

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

050410

雙圓繞行軌跡性質探討

學校名稱： 國立新竹科學園區實驗高級中等學校

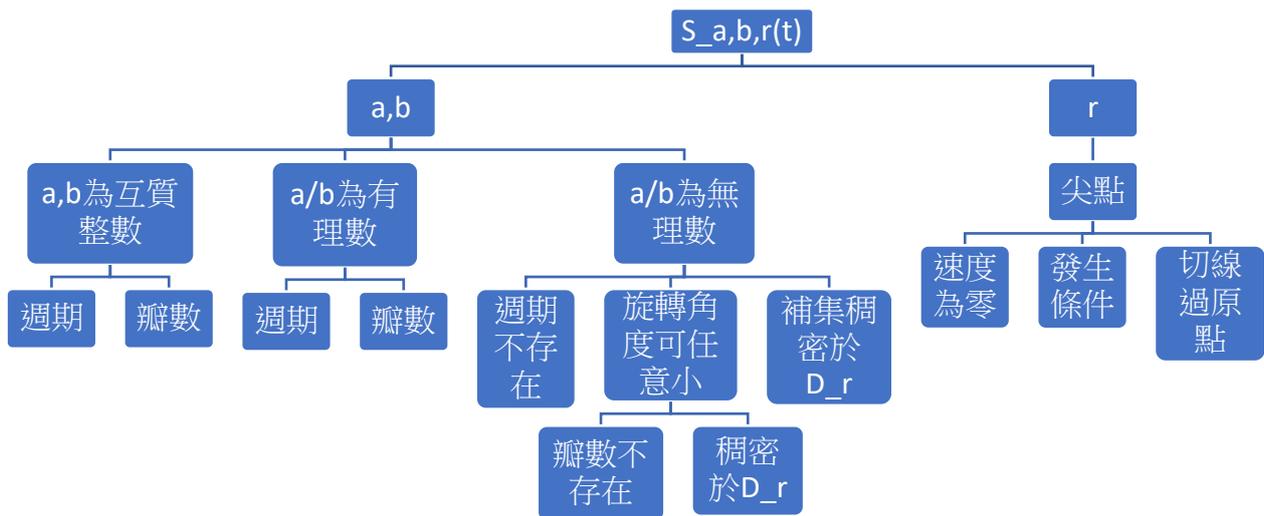
作者： 高二 盧亦恩	指導老師： 韓敏峻
---------------	--------------

關鍵詞： 軌跡、週期、稠密

# 摘要

本文探討雙圓軌跡繞行函數  $S_{a,b,r}(t) := (\cos at + r \cos bt, \sin at + r \sin bt)$  的圖形特徵及拓樸性質，利用 GeoGebra 繪圖觀察圖形模式，並使用微積分等分析學的手法進行證明。

本文主要分為兩個部分進行探討，分別研究變動  $a, b$  和變動  $r$  造成的現象。第一部分關於  $a, b$  的討論發現當  $\frac{a}{b}$  為有理數時，圖形將有明顯的週期性結構，因此我們定義並討論此函數的代數週期及幾何週期。當  $\frac{a}{b}$  為無理數時，圖形將不再有週期結構，然而其圖形卻會在一環狀區域  $D_r$  中稠密，並且圖形的補集也會在  $D_r$  中稠密。第二部分關於  $r$  的討論，發現當  $r$  在某些特定值時，圖形將產生尖點，並且此尖點可作出通過原點的圖形切線。脈絡如下所示(括號數字為定理編號)：



## 壹、研究動機

起初尋找專題題目時我並沒有好的想法，但我的指導老師在某次上課時給我看了前幾屆學長做的小專題，我被這些雙圓繞行形成的美麗圖形迷住了，如此簡單的函數竟然可以有這樣的樣貌。學長的小專題僅有對一些圖形做出觀察，指出角速度  $a, b$  與視覺上顯現的「瓣數」似乎有某些關聯，但很可惜的並沒有繼續發展，因此我決定接續下去，代替學長把這千變萬化的圖形給研究透徹。

## 貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra、Microsoft Office Word。

## 參、研究過程與方法

### 一、 $S_{a,b,r}$ 定義與基本性質

首先，我們定義相關符號及名詞。

#### 定義 1

定義非零實數為  $\mathbb{R}^*$ ，即  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ 。

定義正實數為  $\mathbb{R}^+$ ，即  $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ 。

定義非零整數為  $\mathbb{Z}^*$ ，即  $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$ 。

#### 定義 2

令  $(X, d)$  為一賦距空間， $E \subseteq X$ ， $p \in X$ ， $r > 0$ 。

定義  $B(p, r) := \{x \in X | d(p, x) < r\}$ ， $\bar{B}(p, r) := \{x \in X | d(p, x) \leq r\}$ ，

$\partial B(p, r) := \{x \in X | d(p, x) = r\}$ 。

若某點  $p \in X$  滿足  $\forall r > 0 (E \cap B(p, r) - \{0\} \neq \emptyset)$ ，則稱  $p$  為  $E$  的極限點 (limit point)。

定義  $E$  的閉包 (closure)  $\bar{E} := E \cup \{E \text{ 的極限點}\}$

若某點  $p \in X$  滿足  $\exists r > 0 (B(p, r) \subseteq E)$ ，則稱  $p$  為  $E$  的內點 (interior point)。

若某點  $p \in X$  為  $E$  的極限點，且為  $X - E$  的極限點，則稱  $p$  為  $E$  的邊界點 (boundary point)。

(註：若未特別說明，在本文中皆使用歐氏距離，例如在  $\mathbb{R}^2$  中，

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 。)

#### 定義 3

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。定義函數  $S_{a,b,r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ， $S_{a,b,r}(t) := (\cos at + r \cos bt, \sin at + r \sin bt)$ 。

或寫為行向量表示法  $S_{a,b,r}(t) := \begin{pmatrix} \cos at + r \cos bt \\ \sin at + r \sin bt \end{pmatrix}$ 。

當  $a = b$  或  $a, b, r$  其一為 0 時  $S_{a,b,r}(t)$  就化簡為圓形的參數式，不是本文討論的重點，

因此在往後的討論皆假設  $a, b$  相異且皆不為 0， $r \neq 0$ ，且不再特別註明。

(註：本文並不特別區別點坐標和位置向量，即  $S_{a,b,r}(t)$  雖為點坐標，但在不影響語意的前提下，文章中也直接當成位置向量。)

#### 定義 4

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。

$$I := \max\{|1 - r|, |1 + r|\}, i := \min\{|1 - r|, |1 + r|\}, D_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid i \leq d(x, (0,0)) \leq I\}$$

(註：顯然  $S_{a,b,r}$  的值域必定在此集合內，即  $S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \subseteq D_r$ 。)

若將恆星、行星、衛星皆視為質點，並將恆星置於坐標平面的原點。當某行星以角速度  $a$ 、半徑 1 繞行恆星，衛星再以角速度  $b$ 、半徑  $r$  繞行此行星時，則  $S_{a,b,r}(t)$  即描述在時間  $t$  的衛星位置，而函數  $S_{a,b,r}$  的值域  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  即為衛星軌跡，以下稱為  $S_{a,b,r}$  的圖形或簡稱為圖形。

為了研究函數  $S_{a,b,r}$  之性質，我們先固定  $r = 1$ ，將  $(a, b)$  代入幾個簡單的係數並觀察  $S_{a,b,r}$  的圖形，如圖 1 所示。在這情況  $a$  和  $b$  是對稱的，即  $S_{a,b,1} = S_{b,a,1}$ ，在這裡不展示。

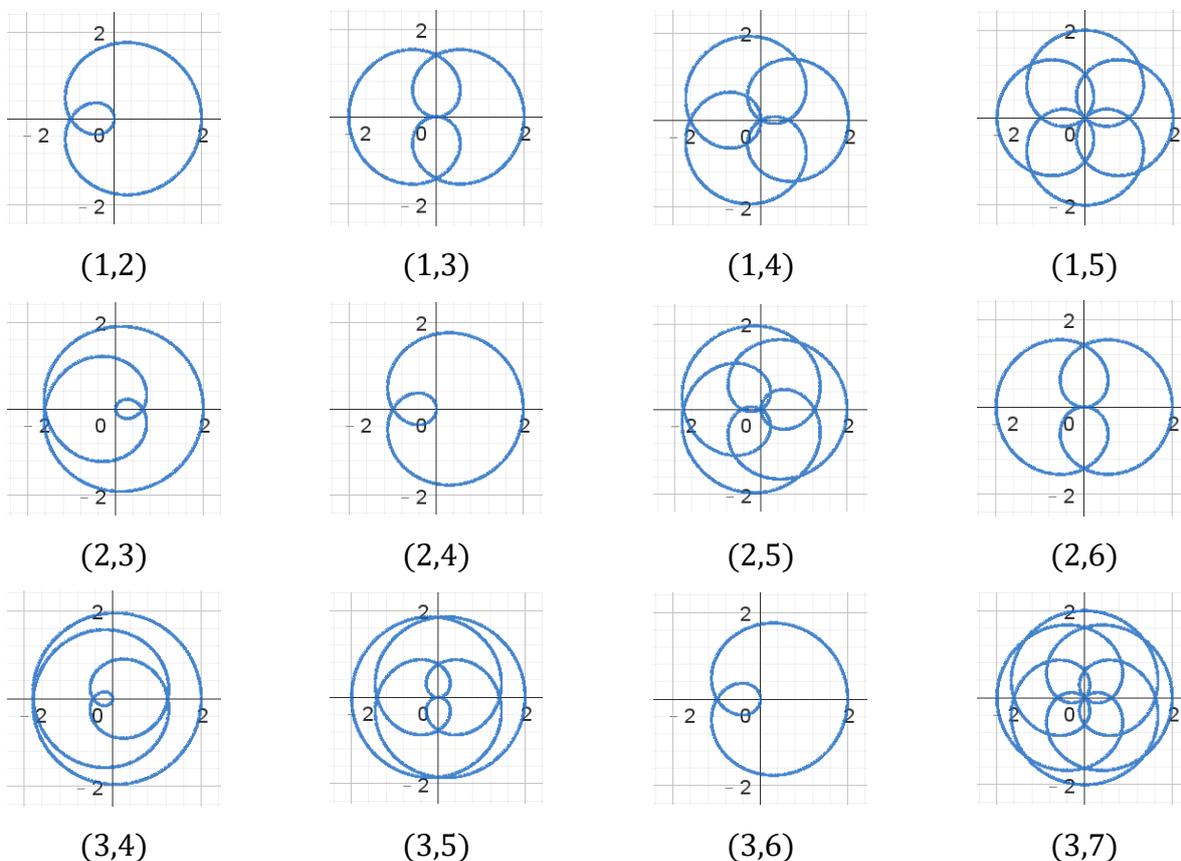


圖 1  $r = 1$  時，不同的  $(a, b)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

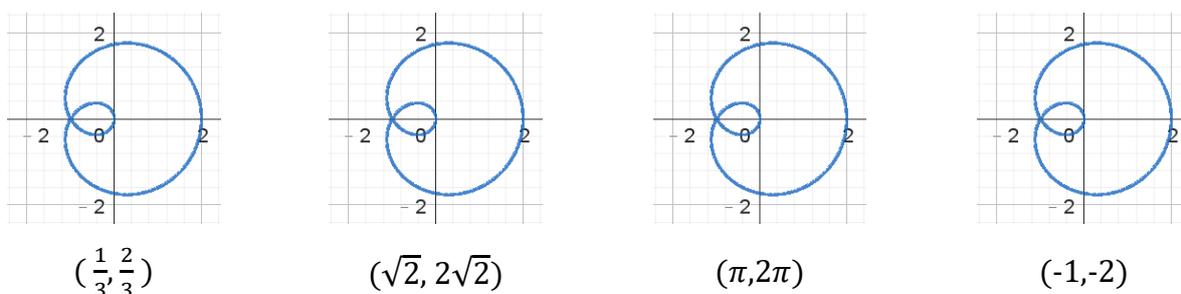


圖 2  $r = 1$  時，不同的  $(a, b)$  在比值相同時所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

再改變  $r$  值為 0.5 或 2，觀察  $S_{a,b,r}$  的圖形。

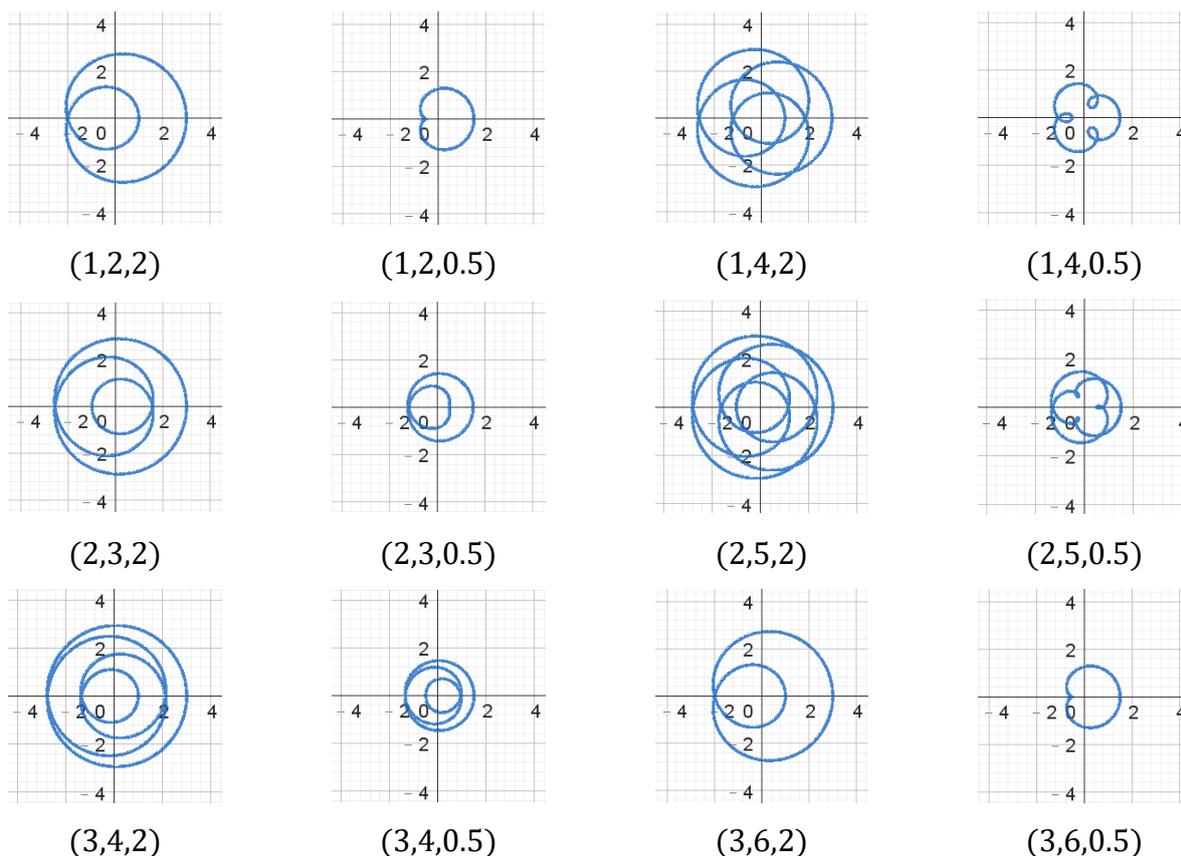


圖 3  $r = 0.5$  或  $2$  時，不同的  $(a, b, r)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

觀察圖 2，發現當  $a, b$  比值相同時其圖形皆是相同的，這使我們猜測是不是對角速度乘以相同的數都可以得到同樣的圖形，便有了以下的定理 1。

**定理 1**

$$\forall a, b, r, k \in \mathbb{R}^* \quad S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = S_{ka, kb, r}(\mathbb{R})。$$

證明：

令  $kt = t'$ ，則  $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t' \in \mathbb{R}$ 。

$$S_{ka, kb, r}(\mathbb{R}) = \{(\cos kat + r \cos kbt, \sin kat + r \sin kbt) | t \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(\cos at' + r \cos bt', \sin at' + r \sin bt') \mid t' \in \mathbb{R}\} \\
&= S_{a,b,r}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

■

由定理 1 可知，對角速度  $a$  和  $b$  同時乘以相同的非零倍數  $k$  並不會影響其在平面上呈現的圖形。將點  $S_{a,b,r}(t)$  的  $t$  視為時間，則非零倍數  $k$  影響的會是  $S_{a,b,r}(t)$  在圖形上的移動速率以及繞行方向，說明如下。

**Case 1** 當  $k > 1$ ， $S_{ka,kb,r}(t)$  繞行方向與原本相同，且速度較  $S_{a,b,r}(t)$  繞行速度快。

**Case 2** 當  $0 < k < 1$ ， $S_{ka,kb,r}(t)$  繞行方向與原本相同，且速度較  $S_{a,b,r}(t)$  繞行速度慢。

**Case 3** 當  $-1 < k < 0$ ， $S_{ka,kb,r}(t)$  繞行方向與原本相反，且速度較  $S_{a,b,r}(t)$  繞行速度慢。

**Case 4** 當  $k = -1$ ， $S_{ka,kb,r}(\mathbb{R})$  繞行方向與原本相反，且速度與  $S_{a,b,r}(t)$  繞行速度相同。

**Case 5** 當  $k < -1$ ， $S_{ka,kb,r}(\mathbb{R})$  繞行方向與原本相反，且速度較  $S_{a,b,r}(t)$  繞行速度快。

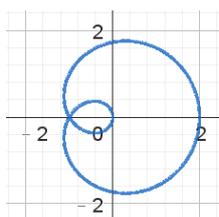
### 定義 5

令  $\theta \in \mathbb{R}$ 。定義線性變換  $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ， $R_\theta(x, y) := (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ ，此為使  $(x, y)$  在平面上以原點為旋轉中心，逆時針旋轉角度  $\theta$  之函數。也可以寫成矩陣的形式，如下所示：

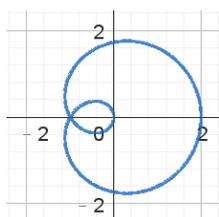
$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}。$$

以下為此函數的幾個會使用到的性質：

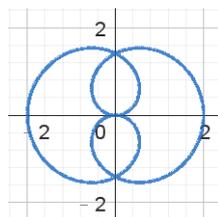
1. 若  $\alpha$  和  $\beta$  為同界角，即  $\frac{\alpha-\beta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ ，則  $\forall x, y \in \mathbb{R} \ R_\alpha(x, y) = R_\beta(x, y)$ 。
2.  $R_\theta((x_1, y_1) + k(x_2, y_2)) = R_\theta(x_1, y_1) + kR_\theta(x_2, y_2)$ ，由矩陣的線性性質得到。
3.  $R_\theta(R_\phi(x, y)) = R_\phi(R_\theta(x, y)) = R_{\theta+\phi}(x, y)$ ，直接展開即可得到。



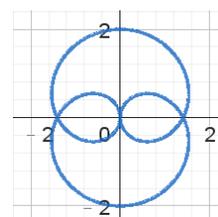
(1,2,1)



(1,2,-1)



(1,3,1)



(1,3,-1)

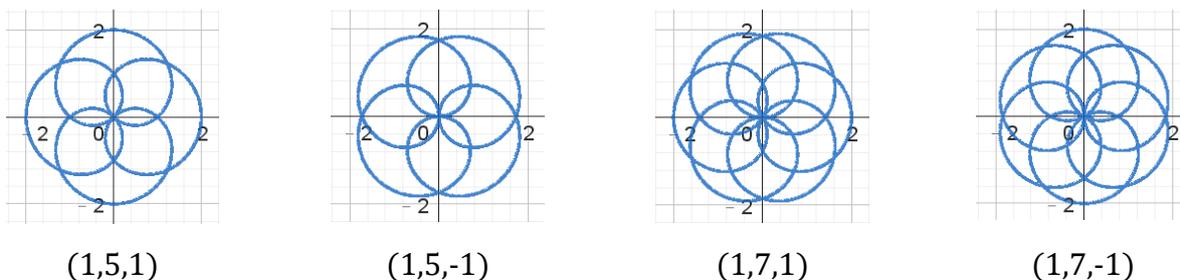


圖 4  $r = \pm 1$  時，不同的  $(a, b, r)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  圖形

觀察圖 4， $S_{a,b,r}$  和  $S_{a,b,-r}$  的圖形，發現兩者必定全等， $S_{a,b,-r}$  的圖形狀況可能恰好為  $S_{a,b,r}$  的圖形，或是  $S_{a,b,r}$  的圖形旋轉某一角度。經過觀察，推論出以下定理。

### 定理 2

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, S_{a,b,-r} \left( t + \frac{\pi}{a-b} \right) = R_{\frac{a\pi}{a-b}} \left( S_{a,b,r}(t) \right), \forall t \in \mathbb{R}.$$

證明：

為了方便，令  $\frac{\pi}{a-b} = \theta$ 。

$$\begin{aligned} S_{a,b,-r}(t + \theta) &= \begin{pmatrix} \cos a(t + \theta) \\ \sin a(t + \theta) \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \cos b(t + \theta) \\ \sin b(t + \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(at + a\theta) \\ \sin(at + a\theta) \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \cos(bt + b\theta) \\ \sin(bt + b\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos at \cos a\theta - \sin at \sin a\theta \\ \sin at \cos a\theta + \cos at \sin a\theta \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \cos bt \cos b\theta - \sin bt \sin b\theta \\ \sin bt \cos b\theta + \cos bt \sin b\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos at \cos a\theta - \sin at \sin a\theta \\ \sin at \cos a\theta + \cos at \sin a\theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos bt \cos(b\theta + \pi) - \sin bt \sin(b\theta + \pi) \\ \sin bt \cos(b\theta + \pi) + \cos bt \sin(b\theta + \pi) \end{pmatrix} \\ &= R_{a\theta} \begin{pmatrix} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} + r R_{b\theta + \pi} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \\ &= R_{\frac{a\pi}{a-b}} \begin{pmatrix} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} + r R_{\frac{a\pi}{a-b}} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \quad \left( \because \theta = \frac{\pi}{a-b} \therefore a\theta = b\theta + \pi = \frac{a\pi}{a-b} \right) \\ &= R_{\frac{a\pi}{a-b}} \begin{pmatrix} \cos at + r \cos bt \\ \sin at + r \sin bt \end{pmatrix} \\ &= R_{\frac{a\pi}{a-b}} (S_{a,b,r}(t)) \end{aligned}$$

■

由定理 2 可知， $S_{a,b,-r}$  的圖形恰為  $S_{a,b,r}$  的圖形逆時針旋轉  $\frac{a\pi}{a-b}$ 。其中某些特殊情況

$S_{a,b,-r}$  和  $S_{a,b,r}$  圖形恰好相等，例如圖四中  $a = 1$  且  $b = 2$  的情況。因此我們只需研究  $r > 0$

的情況即可。

## 二、 $\frac{a}{b}$ 為有理數

因為我們的函數  $S_{a,b,r}$  是由正餘弦函數組合而成，很自然地我們會想要討論函數的週期，先定義週期為何。

### 定義 6

對於任一實變函數  $f$ ，若存在  $u \in \mathbb{R}^+$  使得  $\forall t \in \mathbb{R} f(t) = f(t+u)$  成立，則稱  $f$  為週期函數，且若  $\min\{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(t+u)\}$  存在，則稱其為  $f$  的週期。特別地，若  $S_{a,b,r}$  的週期存在，則以  $A_{a,b,r}$  表示。

### 引理 1

$$\forall a, \alpha \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ 若 } 0 < |\alpha| < \delta, \text{ 則 } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } |k\alpha - a| < \delta.$$

證明：

不失一般性假設  $\alpha > 0$ 。

由阿基米德性質，存在  $z \in \mathbb{Z}$  使得  $z\alpha > a - \delta$ 。

因此  $\{z \in \mathbb{Z} | z\alpha > a - \delta\} \neq \emptyset$ 。

又因為此集合有下界，可將所有元素同時加上一整數，不改變其大小關係的前提下將集合變成正整數的子集，故由良序原理可知， $\min\{z \in \mathbb{Z} | z\alpha > a - \delta\}$  存在，令其為  $k$ 。

那麼顯然地， $a - \delta < k\alpha < a + \delta$ ，得證。 ■

### 定理 3

對於任一函數  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，若  $f$  為連續的週期函數，且不為常數函數，則  $f$  的週期存在。

證明：

為了方便，令  $V := \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} f(t) = f(t+u)\}$

因為  $f$  為週期函數，故  $V$  非空，且  $V$  有下界，所以  $\inf V$  存在，令其為  $v$ 。

由於  $v \in V \Rightarrow v = \min V \Rightarrow \min V$  存在  $\Rightarrow f$  週期存在，因此只要證明  $v \in V$ ，即可得證  $f$  週期存在。

我們利用反證法，假設  $v \notin V$ 。

應用 *Principles of Mathematical Analysis* 書中的定理 2.28 與 3.2(b) [1]，我們有以下事實：

$$\exists v_n \in V (n \in \mathbb{N}) \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} (t + v_n) = t + v$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + v_n) = f(t + v) \quad (\because f \text{ 為連續函數})$$

$$\Rightarrow f(t) = f(t + v) \quad (\because f(t + v_n) = f(t), \forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow v \notin (0, \infty) \quad (\because v \notin V)$$

因為  $v = \inf V$ ，所以  $v \in \bar{V} \subseteq \overline{\mathbb{R}^+} = [0, \infty)$ ，所以  $v = 0$ 。

我們想說明此結果與  $f$  不為常數函數矛盾。

任給  $x, y \in \mathbb{R}$ ，不失一般性假設  $y > x$ 。

給定  $\varepsilon > 0$ 。

因為  $f$  在  $x$  連續，存在  $\delta > 0$  使得  $|x - t| < \delta \Rightarrow d(f(x) - f(t)) < \varepsilon$ 。

又因  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v = 0$ ，存在  $N \in \mathbb{N}$  使得  $0 < v_N < \delta$

由引理 1，存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得  $|kv_N - (y - x)| < \delta$ 。

$$\Rightarrow |x - (y - kv_N)| < \delta$$

$$\Rightarrow d(f(x) - f(y - kv_N)) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(f(x) - f(y)) < \varepsilon \quad (\because v_N \in V)$$

由  $\varepsilon$  的任意性，得  $f(x) = f(y)$ ，與  $f$  不為常數函數矛盾，因此  $v \in V$ 。因為  $v = \inf V$ ，所以  $v = \min V$ ，得證。

■

注意到  $S_{a,b,r}$  符合定理 3 的條件，連續且不為常數，因此同樣具備該性質。

#### 定理 4

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ,  $S_{a,b,r}$  為週期函數等價於  $S_{a,b,-r}$  為週期函數，且兩者週期相等。

證明：

假設  $\alpha \in \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,r}(t) = S_{a,b,r}(t+u)\}$ 。

由定理 2， $\forall t \in \mathbb{R}, S_{a,b,-r}(t) = R_{\frac{a\pi}{a-b}}\left(S_{a,b,r}\left(t - \frac{\pi}{a-b}\right)\right)$

$$\Rightarrow S_{a,b,-r}(t+\alpha) = R_{\frac{a\pi}{a-b}}\left(S_{a,b,r}\left(t - \frac{\pi}{a-b} + \alpha\right)\right) = R_{\frac{a\pi}{a-b}}\left(S_{a,b,r}\left(t - \frac{\pi}{a-b}\right)\right) = S_{a,b,-r}(t)$$

$\Rightarrow \alpha \in \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,-r}(t) = S_{a,b,-r}(t+u)\}$

$\Rightarrow \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,r}(t) = S_{a,b,r}(t+u)\} \supseteq \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,-r}(t) = S_{a,b,-r}(t+u)\}$

注意到上式對所有  $r \in \mathbb{R}^*$  皆成立，將上式  $r$  代換為  $-r$ ，可得

$$\{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,r}(t) = S_{a,b,r}(t+u)\} \subseteq \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,-r}(t) = S_{a,b,-r}(t+u)\}$$

$$\Rightarrow \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,r}(t) = S_{a,b,r}(t+u)\} = \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,-r}(t) = S_{a,b,-r}(t+u)\}$$

因此  $S_{a,b,r}$  為週期函數等價於  $S_{a,b,-r}$  為週期函數，且兩者週期相等。 ■

在利用 GeoGebra 操作觀察後發現當  $a, b$  為互質整數時似乎  $S_{a,b,r}$  皆為週期函數，且週期都是  $2\pi$ 。即下列定理 5。

#### 定理 5

$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $a, b$  互質，則  $A_{a,b,r}$  皆存在且等於  $2\pi$ 。

證明：

由定理 4，不失一般性可以假設  $r > 0$ 。顯然當  $a, b \in \mathbb{Z}^*, (a, b) = 1$  時，

$2\pi \in \{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R} S_{a,b,r}(t) = S_{a,b,r}(t+u)\}$ ，因此此情況下  $S_{a,b,r}$  必定為週期函數。接下來我們證明  $2\pi$  為這個集合的最小值。假設存在更小的正數  $p$  屬於此集合。

$$\text{則 } S_{a,b,r}(p) = S_{a,b,r}(0) = (\cos 0 + r \cos 0, \sin 0 + r \sin 0) = (1+r, 0)$$

$$\Rightarrow \cos ap + r \cos bp = 1 + r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ap = 1 \\ \cos bp = 1 \end{cases} \quad (\because r > 0, \text{ 且 } \forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta \leq 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ap = 2m\pi \\ bp = 2n\pi \end{cases} \quad \text{for some } m, n \in \mathbb{Z}$$

因為  $(a, b) = 1$ , by Bezont's lemma  $\exists x, y \in \mathbb{Z}$  s. t.  $ax + by = 1$

$$\Rightarrow p = axp + ybp = 2\pi(mx + ny) \Rightarrow \frac{p}{2\pi} = mx + ny \in \mathbb{Z}$$

根據原先假設  $0 < \frac{p}{2\pi} < 1$ ，我們便推出在 0 和 1 之間還有另外一個整數，矛盾。

故此情況下， $A_{a,b,r} = 2\pi$ 。

■

我們現在已經確定了所有互質整數的週期，可以參照定理 1 下方的說明，將  $a, b$  同乘以一個非零實數  $k$ ，圖形上的點繞行的速度會變為原本的  $k$  倍，可以推測此時函數的週期會是原先的  $\frac{1}{k}$  倍，如此一來就可以推廣定理 5 的結果。首先我們將擴張最大公因數的定義到實數。

## 定義 7

對於任意兩個非零實數  $a, b$ ，如果存在一正實數  $k$  使得  $\frac{a}{k}$  和  $\frac{b}{k}$  皆為整數且互質，則定義  $a, b$  的最大公因數為  $k$ ，記為  $\gcd(a, b)$ 。

可以簡單的檢驗這樣的  $k$  如果存在必唯一，並且在  $a, b$  為整數時和原先最大公因數的定義相同，因此我們在後文不會特別區別兩者。且注意到  $\gcd(a, b)$  存在等價於  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ 。

## 定理 6

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 若 } \gcd(a, b) \text{ 存在, 則 } A_{a,b,r} \text{ 皆存在且等於 } \frac{2\pi}{\gcd(a, b)}。$$

證明：

為了方便，令  $\gcd(a, b) = k$ ，則  $\frac{a}{k}$  和  $\frac{b}{k}$  皆為整數且互質。

根據定理 5， $A_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r} = 2\pi$ ，所以  $\forall t \in \mathbb{R}$ ， $S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t + 2\pi) = S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t)$  — (1)。

又由  $S_{a,b,r}$  的定義可得  $S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t) = S_{a,b,r}\left(\frac{t}{k}\right)$  — (2) ,

以(2)式改寫(1)式為  $S_{a,b,r}\left(\frac{t}{k} + \frac{2\pi}{k}\right) = S_{a,b,r}\left(\frac{t}{k}\right)$  — (3) 。

對於所有  $u \in \mathbb{R}$  , 令(3)式  $t = uk$  , 得到  $S_{a,b,r}\left(u + \frac{2\pi}{k}\right) = S_{a,b,r}(u)$  。

因此當  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$  時 ,  $S_{a,b,r}$  為週期函數 。

接著證明  $\frac{2\pi}{k}$  即為  $S_{a,b,r}$  的週期。假設存在  $0 < p < \frac{2\pi}{k}$  使得  $S_{a,b,r}(t+p) = S_{a,b,r}(t), \forall t \in \mathbb{R}$  。

以(2)式改寫之 , 得到  $S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(kt + kp) = S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(kt), \forall t \in \mathbb{R}$  , 對於所有  $u \in \mathbb{R}$  , 令  $t = \frac{u}{k}$  ,

得  $S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(u + kp) = S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(u), \forall u \in \mathbb{R}$  。

所以  $kp \in \left\{u \in \mathbb{R}^+ \mid \forall t \in \mathbb{R} S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t) = S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t+u)\right\}$  。

但根據先前假設和週期的定義

$0 < kp < 2\pi = A_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r} = \min\left\{u \in \mathbb{R}^+ \mid \forall t \in \mathbb{R} S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t) = S_{\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, r}(t+u)\right\}$  , 矛盾 , 故得證。 ■

現在對於  $A_{a,b,r}$  的討論告一段落。繼續觀察圖 1 , 可以發現這些圖形有像花瓣一樣重複的規律 , 且重複的數量不一定 , 先直觀地稱圖形中重複的部分為「瓣」, 瓣的數量稱為「瓣數」發現當非零整數  $a, b$  變動時瓣數會隨之變動 , 例如當  $(a, b) = (1, 4)$  的時候我們說此圖形「有 3 瓣」、 $(a, b) = (1, 3)$  時「有 2 瓣」、 $(a, b) = (1, 2)$  時「有 1 瓣」。且對比圖 1、圖 3 , 發現不同的  $r$  , 其瓣數都是相同的 , 也就是瓣數只和  $a, b$  有關。現在我們對於圖形的瓣數的定義有了直觀的認識 , 讓我們對於圖 1 各圖形之瓣數做成表 1 。

表 1 不同的  $(a, b)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  瓣數

瓣數	$(a, b)$
1	(1,2) (2,3) (2,4) (3,6)
2	(1,3) (2,6) (3,5)
3	(1,4) (2,5)
4	(1,5) (3,7)

由定理 1 可知  $a, b$  同乘以一個非零倍數不會改變圖形 , 因此他們瓣數也相同 , 現在我們將表 1 的數據只留下最簡整數比製作成表 2 , 再來觀察其中的規律。

表 2 不同的互質 $(a, b)$ 所得到的  $S_{a,b,r}$  瓣數

瓣數	$(a, b)$
1	(1,2) (2,3)
2	(1,3) (3,5)
3	(1,4) (2,5)
4	(1,5) (3,7)

不難發現當  $a, b$  互質時瓣數似乎都等於  $b - a$ 。若要清楚說明這件事情，則必須先嚴謹的定義何謂「瓣數」。我們將使用旋轉的概念來定義，當圖形以原點為中心逆時針旋轉某個大於零的角度後可以和原先的圖形完全重合，令這樣的最小角度為  $\theta$ ，則可定義  $\frac{2\pi}{\theta}$  就是我們想要的瓣數。

### 定義 8

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。定義  $G_{a,b,r} := \min \left\{ \theta \in \mathbb{R}^+ \mid R_\theta \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right\}$ 。

這個定義的意義是可以使得逆時針旋轉後圖形與原先重合之最小正角度。

### 定義 9

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。若  $G_{a,b,r}$  存在，則定義  $S_{a,b,r}$  的瓣數為  $\frac{2\pi}{G_{a,b,r}}$ 。

比較定義 4 和定義 8，可以發現兩者間有其相似性， $A_{a,b,r}$  與  $G_{a,b,r}$  皆是可以使結果不改變的最小變動量，因此  $G_{a,b,r}$  也可以被想像成某種意義上的週期。在這裡也可以看出其命名的巧思， $A$  和  $G$  分別代表代數與幾何(algebraic/geometric)。  $A_{a,b,r}$  僅單純就函數的變數做變動，檢視其是否與先前的函數點相同；而  $G_{a,b,r}$  是對整個圖形做改變，檢視其是否與先前的函數圖形相同。因此我們也可以分別稱  $A_{a,b,r}$  與  $G_{a,b,r}$  為代數週期和幾何週期。

為了找出  $a, b$  與瓣數之間的關係，我發現了定理 7，此式與旋轉有關，能幫助我們更瞭解函數的性質。舉例說明：若令  $(a, b, r) = (5, 1, 1)$ 、 $\theta = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{\pi}{2}$ 、 $A, B, C, D$  點分別代表

$t, t + \theta, t + 2\theta, t + 3\theta$  代入函數  $S_{a,b,r}$  所得到的點，則由圖 5 我們可以看到無論  $t$  為何， $\overline{OA}$ ,

$\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$  都保持相同的夾角。再舉例令  $(a, b, r) = (7, 2, 1)$ 、 $\theta = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{2\pi}{5}$ ，也會有相同的

結果。定理 7 詳述如下。

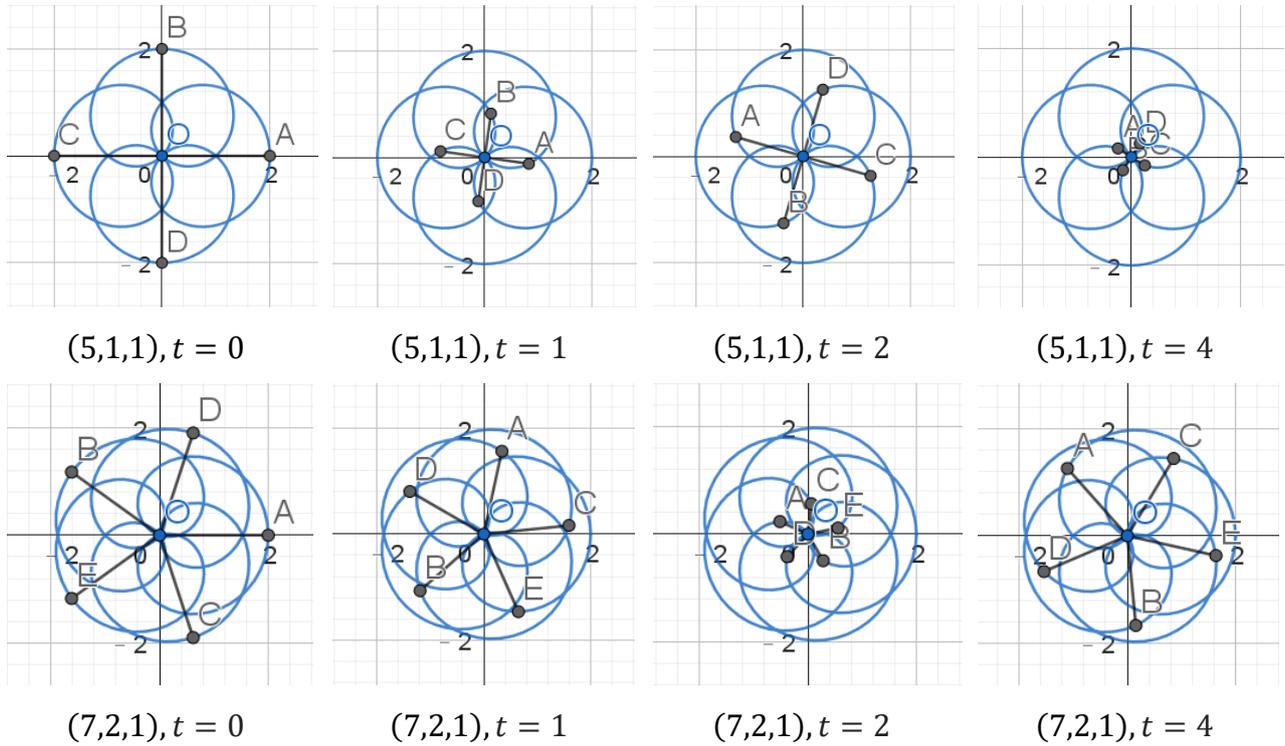


圖 5 在不同  $(a, b, r)$  下  $t + n\theta$  代入函數  $S_{a,b,r}$  所得到的點  $(n = 0, 1, 2 \dots)$

### 定理 7

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \theta, t \in \mathbb{R}, \text{ 若 } \frac{a\theta - b\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \text{ 則 } S_{a,b,r}(t + \theta) = R_{a\theta} \left( S_{a,b,r}(t) \right)。$$

證明：

$$\begin{aligned}
 S_{a,b,r}(t + \theta) &= \begin{pmatrix} \cos a(t + \theta) \\ \sin a(t + \theta) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos b(t + \theta) \\ \sin b(t + \theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(at + a\theta) \\ \sin(at + a\theta) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(bt + b\theta) \\ \sin(bt + b\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos at \cos a\theta - \sin at \sin a\theta \\ \sin at \cos a\theta + \cos at \sin a\theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos bt \cos b\theta - \sin bt \sin b\theta \\ \sin bt \cos b\theta + \cos bt \sin b\theta \end{pmatrix} \\
 &= R_{a\theta} \begin{pmatrix} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} + r R_{b\theta} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \\
 &= R_{a\theta} \begin{pmatrix} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} + r R_{a\theta} \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \quad (\text{因為 } a\theta \text{ 和 } b\theta \text{ 為同界角}) \\
 &= R_{a\theta} \left( \begin{pmatrix} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_{a\theta} \begin{pmatrix} \cos at + r \cos bt \\ \sin at + r \sin bt \end{pmatrix} \\
&= R_{a\theta}(S_{a,b,r}(t))
\end{aligned}$$

■

### 推論 1

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \theta, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \text{ 若 } \frac{a\theta - b\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \text{ 則 } S_{a,b,r}(t + n\theta) = R_{na\theta}(S_{a,b,r}(t)).$$

證明：

我們使用數學歸納法證明。首先，由定理 7， $n = 1$  時成立。再假設  $n = k$  時成立。若  $n = k + 1$ ，我們有：

$$\begin{aligned}
S_{a,b,r}(t + (k + 1)\theta) &= S_{a,b,r}((t + k\theta) + \theta) \\
&= R_{a\theta}(S_{a,b,r}(t + k\theta)) \quad (\text{由定理 7}) \\
&= R_{a\theta}(R_{ka\theta}(S_{a,b,r}(t))) \quad (n = k \text{ 時成立}) \\
&= R_{(k+1)a\theta}(S_{a,b,r}(t)) \quad (\text{由定義 5 中的性質 3})
\end{aligned}$$

由數學歸納法，對於所有  $n \in \mathbb{N}$  該式皆成立，得證。

■

### 定理 8

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 若 } a, b \text{ 互質, 則 } G_{a,b,r} = \frac{2\pi}{|a-b|}.$$

證明：

$(a, b) = 1 \Rightarrow (a, |a - b|) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } ax + |a - b|y = 1$ ，不失一般性令  $x \in \mathbb{N}$ ，

得  $\frac{2\pi a}{|a-b|}x + 2\pi y = \frac{2\pi}{|a-b|}$ 。因此得知存在一個正整數  $x$  使得  $\frac{2\pi}{|a-b|}$  和  $\frac{2\pi a}{|a-b|}x$  為同界角。

又由推論 1，因  $\frac{\frac{2\pi}{|a-b|}a - \frac{2\pi}{|a-b|}b}{2\pi}$  為整數，得

$$\begin{aligned}
S_{a,b,r}\left(t + \frac{2\pi x}{|a-b|}\right) &= R_{\frac{2\pi a}{|a-b|}x}(S_{a,b,r}(t)) \\
&= R_{\frac{2\pi}{|a-b|}}(S_{a,b,r}(t)) \quad (\text{同界角})
\end{aligned}$$

根據以上等式得知  $\frac{2\pi}{|a-b|} \in \left\{ \theta \in \mathbb{R}^+ \mid R_\theta \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right\}$ ，故此集合不為空集。接下來還必須證明  $\frac{2\pi}{|a-b|}$  是這個集合的下界，就可以得到它是這個集合的最小值。

假設存在  $0 < \alpha < \frac{2\pi}{|a-b|}$  使得  $\alpha \in \left\{ \theta \in \mathbb{R}^+ \mid R_\theta \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right\}$ 。

由於  $(1+r, 0) \in S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ ，顯然  $R_{n\alpha}(1+r, 0) \in S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  對於所有  $n \in \mathbb{N}$ 。

故  $R_{|a-b|\alpha}(1+r, 0) \in S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ 。

因為  $\alpha < \frac{2\pi}{|a-b|}$ ，所以  $R_{|a-b|\alpha}(1+r, 0)$  將  $(1+r, 0)$  旋轉不到一圈，因此我們會至少有

$(1+r, 0), R_\alpha(1+r, 0), R_{2\alpha}(1+r, 0), \dots, R_{|a-b|\alpha}(1+r, 0)$  共  $|a-b|+1$  個相異點，每個點距離原點都是  $|1+r|$ 。(註：在這裡我們用到一個事實，一個不是原點的點在平面經過  $R_\theta$  變換後，如果  $0 < \theta < 2\pi$ ，那麼旋轉後的點會與原先的點相異。)

接著， $\forall t \in \mathbb{R}$ ，我們都有

$$\begin{aligned} d(S_{a,b,r}(t), (0,0)) &= |1+r| \\ \Leftrightarrow \sqrt{(\cos at + r \cos bt)^2 + (\sin at + r \sin bt)^2} &= |1+r| \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+r^2 + 2r(\cos at \cos bt + \sin at \sin bt)} &= |1+r| \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+r^2 + 2r(\cos(at-bt))} &= |1+r| = \sqrt{1+r^2 + 2r} \\ \Leftrightarrow \cos(at-bt) &= 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } t &= k \frac{2\pi}{a-b} \end{aligned}$$

只要  $t$  可以寫成  $k \frac{2\pi}{a-b}$  的形式，其中  $k$  是整數，那麼以上等式就會成立，也就是  $S_{a,b,r}(t)$  和

原點的距離等於  $|1+r|$ 。但是注意到  $t = k \frac{2\pi}{a-b}$  和  $t = (k+a-b) \frac{2\pi}{a-b}$  代入  $S_{a,b,r}$  後其實是相

同的點，因此  $S_{a,b,r}\left(k \frac{2\pi}{a-b}\right), k = 1, 2, \dots, |a-b|$  就已經可以代表  $S_{a,b,r}$  圖形上所有和原點的距

離等於  $|1+r|$  之點。那顯然最多只可能有  $|a-b|$  個相異點。與先前結論矛盾，得證。 ■

### 定理 9

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 如果 } \gcd(a, b) \text{ 存在, 則 } G_{a,b,r} = \frac{2\pi \gcd(a, b)}{|a-b|}.$$

證明：

因為  $\frac{a}{\gcd(a,b)}$  和  $\frac{b}{\gcd(a,b)}$  互質，

根據定理 8 可得  $G_{\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}, r} = \frac{2\pi}{\left| \frac{a}{\gcd(a,b)} - \frac{b}{\gcd(a,b)} \right|} = \frac{2\pi \gcd(a,b)}{|a-b|}.$

又根據定理 1， $S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = S_{\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}, r}(\mathbb{R}) \Rightarrow G_{a,b,r} = G_{\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}, r} = \frac{2\pi \gcd(a,b)}{|a-b|}.$

■

### 推論 2

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 如果 } \gcd(a, b) \text{ 存在, 則 } S_{a,b,r} \text{ 的瓣數為 } \frac{|a-b|}{\gcd(a,b)}.$$

證明：

根據定義 9， $S_{a,b,r}$  的瓣數  $= \frac{2\pi}{G_{a,b,r}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi \gcd(a,b)}{|a-b|}} = \frac{|a-b|}{\gcd(a,b)}$ ，得證。

■

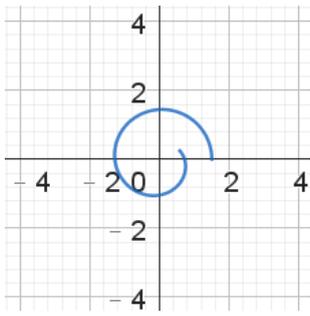
### 三、 $\frac{a}{b}$ 為無理數

我們在上面對於圖形的各個性質，討論的順序都是：

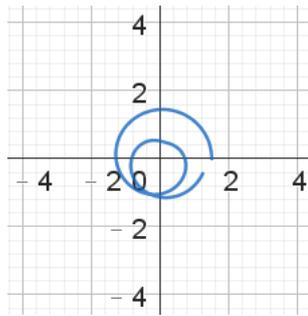
**Case 1**  $a, b \in \mathbb{Z}^*$  且  $(a, b) = 1$

**Case 2**  $a, b \in \mathbb{R}^*$  且  $\gcd(a, b)$  存在

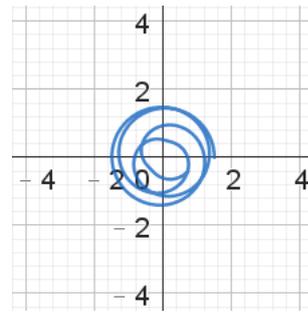
其中 Case 2 等價於  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ，我們好奇如果  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$  會有怎樣的圖形，見圖 6。



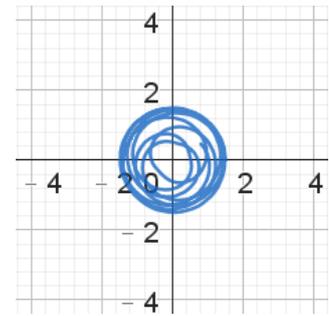
$r = 0.5, t \in [0, 2\pi]$



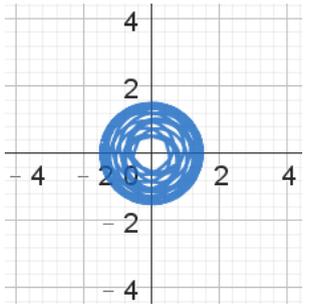
$r = 0.5, t \in [0, 4\pi]$



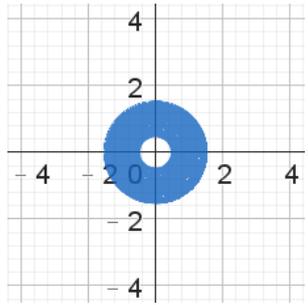
$r = 0.5, t \in [0, 8\pi]$



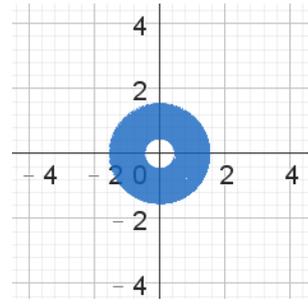
$r = 0.5, t \in [0, 16\pi]$



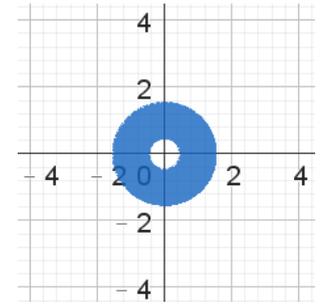
$r = 0.5, t \in [0, 32\pi]$



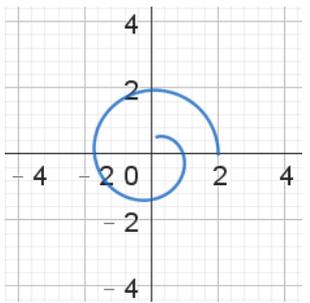
$r = 0.5, t \in [0, 64\pi]$



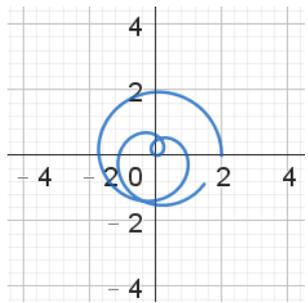
$r = 0.5, t \in [0, 128\pi]$



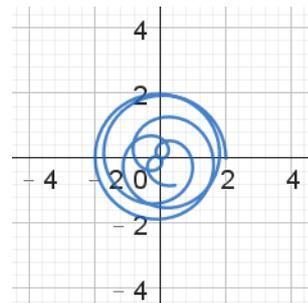
$D_{0.5}$



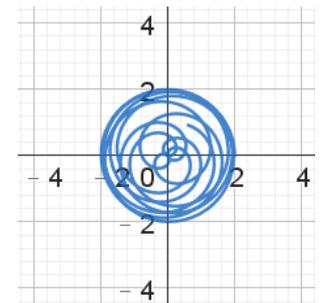
$r = 1, t \in [0, 2\pi]$



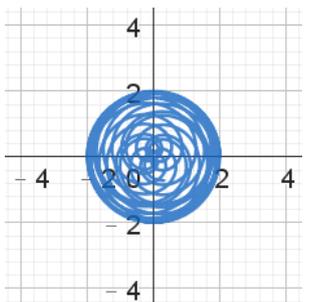
$r = 1, t \in [0, 4\pi]$



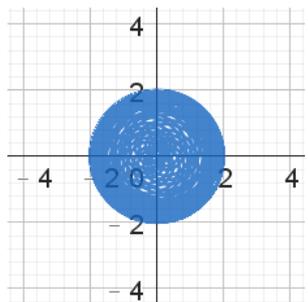
$r = 1, t \in [0, 8\pi]$



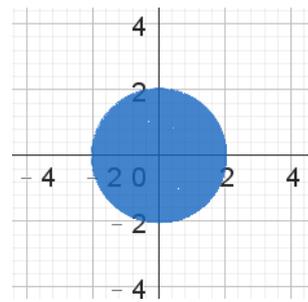
$r = 1, t \in [0, 16\pi]$



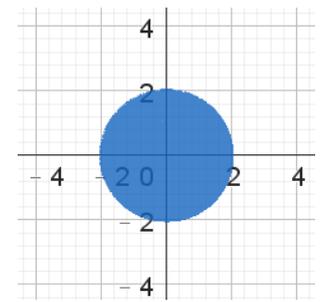
$r = 1, t \in [0, 32\pi]$



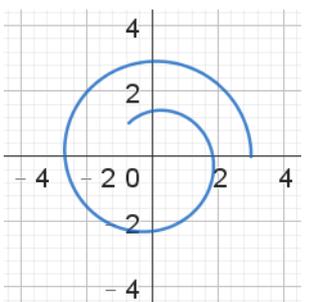
$r = 1, t \in [0, 64\pi]$



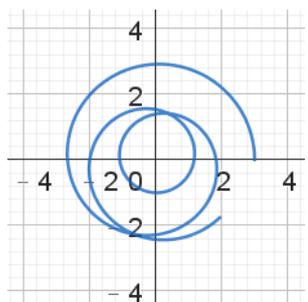
$r = 1, t \in [0, 128\pi]$



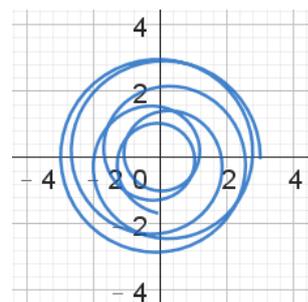
$D_1$



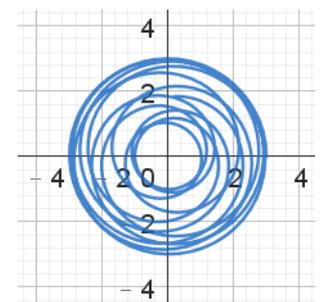
$r = 2, t \in [0, 2\pi]$



$r = 2, t \in [0, 4\pi]$



$r = 2, t \in [0, 8\pi]$



$r = 2, t \in [0, 16\pi]$

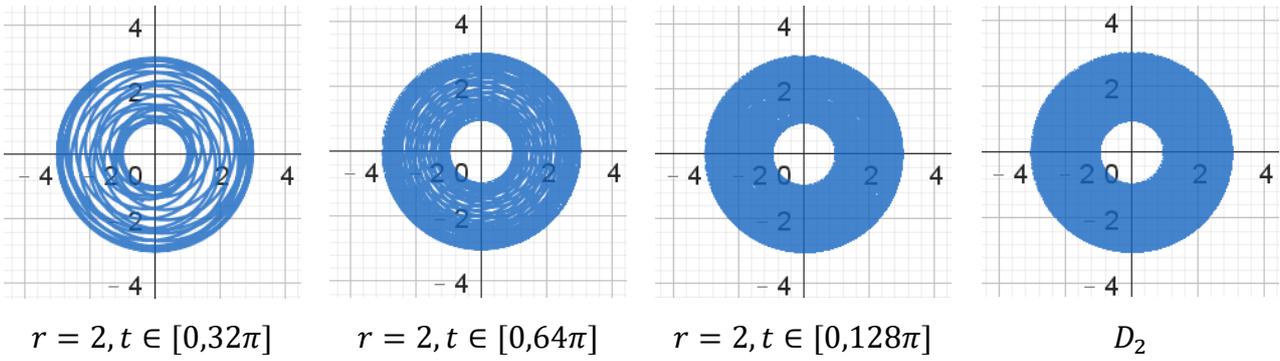


圖 6  $r = 0.5$  或  $1$  或  $2$ ,  $(a, b) = (1, \sqrt{2})$  時,  $D_r$  和限制  $t$  在不同區間所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

仿照 Case 1 的討論順序, 先研究其週期。首先可以發現這些圖形不如 Case 1 的圖形, 有對稱性, 繞行第二圈時會錯開先前的軌跡, 因此猜測其不為週期函數, 發現定理 10。

### 定理 10

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ , 若  $\gcd(a, b)$  不存在, 則  $S_{a,b,r}$  不為週期函數。

證明：

根據定理 4,  $S_{a,b,r}$  為週期函數等價於  $S_{a,b,-r}$  為週期函數, 因此不失一般性假設  $r > 0$ 。首先我們知道  $S_{a,b,r}(0) = (1+r, 0)$ 。

設  $\exists t_0 \neq 0$  使得  $S_{a,b,r}(t_0) = (1+r, 0)$

$$\Rightarrow \cos at + r \cos bt = 1 + r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos at = 1 \\ \cos bt = 1 \end{cases} \quad (\because r > 0, \text{ 且 } \forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta \leq 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} at = 2m\pi \\ bt = 2n\pi \end{cases} \quad \text{for some } m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{at}{bt} = \frac{2m\pi}{2n\pi} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

與  $\gcd(a, b)$  不存在矛盾, 因此得知  $S_{a,b,r}(t) = (1+r, 0)$  的解只有  $t = 0$ 。

若  $S_{a,b,r}$  週期存在, 令其為  $T$ , 則  $S_{a,b,r}(T) = (1+r, 0)$ , 與解的唯一矛盾, 得證。

■

### 定理 11

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists 0 < \theta < \varepsilon$ ，

$$\text{使得 } R_\theta \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})。$$

證明：

根據 *Dirichlet's approximation theorem* [2]，我們有以下事實：

$$\forall N \in \mathbb{N} \forall \alpha \in \mathbb{R}, N > 1, \exists p, q \in \mathbb{Z}, 1 \leq q < N, \text{ 使得 } |q\alpha - p| \leq \frac{1}{N}。$$

給定  $\varepsilon > 0$ ，選擇  $N \in \mathbb{N}$  使得  $\frac{2\pi}{N} < \varepsilon$ 。

令  $\alpha = \frac{a}{a-b}$ ，由 *Dirichlet* 逼近定理，不失一般性存在  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ ，使得  $0 \leq \frac{qa}{a-b} + p \leq \frac{1}{N}$ 。

$$\Rightarrow 0 \leq 2\pi q \frac{a}{a-b} + 2\pi p \leq \frac{2\pi}{N} < \varepsilon$$

又因  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{b}{a}} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow q \frac{a}{a-b} \notin \mathbb{Q} (\because q \neq 0)$ ，所以  $2\pi q \frac{a}{a-b} + 2\pi p \neq 0$ 。

$$\Rightarrow 0 < 2\pi q \frac{a}{a-b} + 2\pi p < \varepsilon$$

接著我們想要證明  $R_{\frac{2\pi a}{a-b}q+2\pi p} \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  成立。

$$\text{由推論 1, } S_{a,b,r} \left( t + q \frac{2\pi}{a-b} \right) = R_{\frac{2\pi a}{a-b}q} \left( S_{a,b,r}(t) \right)$$

$$\Rightarrow S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = R_{\frac{2\pi a}{a-b}q} \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = R_{\frac{2\pi a}{a-b}q+2\pi p} \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right)$$

符合定理條件，得證。 ■

### 推論 3

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $\forall \varepsilon > 0$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ， $\exists 0 < \theta < \varepsilon$ ，

$$\text{使得 } R_{k\theta} \left( S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \right) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})。$$

證明：

$k = 0$ ，顯然成立。

設  $k \in \mathbb{N}$ 。接下來用數學歸納法證明。

由定理 11 可知  $k = 1$  時等式成立。

設  $R_{k\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  對於正整數  $k$  成立。

則  $R_{(k+1)\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = R_{\theta}(R_{k\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R}))) = R_{\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ ，故由數學歸納法得證。

設  $k$  為負整數，令  $k = -h$ ，則  $h \in \mathbb{N}$ ，由上可知  $R_{h\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow R_{-h\theta}(R_{h\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R}))) = R_{-h\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R}))$$

$$\Rightarrow S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = R_{k\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})), \text{ 得證。}$$

■

#### 推論 4

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $G_{a,b,r}$  不存在。

證明：

由定理 11 可知

$$\inf \{ \theta \in \mathbb{R}^+ \mid R_{\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \} = 0 \notin \{ \theta \in \mathbb{R}^+ \mid R_{\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \}$$

，所以  $\min \{ \theta \in \mathbb{R}^+ \mid R_{\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \}$  不存在，即  $G_{a,b,r}$  不存在。

■

我們發現其實  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  不會填滿整個  $D_r$ ，但是在 GeoGebra 的繪圖下，我們猜測即使他仍然有空隙，但還是會把整個圓盤「幾乎填滿」，就像是有理數與實數的關係一樣。為了精確描述這個關係，我們需要引進一些定義。

## 定義 10

令  $(X, d)$  為一賦距空間， $A, B, E \subseteq X$ 。

我們說  $A$  在  $B$  中稠密(dense)如果  $B \subseteq \bar{A}$ 。

我們說  $A$  和  $B$  是分離的(separated)如果  $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ 。

我們說  $E$  是連通集(Connected set) 如果  $E$  不為兩個非空分離集合的聯集。

(註：此處使用與 *Principles of Mathematical Analysis* 書中相同之定義 [4]。)

## 定理 12

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

證明：

### Step 1 定義與說明證明方向

為了方便，我們先定義函數  $f_\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f_\ell(t) = (\ell \cos t, \ell \sin t)$ ，其中  $\ell \in \mathbb{R}^+$ ，用以描述半徑為  $\ell$  的圓周上各點的位置，因此  $f_\ell(\mathbb{R}) = \partial B((0,0), \ell)$  (見定義 2)，且  $D_r$  正是由不同半徑的圓周所聯集起來的，更精確地表示如下：

$$D_r = \bigcup_{i \leq \ell \leq I} \partial B((0,0), \ell) = \bigcup_{i \leq \ell \leq I} f_\ell(\mathbb{R})$$

(註： $I := \max\{|1-r|, |1+r|\}$ ,  $i := \min\{|1-r|, |1+r|\}$ ，見定義 4)

所以只要對於每個在  $i$  和  $I$  之間的  $\ell$ ， $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  都會在  $f_\ell(\mathbb{R})$  中稠密，則  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密，也就完成了證明。

### Step 2 $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ 在 $f_\ell(\mathbb{R})$ 中稠密

現在要證明對於所有  $i \leq \ell \leq I$ ， $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $f_\ell(\mathbb{R})$  中稠密，也就是任給  $z' \in f_\ell(\mathbb{R})$ ，我們要說明  $z'$  是  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  的極限點。但是證明中需要一些前提，就是對於所有  $i \leq \ell \leq I$ ，都要存在  $z_0 \in S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap f_\ell(\mathbb{R})$ ，這部分會在 Step 3 證明。

因上文中的  $z_0, z'$  皆屬於  $f_\ell(\mathbb{R})$ ，存在  $t_0, t' \in \mathbb{R}$  使得  $z_0 = f_\ell(t_0), z' = f_\ell(t')$ 。

任給  $\varepsilon > 0$ ，不難看出  $f_\ell$  均勻連續。

因此存在  $\delta > 0$ ，使得對於所有  $t, u \in \mathbb{R}$ ，若  $|t - u| < \delta$ ，則  $d(f_\ell(t), f_\ell(u)) < \varepsilon$ 。

由推論 3，存在  $0 < \theta < \delta$  使得  $R_{k\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z}$

由引理 1，存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得  $|k\theta - (t' - t_0)| < \delta$ 。

$$\Rightarrow |(t_0 + k\theta) - t'| < \delta$$

$$\Rightarrow d(f_\ell(t_0 + k\theta), f_\ell(t')) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(R_{k\theta}(z_0), z') < \varepsilon \quad (\because f_\ell(t_0 + k\theta) = R_{k\theta}(f_\ell(t_0)) = R_{k\theta}(z_0), f_\ell(t') = z')$$

根據  $\theta$  之性質， $R_{k\theta}(z_0) \in R_{k\theta}(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ 。

如此一來，對於所有  $\varepsilon > 0$ ，我們都可以找到  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  中某一點  $R_{k\theta}(z_0)$ ，其與  $z'$  的距離小於  $\varepsilon$ ，因此  $z'$  為  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  的極限點，得到  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $f_\ell(\mathbb{R})$  中稠密。

**Step 3** 對於所有  $i \leq \ell \leq I$ ，都存在  $z_0 \in S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap f_\ell(\mathbb{R})$

$$\text{先從一些簡單的計算得到 } d(S_{a,b,r}(0), (0,0)) = |1+r|, \quad d\left(S_{a,b,r}\left(\frac{\pi}{a-b}\right), (0,0)\right) = |1-r|$$

所以在  $\ell = i$  或  $I$  的時候都存在  $z \in S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  使得  $d(z, (0,0)) = \ell$ ，解決了兩個情況。

因此我們只需要討論  $i < \ell < I$ 。接下來這部分需要藉助一些連通集的性質，因為  $\mathbb{R}$  為連通集、 $S_{a,b,r}$  為連續函數，所以  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  也是連通集 [3]。

給定  $\ell$ ，假設  $S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap f_\ell(\mathbb{R}) = \emptyset$ ，因此可以將  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  分割為沒有交集的兩個部分：

$$S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = (S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap \{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) < \ell\}) \cup (S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap \{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) > \ell\})$$

，其中這兩個部分都是非空的（分別有  $S_{a,b,r}(0)$  和  $S_{a,b,r}\left(\frac{\pi}{a-b}\right)$ ）。

但  $\{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) < \ell\}$  和  $\{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) > \ell\}$  是分離的，所以

$S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap \{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) < \ell\}$  和  $S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \cap \{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) > \ell\}$  也是，由於

$S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  為連通集，根據定義連通集不能被寫成兩個非空分離集合的聯集，矛盾。

■

前面定理告訴我們  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。事實上，在相同假設下，對於那些沒有被函數圖形經過的點，也會在  $D_r$  中稠密，也就是  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

### 定理 13

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

證明：

令  $i \leq \ell \leq I$ 。和前面相似，我們把  $D_r$  拆分為不同半徑的環  $\{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) = \ell\}$ 。

對於每個在  $i$  和  $I$  之間的  $\ell$ ，我們想要知道方程  $d(S_{a,b,r}(t), (0,0)) = \ell$  解的個數。故需討論方

程式  $\ell = d(S_{a,b,r}(t), (0,0)) = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos(at - bt)}$ ，相當於  $\frac{\ell^2 - r^2 - 1}{2r} = \cos(at - bt)$ 。

因為餘弦函數的週期性，不難看出最多只有可數多個  $t$  可以滿足上式，也就是  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$

在  $\{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) = \ell\}$  上的點最多只有可數多個。對於任何一個

$\{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) = \ell\}$  上的點  $p$ ，其任一鄰域交集  $\{u \in \mathbb{R}^2 | d(u, (0,0)) = \ell\}$  得到的集合的基數都是不可數的，代表鄰域內必有  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  之點，也就是  $p$  為  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  之極限點，故  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密，得證。 ■

### 推論 5

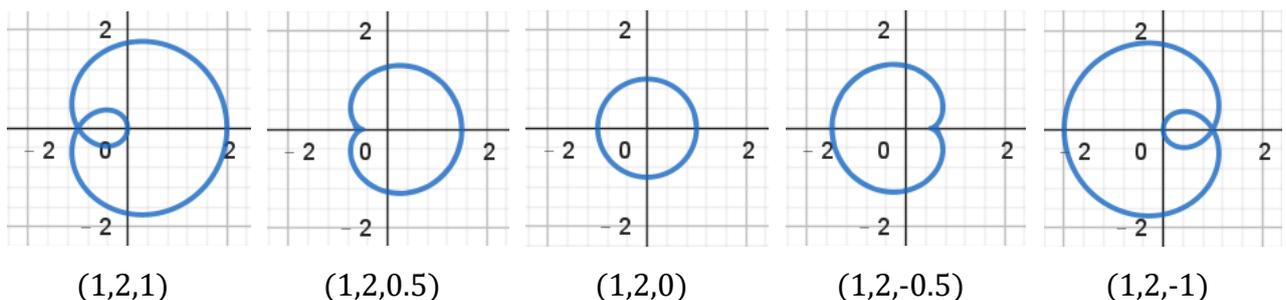
$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，如果  $\gcd(a, b)$  不存在，則所有  $D_r$  中的點都是  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  的邊界點。

證明：

由定理 12 和定理 13 能輕易看出所有  $D_r$  皆符合邊界點的定義(定義 2)。 ■

### 四、 $r$ 與尖點的關係

現在我們想要觀察在固定  $a, b$  的情況，變動  $r$  會有怎樣的現象。



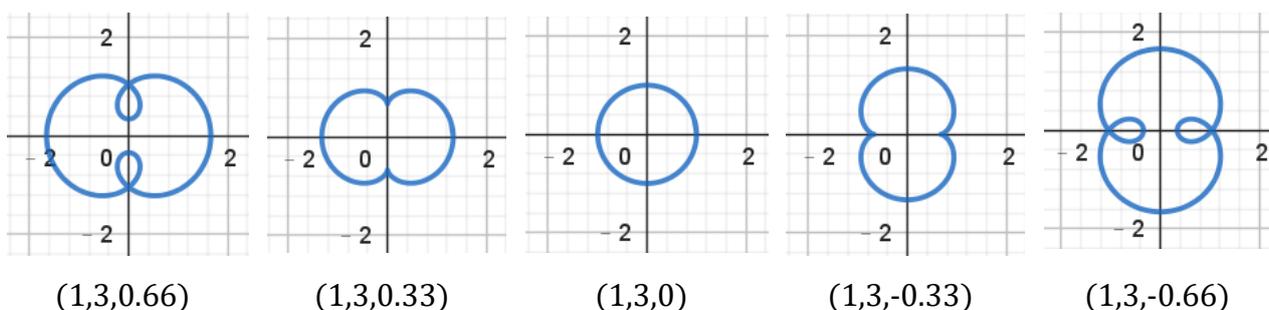


圖 7 改變  $r$  時，不同的  $(a, b, r)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

發現無論  $a, b$  為何，當  $r = \pm \frac{a}{b}$  時，圖形皆會有在軌跡上不平滑的點，若以點的運動來看，在該點會瞬間改變其移動方向，我們稱這樣的點為尖點，正式定義如下。

### 定義 11

對於所有  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，

定義  $V_{a,b,r}(t) := \frac{d}{dt} S_{a,b,r}(t) = (-a \sin at - rb \sin bt, a \cos at + rb \cos bt)$ ，可以想像為點

$S_{a,b,r}(t)$  的速度向量。

### 定義 12

若  $V_{a,b,r}(t) \neq (0,0)$ ，定義  $\hat{V}_{a,b,r}(t) := \frac{V_{a,b,r}(t)}{|V_{a,b,r}(t)|}$ ，其中  $|V_{a,b,r}(t)|$  是  $V_{a,b,r}(t)$  與原點的距離。

### 定義 13

若存在  $t_0 \in \mathbb{R}$  使得  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$ ，則稱  $S_{a,b,r}$  在  $t_0$  發生尖點，或  $S_{a,b,r}(t_0)$

為尖點。

### 定理 14

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，以下三者等價。

1.  $V_{a,b,r}(t) = (0,0)$
2.  $\left(r = -\frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{2k\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z}\right)$  或  $\left(r = \frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z}\right)$
3.  $S_{a,b,r}(t)$  為尖點

證明：

首先證明若  $r$  不為  $\frac{a}{b}$  或  $-\frac{a}{b}$ ，則  $V_{a,b,r}(t) \neq (0,0)$ 。

注意到  $V_{a,b,r}(t)$  一定屬於  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \min\{|a+rb|, |a-rb|\} \leq d(x, (0,0))\}$ ，

若  $r$  不為  $\frac{a}{b}$  或  $-\frac{a}{b}$ ，則  $|a+rb|, |a-rb|$  皆不為零， $\min\{|a+rb|, |a-rb|\} > 0$ ，

因此  $V_{a,b,r}(t) \neq (0,0)$ 。所以我們知道，若想使  $V_{a,b,r}(t) = (0,0)$ ， $r$  必須為  $\pm\frac{a}{b}$ 。

**Case 1**  $r = -\frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} V_{a,b,r}(t) &= (-a \sin at - rb \sin bt, a \cos at + rb \cos bt) \\ &= (-a \sin at + a \sin bt, a \cos at - a \cos bt) \end{aligned}$$

$$(-a \sin at + a \sin bt, a \cos at - a \cos bt) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \sin at = \sin bt \text{ 且 } \cos at = \cos bt$$

$$\Leftrightarrow at - bt = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2k\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z}$$

**Case 2**  $r = \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} V_{a,b,r}(t) &= (-a \sin at - rb \sin bt, a \cos at + rb \cos bt) \\ &= (-a \sin at - a \sin bt, a \cos at + a \cos bt) \end{aligned}$$

$$(-a \sin at - a \sin bt, a \cos at + a \cos bt) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \sin at = -\sin bt \text{ 且 } \cos at = -\cos bt$$

$$\Leftrightarrow at - bt = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z}$$

以上證明了 1. 與 2. 等價，接著證明 2. 與 3. 等價。

注意到在  $|V_{a,b,r}(t)| \neq 0$  時  $|V_{a,b,r}(t)|$  與  $V_{a,b,r}(t)$  皆處處連續，因此  $\hat{V}_{a,b,r}(t) := \frac{V_{a,b,r}(t)}{|V_{a,b,r}(t)|}$  也連

續，也代表  $\lim_{u \rightarrow t^+} \hat{V}_{a,b,r}(u) = \lim_{u \rightarrow t^-} \hat{V}_{a,b,r}(u)$ ，即  $S_{a,b,r}(t)$  不為尖點。

又  $|V_{a,b,r}(t)| \neq 0$  等價於  $V_{a,b,r}(t) \neq (0,0)$ ，因此上面的敘述告訴我們若  $S_{a,b,r}(t)$  為尖點，則  $V_{a,b,r}(t) = (0,0)$ 。

所以我們知道 3. 可以推得 1.，又 1. 與 2. 等價，所以 3. 可以推得 2.。接著假設 2. 成立。

**Case 1**  $r = -\frac{a}{b}$  且  $t = \frac{2k\pi}{a-b}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} V_{a,b,r}(t) &= (-a \sin at - rb \sin bt, a \cos at + rb \cos bt) \\ &= (-a \sin at + a \sin bt, a \cos at - a \cos bt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |V_{a,b,r}(t)| &= \sqrt{(-a \sin at + a \sin bt)^2 + (a \cos at - a \cos bt)^2} \\ &= a\sqrt{2 - 2 \cos(at - bt)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{a,b,r}(t) &= \frac{V_{a,b,r}(t)}{|V_{a,b,r}(t)|} \\ &= \frac{(-a \sin at + a \sin bt, a \cos at - a \cos bt)}{a\sqrt{2 - 2 \cos(at - bt)}} \\ &= \frac{(\sin bt - \sin at, \cos at - \cos bt)}{2\sqrt{\frac{1 - \cos(at - bt)}{2}}} \\ &= \frac{(\sin bt - \sin at, \cos at - \cos bt)}{2 \left| \sin \frac{at - bt}{2} \right|} \\ &= \frac{(-2 \cos \frac{at + bt}{2} \sin \frac{at - bt}{2}, -2 \sin \frac{at + bt}{2} \sin \frac{at - bt}{2})}{2 \left| \sin \frac{at - bt}{2} \right|} \\ &= \begin{cases} \left( -\cos \frac{at + bt}{2}, -\sin \frac{at + bt}{2} \right) & \text{if } \sin \frac{at - bt}{2} > 0 \\ \left( \cos \frac{at + bt}{2}, \sin \frac{at + bt}{2} \right) & \text{if } \sin \frac{at - bt}{2} < 0 \end{cases} \quad - (4) \end{aligned}$$

注意到每當  $t$  值由小而大連續變化並通過  $\frac{2k\pi}{a-b}$  時， $\sin \frac{at - bt}{2}$  總是由正變負或由負變正，

因此  $\lim_{t \rightarrow \frac{2k\pi}{a-b}^+} \hat{V}_{a,b,r}(t) = - \lim_{t \rightarrow \frac{2k\pi}{a-b}^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  總是成立。

**Case 2**  $r = \frac{a}{b}$  且  $t = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} V_{a,b,r}(t) &= (-a \sin at - rb \sin bt, a \cos at + rb \cos bt) \\ &= (-a \sin at - a \sin bt, a \cos at + a \cos bt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|V_{a,b,r}(t)| &= \sqrt{(-a \sin at - a \sin bt)^2 + (a \cos at + a \cos bt)^2} \\
&= a\sqrt{2 + 2 \cos(at - bt)} \\
\hat{V}_{a,b,r}(t) &= \frac{V_{a,b,r}(t)}{|V_{a,b,r}(t)|} \\
&= \frac{(-a \sin at - a \sin bt, a \cos at + a \cos bt)}{a\sqrt{2 + 2 \cos(at - bt)}} \\
&= \frac{(-\sin at - \sin bt, \cos at + \cos bt)}{2\sqrt{\frac{1 + \cos(at - bt)}{2}}} \\
&= \frac{(-\sin at - \sin bt, \cos at + \cos bt)}{2 \left| \cos \frac{at - bt}{2} \right|} \\
&= \frac{\left( -2 \sin \frac{at + bt}{2} \cos \frac{at - bt}{2}, 2 \cos \frac{at + bt}{2} \cos \frac{at - bt}{2} \right)}{2 \left| \cos \frac{at - bt}{2} \right|} \\
&= \begin{cases} \left( -\sin \frac{at + bt}{2}, \cos \frac{at + bt}{2} \right) & \text{if } \cos \frac{at - bt}{2} > 0 \\ \left( \sin \frac{at + bt}{2}, -\cos \frac{at + bt}{2} \right) & \text{if } \cos \frac{at - bt}{2} < 0 \end{cases} \quad (5)
\end{aligned}$$

注意到每當  $t$  值由小而大連續變化並通過  $\frac{(2k+1)\pi}{a-b}$  時， $\cos \frac{at-bt}{2}$  總是由正變負或由負變正，

因此  $\lim_{t \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{a-b}^+} \hat{V}_{a,b,r}(t) = - \lim_{t \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{a-b}^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  總是成立。

由上推論可知在 2. 成立時， $\lim_{u \rightarrow t^+} \hat{V}_{a,b,r}(u) \neq \lim_{u \rightarrow t^-} \hat{V}_{a,b,r}(u)$  皆成立，得證。 ■

透過定理 14，我們可以很清楚的知道每一個尖點發生的位置，且點在通過尖點前後，其方向總是與原先相反、通過尖點瞬間其速度皆為零。

接下來，我們還注意到一件事情，觀察圖 7，發現尖點處切線方向都是朝著原點，我們想證明這件事情，即下方定理 15。

### 定理 15

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $S_{a,b,r}$  在  $t_0$  處發生尖點，則通過  $S_{a,b,r}(t_0)$  且方向向量為  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  或  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  的直線也會通過原點。

證明：

由定理 14 可知，尖點發生的情況僅有以下兩種：

**Case 1**  $r = -\frac{a}{b}$  且  $t_0 = \frac{2k\pi}{a-b}$ , for some  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \text{此時尖點位置 } S_{a,b,r}(t_0) &= \left( \cos a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) - \frac{a}{b} \cos b \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right), \sin a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) - \frac{a}{b} \sin b \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) \right) \\
 &= \left( \cos a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) - \frac{a}{b} \cos 2k\pi \left( \frac{b}{a-b} + 1 \right), \sin a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) - \frac{a}{b} \sin 2k\pi \left( \frac{b}{a-b} + 1 \right) \right) \\
 &= \left( \cos a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) - \frac{a}{b} \cos a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right), \sin a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) - \frac{a}{b} \sin a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) \right) \\
 &= \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \left( \cos a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right), \sin a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) \right)
 \end{aligned}$$

又由定理 14 證明中式(4)可知：

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t) &= \pm \left( \cos \frac{at_0 + bt_0}{2}, \sin \frac{at_0 + bt_0}{2} \right) \\
 &= \pm \left( \cos k\pi \left( \frac{a+b}{a-b} \right), \sin k\pi \left( \frac{a+b}{a-b} \right) \right) \\
 &= \pm \left( \cos k\pi \left( \frac{a+b}{a-b} + 1 \right), \sin k\pi \left( \frac{a+b}{a-b} + 1 \right) \right) \\
 &= \pm \left( \cos a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right), \sin a \left( \frac{2k\pi}{a-b} \right) \right)
 \end{aligned}$$

前面的正負號是根據  $k$  來決定，但不影響以其為方向向量決定的直線，同理左極限也會對應到相同的直線。發現此向量與尖點  $S_{a,b,r}(t_0)$  的位置向量平行，因此，通過  $S_{a,b,r}(t_0)$  且方向向量為  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  或  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  的直線也會通過原點，得證。

**Case 2**  $r = \frac{a}{b}$  且  $t_0 = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}$ , for some  $k \in \mathbb{Z}$

同理可以用定理 14 證明中的式(5)證明。

■

## 肆、研究結果

一、若  $\frac{a}{b}$  為有理數，則代數與幾何週期皆存在，且  $A_{a,b,r} = \frac{2\pi}{\gcd(a,b)}$ 、 $G_{a,b,r} = \frac{2\pi \gcd(a,b)}{|a-b|}$

二、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則  $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \theta < \varepsilon$ ，使得  $R_\theta(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ 。

三、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則代數與幾何週期皆不存在。

四、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

五、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則所有  $D_r$  中的點都是  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  的邊界點。

六、以下三者等價。

(一)  $V_{a,b,r}(t) = (0,0)$

(二)  $\left(r = -\frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{2k\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z}\right)$  或  $\left(r = \frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z}\right)$

(三)  $S_{a,b,r}(t)$  為尖點

七、若  $S_{a,b,r}$  在  $t_0$  處發生尖點，則通過  $S_{a,b,r}(t_0)$  且方向向量為  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  或  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$

的直線也會通過原點。

## 伍、未來展望

一、將雙圓推廣成  $n$  個圓，給定實數列  $a_k, r_k (k \in \mathbb{N})$ ，定義  $S_{a_n r_n}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$S_{a_n r_n}(t) := \sum_{i=0}^n r_i \begin{pmatrix} \cos a_i t \\ \sin a_i t \end{pmatrix}$$

我們發現：若  $a_k \in \mathbb{Z} (1 \leq k \leq n), a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  且等號不全成立，則  $S_{a_n r_n}$  的瓣數為  $\gcd(a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1})$ 。僅有粗略的證明，未來可望完成此證明且研究本作品提到的其他性質是否能推廣到  $S_{a_n r_n}$  上，甚至考慮能否定義可數多個圓。

二、起初我們想討論  $r$  與圖形區域個數的關係，如圖 8：

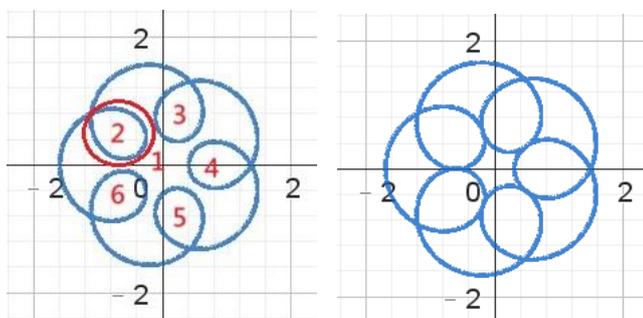


圖 8  $r$  與圖形區域個數的關係

已經觀察得知用紅色圈圈標註起來的這個小區域是由尖點演變而來，且小區域數與瓣數

相等，因此可以得知某些  $r$  值的總區域數變化，但我沒有辦法找出不同小區域之間相切時的  $r$  值，如右上圖片所示，這使得我沒有辦法得知總區域數量是在  $r$  為多少時變化。且區域數的問題也有一些特殊情況尚未找出規律，因此期望未來能解決此問題。

三、本文研究的函數圖形與衛星相對於恆星的繞行軌跡非常相似，期望能找到與物理和天文的連接並應用。

## 陸、參考資料

[1] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3) (pp.35,48). New York: McGraw-hill.

[2] Schmidt, W. M. (2009). *Diophantine approximation* (Vol. 785) (pp.27). Springer.

[3] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3) (pp.93). New York: McGraw-hill.

[4] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3) (pp.32,42). New York: McGraw-hill.

## 【評語】 050410

本作品作者定義了一個雙圓繞行軌跡，但是作者並未察覺這個問題的本質其實就是內外次擺線。因此，作品通篇都在研究內外次擺線的各種性質，例如封閉性的等價條件、不封閉時的稠密性、函數週期、對稱性、和隱函數不可微時的相關性質。然而，這些都是已知結果。建議參見《科學月刊》第二十卷第十二期〈幾何學中的海倫〉，做為文獻研讀的切入點。

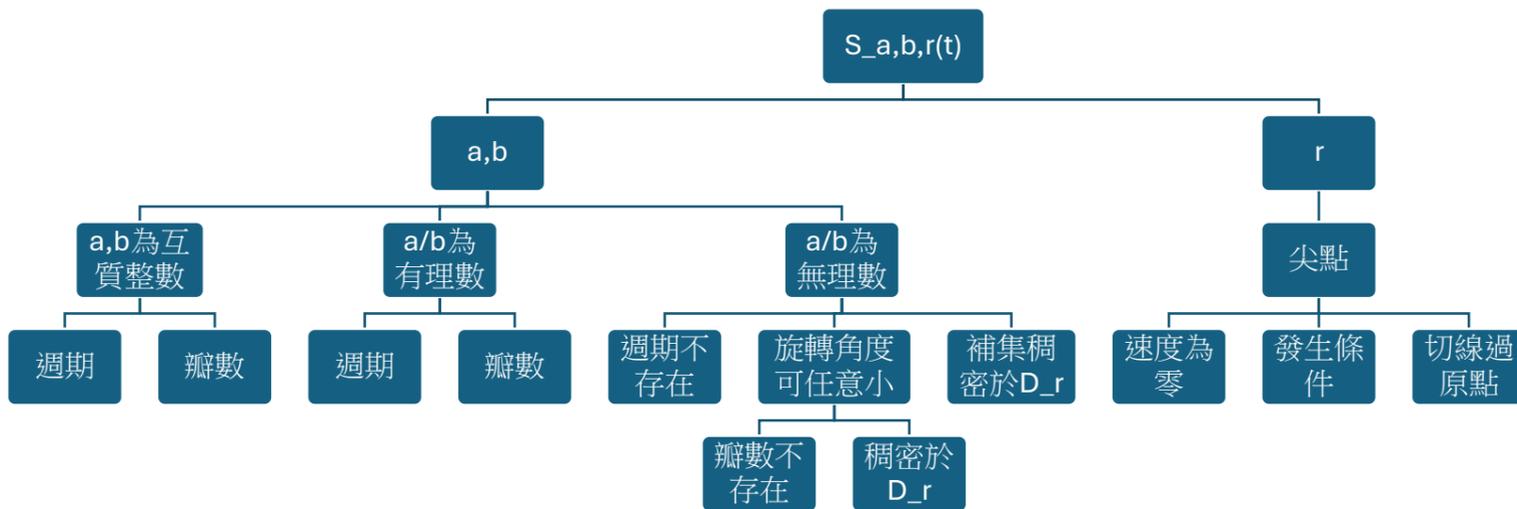
## 作品簡報

# 雙圓繞行軌跡性質探討

# 摘要

本文探討雙圓軌跡繞行函數  $S_{a,b,r}(t) := (\cos at + r \cos bt, \sin at + r \sin bt)$  的圖形特徵及拓樸性質，利用 GeoGebra 繪圖觀察圖形模式，並使用微積分等分析學的手法進行證明。

本文主要分為兩個部分進行探討，分別研究變動  $a, b$  和變動  $r$  造成的現象。第一部分關於  $a, b$  的討論發現當  $\frac{a}{b}$  為有理數時，圖形將有明顯的週期性結構，因此我們定義並討論此函數的代數週期及幾何週期。當  $\frac{a}{b}$  為無理數時，圖形將不再有週期結構，然而其圖形卻會在一環狀區域  $D_r$  中稠密，並且圖形的補集也會在  $D_r$  中稠密。第二部分關於  $r$  的討論，發現當  $r$  在某些特定值時，圖形將產生尖點，並且此尖點可作出通過原點的圖形切線。脈絡如下所示(括號數字為定理編號)：



## 壹、研究過程與方法

### 一、定義

#### 定義 1

定義非零實數為  $\mathbb{R}^*$ ，即  $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ 。  
定義正實數為  $\mathbb{R}^+$ ，即  $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ 。  
定義非零整數為  $\mathbb{Z}^*$ ，即  $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$ 。

#### 定義 3

令  $(X, d)$  為一賦距空間， $E \subseteq X$ ， $p \in X$ ， $r > 0$ 。  
若某點  $p \in X$  滿足  $\forall r > 0 (E \cap B(p, r) - \{0\} \neq \emptyset)$ ，則稱  $p$  為  $E$  的極限點 (limit point)。  
定義  $E$  的閉包 (closure)  $\bar{E} := E \cup \{E \text{ 的極限點} \}$   
若某點  $p \in X$  滿足  $\exists r > 0 (B(p, r) \subseteq E)$ ，則稱  $p$  為  $E$  的內點 (interior point)。  
若某點  $p \in X$  為  $E$  的極限點，且為  $X - E$  的極限點，則稱  $p$  為  $E$  的邊界點 (boundary point)。

#### 定義 5

令  $\theta \in \mathbb{R}$ 。定義線性變換  $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，  
 $R_\theta(x, y) := (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ ，此為使  $(x, y)$  在平面上以原點為旋轉中心，逆時針旋轉角度  $\theta$  之函數。也可以寫成矩陣的形式，如下所示：

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

#### 定義 7

對於任一實變函數  $f$ ，若存在  $u \in \mathbb{R}^+$  使得  $\forall t \in \mathbb{R} f(t) = f(t + u)$  成立，則稱  $f$  為週期函數，且若  $\min\{u \in \mathbb{R}^+ | \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(t + u)\}$  存在，則稱其為  $f$  的週期。特別地，若  $S_{a,b,r}$  的週期存在，則以  $A_{a,b,r}$  表示。(代數週期 Algebraic period)

#### 定義 9

令  $(X, d)$  為一賦距空間， $A, B, E \subseteq X$ 。  
我們說  $A$  在  $B$  中稠密 (dense) 如果  $B \subseteq \bar{A}$ 。  
我們說  $A$  和  $B$  是分離的 (separated) 如果  $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ 。  
我們說  $E$  是連通集 (Connected set) 如果  $E$  不為兩個非空分離集合的聯集。

#### 定義 11

若  $V_{a,b,r}(t) \neq (0,0)$ ，定義  $\hat{V}_{a,b,r}(t) := \frac{V_{a,b,r}(t)}{|V_{a,b,r}(t)|}$ ，其中  $|V_{a,b,r}(t)|$  是  $V_{a,b,r}(t)$  與原點的距離。

#### 定義 2

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。定義函數  $S_{a,b,r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ，  
 $S_{a,b,r}(t) := (\cos at + r \cos bt, \sin at + r \sin bt)$ 。  
或寫為行向量表示法  $S_{a,b,r}(t) := \begin{pmatrix} \cos at + r \cos bt \\ \sin at + r \sin bt \end{pmatrix}$ 。  
(註：若未特別說明，在本文中皆使用歐氏距離)

#### 定義 4

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。  
 $I = \max\{|1 - r|, |1 + r|\}$ ， $i = \min\{|1 - r|, |1 + r|\}$ 。  
 $D_r := \{x \in \mathbb{R}^2 | i \leq d(x, (0,0)) \leq I\}$ 。

當  $a = b$  或  $a, b, r$  其一為 0 時  $S_{a,b,r}(t)$  就化簡為圓形的參數式，不是本文討論的重點，因此在往後的討論皆假設  $a, b$  相異且皆不為 0， $r \neq 0$ ，且不再特別註明。

#### 定義 6

對於任意兩個非零實數  $a, b$ ，如果存在一正實數  $k$  使得  $\frac{a}{k}$  和  $\frac{b}{k}$  皆為整數且互質，則定義  $a, b$  的最大公因數為  $k$ ，記為  $\gcd(a, b)$ 。

可以簡單的檢驗這樣的  $k$  如果存在必唯一，並且在  $a, b$  為整數時和原先最大公因數的定義相同，因此我們在後文不會特別區別兩者。且注意到  $\gcd(a, b)$  存在等價於  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ 。

#### 定義 8

令  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ 。  
定義  $G_{a,b,r} := \min\{\theta \in \mathbb{R}^+ | R_\theta(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})\}$ 。  
這個定義的意義是可以使得逆時針旋轉後圖形與原先重合之最小正角度。(幾何週期 Geometric period)

若  $G_{a,b,r}$  存在，則定義  $S_{a,b,r}$  的瓣數為  $\frac{2\pi}{G_{a,b,r}}$ 。

#### 定義 10

對於所有  $a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，  
定義  $V_{a,b,r}(t) := \frac{d}{dt} S_{a,b,r}(t)$   
 $= (-a \sin at - rb \sin bt, a \cos at + rb \cos bt)$ 。  
可以想像為點  $S_{a,b,r}(t)$  的速度向量。

#### 定義 12

若存在  $t_0 \in \mathbb{R}$  使得  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$ ，則稱  $S_{a,b,r}$  在  $t_0$  發生尖點，或  $S_{a,b,r}(t_0)$  為尖點。

## 二、 $\frac{a}{b}$ 為有理數

我們先固定  $r = 1$ ，將  $(a, b)$  代入幾個簡單的係數並觀察  $S_{a,b,r}$  的圖形，如圖 1 所示。再改變  $r$  值為 0.5 或 2，如圖 2 所示。

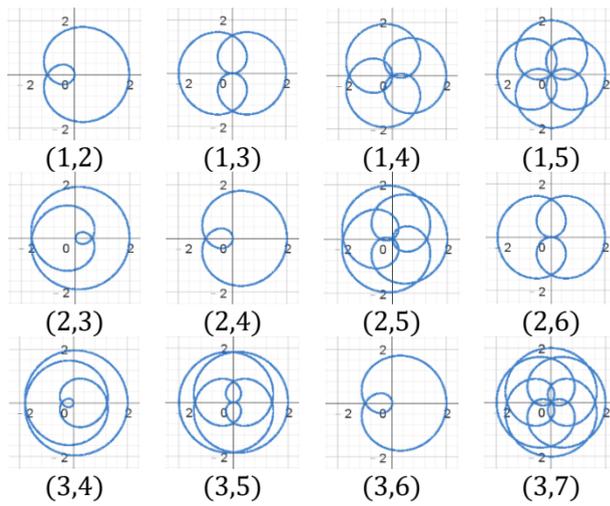


圖 1  $r = 1$  時，不同的  $(a, b)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

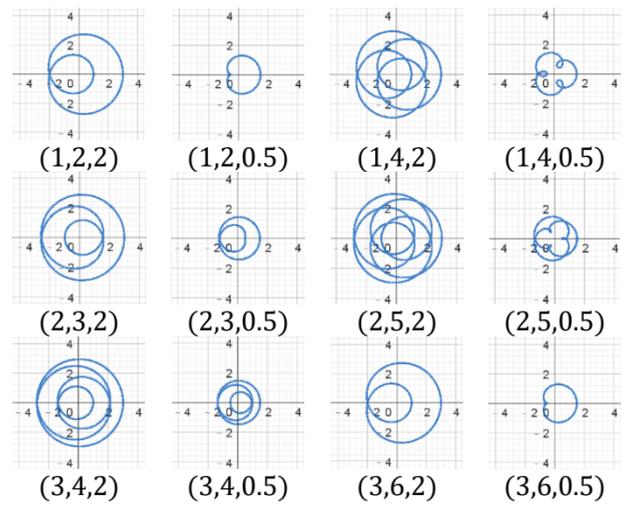


圖 2  $r = 0.5$  或  $2$  時，不同的  $(a, b, r)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

觀察圖形後自然地提出一些問題：

1. 是否  $a, b$  比值相同圖形就相同？
2.  $S_{a,b,r}$  是否為一個週期函數(定義 7)？若是，週期為何？
3. 觀察圖 1、2，可以發現這些圖形有像花瓣一樣重複的規律，先直觀地稱圖形中重複的部分為「瓣」，瓣的數量稱為「瓣數」發現當非零整數  $a, b$  變動時瓣數會隨之變動，例如當  $(a, b) = (1, 4)$  的時我們說此圖形「有 3 瓣」、 $(a, b) = (1, 3)$  時「有 2 瓣」， $a, b$  與瓣數之間的關係是什麼？

### 定理 1

$$\forall a, b, r, k \in \mathbb{R}^* \quad S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = S_{ka,kb,r}(\mathbb{R})。$$

證明：

$$\text{令 } kt = t', \text{ 則 } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t' \in \mathbb{R}。$$

$$\begin{aligned} S_{ka,kb,r}(\mathbb{R}) &= \{(\cos kat + r \cos kbt, \sin kat + r \sin kbt) | t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\cos at' + r \cos bt', \sin at' + r \sin bt') | t' \in \mathbb{R}\} \\ &= S_{a,b,r}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

得證。

由此知  $a, b$  比值相同圖形就相同，解決了問題 1。

### 定理 5

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 若 } a, b \text{ 互質，則 } A_{a,b,r} \text{ 皆存在且等於 } 2\pi。$$

### 定理 6

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 若 } \gcd(a, b) \text{ 存在，則 } A_{a,b,r} \text{ 皆存在且等於 } \frac{2\pi}{\gcd(a, b)}。$$

我發現只要  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ， $S_{a,b,r}$  就會是週期函數，並進一步得出了其週期確切的值。我首先證明了若  $a, b$  為互質整數， $S_{a,b,r}$  的週期等於  $2\pi$ 。接著對於更一般的情況，若  $\gcd(a, b)$  存在，將  $a, b$  同除以  $\gcd(a, b)$ ，就可使兩數變為互質整數並套用定理 5，又因為此操作就相當於一個變數變換：

$$S_{\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}, r}(t) = S_{a,b,r}\left(\frac{t}{\gcd(a,b)}\right)$$

因此原函數的週期就是  $\frac{2\pi}{\gcd(a,b)}$ ，解決了問題 2。

### 定理 7

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \theta, t \in \mathbb{R}, \text{ 若 } \frac{a\theta - b\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}, \text{ 則 } S_{a,b,r}(t + \theta) = R_{a\theta}(S_{a,b,r}(t))。$$

為了解決問題 3，我發現了定理 7，此式與旋轉有關，能幫助我們更瞭解函數的性質。舉例說明：若令  $(a, b, r) = (5, 1, 1)$ 、 $\theta = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{\pi}{2}$ ， $A, B, C, D$  點分別代表  $t, t + \theta, t + 2\theta, t + 3\theta$  代入函數  $S_{a,b,r}$  所得到的點，則由圖 3 我們可以看到無論  $t$  為何， $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$  都保持相同的夾角。再舉例令  $(a, b, r) = (7, 2, 1)$ 、 $\theta = \frac{2\pi}{a-b} = \frac{2\pi}{5}$ ，也會有相同的結果。

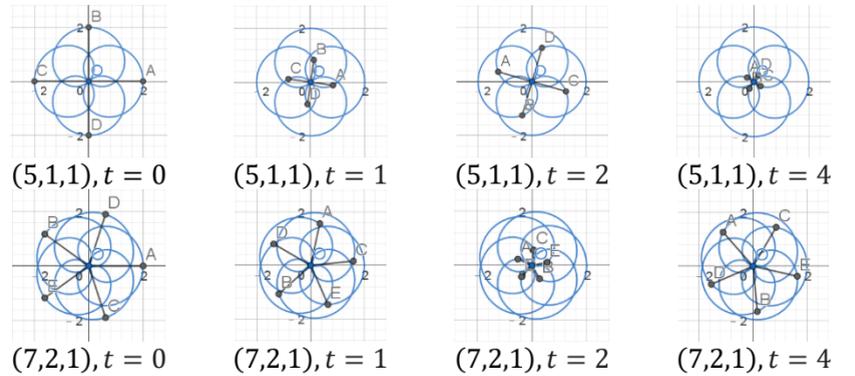


圖 3 在不同  $(a, b, r)$  下  $t + n\theta$  代入函數  $S_{a,b,r}$  所得到的點 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

### 定理 8

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^*, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 若 } a, b \text{ 互質，則 } G_{a,b,r} = \frac{2\pi}{|a-b|}。$$

### 定理 9

$$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*, \text{ 如果 } \gcd(a, b) \text{ 存在，則 } G_{a,b,r} = \frac{2\pi \gcd(a, b)}{|a-b|}。$$

與定理 5, 6 證明途徑相似，我發現只要  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ， $G_{a,b,r}$  就存在。我首先證明了若  $a, b$  為互質整數，則  $G_{a,b,r} = \frac{2\pi}{|a-b|}$ 。接著對於更一般的情況，若  $\gcd(a, b)$  存在，將  $a, b$  同除以  $\gcd(a, b)$ ，就可使兩數變為互質整數。又根據定理 1 我們有：

$$S_{a,b,r}(\mathbb{R}) = S_{\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}, r}(\mathbb{R})$$

所以由定義直接得到：

$$G_{a,b,r} = G_{\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}, r}$$

最後利用定理 8 即可得到  $G_{a,b,r}$  確切的值，完成證明。

根據定義 8 瓣數  $= \frac{2\pi}{G_{a,b,r}} = \frac{|a-b|}{\gcd(a,b)}$ ，問題 3 也被解決了。現在我們代入不同的數值來檢驗定理的結果是否符合我們的期望，見圖 4。

$a, b$  為互質整數

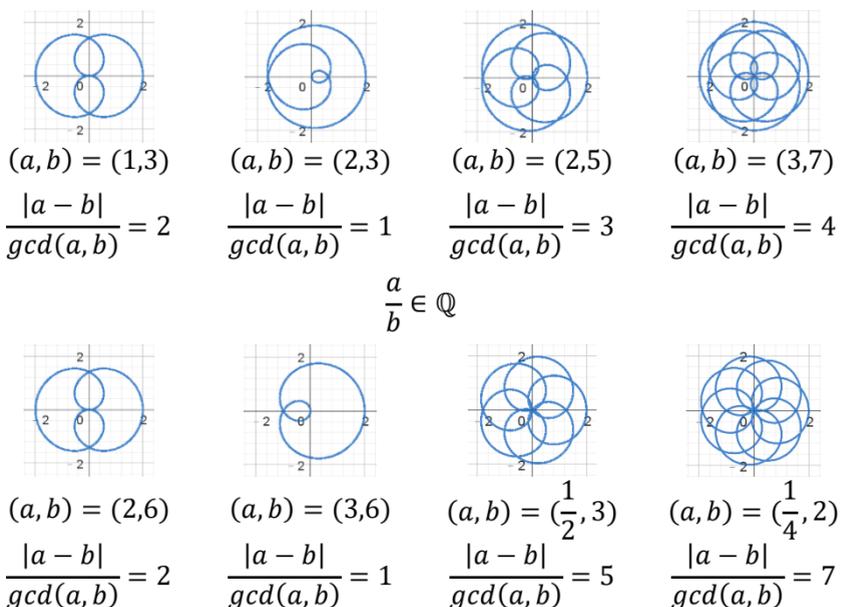


圖 4  $r = 1$  時，不同的  $(a, b)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形與其瓣數

### 三、 $\frac{a}{b}$ 為無理數

我們在前對於圖形各個性質，討論的順序都是：

1.  $a, b$  為互質整數
2.  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

我好奇如果  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$  會有怎樣的圖形，見圖 5。

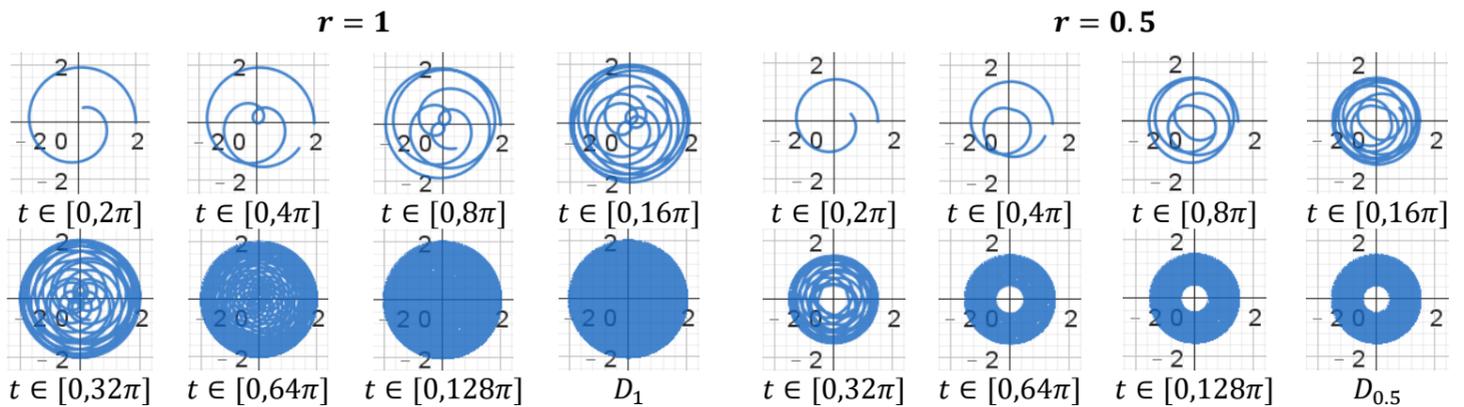


圖 5  $r = 0.5$  或  $1, (a, b) = (1, \sqrt{2})$  時， $D_r$  和限制  $t$  在不同區間所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

觀察圖形後自然地提出一些問題：

1. 當  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$  時， $A_{a,b,r}$  和  $G_{a,b,r}$  是否存在？若是，分別為何？
2.  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  是否能完全把  $D_r$  覆蓋，若不能，是否能「幾乎」覆蓋住，也就是  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  能否在  $D_r$  上稠密？

首先我在定理 10 直接證明了  $A_{a,b,r}$  不存在。再來我發現了這個重要的定理 11，它告訴我們能使旋轉圖形後與原圖形相同的角度可以任意小，這麼一來便可以直接由定義看出  $G_{a,b,r}$  不存在，解決問題 1。接著定理 11 也可以用來證明  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  上稠密。最後我又證明了  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  不能完全把  $D_r$  覆蓋，且事實上未被覆蓋的區域  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  也會在  $D_r$  上稠密，解決問題 2。

定理 10

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $S_{a,b,r}$  不為週期函數。

定理 11

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \theta < \varepsilon$ ，使得  $R_\theta(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ 。

定理 12

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

定理 13

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $\gcd(a, b)$  不存在，則  $\mathbb{R}^2 - S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

### 四、 $r$ 與尖點的關係

現在我們想要觀察在固定  $a, b$  的情況，變動  $r$  會有怎樣的現象。發現無論  $a, b$  為何，當  $r = \pm \frac{a}{b}$  時，圖形皆會有在軌跡上不平滑的點，若以點的運動來看，在該點會瞬間改變其移動的方向，我們稱這類型的點為尖點(定義 12)，定理 14 更精確的描述尖點發生的條件和位置，且點在通過尖點前後，其速度方向總是與原先相反、通過尖點瞬間其速度皆為零。

接下來，我還注意到一件事情，觀察圖 6，發現尖點處切線方向都是朝著原點，並在定理 15 也證明了這件事情。

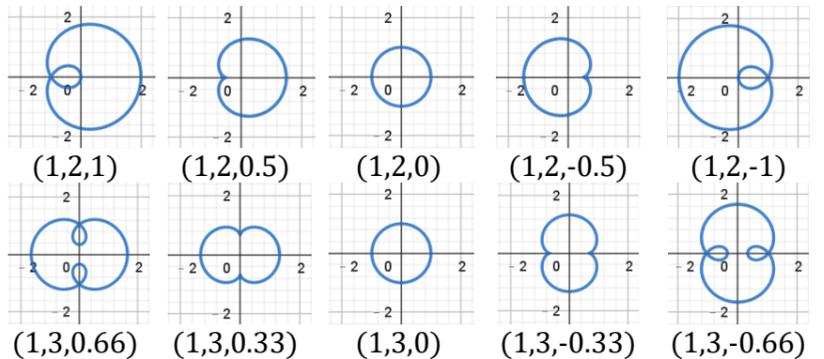


圖 6 改變  $r$  時，不同的  $(a, b, r)$  所得到的  $S_{a,b,r}$  的圖形

定理 14

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，以下三者等價。

1.  $V_{a,b,r}(t) = (0, 0)$
2.  $(r = -\frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{2k\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z})$  或  $(r = \frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z})$
3.  $S_{a,b,r}(t)$  為尖點

定理 15

$\forall a, b, r \in \mathbb{R}^*$ ，若  $S_{a,b,r}$  在  $t_0$  處發生尖點，則通過  $S_{a,b,r}(t_0)$  且方向向量為  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  或  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  的直線會通過原點。

## 貳、研究結果

一、若  $\frac{a}{b}$  為有理數，則代數與幾何週期皆存在，且  $A_{a,b,r} = \frac{2\pi}{\gcd(a,b)}$ 、 $G_{a,b,r} = \frac{2\pi \gcd(a,b)}{|a-b|}$ 。

二、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則  $\forall \varepsilon > 0, \exists 0 < \theta < \varepsilon$ ，使得  $R_\theta(S_{a,b,r}(\mathbb{R})) = S_{a,b,r}(\mathbb{R})$ 。

三、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則代數與幾何週期皆不存在。

四、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  在  $D_r$  中稠密。

五、若  $\frac{a}{b}$  為無理數，則所有  $D_r$  中的點都是  $S_{a,b,r}(\mathbb{R})$  的邊界點。

六、以下三者等價。

(一)  $V_{a,b,r}(t) = (0, 0)$

(二)  $(r = -\frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{2k\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z})$  或  $(r = \frac{a}{b} \text{ 且 } t = \frac{(2k+1)\pi}{a-b}, k \in \mathbb{Z})$

(三)  $S_{a,b,r}(t)$  為尖點

七、若  $S_{a,b,r}$  在  $t_0$  處發生尖點，則通過  $S_{a,b,r}(t_0)$  且方向向量為  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  或  $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \hat{V}_{a,b,r}(t)$  的直線會通過原點。

## 參、參考資料

- [1] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3) (pp.35,48). New York: McGraw-hill.
- [2] Schmidt, W. M. (2009). *Diophantine approximation* (Vol. 785) (pp.27). Springer.
- [3] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3) (pp.93). New York: McGraw-hill.
- [4] Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3) (pp.32,42). New York: McGraw-hill