中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050411

拈拈有餘——單堆拈必勝策略探討

學校名稱： 臺中市立臺中女子高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 賴詠心 高二 黃以希 高二 李諺柔	李文靖

關鍵詞： 必勝法則、數列、單堆拈

摘要

本文以單堆拈有關的問題出發，討論當給定首項為 1 的連續數列，接著再就未刪除、刪除不同長度連續或不連續的數列等條件，觀察結果並找出其必勝策略。在刪除特定數列時，發現必勝點的數量與大小與「刪除的數列的首項」和「刪除的數列的長度」有關，最後將其簡化成公式。

壹、 前言

一、研究動機：

在暑假時，因為熱愛數學，所以報名營隊，上課的時候，老師給了我們一道題目如下：

「與對手猜拳，輸的人先決定一個不大於 10 的正整數 n，贏的人決定當先手或後手。雙方輪流依次減去 1 到 3 的正整數，最後使 n 減至 0 者獲勝，則必勝策略為何？」

因緣際會下，我們認識了數學益智遊戲———單堆拈，發現初始的遊戲設定有簡單的必勝策略，但此必勝策略僅能使用在可減去的數字為連續正整數的情況。若改變條件，使可減去的數字不連續，則此必勝策略不再管用。這讓我們感到非常有趣，因此我們決定深入探討可減去的數字不連續時的必勝策略。

二、研究目的：

探討以公式表示單堆拈的必勝點。

貳、 研究設備及器材

白板、筆記型電腦(GeoGebra 經典 6 版、Microsoft Word 2019)。

參、 研究過程及方法

一、 問題討論及初步推廣：

問題：

與對手猜拳，輸的人先決定一個不大於 10 的正整數 n，贏的人決定當先手或後手。雙方輪流依次減去 1 到 3 的正整數，最後使 n 減至 0 者獲勝，則後手的必勝策略為何？

【解】

方法一：

令有兩玩家 A、B，其中 A 為後手。

定義：A 的必勝點為可以確保後手 A 必勝的數。

(1)當 $n=1$、2、3 時，B 可直接減去 1、2 或 3，所以 1、2、3 不為 A 的必勝點。

(2)當 $n=4$ 時，因 B 只能減去 1 到 3 的整數，若 B 減去 1 則 A 減去 3，若 B 減去 2 則 A 減去 2， 若 B 減去 3 則 A 減去 1，A 必定獲勝。所以 4 為 A 的必勝點。

(3)當 $n=5$、6、7 時，因 B 必可將 n 減為 4，此時回到 $n=4$ 的情形，此時可視 A 為先手。由上述討論可知 B 必勝，所以 5、6、7 不為 A 的必勝點。

(4)當 $n=8$ 時，因 B 減去 1 到 3 任一數時，A 必可將 n 減為 4，此時回到 $n=4$ 的情形，所以 8 也是 A 的必勝點。

同理，對 A 而言，當$4|n$時，n皆為 A 的必勝點。

方法二：

由方法一可知，當一個數可直接由必勝點減去數字得到，則此點不為必勝點。根據題目所述，當 $n=0$ 時，A 獲勝，可知0為 A 的必勝點，接著可由0逆推其餘必勝點：

1、2、3 可由0直接走到⇒ 4 為必勝點；5、6、7 可由4直接走到⇒ 8 為必勝點；

依此類推可得下表。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
○	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	○	╳	╳

(○代表 A 的必勝點，╳代表不為 A 的必勝點。)

所以對 A 而言，如同方法一所述，可知當$4|n$時，該點為必勝點。

二、符號定義：

1. $\langle a_i \rangle_{i=1}^{k} = \langle 1,2,\ldots,k \rangle$。

2. $\langle b_j \rangle_{j=1}^{l}$為$\langle a_i \rangle_{i=1}^{k}$中不可減去的數所組成的數列，其中$l \in \mathbb{N}$ 且 $1, k$ 不在$\langle b_j \rangle_{j=1}^{l}$中，$b_1 < b_2 < \cdots < b_l$。

例如：(1)在初始問題中，兩玩家可減去的數為 1,2,3，則$\langle a_i\rangle_{i=1}^{k}=\langle 1,2,3\rangle$，

$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$不存在。

(2)假設 1,2,4,6,7 為兩玩家可減去的數，則$\langle a_i\rangle_{i=1}^{k}=\langle 1,2,3,4,5,6,7\rangle$，

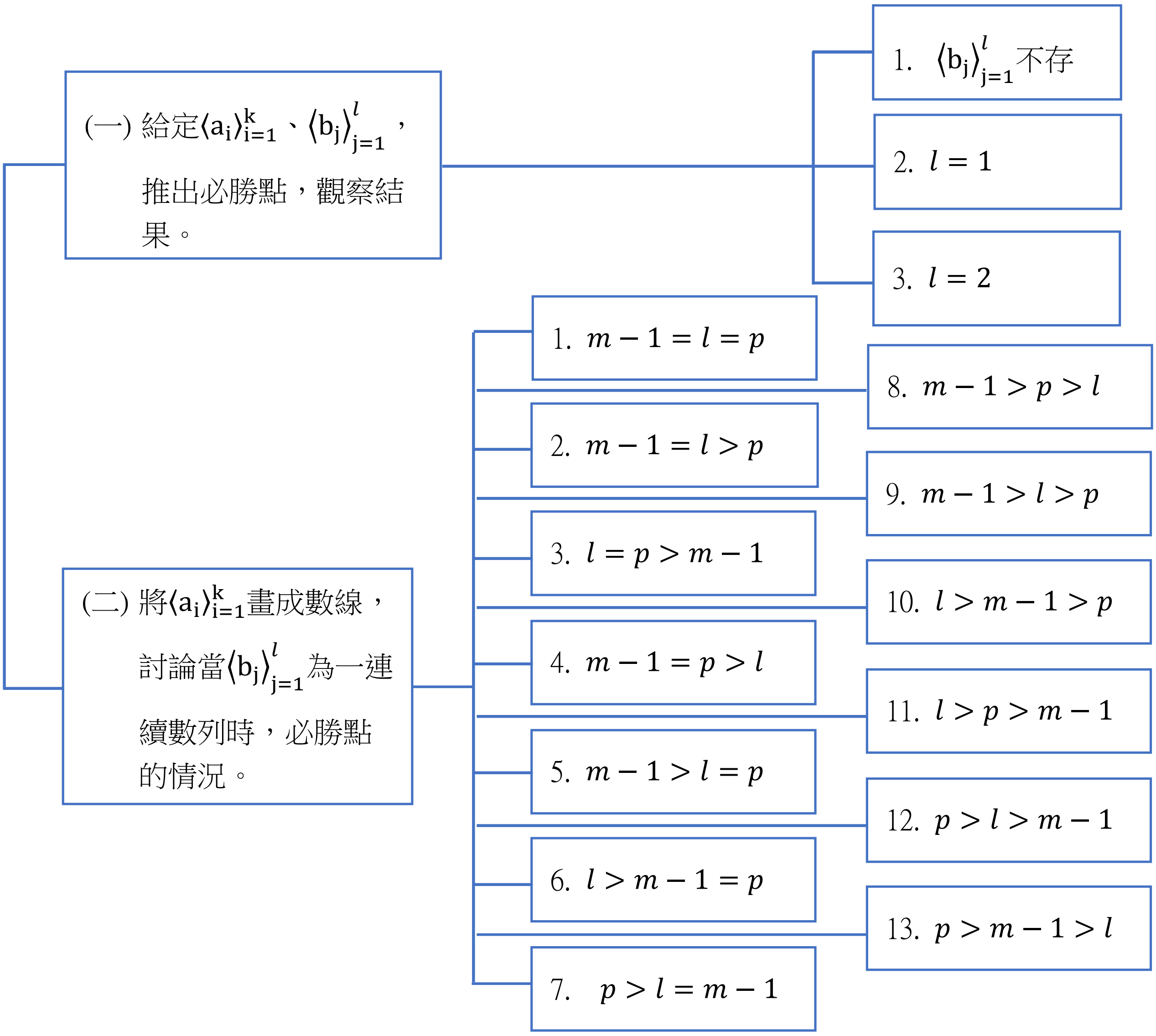
$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}=\langle 3,5\rangle$。

3. 當$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為連續數列時，令$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}=\langle a_m,a_{m+1},\dots,a_{m+l-1}\rangle$，且$a_{m+l}$到$a_k$之長度$k-m-l+1$為$p$。

例如：當$\langle a_i\rangle_{i=1}^{10}=\langle 1,2,\dots,10\rangle$、$\langle b_j\rangle_{j=1}^{4}=\langle 4,5,6,7\rangle$時，

$\Rightarrow m=4\Rightarrow p=a_8\sim a_{10}$的長度$=3$。

三、研究流程：



四、討論：

令 A 為後手。

(一)給定$\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}}$、$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j=1}}^{l}$，推出必勝點，觀察結果。

1. $\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j=1}}^{l}$不存在：

(1) $\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i=1}}^{4} = \langle 1,2,3,4 \rangle$：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
╳	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	╳	○
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
╳	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	╳	○
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
╳	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	╳	○

A 的必勝點為$x = 5r$。

推測：當$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j=1}}^{l}$不存在時，$x = (\mathrm{k}+1)r$為 A 的必勝點。

證明：

考慮 $1 \le x \le k$。

因 B 可直接減去x，因此不為 A 的必勝點。

考慮$x = k + 1$。

若 B 第一個減去的數為$b \in \{1, \dots\dots, k\}$，則 A 減去

$(k+1) - b \in \{1, \dots\dots, k\}$，可知在$1$至$k$中 A 的必勝點為$k+1$。

令t為任意正整數。

假設在$(t-1)(k+1)+1$至$t(k+1)$中 A 的必勝點為$t(k+1)$。

設$x = t(k+1) + y$，且$y \in \{1, \dots\dots, k\}$，則因$t(k+1)$為 A 的必勝點，則 B 可直接減去$y$，可知$x$不為 A 之必勝點。

設$x = (t+1)(k+1)$， 若 B 第一個減去的數為b'則 A 接下來減去

$(k+1)-b'$，因此可在每次 A 減完後仍維持在$k+1$的倍數，故

$(t+1)(k+1)$為 A 之必勝點。

結論：當$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j}=1}^{l}$不存在時，$x=(\mathrm{k}+1)r$為 A 的必勝點。

2. $l=1$：

$\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i}=1}^{4}=\langle 1,2,3,4 \rangle$且$b_1=2$ $(m=2,\mathrm{p}=2)$：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	○	×	×	×	×	○	×	○	×
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	×	×	○	×	○	×	×	×	×
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
○	×	○	×	×	×	×	○	×	○

A 的必勝點為$x=7r$ 與 $x=7r+2$。

證明：

考慮$x=1,3,4$，因 B 可直接減去x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=2$，因 B 只能減去 1，接著 A 減去 1，所以 2 為 A 之必勝點。

考慮$x=5,6$，因 B 可直接減去 3 或 4，與原始拈問題相同，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=7$，若 B 減去 1 則 A 減 4，與$x=2$的情況相同，若 B 減去 3 或 4，則 A 可減去 4 或 3，故 7 也為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$7(t-1)+1$至$7t$中，A 之必勝點為$7(t-1)+2$和$7t$。

設$x=7t+1$，則 B 可直接減去 1 達到$7t$，故不為 A 之必勝點。

設$x=7t+2$，則 B 減去 1 接著 A 減去 1 達到$7t$，或 B 減去 3 或 4，接著 A 減去 4 或 3 達到$7(t-1)+2$，故為 A 的必勝點。

設$x=7t+y$，且$y\in\{3,4\}$，則 B 可直接減去y達到$7t$，故不為 A 之必勝點。

設$x=7t+y'$，且$y'\in\{5,6\}$，因 B 可直接減去 3 或 4 達到$7t+2$，故不為 A 之必勝點。

設$x=7t+7$，若 B 減去 1 則 A 減 4，與$x=7t+2$的情況相同；若 B 減去 3 或 4，則 A 可減去 4 或 3 達到$7t$，故$7t+7$也為 A 之必勝點。

$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{\mathrm{i=1}}^{4}=\langle 1,2,3,4\rangle$且$b_1=3\ \ (m=3,\mathrm{p}=1)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	×	○	×	×	○	×	×	○	×
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	○	×	×	○	×	×	○	×	×
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
○	×	×	○	×	×	○	×	×	○

A 的必勝點為$x=3r$ 。

證明：

考慮$x=1,2,4$，因 B 可直接減去x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=3$，因 B 只能減去 1 或 2，接著 A 減去 2 或 1，所以 3 為 A 之必勝點。

考慮$x=5$，因 B 可直接減去 2，與$x=3$情況相同，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=6$，若 B 減去 1 則與$x=5$情況相同；若 B 減去 2 或 4，則 A 可減去 4 或 2，故 6 也為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$6(t-1)+1$至$6t$中，A 之必勝點為$6(t-1)+3$和$6t$。

設$x=6t+y$，且$y\in\{1,2,4\}$，則 B 可直接減去y，故不為 A 之必勝點。

設$x=6t+3$，若 B 減去 1，接著 A 減去 2；若 B 減去 2，則 A 減去 1 或

4；若 B 減去 4，A 減去 2，可達到$6(t-1)+3$或$6t$，所以$6t+3$為 A 之必勝點。

設$x=6t+5$，因 B 可直接減去 2，與$x=6t+3$情況相同，故不為 A 之必勝點。

設$x=6(t+1)$，若 B 減去 1 則與$x=6t+5$情況相同；若 B 減去 2 或 4，則 A 可減去 4 或 2，達到$6t$，故$6(t+1)$也為 A 之必勝點。

綜合上述，A 的必勝點為$6t+3$和$6(t+1)$，亦即$3t$。

3. $l=2$：

$\langle a_i\rangle_1^4=\langle 1,2,3,4\rangle$且$b_1=2$，$b_2=3$ $(m=2,\mathrm{p}=1)$：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	○	×	×	○	×	○	×	×	○
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	○	×	×	○	×	○	×	×	○
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
×	○	×	×	○	×	○	×	×	○

A 的必勝點為$x=5r$ 與 $x=5r+2$。

證明：

考慮$x=1,4$，因 B 可直接減去x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=2$，因 B 只能減去 1，所以 2 為 A 之必勝點。

考慮$x=3$，因 B 只能減去 1，與$x=2$情況相同，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=5$，若 B 減去 1 或 4，則 A 可減去 4 或 1，故 5 為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$5(t-1)+1$至$5t$中，A 之必勝點為$5(t-1)+2$和$5t$。

設$x=5t+y$，且$y\in\{1,4\}$，則 B 可直接減去y，故不為 A 之必勝點。

設$x=5t+2$，若 B 減去 1，接著 A 減去 1，所以$5t+2$為 A 之必勝點。

設$x=5t+3$，則 B 可直接減去 1，與$x=5t+2$情況相同，故不為 A 之必勝點。

設$x=5t+5$，若 B 減去 1 或 4，則 A 可減去 4 或 1，故$5t+5$為 A 之必勝點。

綜合上述，A 的必勝點為$5t+2$和$5t+5$。

$\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i}=1}^{8} = \langle 1,2,\ldots,8 \rangle$且$b_1=3,\ b_2=6$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	×	○	×	×	○	×	×	○	×
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	○	×	×	○	×	×	○	×	×
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
○	×	×	○	×	×	○	×	×	○

A 的必勝點為$x=3r$ 。

證明：

考慮$x=1,2,4,5,7,8$，因 B 可直接減去x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=3$，因 B 只能減去 1 或 2，則 A 可減去 2 或 1，故 3 為 A 之必勝點。

考慮$x=6$，若 B 減去 1，則 A 可減去 2 或 5；B 減去 2，則 A 可減去 1 或 4；B 減去 4 或 5，則 A 可減去 2 或 1，故 6 為 A 之必勝點。

考慮$x=9$，若 B 減去 1，則 A 可減去 2 或 5 或 8；B 減去 2，則 A 可減去 1 或 4 或 7；B 減去 4，則 A 可減去 2 或 5；B 減去 5，則 A 可減去 1 或 4；B 減去 7 或 8，則 A 可減去 2 或 1，故 9 為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$9(t-1)+1$至$9t$中，A 之必勝點為$9(t-1)+3$、$9(t-1)+6$和$9t$。

設$x = 9t + y$，且$y \in \{1,2,4,5,7,8\}$，則 B 可直接減去y，故不為 A 之必勝點。

設$x = 9t + 3$，若 B 減去 1 或 2，則 A 可減去 2 或 1 到達$9t$；B 減去 4 或 5，則 A 可減去 5 或 4 到達$9(t-1)+3$；B 減去 7 或 8，則 A 可減去 5 或 4 到達$9(t-1)$，故$9t+3$為 A 之必勝點。

設$x = 9t + 6$，若 B 減去 1，則 A 可減去 2 或 5；B 減去 2，則 A 可減去 1 或 4；B 減去 4 或 5，則 A 可減去 2 或 1；B 減去 7 或 8，則 A 可減去 2 或 1，故$9t+6$為 A 之必勝點。

設$x = 9(t+1)$，若 B 減去 1，則 A 可減去 2 或 5 或 8；B 減去 2，則 A 可減去 1 或 4 或 7；B 減去 4，則 A 可減去 2 或 5；B 減去 5，則 A 可減去 1 或 4；B 減去 7 或 8，則 A 可減去 2 或 1，故$9(t+1)$為 A 之必勝點。

綜合上述，A 的必勝點為$9t+3$、$9t+6$和$9(t+1)$，亦即$3t$。

$\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i}=1}^{10} = \langle 1,2,\ldots,10 \rangle$且$b_1 = 3,\ b_2 = 6$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	×	○	×	×	○	×	×	×	×
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	×	×	×	×	×	○	×	×	○
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
×	×	○	×	×	×	×	×	×	×

A 的必勝點為$x = 17r$ 與 $x = 17r + 3$ 與 $x = 17r + 6$ 。

證明：

考慮$x = 1,2,4,5,7,8,9,10$，因 B 可直接減去x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x = 3$，因 B 只能減去 1 或 2，則 A 可減去 2 或 1，故 3 為 A 之必勝點。

考慮$x = 6$，若 B 減去 1，則 A 可減去 2 或 5；B 減去 2，則 A 可減去 1

或 4；B 減去 4 或 5，則 A 可減去 2 或 1，故 6 為 A 之必勝點。

考慮$x = 11$，若 B 減去 5 或 8，則與$x = 3$、$x = 6$情況相同，故 11 不為 A 之必勝點。

考慮$x = 12$，若 B 減去 9，則與$x = 3$情況相同，故 12 不為 A 之必勝點。

考慮$x = 13$，若 B 減去 7 或 10，則與$x = 3$、$x = 6$情況相同，故 13 不為 A 之必勝點。

考慮$x = 14$，若 B 減去 8，則與$x = 6$情況相同，故 14 不為 A 之必勝點。

考慮$x = 15$，若 B 減去 9，則與$x = 6$情況相同，故 15 不為 A 之必勝點。

考慮$x = 16$，若 B 減去 10，則與$x = 6$情況相同，故 16 不為 A 之必勝點。

考慮$x = 17$，若 B 減去 1，則與$x = 16$情況相同；B 減去 2，與$x = 15$情況相同；B 減去 4，與$x = 13$情況相同；B 減去 5，與$x = 12$情況相同；B 減去 7、8、9、10，則 A 可直接減 10、9、8、7，故 17 為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$17(t-1)+1$至$17t$中，A 之必勝點為$17(t-1)+3$、$17(t-1)+6$和$17t$。

設$x = 17t + y$，且$y \in \{1,2,4,5,7,8,9,10\}$，則 B 可直接減去 y，故不為 A 之必勝點。

設$x = 17t + 3$，若 B ~~只能~~減去 1 或 2，則 A 可減去 2 或 1；B 減去 4 或 5，則 A 可減去 10 或 9；B 減去 7、8、9 或 10，則 A 可減去 10、9、8 或 7，故$17t + 3$為 A 之必勝點。

設$x = 17t + 6$，若 B 減去 1，則 A 可減去 2 或 5；B 減去 2，則 A 可減去 1 或 4；B 減去 4 或 5，則 A 可減去 2 或 1；B 減去 7、8、9 或 10，則 A 可減去 10、9、8 或 7，故$17t + 6$為 A 之必勝點。

設$x = 17t + 11$，若 B 減去 5 或 8，則與$x = 17t + 3$、$x = 17t + 6$情況相

同，故$17t+11$不為 A 之必勝點。

設$x=17t+12$，若 B 減去 9，則與$x=17t+3$情況相同，故$17t+12$不為 A 之必勝點。

設$x=17t+13$，若 B 減去 7 或 10，則與$x=17t+3$、$x=17t+6$情況相同，故$17t+13$不為 A 之必勝點。

設$x=17t+14$，若 B 減去 8，則與$x=17t+6$情況相同，故$17t+14$不為 A 之必勝點。

設$x=17t+15$，若 B 減去 9，則與$x=17t+6$情況相同，故$17t+15$不為 A 之必勝點。

設$x=17t+16$，若 B 減去 10，則與$x=17t+6$情況相同，故$17t+16$不為 A 之必勝點。

設$x=17(t+1)$，若 B 減去 1，則與$x=17t+16$情況相同；B 減去 2，與$x=17t+15$情況相同；B 減去 4，與$x=17t+13$情況相同；B 減去 5，與$x=17t+12$情況相同；B 減去 7、8、9、10，則 A 可直接減 10、9、8、7，故$17(t+1)$為 A 之必勝點。

綜合上述，A 的必勝點為$17t+3$、$17t+6$和$17(t+1)$。

$\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i=1}}^{5}=\langle 1,2,3,4,5 \rangle$且$b_1=2,\ b_2=4$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
╳	○	╳	○	╳	○	╳	○	╳	○
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
╳	○	╳	○	╳	○	╳	○	╳	○
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
╳	○	╳	○	╳	○	╳	○	╳	○

A 的必勝點為$x=2r$ 。

證明：

考慮$x=1,3,5$，因 B 可直接減去 x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x=2$，因 B 只能減去 1，所以 2 為 A 之必勝點。

考慮$x=4$，若 B 減去 1，則 A 可減 1(回到$x=2$的情況)或 3，若 B 減去 3，則 A 可直接減 1，故 4 為 A 之必勝點。

考慮$x=6$，若 B 減去 1，則 A 可減 1(回到$x=4$的情況)或 3(回到$x=2$的情況)或 5，若 B 減去 3 則 A 可減 1(回到$x=2$的情況)或 3，若 B 減去 5，則 A 可直接減 1，故 6 為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$6(t-1)+1$至$6t$中，A 之必勝點為$6(t-1)+2$、$6(t-1)+4$和$6t$。

設$x=6t+y$，且$y\in\{1,3,5\}$，則 B 可直接減去 y，故不為 A 之必勝點。

設$x=6t+2$，若 B 減去 1，則 A 減去 1；B 減去 3，則 A 減去 5；B 減去 5，則 A 減去 3，所以$6t+2$為 A 之必勝點。

設$x=6t+4$，若 B 減去 1，與$x=6t+3$情況相同； B 減去 3，則 A 減去 1；B 減去 5，則 A 減去 5，故$6t+4$為 A 之必勝點。

設$x=6(t+1)$，若 B 減去 1，A 可減 1(與$x=6t+4$情況相同)、3(與$x=6t+3$情況相同)、5，若 B 減去 3，A 可減 1(與$x=6t+2$情況相同)或 3，若 B 減去 5，A 可減 1，故$6(t+1)$為 A 之必勝點。

綜合上述，A 的必勝點為$6(t-1)+2$、$6(t-1)+4$和$6t$，亦即$2t$。

$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{\mathrm{i=1}}^{5}=\langle 1,2,\dots,5\rangle$且$b_1=3,\ b_2=4$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
╳	╳	○	╳	╳	○	╳	╳	○	╳
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
╳	○	╳	╳	○	╳	╳	○	╳	╳
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

○	×	×	○	×	×	○	×	×	○

A 的必勝點為$x = 3r$ 。

證明：

考慮$x = 1,2,5$，因 B 可直接減去 x，故不為 A 之必勝點。

考慮$x = 3$，因 B 只能減去 1 或 2，所以 3 為 A 之必勝點。

考慮$x = 4$，若 B 減去 1，與$x = 3$情況相同，故不為 A 之必勝點。

考慮$x = 6$，若 B 減去 2，與$x = 4$情況相同；若 B 減去 1 或 5，則 A 可直接減去 5 或 1，故 6 為 A 之必勝點。

考慮$x = 7$，若 B 減去 1，與$x = 6$情況相同，故不為 A 之必勝點。

考慮$x = 8$，若 B 減去 2，與$x = 6$情況相同；若 B 減去 5，與$x = 3$情況相同，故不為 A 之必勝點。

考慮$x = 9$ ，若 B 減去 1，與$x = 8$情況相同；若 B 減去 2，與$x = 7$情況相同；若 B 減去 5，與$x = 4$情況相同，故 9 為 A 之必勝點。

令t為任意正整數。

假設在$9(t-1)+1$至$9t$中，A 之必勝點為$9(t-1)+3$、$9(t-1)+6$和$9t$。

設$x = 9t + y$，且$y \in \{1,2,5\}$，則 B 可直接減去 y，故不為 A 之必勝點。

設$x = 9t + 3$，若 B 減去 1 或 2，則 A 減去 2 或 1；若 B 減去 5，則 A 減去 1 或 4，所以$9t + 3$為 A 之必勝點。

設$x = 9t + 4$，則 B 可直接減去 1，與$x = 9t + 3$情況相同，故不為 A 之必勝點。

設$x = 9t + 6$，若 B 減去 2，與$x = 9t + 4$情況相同；若 B 減去 1 或 5，則 A 可直接減去 5 或 1，故$9t + 6$為 A 之必勝點。

設$x = 9t + 7$，若 B 減去 1，與$x = 9t + 6$情況相同，故不為 A 之必勝點。

設$x=9t+8$，若 B 減去 2，與$x=9t+6$情況相同；若 B 減去 5，與$x=9t+3$情況相同，故不為 A 之必勝點。

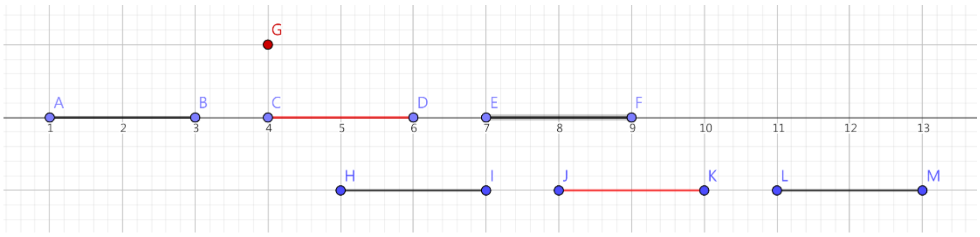
設$x=9(t+1)$，若 B 減去 1，與$x=9t+8$情況相同，若 B 減去 2，與$x=9t+7$情況相同；若 B 減去 5，與$x=9t+4$情況相同，故$9(t+1)$為 A 之必勝點。

綜合上述，A 的必勝點為$9t+3$、$9t+6$和$9t$，亦即$3t$。

我們在給定$\langle a_i \rangle_{i=1}^{k}$和$\langle b_j \rangle_{j=1}^{l}$的情況下，發現$m$、$l$、$p$的大小會造成必勝點的結果有不一樣的變化，因此將$m$、$l$、$p$以數線表示來討論。

(二)將$\langle a_i \rangle_{i=1}^{k}$畫成數線討論當$\langle b_j \rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列，且$p \geq m$的必勝點的情況。

1. $m-1=l=p$ (以$m-1=l=p=3$為例)：



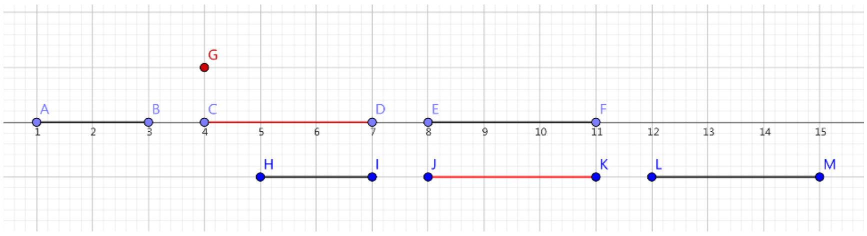
(圖一)(由第一作者製作)

將$a_1,a_2,\dots,a_{m-1}$、$b_1,b_2,\dots,b_l$、$a_{m+l},a_{m+l+1},\dots,a_k$以線段表示成$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$三線段，經過觀察，可以知道$x=b_1$（$G$點）是一個必勝點，依照方法二，可從$x=b_1+1$處再做一次和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$相同的三線段$\overline{HI}$、$\overline{JK}$、$\overline{LM}$，接著又可以在$x=b_l$（即$x=a_{m+l-1}$）發現另一個必勝點，由此必勝點又可推得下一個必勝點，以此類推，我們可以找到當$m-1=l=p$時，必勝點為

$x=(2m+2)r=(k+1)r$ 與 $x=(2m+2)r+m=(k+1)r+m$。

2. $l=p>m-1$：

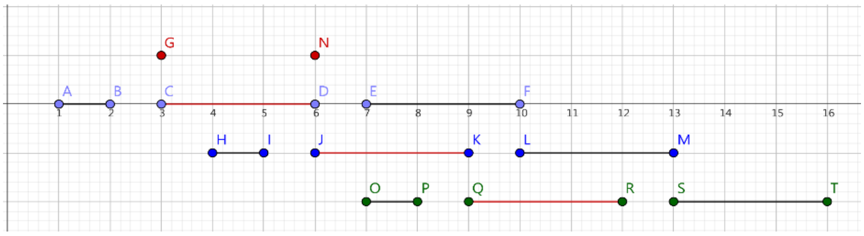
(1)$m=l=p$ (以$m=l=p=4$ 為例)：



(圖二) (由第一作者製作)

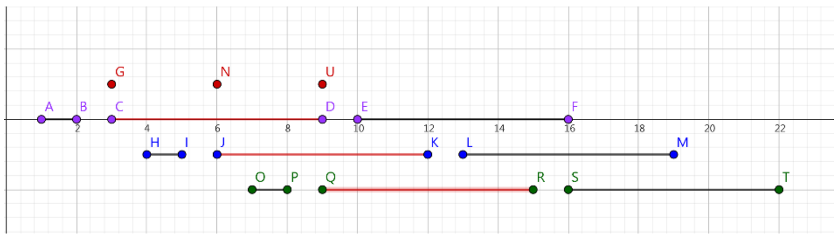
同上，可在$x = b_1 + 1$處再做一次和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$相同的三線段$\overline{HI}$、$\overline{JK}$、$\overline{LM}$，接著又可以在$x = k + m + 1$發現另一個必勝點，以此類推，我們可以找到當$l = p > m - 1$且$m = l = p$時，必勝點為$x = (k + m + 1)r$ 與 $x = (k + m + 1)r + m$。

(2)$m < l = p$ (以$m = 3$，$l = p = 4$ 為例)：



(圖三) (由第一作者製作)

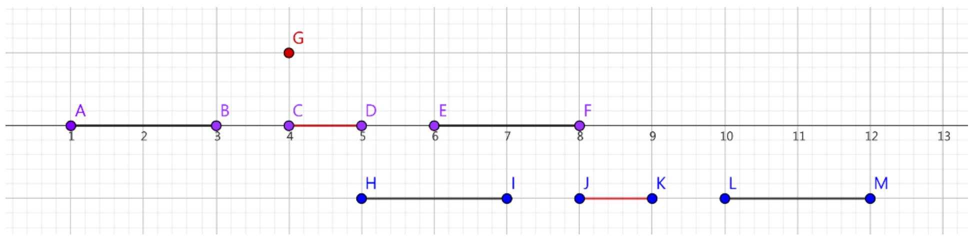
同上，可從$x = b_1 + 1$處再做一次和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$相同的三線段$\overline{HI}$、$\overline{JK}$、$\overline{LM}$，以此類推，不同於前面的例子，如上圖所示，有兩個必勝點在$\overline{CD}$內。



(圖四) (由第一作者製作)

作法同前，發現當m固定，l越大時，$\overline{CD}$內有越多必勝點。

3. $m - 1 = p > l$ (以$m - 1 = p = 3$，$l = 2$ 為例)：



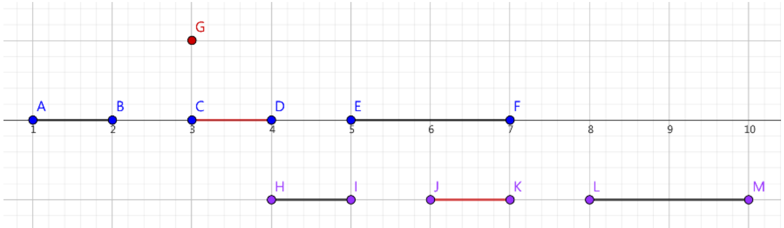
(圖五) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=(2m+l-1)r$ 與 $x=(2m+l-1)r+m$。

4. $l>m-1=p$：

同 3.，若l、p越大，$\overline{CD}$內有越多必勝點。

5. $p>l=m-1$ (以$m-1=l=2$， $p=3$ 為例)：



(圖六) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=(k+m+1)r$ 與 $x=(k+m+1)r+m$。

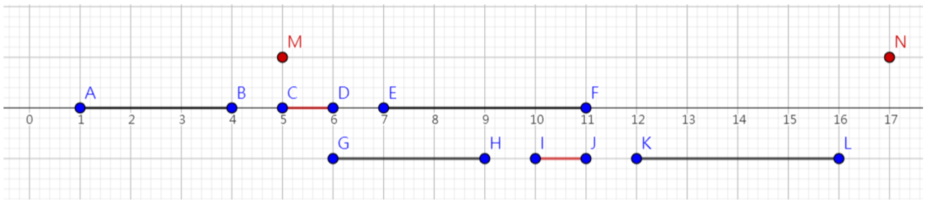
6. $l>p>m-1$：

同 3.若l越大，$\overline{CD}$內有越多必勝點。

7. $p>l>m-1$：

同 3.若l越大，$\overline{CD}$內有越多必勝點。

8. $p>m-1>l$ (以$m-1=4$， $l=2$， $p=5$ 為例)：



(圖七) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=(m+k+1)r$ 與 $x=(m+k+1)r+m$。

由上述 1.至 13.可以得出當$l>m-1$時，無法確定$\overline{CD}$內會有多少必勝點，因此我們發現當在$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{\mathrm{j}=1}^{l}$為一連續數列，且$p\geq m$時，可以直接討論$\overline{CD}$內必勝點數量，就可以推得當$p\geq m$時$x$的公式解。

令$l=mq+r(q,r\in\mathbb{Z}$ 且$q,r\geq 0)$。在第一個循環裡可以找到當

$x=m,2m,3m,\ldots,(q+1)m,(1+q)m+k+1$，共$(2+q)$個解。

$\Rightarrow$ x的必勝點為$[(1+q)m+k+1]r,[(1+q)m+k+1]r+m,$

$[(1+q)m+k+1]r+2m,\ldots,[(1+q)m+k+1]r+(q+1)m$。

1. $m-1=p$時的必勝策略。

我們發現當$m-1=p$時的必勝情況。

設$l=mq+r$，則

$\{(k+1)t+m,(k+1)t+2m,\ldots\ldots,(k+1)t+(q+1)m,(k+1)(t+1):r\in\mathbb{Z}$

且 $1\le r\le m\}$為 A 的必勝點(後手有必勝策略)。

(1)考慮$1\le x\le m+l-1=(q+1)m+(t-1)$。

因為$m+l,\ldots\ldots,m+l+p-1$皆無法使用，故與原始的拈問題相同，可知

$m,2m,\ldots\ldots,(q+1)m$為 A 之必勝點。

(2)考慮$m+l\le x\le k+1=m+l+p$。

因為 B 可直接取$m+l,m+l+1,\ldots\ldots,m+l+p-1=k$中的任意數，

故$m+l,m+l+1,\ldots\ldots,m+l+p-1=k$不為 A 之必勝點，

設$x=k+1=m+l+p$。

若b為 B 第一個減去的數，則$b\in\{1,\ldots\ldots,m-1\}\cup\{m+l,\ldots\ldots,m+l+p\}$。

A 減去$(k+1)-b$，A 一定獲勝。

其中可知$(k+1)-b\in\{1,\ldots\ldots,m-1\}\cup\{m+l,\ldots\ldots,m+l+p\}$。

可知在1至$k+1$中，A 之必勝點為$m,2m,\ldots\ldots,(q+1)m,k+1$，

共$(q+2)$個必勝點。

假設在$(t-1)(k+1)+1$至$t(k+1)$中，

$(t-1)(k+1)+m,(t-1)(k+1)+2m,\ldots\ldots,(t-1)(k+1)+(q+1)m,$

$t(k+1)$為 A 之必勝點。

考慮 $t(k+1)+1\le x\le(t+1)(k+1)$，

(1)設$x=t(k+1)+y$，且$y\in\{1,\dots\dots,m-1\}\cup\{m+l,\dots\dots,m+l+p\}$。

則因$t(k+1)$為 A 之必勝點，且 B 可直接減去y，可知x不為 A 之必勝點。

(2)設$x=(t+1)(k+1)$，則 B 減去的數為b'，則 A 接下來則減去

$(k+1)-b'$，依此可維持每次 A 減完數字之後，所剩數字為

$(k+1)$的倍數。

故$(t+1)(k+1)$為 A 的必勝點。

(3)設$x=t(k+1)+l\times m$，其中$1\le l\le q+1$。

則可依前述方式，使所剩數字為$l\times m$，此時$m+l,\dots\dots,m+l+p-1$皆無法使用，故由開始的拈問題可知$t(k+1)+l\times m$為 A 之必勝點。

所以$t(k+1)+m,t(k+1)+2m,\dots\dots,t(k+1)+(q+1)m$皆為 A 之必勝點。

(4)設$x=t(k+1)+y$，且$y\in\{m,\dots\dots,m+l-1\}$，且$y$不為$m$的倍數。

可設$y=um+v$，其中$1\le u\le q+1,1\le v\le m-1$，B 可先減去$v$，剩下$t(k+1)+um$，此後若 A 減去$t$，則 B 接著減去$(k+1)-t$，至剩下的數為$um\le y\le m+l-1$，因此時只能減去$1$至$m-1$中的數，由原始的拈問題可知，$x$為 B 之必勝點。

2. $m-1<p$時的必勝策略。

設$l=mq+r$，則在 1 至$k+m+1$中$m,2m,3m,\dots,(q+1)m$為 A 的必勝點

(後手有必勝策略)。

若$m\ge l$，則$k+m+1$亦為 A 的必勝點。

(1)考慮$1\le x\le m+l-1=(q+1)m+(r-1)$。

因為$m+l,\dots\dots,m+l+p-1$皆無法使用，故與原始的拈問題相同，可知$m,2m,\dots\dots,(q+1)m$為 A 之必勝點，且其餘點不為 A 的必勝點。

(2)考慮$m+l\le x\le m+l+p-1=k$。

因為 B 可直接取$m+l,m+l+1,\dots\dots,m+l+p-1=k$中的任意數，

故$m+l,m+l+1,\dots\dots,m+l+p-1=k$不為 A 之必勝點。

(3)考慮$m+l+p=k+1\le x\le k+m$。

因為$l+p \le x-m \le k$，由$m-1<p$可知$l+p \ge l+m$，故 B 可直接取

$x-m$，此時剩下m，可知為 B 的必勝點。

設$m \ge l$。

(1)假設在$x=k+m+1$，b為 B 第一個減去的數且$b \in \{1, \ldots\ldots, m-1\}$，因為$m-1<p$，A 減去$(k+1)-b$，此時剩下$m$，可知為 A 的必勝點。

(2)假設$x=k+m+1$，b為 B 第一個減去的數且$b \in \{m+l, \ldots\ldots, m+l+p-1\}$

若$b \in \{l+p+1 \ldots\ldots, m+l+p-1\}$，A 減去$(k+1)-b$，此時

$(k+1)-b \in \{1 \ldots\ldots, m-1\}$且剩下$m$，可知為 A 的必勝點。

接著考慮$b \in \{m+l \ldots\ldots, l+p\}$。

若$b \le k+1-(m+l)=p$，則 A 減去$k+1-b \ge \mathrm{m}+\mathrm{l}$，此時剩下m，可知為

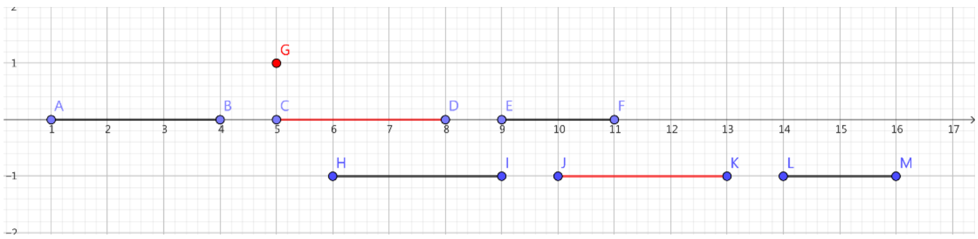
A 之必勝點。

若$p+1 \le b \le l+p$，因為剩下的數$\ge 2m$且$\le 2m+l-1$，又因$m \ge l$，

則$2m \ge m+l$，A 減去剩下的數即可獲勝。

(三) 將$\langle \mathrm{a_i} \rangle_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}}$畫成數線討論當$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}}$為一連續數列，且$p \le m$的必勝點的情況。

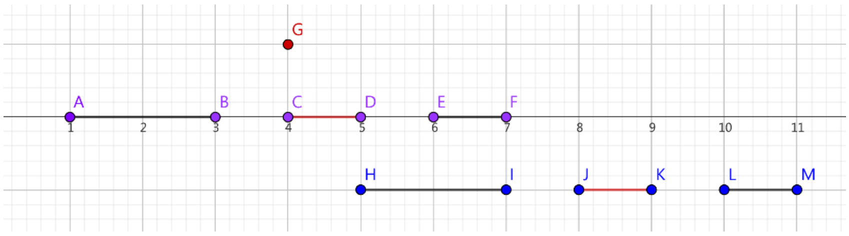
1. $m-1=l>p$(以$m-1=l=4$，$p=3$為例)：



(圖八) (由第一作者製作)

同上，可從$x=b_1+1$處再做一次和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$相同的三線段$\overline{HI}$、$\overline{JK}$、$\overline{LM}$，接著又可以在$x=a_k+1$發現另一個必勝點，以此類推，我們可以找到當$m-1=l>p$時，必勝點為$x=(k+1)r$或$x=(k+1)r+m$。

2. $m-1>l=p$ (以$m=4$，$p=l=2$ 為例)：

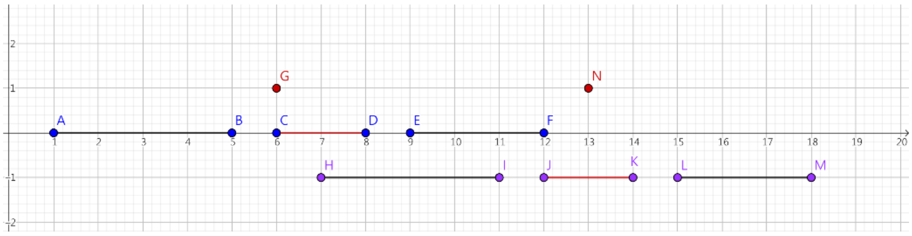


(圖九) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=(2m)r$ 與 $x=(2m)r+m$（即$x=mr$）。

3. $m-1>p>l$：

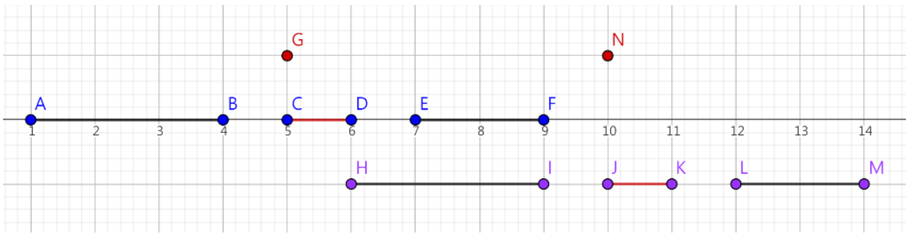
(1)$m<l+p$　(以$m-1=5$， $l=3$， $p=4$ 為例)：



(圖十) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=(k+1)r$ 與 $x=(k+1)r+m$。

(2)$m\geq l+p$ (以$m-1=4$， $l=2$， $p=3$ 為例)：

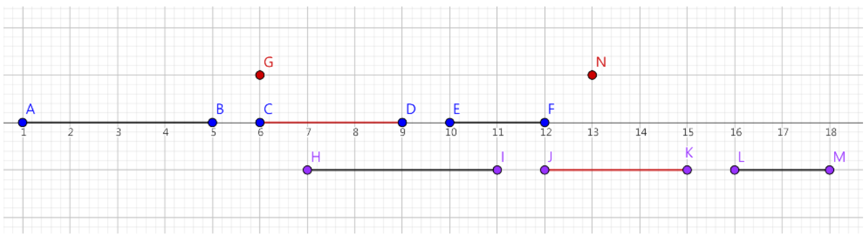


(圖十一) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=2mr$ 與 $x=2mr+m$。

4. $m-1>l>p$：

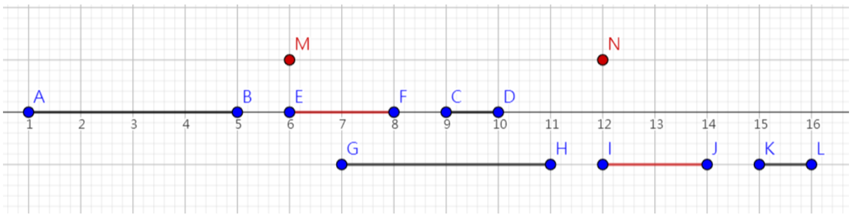
(1)$m<l+p$　(以$m-1=5$， $l=4$，$p=3$ 為例)：



(圖十二) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x=(k+1)r$ 與 $x=(k+1)r+m$。

(2)$m \geq l + p$ (以$m - 1 = 5$，$l = 3$， $p = 2$ 為例)：



(圖十三) (由第一作者製作)

作法同前，必勝點為$x = 2mr$ 與 $x = 2mr + m$。

5. $l > m - 1 > p$：

同 3.若l越大，$\overline{CD}$內有越多必勝點。

證明：

1. $m - 1 > p$時的必勝策略。

(1) 若$m \geq l + p$。

可知在 1 至k中m為 A 的必勝點。

考慮$1 \leq x \leq m + l - 1$因為$m + l, \dots\dots, m + l + p - 1$皆無法使用，故與原始的拈問題相同，可知$m$為 A 之必勝點，且其餘點不為 A 的必勝點。

考慮$m + l \leq x \leq k = m + l + p - 1$，因為 B 可直接取

$m + l, m + l + 1, \dots\dots, m + l + p - 1 = k$中的任意數，

故$m + l, m + l + 1, \dots\dots, m + l + p - 1 = k$不為 A 之必勝點。

假設在$(t - 1)m + 1$至$t \times m$中，$t \times m$為 A 之必勝點。

考慮$t \times m + 1 \leq x \leq (t + 1) \times m$。

設$x = t \times m + y$，且$y \in \{1, \dots\dots, m - 1\}$。

則因tm為 A 之必勝點，則 B 可直接減去y，可知x不為 A 的必勝點。

設$x = (t + 1) \times m$，若 B 減去的數為$b \in \{1, \dots\dots, m - 1\}$，則 A 接下來減去$m - b$；若 B 減去的數為$b' \in \{m + l, \dots\dots, m + l + p - 1\}$，則 A 接下來減去$2m - b' \in \{1, \dots\dots, m - 1\}$(因為$m \geq l + p$，可知$m - 1 \geq 2m - b' \geq 1$)，依此

可維持每次 A 減完數字後所剩的數為m的倍數。可知$(t+1)\times m$為 A 的必勝點。

(2) 若$m-1< \ l+p$且$m\geq l$。

可知在 1 至$k+1$中$m,k+1$為 A 的必勝點。

考慮$1\leq x\leq m+l-1$因為$m+l,\ldots\ldots,m+l+p-1$皆無法使用，故與原始的拈問題相同，可知m為 A 之必勝點，且其餘點不為 A 的必勝點。

考慮$m+l\leq x\leq k=m+l+p-1$，因為 B 可直接取

$m+l,m+l+1,\ldots\ldots,m+l+p-1=k$中的任意數，

故$m+l,m+l+1,\ldots\ldots,m+l+p-1=k$不為 A 之必勝點。

考慮$m+l+p=k+1=x$。

若 B 取的第一個數為$b\ \in\{1,\ldots\ldots,p\}\cup\{m+l,\ldots\ldots,m+p+l-1\}$，則 A 取

$(k+1)-b\in\{1,\ldots\ldots,p\}\cup\{m+l,\ldots\ldots,m+p+l-1\}$。

若 B 取的第一個數為$b\ \in\{p+1,\ldots\ldots,m-1\}$，則 A 取

$(l+p-b)\in\{l+p-m+1,\ldots\ldots,l-1\}$(因$m\leq l$，可知$(l+p-b)\in\{1,\ldots\ldots,m-1\}$)，所剩數字為$m$，綜合上述$k+1$為 A 的必勝點。

假設在$(t-1)(k+1)+1$至$t(k+1)$中，

$(t-1)(k+1)+m,t(k+1)$為 A 之必勝點。

考慮 $t(k+1)+1\leq x\leq(t+1)(k+1)$，

設$x=t(k+1)+y$，且$y\in\{1,\ldots\ldots,m-1\}\cup\{m+l,\ldots\ldots,m+l+p\}$。

則因$t(k+1)$為 A 之必勝點，且 B 可直接減去y，可知x不為 A 之必勝點。

設$x=t(k+1)+m$，且 B 減去的數為$b'\in\{1,\ldots\ldots,m-1\}$，則 A 接下來則減去$m-b'$，所剩數字為$t(k+1)$。

設$x=t(k+1)+m$，且 B 減去的數為$b'\in\{m+l,\ldots\ldots,m+p+l-1\}$，則 A 接下來則減去$(k+1)-b'$，所剩數字為$t(k+1)$。

可知$t(k+1)+m$為 A 之必勝點。

設$x=(t+1)(k+1)$，且 B 減去的數為$b'\in\{1,\ldots\ldots,p\}\cup\{m+l,\ldots\ldots,m+p+l-1\}$，則 A 接下來則減去$(k+1)-b'$，依此可維持每次 A 減完數字之後，所剩數字為$(k+1)$的倍數。

故$(t+1)(k+1)$為 A 的必勝點。

設$x=(t+1)(k+1)$，且 B 減去的數為$b'\in\{p+1,\ldots\ldots,m-1\}$，則 A 接下來則減去$l+p-b'$，則所剩數字為$t(k+1)+\mathrm{m}$。

可知$(t+1)(k+1)$為 A 的必勝點。

設$x=t(k+1)+y$，且$y\in\{m+1,\ldots\ldots,m+l-1\}$。

B 可先減去$y-m$，剩下$t(k+1)+m$， x不為 A 之必勝點。

肆、 研究結果

一、 $\langle \mathrm{b_j}\rangle_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}}$不存在時的結果為 $x=(k+1)n$。

二、 $\langle \mathrm{b_j}\rangle_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}}$為一連續數列，且$p\geq m$時必勝點為$[(1+q)m+k+1]r$, $[(1+q)m+k+1]r+m, [(1+q)m+k+1]r+2m$, $[(1+q)m+k+1]r+3m,\ldots,[(1+q)m+k+1]r+(q+1)m$。

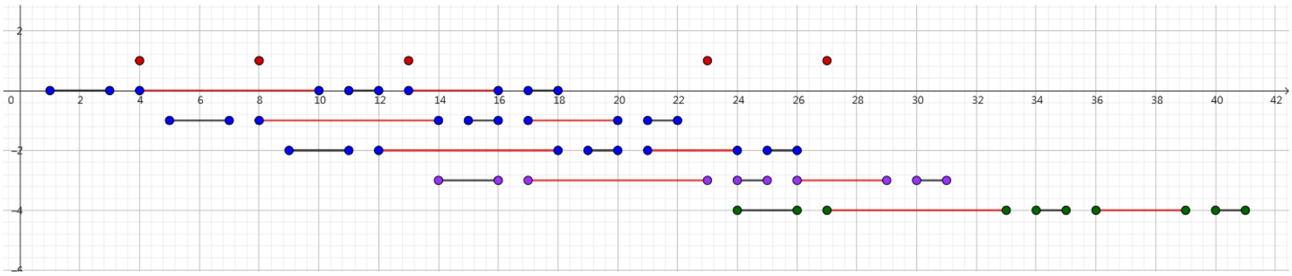
三、 $\langle \mathrm{b_j}\rangle_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}}$為一連續數列，且$m-1=p$，必勝點為 $\{(k+1)t+m,(k+1)t+2m,\ldots\ldots,(k+1)t+(q+1)m,(k+1)(t+1):t\in\mathbb{Z}\}$。

四、 $\langle \mathrm{b_j}\rangle_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}}$為一連續數列，且$m-1>p$

1. $m\geq l+p$，必勝點為$\{t\times m: t\in\mathbb{Z}\}$。
2. $m\leq l+p$，必勝點為$\{t(k+1)+m,(k+1)(t+1):t\in\mathbb{Z}\}$。

伍、 討論

在$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{l}}$為一不完全連續數列時，我們發現其必勝點會在許多不一樣地方出現。



(圖十四)(由第一作者製作)

1. 如圖十四所示，當$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j}=1}^{l}$為兩段連續數列組成時，必勝點可能會在許多不一樣的地方出現，我們發現在某些情況下，由一個必勝點所延伸之第二段紅色線段(及該必勝點$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j}=1}^{l}$後段連續數列)可能與下一個必勝點的前段紅色線段有交集。若假設$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j}=1}^{l}$是許多段連續數列(例如：$\langle \mathrm{b_j} \rangle_{\mathrm{j}=1}^{10} = \langle 2,3,5,6,7,8,10,11,12,15 \rangle$)，則會變得相當複雜，但我們仍可以直接使用最前面所述之方法二來找出必勝點。
2. 當$m-1>p$且$l>m$時，在不同的數字條件下，我們無法確認每個循環之間的區間大小，因此我們目前只能從數字中找出規律，尚無法進一步推導出必勝點公式，僅能使用最前面所述之方法二來找出必勝點。

陸、結論

由此研究得出當我們在玩單堆拈時，給定從 1 開始的連續數列，接著再將部分數字刪除，可以利用我們求出的公式找出必勝點。但是當刪掉部分為不完全連續的數字且刪掉的數字量大於 2 時，我們仍只能用方法一及方法二或數線求解，期望在我們持續研究下，能推算出所有情況的必勝點公式並設法推廣到多堆拈。

此外，我們想到數線的概念及最終的結果可以應用在生活中。例如紅綠燈：當每一燈號可停留的秒數為特定幾個值，如同先手後手可減去的數字有限制，利用類似的概念，優化交通秩序，可以減少汽、機車廢氣的排放以及民眾等待的時間，達到減少能源使用和空氣汙染。此外例如排班表：假設一個值班周期是一週(7 天)，那麼就可以套入$n=7$的情況，並選擇上班日或休息日的規律，依照每個人不同的需求，調整上班與休息之間隔，不但對身心有一定的幫助，也可提高整體的工作效率，以達到最佳平衡。

柒、 參考文獻

一、尼姆遊戲。維基百科。

二、張鎮華。拈及其各種變型遊戲。數學傳播季刊, 第 3 卷第 2 期, 6-15。

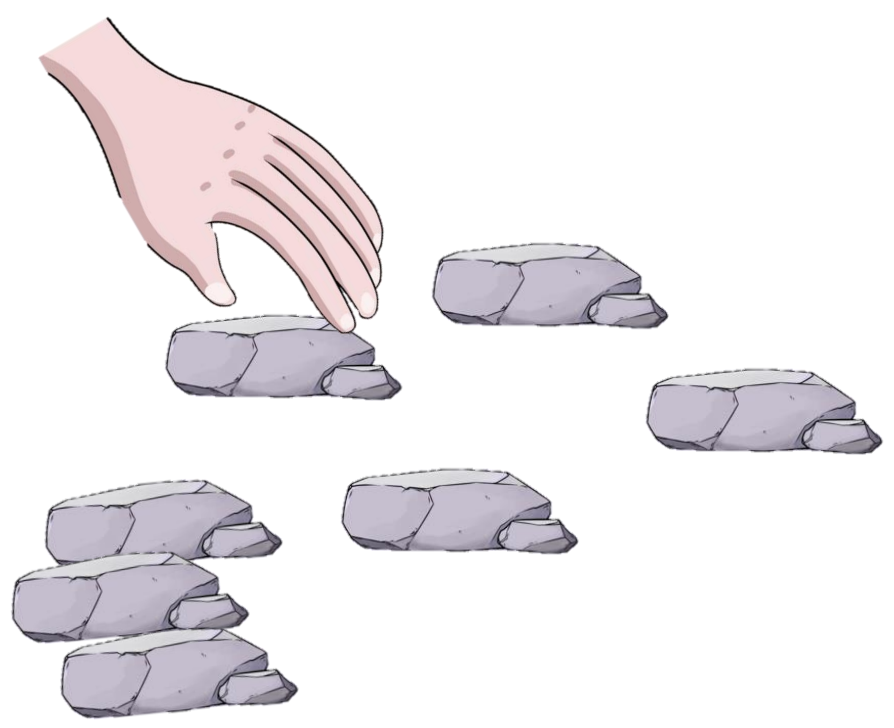
三、張進安。有關單堆積偶的拈。數學傳播季刊, 第 47 卷第 3 期, 72-79。

四、曾柏翔、吳語陞。數學增減遊戲分析以一加一打手指遊戲和拈為例。

【評語】050411

本作品探討一個拈遊戲的變型：起始有一正整數 n，兩位玩家輪流取將 n 減去數值，最終減至 0 者勝，規定可以減的數為{1, 2, . . . , k}\C。然而，作者用直接討論的方法做出一些特例，共計如下：k=4, C={2}、k=4, C={3} 、 k=4, C={2, 3} 、 k=8, C={3, 6} 、 k=10, C={3, 6} 、k=5, C={2, 4}、k=5, C={3, 4}、和 k∈ℕ, C 是一個區間。因其結果與同餘相關，只須逐一討論即可。本作品分析有條有理，且輔以圖形解說，建議深化討論不連續情況。

作品簡報



拈拈有餘—單堆拈必勝策略探討

壹、前言

本文以單堆拈有關的問題出發，討論當給定首項為 1 的連續數列，接著再就未刪除、刪除不同長度連續或不連續的數列等條件，觀察結果並找出其必勝策略。在刪除特定數列時，發現必勝點的數量與大小和「刪除的數列的首項」及「刪除的數列的長度」有關，最後將其簡化成公式。

一、研究動機：

在暑假時，因為熱愛數學，所以報名了營隊，上課的時候，老師給了我們一道題目如下：「與對手猜拳，輸的人先決定一個不大於10的正整數n，贏的人決定當先手或後手。雙方輪流依次減去1到3的正整數，最後使n減至0者獲勝，則必勝策略為何？」

因緣際會下，我們認識了數學益智遊戲——單堆拈，發現初始的遊戲設定有簡單的必勝策略，但此必勝策略僅能使用在可減去的數字為連續正整數的情況。若改變條件，使可減去的數字不連續，則此必勝策略不再管用。這讓我們感到非常有趣，因此我們決定深入探討可減去的數字不連續時的必勝策略。

二、研究目的：

探討以公式表示單堆拈的必勝點。

貳、研究設備及器材

白板、筆記型電腦(GeoGebra經典6版、Microsoft Word 2019)。

參、研究過程及方法

一、問題討論及初步推廣：

問題：

與對手猜拳，輸的人先決定一個不大於10的正整數n，贏的人決定當先手或後手。雙方輪流依次減去1到3的正整數，最後使n減至0者獲勝，則後手的必勝策略為何？

【解】

方法一：

令有兩玩家A、B，其中A為後手。

定義：A的必勝點為可以確保後手A必勝的數。

(1)當$n = 1$、2、3時，B可直接減去1、2或3，所以1、2、3不為A的必勝點。

(2)當$n = 4$時，因B只能減去1到3的整數，若B減去1則A減去3，若B減去2則A減去2，若B減去3則A減去1，A 必定獲勝。所以4為A的必勝點。

(3)當$n = 5$、6、7時，因B必可將n減為4，此時回到$n = 4$的情形，此時可視A為先手。由上述討論可知B必勝，所以5、6、7不為A的必勝點。

(4)當$n = 8$時，因B減去1到3任一數時，A必可將n減為4，此時回到$n = 4$的情形，所以8也是A的必勝點。

同理，對A而言，當$4|n$時，n皆為A的必勝點。

方法二：

由方法一可知，當一個數可直接由必勝點減去數字得到，則此點不為必勝點。根據題目所述，當$n = 0$時，A獲勝，可知0為A的必勝點，接著可由0逆推其餘必勝點：1、2、3可由0直接走到⇒4為必勝點；5、6、7可由4直接走到⇒8為必勝點；依此類推可得下表。（○代表A的必勝點，╳代表不為A的必勝點。）

（此圖表由第一作者製作）

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
○	╳	╳	╳	○	╳	╳	╳	○	╳	╳

所以對A而言，如同方法一所述，可知當$4|n$時，該點為必勝點。

二、符號定義：

1. $\langle a_i\rangle_{i=1}^{k} = \langle 1,2,\cdots,k\rangle$。

2. $\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$為$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{i=1}^{k}$中不可減去的數所組成的數列，其中$l \in \mathbb{N}$且$1, k$不在$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$中，$b_1 < b_2 < \cdots < b_l$。

例如：(1)在初始問題中，兩玩家可減去的數為1, 2, 3，則$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{i=1}^{k} = \langle 1,2,3\rangle$，$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$不存在。

(2)假設1, 2, 4, 6, 7為兩玩家可減去的數，則$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{i=1}^{k} = \langle 1,2,3,4,5,6,7\rangle$，$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l} = \langle 3,5\rangle$。

3. 當$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$為連續數列時，令$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l} = \langle \mathrm{a}_m, \mathrm{a}_{m+1}, \ldots, \mathrm{a}_{m+l-1}\rangle$，且$a_{m+l}$到$a_k$之長度$k-m-l+1$為$p$。

例如：當$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{i=1}^{10} = \langle 1,2,\ldots,10\rangle$、$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{4} = \langle 4,5,6,7\rangle$時，$\Rightarrow m = 4 \Rightarrow p = \mathrm{a_8}$~$\mathrm{a_{10}}$的長度$= 3$。

三、研究流程

（此圖表由第一作者製作）

(一)給定$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{i=1}^{k}$、$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$，推出必勝點，觀察結果。

1. $\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$不存在
2. $l = 1$
3. $l = 2$

(二)將$\langle \mathrm{a_i}\rangle_{i=1}^{k}$畫成數線，討論當$\langle \mathrm{b_j}\rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列時，必勝點的情況。

1. $m-1 = l = p$
2. $m-1 = l > p$
3. $l = p > m-1$
4. $m-1 = p > l$
5. $m-1 > l = p$
6. $l > m-1 = p$
7. $p > l = m-1$
8. $m-1 > p > l$
9. $m-1 > l > p$
10. $l > m-1 > p$
11. $l > p > m-1$
12. $p > l > m-1$
13. $p > m-1 > l$

四、討論

令A為後手。

(一)給定$\langle a_i\rangle_{i=1}^{k}$、$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$，推出必勝點，觀察結果。

1. $\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$不存在：

舉例：

$\langle a_i\rangle_{i=1}^{4}=\langle 1,2,3,4\rangle$，A的必勝點為$x=5r$。

結論：當$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$不存在時，$x=(k+1)r$為A的必勝點。

證明：

考慮$1\le x\le k$。因B可直接減去x，因此不為A的必勝點。

考慮$x=k+1$。若B第一個減去的數為$b\in\{1,\dots\dots,k\}$，則A減去$(k+1)-b\in\{1,\dots\dots,k\}$，可知在1至$k$中A的必勝點為$k+1$。

令t為任意正整數。

假設在$(t-1)(k+1)+1$至$t(k+1)$中A的必勝點為$t(k+1)$。

設$x=t(k+1)+y$，且$y\in\{1,\dots\dots,k\}$，則因$t(k+1)$為A的必勝點，則B可直接減去y，可知x不為A之必勝點。

設$x=(t+1)(k+1)$， 若B第一個減去的數為b'則A接下來減去$(k+1)-b'$，因此可在每次A減完後仍維持在$k+1$的倍數，故$(t+1)(k+1)$為A之必勝點。

2. $l=1$：

舉例：$\langle a_i\rangle_{i=1}^{4}=\langle 1,2,3,4\rangle$且$b_1=2(m=2,p=2)$，A的必勝點為

$x=7r$與$x=7r+2$。（此圖表由第一作者製作）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	○	×	×	×	×	○	×	○	×
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	×	×	○	×	○	×	×	×	×
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
○	×	○	×	×	×	×	○	×	○

3. l=2：

舉例：$\langle a_i\rangle_{i=1}^{4}=\langle 1,2,3,4\rangle$且$b_1=2$， $b_2=3(m=2,p=1)$，A的必勝點為$x=5r$與$x=5r+2$。（此圖表由第一作者製作）

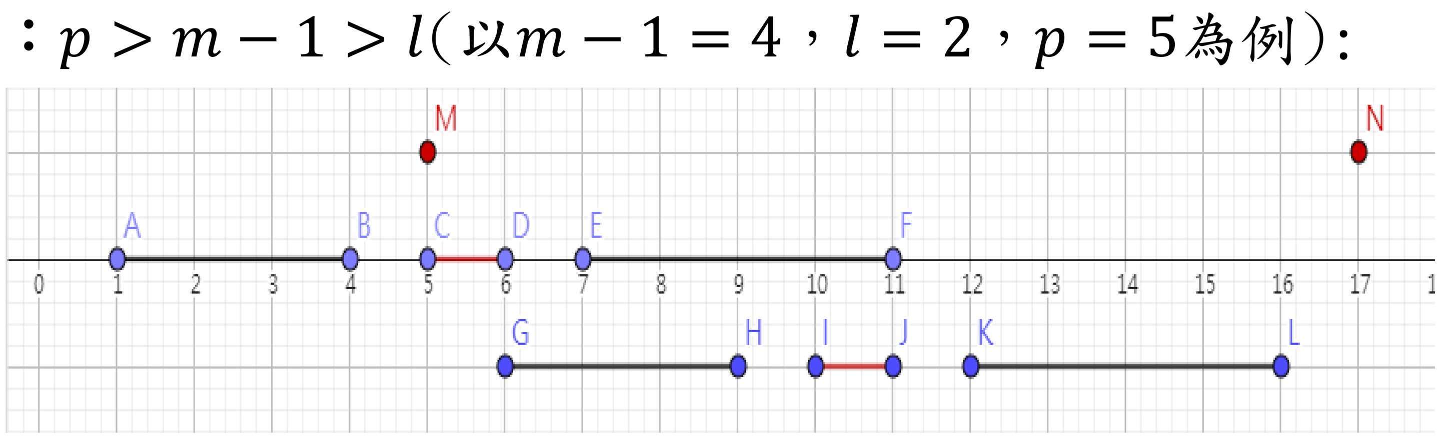
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	○	×	×	○	×	○	×	×	○
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
×	○	×	×	○	×	○	×	×	○

我們在給定$\langle a_i\rangle_{i=1}^{k}$和$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$的情況下，發現$m$、$l$、$p$的大小會造成必勝點的結果有不一樣的變化，因此將$m$、$l$、$p$以數線表示來討論。

(二)將$\langle a_i\rangle_{i=1}^{k}$畫成數線，討論當$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列，

且$p\ge m$的必勝點的情況。

舉例：$p>m-1>l$(以$m-1=4$，$l=2$，$p=5$為例)：

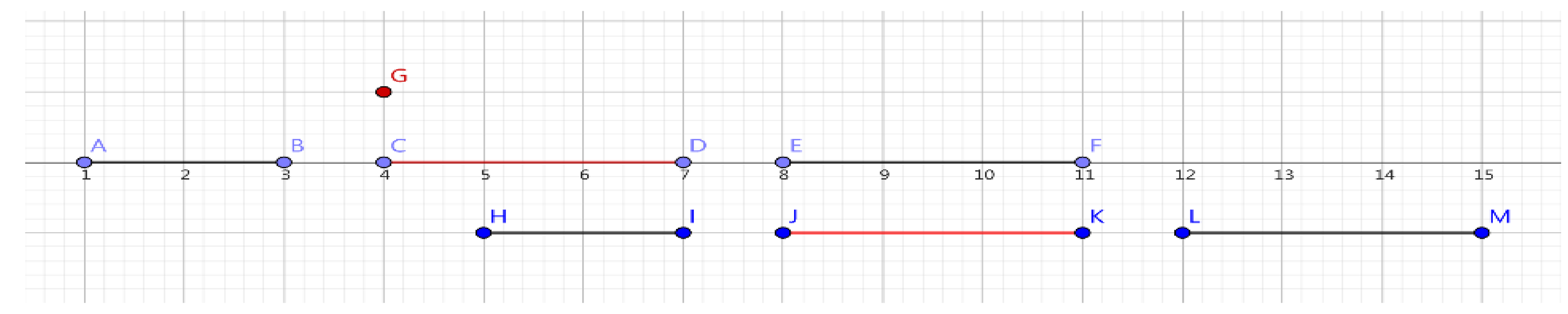


（此圖由第一作者製作）

將$a_1,a_2,\dots,a_{m-1}$、$b_1,b_2,\dots,b_l$、$a_{m+l},a_{m+l+1},\dots,a_k$以線段表示成$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$三線段，經過觀察，可以知道$x=b_1$（$M$點）是一個必勝點，依照方法二，可從$x=b_1+1$處再做一次和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$相同的三線段$\overline{GH}$、$\overline{IJ}$、$\overline{KL}$，接著又可以在$x=m+k+1$（$N$點）發現另一個必勝點，由此必勝點又可推得下一個必勝點，以此類推，我們可以找到當$p>m-1>l$時，必勝點為$x=(m+k+1)r$與$x=(m+k+1)r+m$

舉例： $l=p>m-1$：

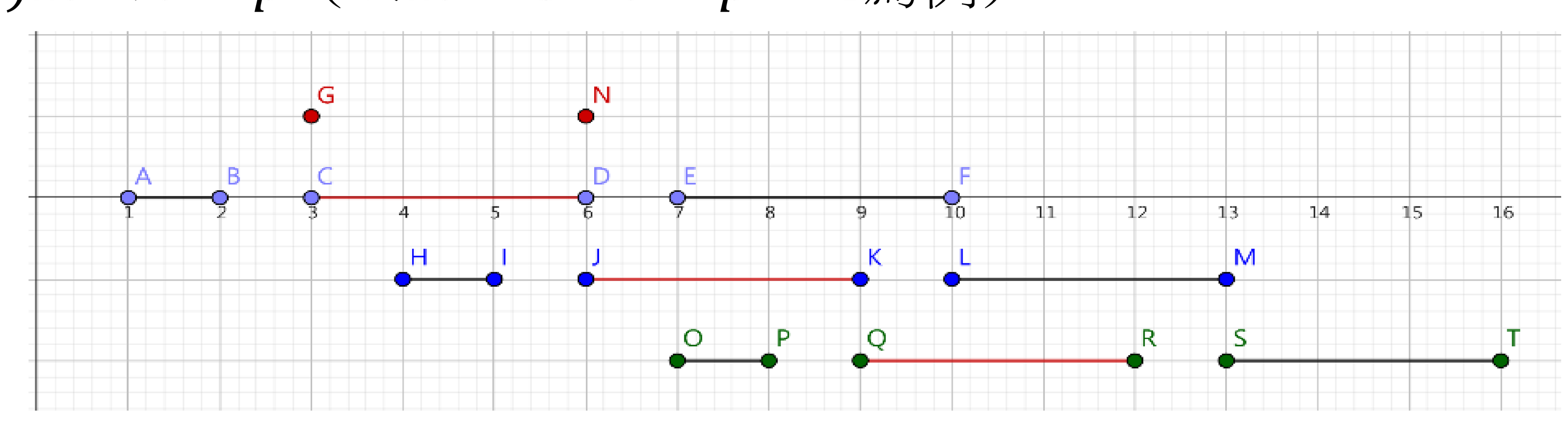
(1)$m=l=p$（以$m=l=p=4$為例）：



（此圖表由第一作者製作）

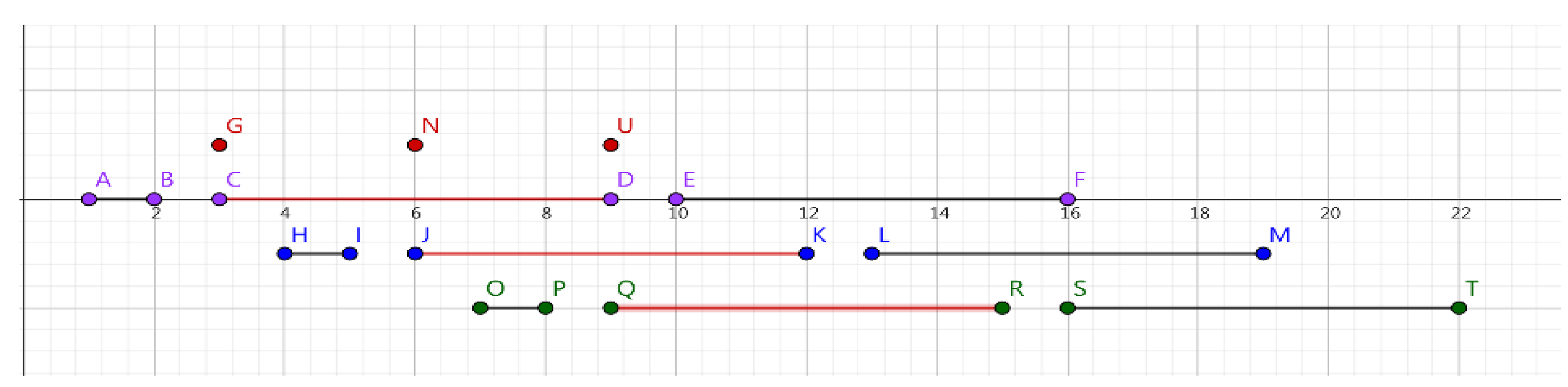
必勝點為$x=(k+m+1)r$與$x=(k+m+1)r+m$

(2)$m<l=p$（以$m=3$，$l=p=4$為例）：



（此圖表由第一作者製作）

不同於前面的例子，如上圖所示，有兩個必勝點在$\overline{CD}$內。



（此圖表由第一作者製作）

作法同前，發現當m固定，l越大時，$\overline{CD}$內有越多必勝點。

結論：令$l=mq+r(q,r\in\mathbb{Z}$且$q,r\ge 0)$。在第一個循環裡可以找到當$x=m,2m,3m,\dots,(q+1)m,(1+q)m+k+1$，共$(2+q)$個解。

$\Rightarrow$ x的必勝點為$[(1+q)m+k+1]r,[(1+q)m+k+1]r+m,[(1+q)m+k+1]r+2m,\dots,[(1+q)m+k+1]r+(q+1)m$。

證明：

我們發現當$m-1=p$時的必勝情況。

設$l=mq+r$，則$\{(k+1)t+m,(k+1)t+2m,\dots\dots,(k+1)t+(q+1)m,(k+1)(t+1):r\in\mathbb{Z}$

且$1\le r\le m\}$為A的必勝點(後手有必勝策略)。

(1)考慮$1\le x\le m+l-1=(q+1)m+(t-1)$。

因為$m+l,\dots\dots,m+l+p-1$皆無法使用，故與原始的拈問題相同，可知$m,2m,\dots\dots,(q+1)m$為A之必勝點。

(2)考慮$m+l\le x\le k+1=m+l+p$。

因為B可直接取$m+l,m+l+1,\dots\dots,m+l+p-1=k$中的任意數，故$m+l,m+l+1,\dots\dots,m+l+p-1=k$不為A之必勝點，

設$x=k+1=m+l+p$。

若b為B第一個減去的數，則$b\in\{1,\dots\dots,m-1\}\cup\{m+l,\dots\dots,m+l+p\}$。

A減去$(k+1)-b$，A一定獲勝。

其中可知$(k+1)-b\in\{1,\dots\dots,m-1\}\cup\{m+l,\dots\dots,m+l+p\}$。

可知在1至$k+1$中，A之必勝點為$m,2m,\dots\dots,(q+1)m,k+1$，

共$(q+2)$個必勝點。

假設在$(t-1)(k+1)+1$至$t(k+1)$中，

$(t-1)(k+1)+m,(t-1)(k+1)+2m,\dots\dots,(t-1)(k+1)+(q+1)m$，

$t(k+1)$為A之必勝點。

考慮 $t(k+1)+1\le x\le(t+1)(k+1)$，

(1)設 $x=t(k+1)+y$，且$y\in\{1,\dots\dots,m-1\}\cup\{m+l,\dots\dots,m+l+p\}$ 。

則因$t(k+1)$為A之必勝點，且B可直接減去y，可知x不為A之必勝點。

(2)設$x=(t+1)(k+1)$，則B減去的數為b'，則A接下來則減去$(k+1)-b'$，依此可維持每次A減完數字之後，所剩數字為$(k+1)$的倍數。故$(t+1)(k+1)$為A的必勝點。

(3)設$x=t(k+1)+l\times m$，其中$1\leq l\leq q+1$。

則可依前述方式，使所剩數字為$l\times m$，此時$m+l,\dots\dots,m+l+p-1$皆無法使用，故由開始的拈問題可知$t(k+1)+l\times m$為A之必勝點。

所以$t(k+1)+m,t(k+1)+2m,\dots\dots,t(k+1)+(q+1)m$皆A之必勝點。

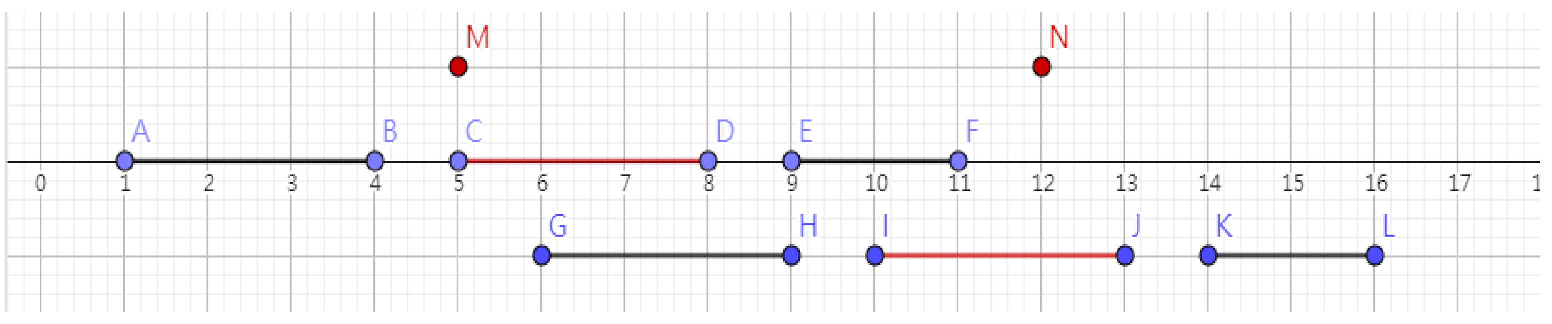
(4)設$x=t(k+1)+y$，且$y\in\{m,\dots\dots,m+l-1\}$，且$y$不為$m$的倍數。

可設$y=um+v$，其中$1\leq u\leq q+1,1\leq v\leq m-1$，B可先減去$v$，剩下$t(k+1)+um$，此後若A減去$t$，則B接著減去$(k+1)-t$，至剩下的數為$um\leq y\leq m+l-1$，因此時只能減去1至$m-1$中的數，由原始的拈問題可知，$x$為B之必勝點。

(三)將$\langle a_i\rangle_{i=1}^{k}$畫成數線討論當$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列，

且$p<m$的必勝點的情況。

舉例：$m-1=l>p$(以$m-1=l=4$，$p=3$為例)：



(此圖由第一作者製作)

同上，可從$x=b_1+1$處再做一次和$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$相同的三線段$\overline{GH}$、$\overline{IJ}$、$\overline{KL}$，接著又可以在$x=a_k+1$發現另一個必勝點，以此類推，我們可以找到當$m-1=l>p$時必勝點為$x=(k+1)r$或$x=(k+1)r+m$。

肆、研究結果

一、$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$不存在時的結果為$x=(k+1)n$。

二、 $\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列時且$p\geq m$必勝點為$[(1+q)m+k+1]r,[(1+q)m+k+1]r+m,$

$[(1+q)m+k+1]r+2m,[(1+q)m+k+1]r+3m,\dots,[(1+q)m+k+1]r+(q+1)m$。

三、$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列，且$m-1=p$，必勝點為

$\{(k+1)t+m,(k+1)t+2m,\dots\dots,(k+1)t+(q+1)m,(k+1)(t+1):t\in\mathbb{Z}\}$。

四、$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為一連續數列，且$m-1>p$

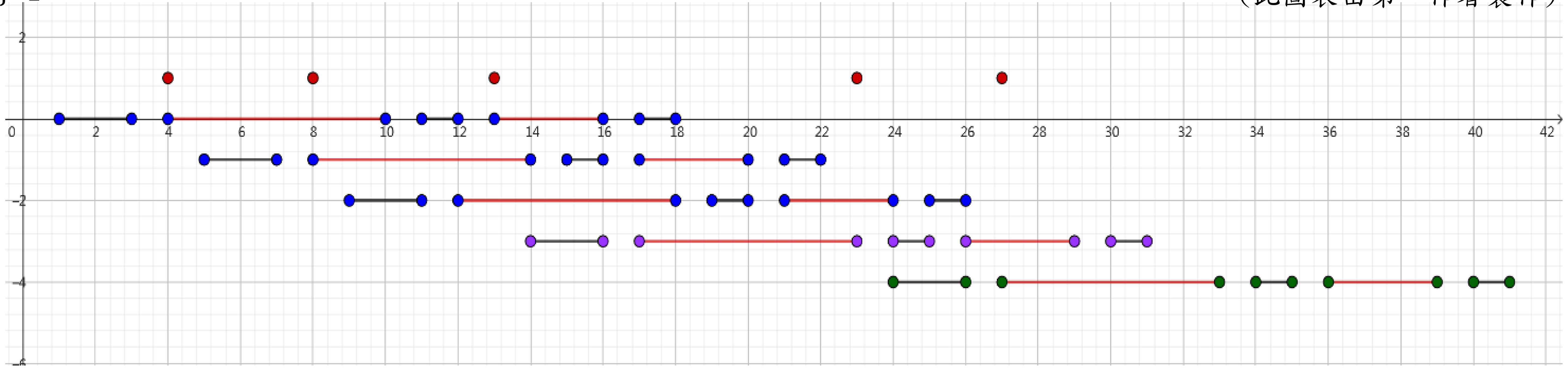
1.$m\geq l+p$，必勝點為$\{t\times m:t\in\mathbb{Z}\}$。

2.$m<l+p$，必勝點為$\{t(k+1)+m,(k+1)(t+1):t\in\mathbb{Z}\}$。

伍、討論

在$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為一不完全連續數列時，我們發現其必勝點會在許多不一樣的地方出現。

(此圖表由第一作者製作)



1. 如上圖所示，當$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$為兩段連續數列組成時，必勝點可能會在許多不一樣的地方出現，我們發現在某些情況下，由一個必勝點所延伸之第二段紅色線段(及該必勝點$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$後段連續數列)可能與下一個必勝點的前段紅色線段有交集。假設$\langle b_j\rangle_{j=1}^{l}$是許多段連續數列(例如：$\langle b_j\rangle_{j=1}^{10}=\langle 2,3,5,6,7,8,10,11,12,15\rangle$)，則會變得相當複雜，但我們仍可以直接使用最前面所述之方法二來找出必勝點。

2. 當$m-1>p$且$l>m$時，在不同的數字條件下，我們無法確認每個循環之間的區間大小，因此我們目前只能從數字中找出規律，尚無法進一步推導出必勝點公式，僅能使用最前面所述之方法二來找出必勝點。

陸、結論

由此研究得出當我們在玩單堆拈時，給定從1開始的連續數列，接著再將部分數字刪除，可以利用我們求出的公式找出必勝點。但是當刪掉部分為不完全連續的數字時，我們仍只能用方法一及方法二或數線求解，期望在我們持續研究下，能推算出所有情況的必勝點公式並設法推廣到多堆拈。

此外，我們想到數線的概念及最終的結果可以應用在生活中。例如紅綠燈：當每一燈號可停留的秒數為特定幾個值，如同先手後手可減去的數字有限制，利用類似的概念，優化交通秩序，可以減少汽、機車廢氣的排放以及民眾等待的時間，達到減少能源使用和空氣汙染。此外例如排班表：假設一個值班周期是一週(7天)，那麼就可以套入$n=7$的情況，並選擇上班日或休息日的規律，依照每個人不同的需求，調整上班與休息之間隔，不但對身心有一定的幫助，也可提高整體的工作效率，以達到最佳平衡。

柒、參考文獻

一、 尼姆遊戲。維基百科。二、 張鎮華。拈及其各種變型遊戲。數學傳播季刊， 第3卷第2期， 6-15。三、 張進安。有關單堆積偶的拈。數學傳播季刊， 第47卷第3期， 72-79。