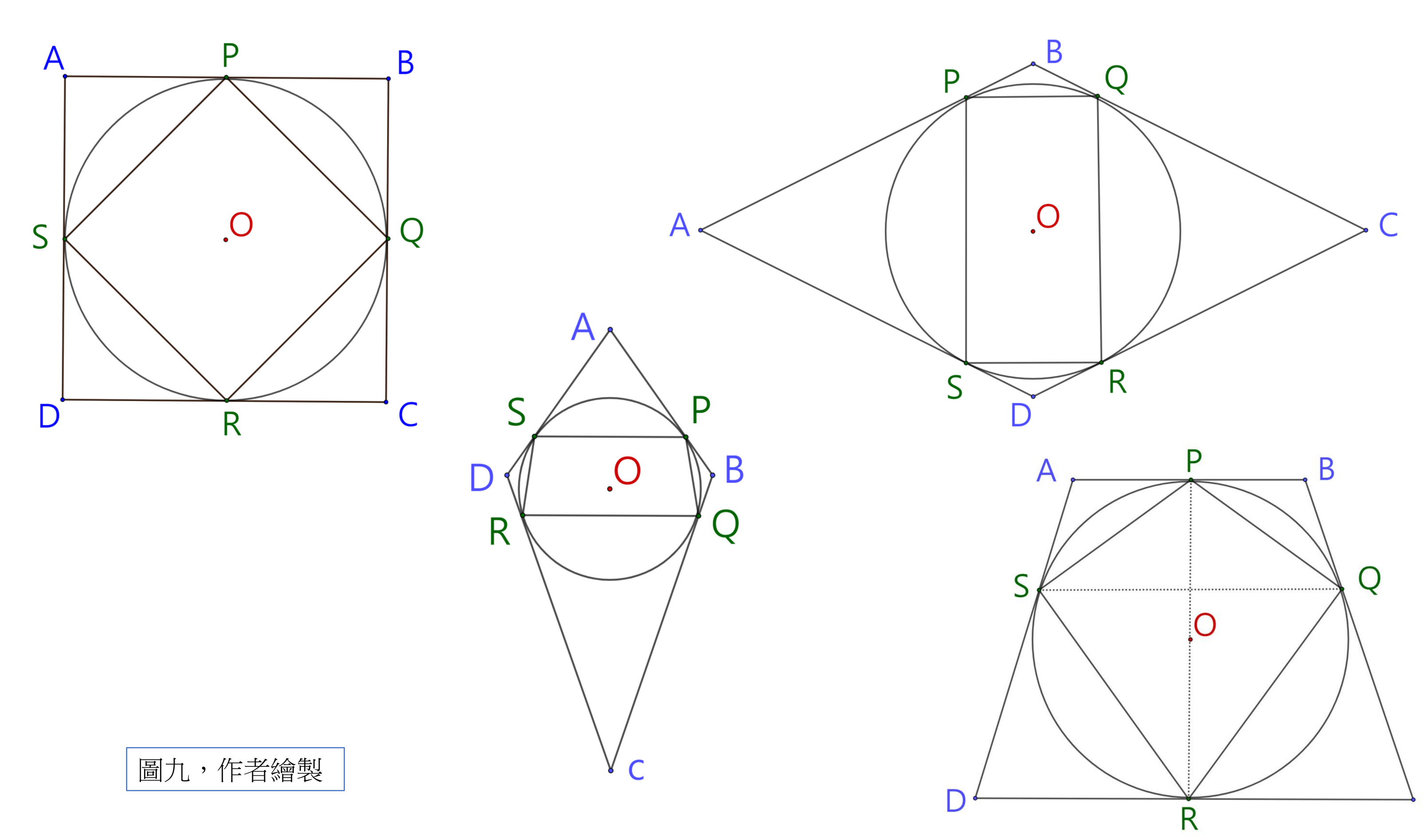
包含內切圓圓心

及不包含圓心兩種。

（如右圖八）


圖八，作者繪製

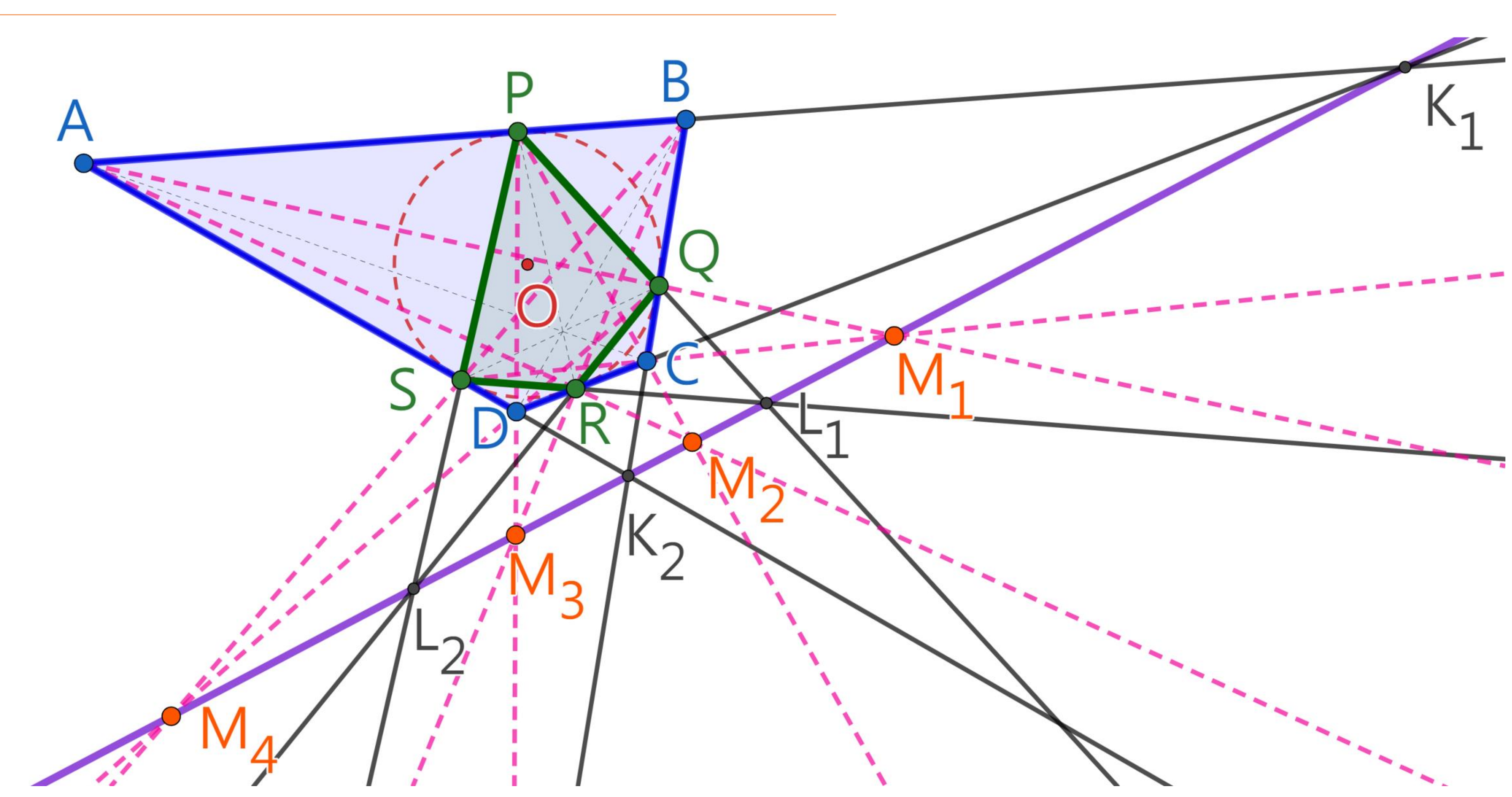
我們僅就包含圓心之外切凸四邊形與圓的關係來探討。（如右圖九）


圖九，作者繪製

三、八點共線

【定理5】

已知圓外切四邊形 $ABCD$ 及切點四邊形 $PQRS$，作外切四邊形 $ABCD$ 四邊之延長線交於 K_1、K_2 兩點，作切點四邊形 $PQRS$ 四邊之延長線交於 L_1、L_2 兩點，連接外切四邊形 $ABCD$ 及切點四邊形 $PQRS$ 之對角頂點，使 $\overleftrightarrow{AQ}$、$\overleftrightarrow{SC}$ 交於 M_1，$\overleftrightarrow{PC}$、$\overleftrightarrow{AR}$ 交於 M_2，$\overleftrightarrow{BR}$、$\overleftrightarrow{PD}$ 交於 M_3，$\overleftrightarrow{BS}$、$\overleftrightarrow{QD}$ 交於 M_4，發現 $K_1K_2L_1L_2M_1M_2M_3M_4$ 八點會共線。（如右圖十）



圖十，作者繪製

【證明】

在 ΔQCP 與 ΔSAR 中，連接 $\overleftrightarrow{SQ}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{PR}$

由共點的性質可知，$\overleftrightarrow{SQ}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{PR}$ 三線交於一點，

作 $\overleftrightarrow{PQ}$、$\overleftrightarrow{SR}$ 交於 L_1，$\overleftrightarrow{PC}$、$\overleftrightarrow{AR}$ 交於 M_2，$\overleftrightarrow{AS}$、$\overleftrightarrow{QC}$ 交於 K_2，

由 Desargues 定理可知，L_1、M_2、K_2 三點共線（如右圖十一）

同理可證

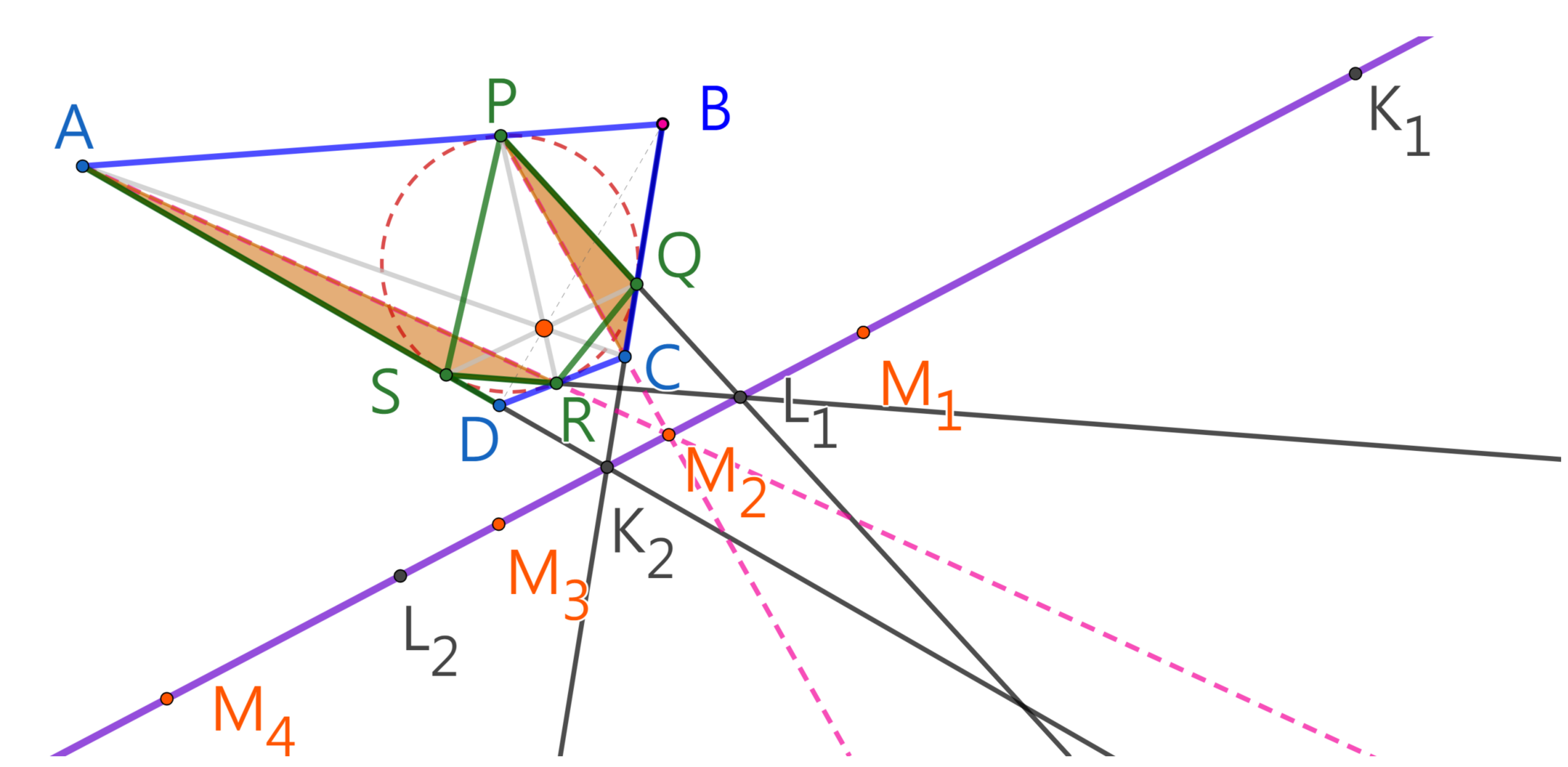
(1) 由 ΔPQA 與 ΔRSC 邊長延伸線可知，L_1、M_1、K_1 三點共線

(2) 由 ΔQBR 與 ΔSDP 邊長延伸線可知，L_2、M_3、K_2 三點共線

(3) 由 ΔRQP 與 ΔPSB 邊長延伸線可知，L_2、M_4、K_1 三點共線

又由前面定理1的共線性質可知，K_1、K_2、L_1、L_2 四點共線，

故 M_1、M_2、M_3、M_4 與 K_1、K_2、L_1、L_2 八點共線。



圖十一，作者繪製

五、圓外切四邊形、切點四邊形的面積比與周長比

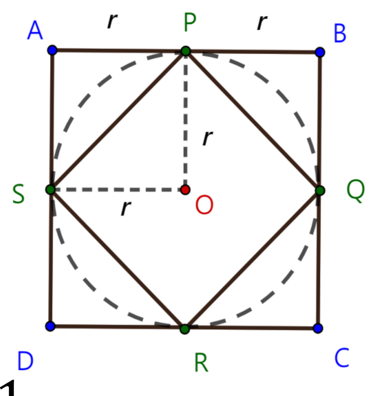
1. 正方形

(1) 面積比

正方形$ABCD$面積：正方形$PQRS$面積$=2:1$

(2) 周長比

正方形$ABCD$周長：正方形$PQRS$周長$=\sqrt{2}:1$



圖十二，作者繪製

2. 菱形

(1) 面積比

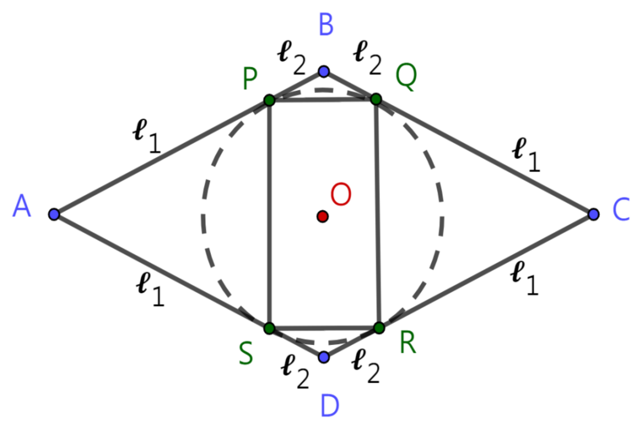
菱形$ABCD$面積：矩形$PQRS$面積

$=2(\ell_1+\ell_2):r(\sin\angle A+\sin\angle B)$

(2) 周長比

菱形$ABCD$周長：矩形$PQRS$周長

$=(\ell_1+\ell_2):r(\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2})$



圖十三，作者繪製

3. 箏形

(1) 面積比

箏形$ABCD$面積：等腰梯形$PQRS$面積

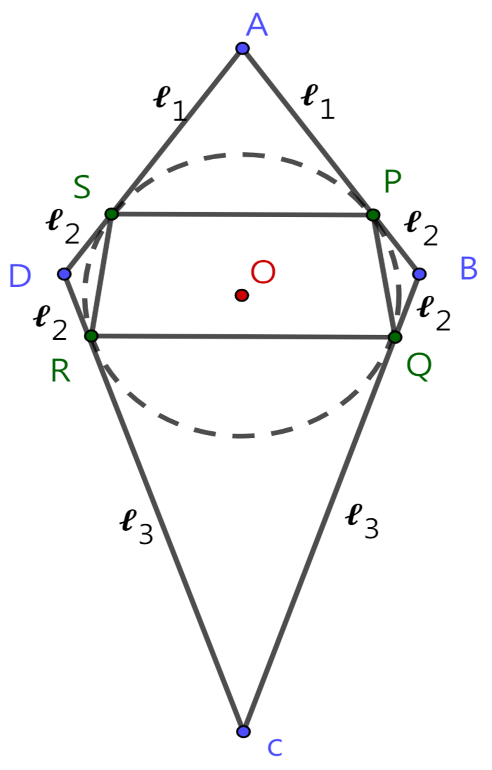
$=(\ell_1+\ell_2)^2\sin\angle A+(\ell_2+\ell_3)^2\sin\angle C$

$:r^2(\sin\angle A+2\sin\angle B+\sin\angle C)$

(2) 周長比

箏形$ABCD$周長：等腰梯形$PQRS$周長

$=(\ell_1+2\ell_2+\ell_3):r\left(\cos\frac{\angle A}{2}+2\cos\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle C}{2}\right)$



圖十四，作者繪製

4.梯形

(1) 面積比

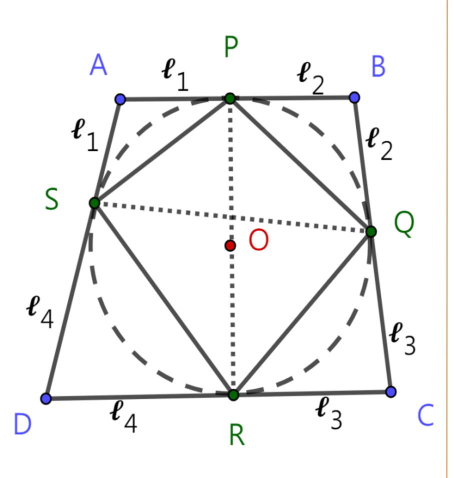
梯形$ABCD$面積：四邊形$PQRS$面積

$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):r(\sin\angle A+\sin\angle B)$

(2) 周長比

梯形$ABCD$周長：四邊形$PQRS$周長

$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):r(\sin\frac{\angle A}{2}+\sin\frac{\angle B}{2}+\cos\frac{\angle A}{2}+\cos\frac{\angle B}{2})$



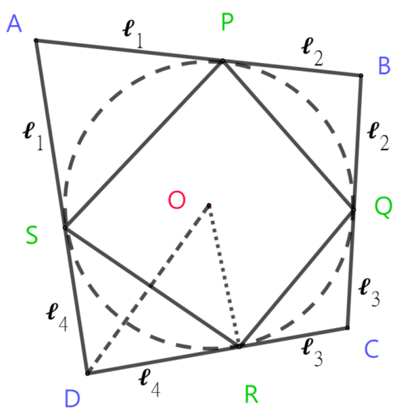
圖十五，作者繪製

5. 任意四邊形

(1) 面積比

四邊形$ABCD$面積：四邊形$PQRS$面積

$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):\frac{1}{2}r(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D)$



圖十六，作者繪製

(2) 周長比

四邊形$ABCD$周長：四邊形$PQRS$周長

$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4):$

$(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2})$

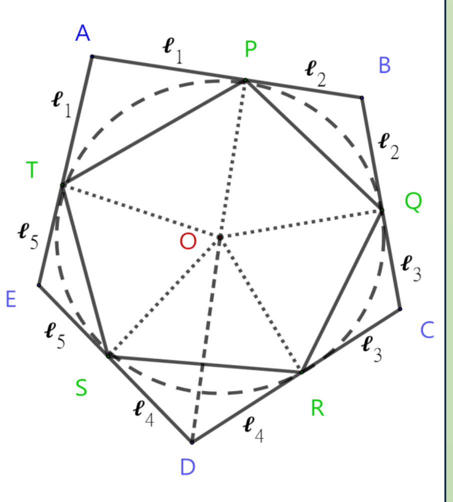
6. 任意五邊形

(1) 面積比

五邊形$ABCDE$面積：五邊形$PQRST$面積

$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5):$

$\frac{1}{2}r(\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C+\sin\angle D+\sin\angle E)$



圖十七，作者繪製

(2) 周長比

五邊形$ABCDE$周長：五邊形$PQRST$周長

$=(\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5):$

$\left(\ell_1\sin\frac{\angle A}{2}+\ell_2\sin\frac{\angle B}{2}+\ell_3\sin\frac{\angle C}{2}+\ell_4\sin\frac{\angle D}{2}+\ell_5\sin\frac{\angle E}{2}\right)$

【定理6】

已知 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 有一內切圓，

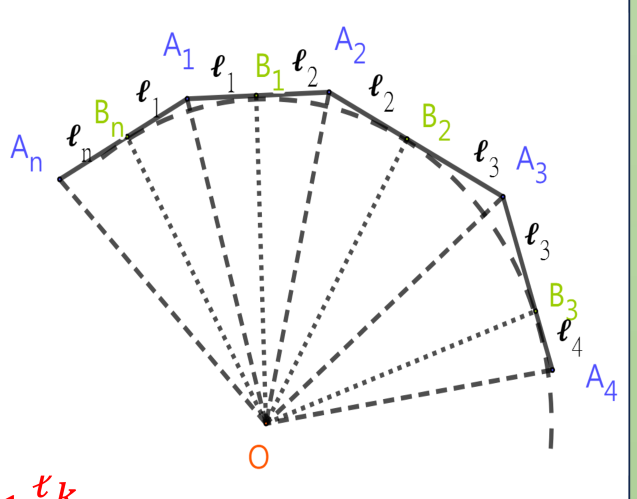
其切點 為 B_1、B_2、…、B_n，

而 $B_1B_2\ldots B_n$ 形成切點 n 邊形

若 $\begin{cases}\overline{A_1B_1}=\overline{A_1B_n}=\ell_1\\ \overline{A_iB_{i-1}}=\overline{A_iB_i}=\ell_i,\ i=2,\cdots n\end{cases}$，

其中 $\ell_1,\ \ell_i$ 為各邊的切線段長，

則 (1) $\dfrac{n\text{ 邊形 }A_1A_2\ldots A_n\text{ 面積}}{n\text{ 邊形 }B_1B_2\ldots B_n\text{ 面積}}=2\cdot\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{r\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin A_k}$



圖十八，作者繪製

(2) $\dfrac{n\text{ 邊形 }A_1A_2\ldots A_n\text{ 周長}}{n\text{ 邊形 }B_1B_2\ldots B_n\text{ 周長}}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{r\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{A_k}{2}}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ell_k}{\sum_{k=1}^{n}\ell_k\cdot\sin\frac{A_k}{2}}$

研究結果

我們在本篇作品中整理出 5 個定理（定理 2～6）

1. 首先歸納出**內切圓存在的兩個條件**，一是**邊角關係**（**定理2**）及其**充要條件**（**定理3**），二是**邊長關係**（**定理4**）。
2. 探討兩個四邊形之間的關聯性，先從特殊四邊形（正方形 → 菱形 → 箏形 → 等腰梯形）來觀察。
3. 另外我們也得到圓外切四邊形與切點四邊形之各邊長延伸線交點（有四個交點），以及內外兩個四邊形頂點延伸線之交點（亦有四個交點），得到一個**八點共線的性質**（**定理5**）。
4. 先由四個特殊四邊形之內切圓半徑、切線段長及頂角的條件，觀察原四邊形（外切四邊形）與切點四邊形的面積與周長之間的關係；進而推導至任意四邊形、任意五邊形，最後延伸到 **n 邊形的面積比與周長比**（**定理6**）。

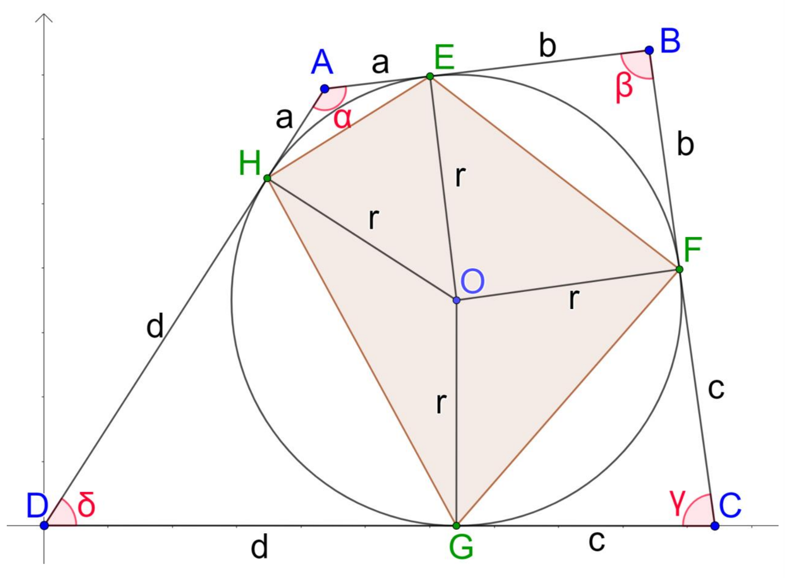
結論與未來展望

圓外切四邊形及切點四邊形的座標化

除了利用三角函數討論外切四邊形及切點四邊形之外，我們嘗試將四邊形的一邊貼其 x 軸（如下圖十九），並將其他點座標化，進而嘗試計算其面積，雖然沒有的到漂亮的結果，但或許能夠在算式更精簡一些，結果如下：

1. 四邊形 $ABCD$ 面積$\frac{1}{2}[(b+c)(c+d)\sin\gamma+(a+d)(c+d)\sin\delta-(a+d)(b+c)\sin(\delta+\gamma)]$
2. 點 E $\left(\frac{b(a+d)\cos\delta+a[(c+d)-(b+c)\cos\gamma]}{a+b},\frac{b(a+d)\sin\delta+a(b+c)\sin\gamma}{a+b}\right)$
3. $EFGH$ 面積 $\frac{1}{2(a+b)}\left[\begin{array}{c}\sin\gamma(ad+bd+ac+ad)+d\sin\delta(ac+ad-ad-bd)\\ +bc(a+d)\sin(\delta-\gamma)+2ac(b+c)\sin\gamma\cos\gamma\\ -ad(b+c)\sin(\delta+\gamma)\end{array}\right]$

或者考慮在單位圓上的條件，或許會有更好的結果。最後，本篇作品是在凸多邊形的條件下進行討論，未來亦可考慮凹多邊形是否有類似的結論？



圖十九，作者繪製

參考資料及其他

1. 李孟龍，莊耀鈞。*層層疊疊—雙心多邊形面積的一個有趣性質*。中華民國第56屆中小學科學展覽會。2016年7月。
2. 陳品銘，王鈞翔。*我們要畫這樣的四邊形*。金門縣第 60 屆科學展覽。2020年。
3. 宋瑞傑、陳奕勛。*當圓外切多邊形遇上Brianchon 定理 — Brianchon 定理在多邊形上的探討*。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。2018年7月。
4. 張霈萱、林侑萱、游雅涵。*層出不窮的彩蛋有心跡 — 圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質*。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會。2015年7月。
5. 張騰達、張業叡。*圓外切多邊形之旁心與內切點多邊形性質之研究*。中華民國第 59 屆中小學科學展覽會。2019年7月。
6. 葉懿琦，盧宥妏。*以邊追圓 — 多邊形內切圓形成規律之探討*。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。2021年7月。