

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

050409

n 倍等角差線

學校名稱： 新北市立中和高級中學

作者： 高二 鄭郁寬 高二 郭炳宏 高二 江承祐	指導老師： 王晞安 牟柏丞
-----------------------------------------------	-----------------------------

關鍵詞： n 倍等角差線、雙曲線、稠密性

n 倍等角差線

摘要

本研究從分析產生 n 倍等角差線的聯立方程式與參數式出發，首先從觀察圖形的變化及計算，得到不同初始條件下的圖形分類，進一步探索其漸近線、輻射點的特性，並解決文獻中的稠密性猜想。

本研究再考慮 n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後的圖形，討論封閉圈數，並求得分割區域數。並且得到當 n 為有理數時，能利用圖形逆推 n 值。

壹、前言

(一) 文獻回顧

「等角差線」一詞起初由李永約在數學傳播 178 期(2021 年)提出。等角差線的概念是兩條通過不同定點的曲線，分別以等速率逆時針及順時針旋轉一固定角度範圍時，考慮所有兩直線的交會點所形成的曲線。李永約利用微分與矩陣工具發現了曲線的性質，包含對稱性、漸近線。

其後鍾文體在數學傳播 181 期(2022 年)、張鎮華在數學傳播 183 期(2022 年)均利用二元二次方程式的方法，指出了此曲線即為二次曲線中的雙曲線。

後續李永約在數學傳播 186 期(2023 年)將定義的部份修改，並且引進「 n 倍等角差線」的情境：即「兩條通過不同定點的曲線，分別以固定倍數的速率逆時針及順時針旋轉時，考慮所有兩直線的交會點所形成的曲線」。關於 n 倍等角差線，李永約使用微分與矩陣工具，提出曲線的對稱性、輻射點與漸近線，並提出關於此曲線是否能於坐標平面上稠密之猜測。

(二) 研究動機

對於過去兩年多，這三位作者在此問題上的發想，我們想使旋轉的角度為不設限的廣義角，順著這個情境觀察 n 倍等角差線，解決李永約提出的猜測問題，並且描述此線的一些樣貌。

在研究中我們也確實解決了猜測，亦在不同倍數 n (正整數、整數、有理數、實數)的速率下，描述軌跡隨著角度的產生過程、圖形分類、漸近線的數量、對稱性、封閉圈數、分割區域數、逆推 n 值……等等，形成本書的研究目的及研究結果。

(三) 研究目的

- (一)將 n 倍等角差線的圖形分類。
- (二)探索 n 倍等角差線的漸近線與輻射點。
- (三)探索 n 倍等角差線的漸近線數量。
- (四)處理 n 倍等角差線是否於坐標平面佈滿或稠密的猜想。
- (五)探索 n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形。
- (六)探索 n 倍等角差線的封閉圈數及分割區域數。
- (七)當 n 為有理數時，在已知為 n 倍等角差線的前提下，由圖形特徵逆推 n 值。

貳、研究設備及器材

紙、筆、Geogebra 軟體。

參、名詞解釋

一、等角差線：(參考文獻[1]，作者李永約)

如圖，考慮 α 為一常數、 θ 為一實數變數、 l 為一大於 0 的常數。給定兩直線 L_1, L_2 ，其中 L_1 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\alpha + \theta$ 的直線； L_2 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\pi - \theta$ 的直線。將 L_1, L_2 分別以原點 $B(0,0)$ 及 $C(l,0)$ 為旋轉中心，並且同時以 θ 作為變數開始旋轉。此時 L_1, L_2 的交點 A 所形成的軌跡稱為等角差線，並將此軌跡記作 $\Gamma_{\alpha,1}^l$ 。

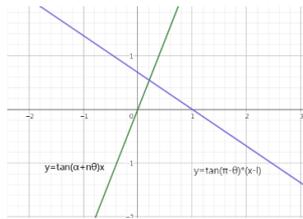


圖 1： L_1, L_2 在坐標平面上旋轉

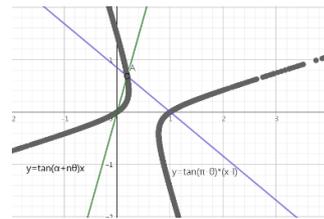


圖 2： L_1, L_2 的交點軌跡

二、 n 倍等角差線：(參考文獻[4]，作者李永約)

設 n 為一實數，考慮 α 為一常數、 θ 為一實數變數、 l 為一大於 0 的常數。給定兩直線 L_1, L_2 ，其中 L_1 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\alpha + n\theta$ 的直線； L_2 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\pi - \theta$ 的直線。將 L_1, L_2 分別以原點 $B(0,0)$ 及 $C(l,0)$ 為旋轉中心，並且同時以 θ 作為變數開始旋轉。此時 L_1, L_2 的交點 A 所形成的軌跡稱為 n 倍等角差線，並將此軌跡記作 $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 。

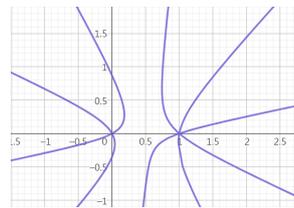


圖 3： n 倍等角差線

三、 n 倍等角差線的漸近線：(參考文獻[4]，作者李永約)

設 n 倍等角差線上一 P 點沿著線上移動，無限遠離原點時，若此 P 點與某一條直線 L 的距離趨近於 0，則稱 L 為 n 倍等角差線的一條漸近線。

四、輻射點：(參考文獻[4]，作者李永約)

固定同一組 α, n, l 的情形下， $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 的所有漸近線之交點稱為輻射點。

五、封閉圈數：

n 倍等角差線自相交形成封閉圈的數量。

六、分割區域數：

n 倍等角差線將坐標平面分割成不相交的區域之數量。

肆、研究結果

(一) n 倍等角差線的圖形分類

設 n 為一實數，考慮 α 為一常數、 θ 為一變數、 l 為一大於 0 的常數。給定兩直線 L_1, L_2 ，其中 L_1 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\alpha + n\theta$ 的直線； L_2 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\pi - \theta$ 的直線。將 L_1, L_2 分別以原點 $B(0,0)$ 及 $C(l,0)$ 為旋轉中心，並且同時以 θ 作為變數開始旋轉。此時 L_1, L_2 的交點 A 所形成的軌跡稱為 n 倍等角差線，並將此軌跡記作 $\Gamma_{\alpha, n}^l$ 。

交點 A 的軌跡即為下列聯立方程式的交點：

$$\begin{cases} L_1: y = \tan(\alpha + n\theta)x \\ L_2: y = -\tan\theta \cdot (x - l) \end{cases}$$

試著解聯立並將軌跡轉為 θ 的參數式：

$$\text{因為 } \tan(\alpha + n\theta)x = -\tan\theta \cdot (x - l) \Rightarrow [\tan\theta + \tan(\alpha + n\theta)]x = l \tan\theta$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan\theta}{\tan\theta + \tan(\alpha + n\theta)} \\ y = \frac{l \cdot \tan\theta \cdot \tan(\alpha + n\theta)}{\tan\theta + \tan(\alpha + n\theta)} = \tan(\alpha + n\theta) \cdot x \end{cases}$$

上述參數式在參考文獻[4]，作者李永約亦曾化簡得到。考慮兩直線 L_1, L_2 以 θ 作為變數開始旋轉，上述關於 α 、 n 的定義實際上在改變通過 $B(0,0)$ 之 L_1 的旋轉情形：其中 α 可被視為「預先旋轉」的旋轉角度、 n 可被視為 L_1 的「轉速倍率」為 L_2 的 n 倍。

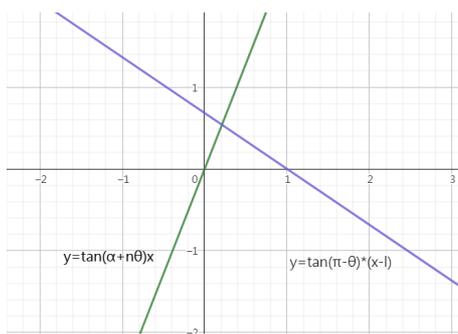


圖 4： L_1, L_2 在坐標平面上旋轉

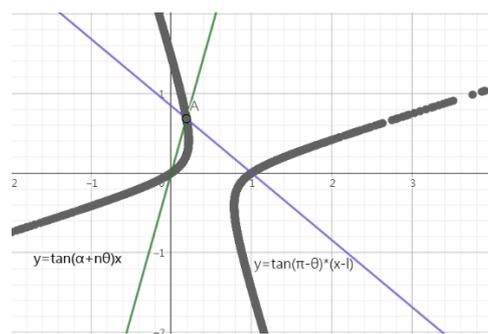


圖 5： L_1, L_2 的交點軌跡

使 α 、 n 作為控制項，我們可以得到不同的 n 倍等角差線圖形。當 α 、 n 滿足或不滿足以下的性質 1 時，圖形會有兩類不同的狀況，茲整理與說明如下：

1. 第一類 n 倍等角差線與第二類 n 倍等角差線

我們在使用 Geogebra 繪圖時，發現在不同的 α 、 n 之下，某些 n 倍等角差線不會包含水平線 $y=0$ 、某些則會包含水平線。關於這個現象，我們嘗試觀察 α 與 n 的關係，給出下列的兩個性質，以便將曲線予以分類。

性質 1： $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n$ 倍等角差線包含水平線 $y = 0$ 。

證明：

(\Rightarrow) 當 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，

我們有 $L_1: y = \tan(mn\pi + k\pi + n\theta)x = \tan(k\pi + n(m\pi + \theta))x$ 及 $L_2: y = \tan(-\theta)(x - l)$ 。

故當 $\theta = -m\pi$ 時， L_1 、 L_2 皆為水平線 $y = 0$ ，即 L_1 與 L_2 相交的點集合包含水平線 $y = 0$ 。

即當 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時， n 倍等角差線包含水平線 $y = 0$ 。

(\Leftarrow) 若 n 倍等角差線包含直線 $y = 0$ ，

則存在 $\theta = -m\pi, m \in \mathbb{Z}$ ，使得 $L_1: y = \tan(\alpha - mn\pi)x = \tan(0)x$ ，即 $\alpha - mn\pi = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

故 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 。■

因此，我們將 n 倍等角差線予以定義為兩類：

定義：第一類 n 倍等角差線與第二類 n 倍等角差線

(1) 不滿足 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 的 n 倍等角差線稱為「第一類 n 倍等角差線」，其圖形不包含水平線 $y = 0$ ；

(2) 滿足 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 的 n 倍等角差線稱為「第二類 n 倍等角差線」，其圖形包含水平線 $y = 0$ 。

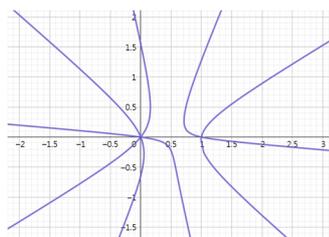


圖 6：第一類 n 倍等角差線 $n = \frac{2}{3}$ 、 $\alpha = \frac{5}{3}\pi$

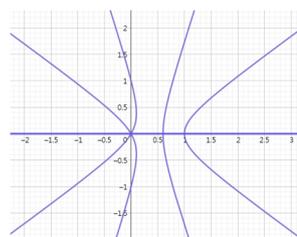


圖 7：第二類 n 倍等角差線 $n = \frac{2}{3}$ 、 $\alpha = \frac{5}{3}\pi$

性質 2：第二類 n 倍等角差線通過 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$ 。

證明：

$$\text{因為} \begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan(\alpha + n\theta)} \\ y = \frac{l \cdot \tan \theta \cdot \tan(\alpha + n\theta)}{\tan \theta + \tan(\alpha + n\theta)} = \tan(\alpha + n\theta) \cdot x \end{cases}, \text{故} \begin{cases} x = \frac{l \cdot \sin \theta \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r(\theta) \cdot \cos(\alpha + n\theta) \\ y = \frac{l \cdot \sin \theta \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r(\theta) \cdot \sin(\alpha + n\theta) \end{cases}$$

$$\text{其中 } r(\theta) = \frac{l \cdot \sin \theta}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \text{。}(r(\theta) \text{ 可能為正、負或 } 0)$$

當圖形為第二類 n 倍等角差線時，我們有 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ，因此：

$$x \text{ 坐標} = \lim_{\theta \rightarrow -m\pi} \left(\frac{l \sin(\theta) \cos(mn\pi + k\pi + n\theta)}{\sin(mn\pi + k\pi + (n+1)\theta)} \right) \text{ (往下使用羅必達法則)}$$

$$= l \lim_{\theta \rightarrow -m\pi} \left(\frac{\cos(\theta) \cos(mn\pi + k\pi + n\theta) - n \sin(\theta) \sin(mn\pi + k\pi + n\theta)}{(n+1) \cos(mn\pi + k\pi + (n+1)\theta)} \right) = \frac{l}{n+1}$$

類似地我們有 y 坐標 = 0。

所以第二類 n 倍等角差線通過 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$ 。■

2.第一類 n 倍等角差線的圖形分類

當 $\alpha \neq (nm+k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時, 我們可以依 n 值的不同整理聯立方程式或參數式, 並且考慮特別情形, 將曲線予以分類描述。分別為一般情形下的「 $n > 0$ 時的曲線、 $n < 0$ 時的曲線」, 以及特別情形「 $n = 1$ 時的雙曲線、 $n = 0$ 時的直線、 $n = -1$ 時的圓」, 說明如下:

表 1 : (1) $\alpha \neq (nm+k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線一般情形 :

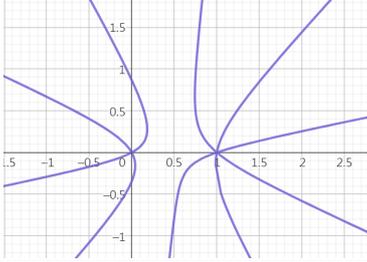
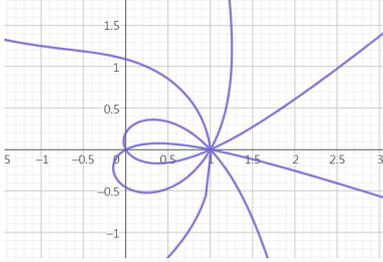
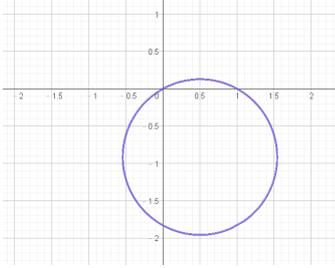
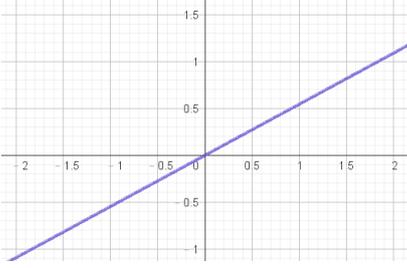
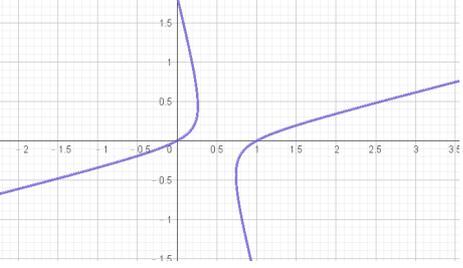
	
<p>① $n > 0$ (不具封閉圈的 n 倍等角差線) (圖 8)</p>	<p>② $n < 0$ (具封閉圈的 n 倍等角差線) (圖 9)</p>

表 2 : (2) $\alpha \neq (nm+k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線特別情形 :

		
<p>③ $n = -1$ (一圓) (圖 10)</p>	<p>④ $n = 0$ (直線) (圖 11)</p>	<p>⑤ $n = 1$ (雙曲線) (圖 12)</p>

(1) 一般情形 :

一般情形均為具有漸近線的曲線。

- ① $n > 0$ 時為具有多條漸近線, 以及漸近線均相交於一輻射點, 且不具封閉圈的圖形; ■
- ② $n < 0$ 時為具有漸近線, 以及漸近線均通過一輻射點, 且具有封閉圈的圖形。■

(2) 特別的情形 :

③ $n = -1$ 時 :

考慮聯立方程式
$$\begin{cases} L_1 : y = \tan(\alpha - \theta)x \\ L_2 : y = -\tan\theta \cdot (x - l) \end{cases}$$

將 L_2 移項可得 $\tan\theta = \frac{y}{l-x}$,

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \tan\theta} = \frac{(l-x)\tan\alpha - y}{(l-x) + \tan\alpha \cdot y}$$

經整理後得
$$\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{l}{2\tan\alpha}\right)^2 = \frac{l^2(1 + \tan^2\alpha)}{4\tan^2\alpha} = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{l^2}{4\sin^2\alpha}$$

故在 $\alpha \neq (nm+k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n = -1$ 時, 曲線為以 $\left(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2\tan\alpha}\right)$ 為圓心且半徑為 $\frac{l}{2\sin\alpha}$ 的圓。■

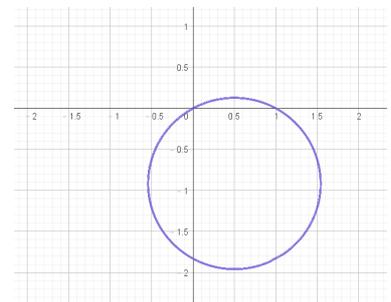


圖 10 : $n = -1$ 時為一圓

④ $n=0$ 時：

相當於 L_1 不轉動、 L_2 在旋轉，因此交點軌跡即為 $L_1 : y = \tan \alpha \cdot x$ 。

另外當 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 時，圖形為鉛垂線。

故 $n=0$ 時為一條過 $(0,0)$ 的直線。■

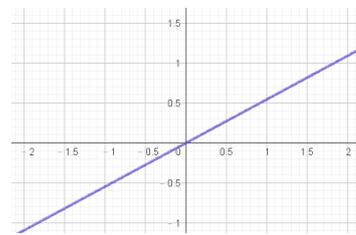


圖 11： $n=0$ 時為一條過 $(0,0)$ 的直線

⑤ $n=1$ 時：(參考文獻[2]、[3]，鍾文體、張鎮華兩位作者均整理出此類特例為雙曲線)

考慮聯立方程式 $\begin{cases} L_1 : y = \tan(\alpha + \theta)x \\ L_2 : y = -\tan \theta \cdot (x-l) \end{cases}$ ，

將 L_2 移項可得 $\tan \theta = \frac{y}{l-x}$ ，

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(\alpha + \theta) = \frac{\tan \alpha + \frac{y}{l-x}}{1 - \frac{y}{l-x} \tan \alpha} = \frac{(l-x) \tan \alpha + y}{(l-x) - \tan \alpha \cdot y}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha \cdot x^2 - 2xy - \tan \alpha \cdot y^2 - l \tan \alpha \cdot x + l \cdot y = 0$$

因為上式具有二元二次方程式的形式，

由二次曲線的判別式 $D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \tan^2 \alpha > 0$ ，

得 $n=1$ 時的曲線為雙曲線。■

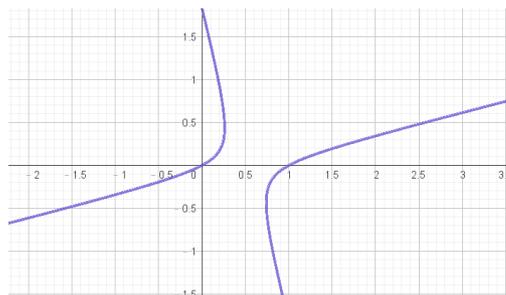


圖 12： $n=1$ 時為雙曲線

3. 第二類 n 倍等角差線的圖形分類

在 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時， L_1, L_2 的交點圖形皆包含水平線 $y=0$ 。

我們可以依 n 值的不同整理聯立方程式或參數式，並且考慮特別情形，將 $\theta \neq 0$ 時的曲線予以分類描述。共同部份為水平線 $y=0$ ，再分別為一般情形下的「 $n > 0$ 時的曲線、 $n < 0$ 時的曲線」，以及特別情形「 $n=2$ 時的雙曲線、 $n=1$ 時的鉛直線、 $n=\frac{1}{2}$ 時的雙曲線、 $n=0$ 時僅有 x 軸、 $n=-\frac{1}{2}$ 時的一圓、 $n=-1$ 時僅有 x 軸、 $n=-2$ 時的一圓」，說明如下：

(1) 一般情形與 $\alpha \neq (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時類似。

一般情形均為具有漸近線的曲線。

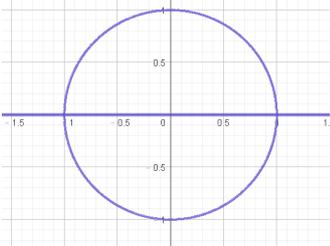
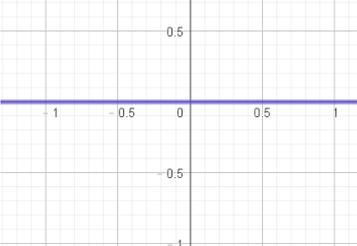
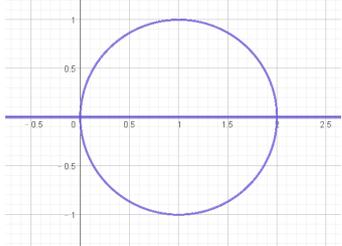
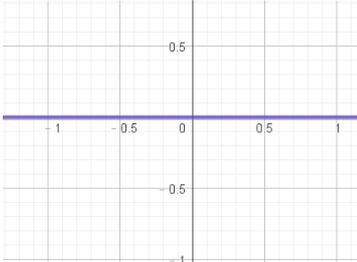
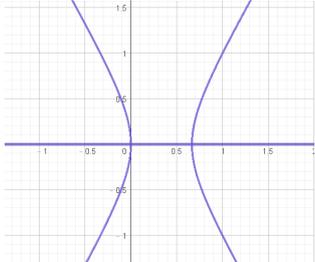
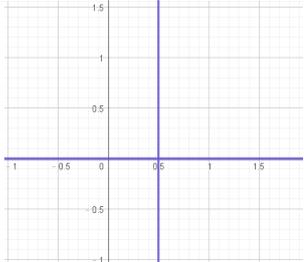
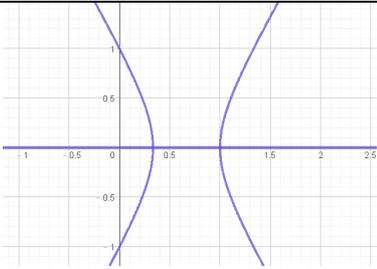
① $n > 0$ 時為具有多條漸近線，以及漸近線均相交於一輻射點，且不具封閉圈的圖形；■

② $n < 0$ 時為具有漸近線，以及漸近線均通過一輻射點，且具有封閉圈的圖形。■

表 3：(1) $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線一般情形：共同部份為 $y=0$

<p>① $n > 0$ (不具封閉圈) (圖 13：$n = \frac{3}{2}$)</p>	<p>② $n < 0$ (具封閉圈) (圖 14：$n = -\frac{5}{2}$)</p>

表 4 : (2) $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線特別情形：共同部份為 $y = 0$, 其餘的部份如下

		
③ $n = -2$ (一圓) (圖 15)	④ $n = -1$ (僅有 x 軸) (圖 16)	⑤ $n = -\frac{1}{2}$ (一圓) (圖 17)
		
⑥ $n = 0$ (僅有 x 軸) (圖 18)	⑦ $n = \frac{1}{2}$ (雙曲線) (圖 19)	⑧ $n = 1$ (鉛直線) (圖 20)
		
⑨ $n = 2$ (雙曲線) (圖 21)		

(2)特別的情形：

③ $n = -2$ 時：

考慮聯立方程式
$$\begin{cases} L_1 : y = \tan(\alpha + 2\theta)x \\ L_2 : y = -\tan\theta \cdot (x-l) \end{cases}$$

將 L_2 移項可得 $\tan\theta = \frac{y}{l-x}$,

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(-2\theta) = -\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{\frac{2y}{l-x}}{1-\left(\frac{y}{l-x}\right)^2} = -\frac{2y}{\frac{(l-x)^2 - y^2}{(l-x)}}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{(l-x)^2 - y^2}{2(l-x)}$$

經整理後得到 $x^2 + y^2 = l^2$

故在 $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n = -2$ 時，圖形為 x 軸及一個以 $(0,0)$ 為圓心且半徑為 l 的圓。■

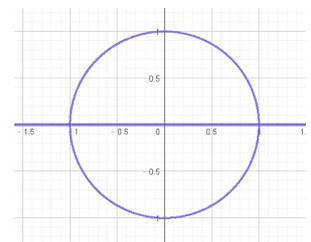


圖 15 : $n = -2$ 時為 x 軸及一圓

④ $n = -1$ 時：

L_1, L_2 為兩條同時旋轉的平行線，

故相交的點圖形僅有 x 軸。■

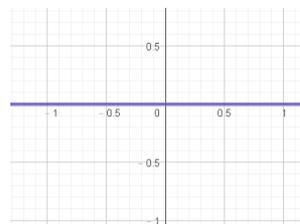


圖 16： $n = -1$ 時為 x 軸

⑤ $n = -\frac{1}{2}$ 時：

相當於考慮參數式

$$\begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan\left(-\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{l \cdot \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \tan \frac{\theta}{2}} = \frac{l \cdot \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{2 \tan \frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2} + \tan^3 \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2l}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \\ y = x \cdot \tan\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{2l \cdot \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

則 x 和 y 可以轉換為

$$\begin{cases} x = 2l \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ y = -2l \cdot \tan \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases} .$$

我們發現

$$\begin{aligned} & \left(2l \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} - l\right)^2 + \left(-2l \cdot \tan \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)^2, \\ & = l^2 \left[\left(\cos^2 \theta\right) + \left(4 \tan^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2}\right) \right] \\ & = l^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l^2 \end{aligned}$$

即 $(x-l)^2 + y^2 = l^2$ 。

故在 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = -\frac{1}{2}$ 時，圖形為 x 軸及一個以 $C(l, 0)$ 為圓心且半徑為 l 的圓。■

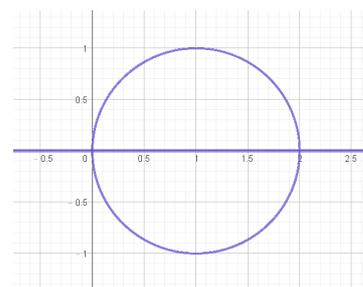


圖 17： $n = -\frac{1}{2}$ 時為 x 軸及一圓

⑥ $n = 0$ 時：

考慮參數式

$$\begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan 0} = \frac{l \cdot \tan \theta}{\tan \theta} = l, \\ y = x \cdot \tan 0 = 0 \end{cases}$$

L_1 為不動的水平線 $y = 0$ 、 L_2 為 $C(l, 0)$ 為中心旋轉的直線，

故相交的點圖形僅有 x 軸。■

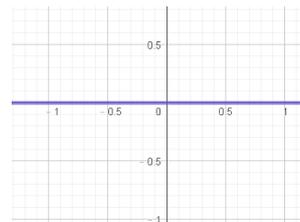


圖 18： $n = 0$ 時為 x 軸

⑦ $n = \frac{1}{2}$ 時：

相當於考慮參數式
$$\begin{cases} x = \frac{l \tan \theta}{\tan \theta + \tan \frac{\theta}{2}} \\ y = \frac{l \tan \theta \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \theta + \tan \frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

將 $\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$ 代入，可以得到 $x = \frac{l \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} + \tan \frac{\theta}{2}} = \frac{2l}{3 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$

故 $3x - x \tan^2 \frac{\theta}{2} = 2l$ ，得 $\tan^2 \frac{\theta}{2} = 3 - \frac{2l}{x}$ 。

另外，因為 $y = \tan \frac{\theta}{2} x$ ，將 $y^2 = \tan^2 \frac{\theta}{2} x^2$ 代回得 $y^2 = \left(3 - \frac{2l}{x}\right) x^2$ ，

經整理後得到 $3x^2 - y^2 - 2l \cdot x = 0$ 。

故在 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = \frac{1}{2}$ 時，圖形為 x 軸及雙曲線。■

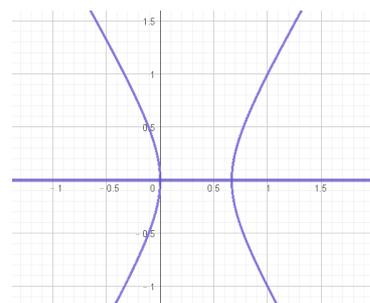


圖 19： $n = \frac{1}{2}$ 時為 x 軸及雙曲線

⑧ $n = 1$ 時：

考慮參數式
$$\begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan \theta} = \frac{l \cdot \tan \theta}{2 \tan \theta} = \frac{l}{2} \\ y = x \cdot \tan \theta = \frac{l}{2} \cdot \tan \theta \end{cases}$$

因為 $\tan \theta \in \mathbb{R}$ ，故 $y \in \mathbb{R}$ 。

故在 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = 1$ 時，

圖形為 x 軸及鉛直線 $x = \frac{l}{2}$ 。■

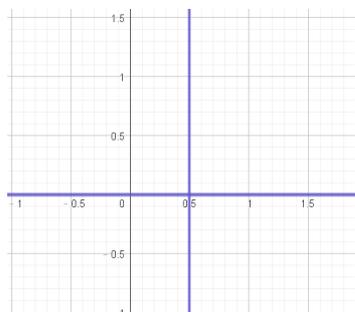


圖 20： $n = 1$ 時為 x 軸及鉛垂線

⑨ $n = 2$ 時：

考慮聯立方程式 $\begin{cases} L_1: y = \tan(\alpha + 2\theta)x \\ L_2: y = -\tan \theta \cdot (x - l) \end{cases}$ ，將 L_2 移項可得 $\tan \theta = \frac{y}{l - x}$ ，

故 $\frac{y}{x} = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{2y}{l-x}}{1 - \left(\frac{y}{l-x}\right)^2} = \frac{\frac{2y}{l-x}}{\frac{(l-x)^2 - y^2}{(l-x)^2}} = \frac{2y}{(l-x)^2 - y^2}$

得 $x = \frac{(l-x)^2 - y^2}{2(l-x)}$ 經整理後得到 $3x^2 - y^2 - 4l \cdot x + l^2 = 0$ 。

故在 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = 2$ 時，圖形為 x 軸及雙曲線。■

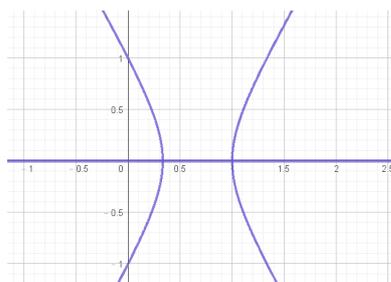


圖 21： $n = 2$ 時為 x 軸及雙曲線

(二) n 倍等角差線的漸近線與輻射點

在上述分類情形中，我們發現圖形在多數情況下，若不是特殊的 α 與 n 值，似乎會具有漸近線。本研究不循參考文獻[4]的方式，而是透過對參數式的處理來對漸近線與輻射點說明如下。為方便處理算式，將參數式適當改寫：

$$\text{因為} \begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan \theta}{\tan \theta + \tan(\alpha + n\theta)} \\ y = \frac{l \cdot \tan \theta \cdot \tan(\alpha + n\theta)}{\tan \theta + \tan(\alpha + n\theta)} = \tan(\alpha + n\theta) \cdot x \end{cases},$$

將分子分母同乘以 $\cos \theta \cdot \cos(\alpha + n\theta)$ 後，再利用和角公式，可以將參數式化為

$$\begin{cases} x = \frac{l \cdot \sin \theta \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r(\theta) \cdot \cos(\alpha + n\theta) \\ y = \frac{l \cdot \sin \theta \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r(\theta) \cdot \sin(\alpha + n\theta) \end{cases}, \text{其中 } r(\theta) = \frac{l \cdot \sin \theta}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)}. \quad (r(\theta) \text{ 可能為正、負或 } 0)$$

1. n 倍等角差線的漸近線

承改寫後的參數式，考慮圖形在遠離原點 $(0,0)$ 時的狀況，

$$\text{即考慮 } (x^2 + y^2) = \left(\frac{l \sin(\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right)^2 \rightarrow \infty, \text{ 其中 } \alpha, l, n \text{ 為常數時，}$$

$$\text{若 } \left(\frac{l \sin(\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right)^2 \rightarrow \infty \text{ 時，必有分母 } \sin(\alpha + (n+1)\theta) \rightarrow 0,$$

$$\text{則 } \theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{即漸近線可能產生之角度為 } \theta = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 之時。且其斜率為 } -\tan \theta = -\tan \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{假設直線 } \sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)x + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)y + c = 0,$$

若此直線為漸近線，即

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}} \frac{\left| \sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \left(\frac{l \sin(\theta) \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right) + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \left(\frac{l \sin(\theta) \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right) + c \right|}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) + \cos^2\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)}} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}} \left(\sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \left(\frac{l \sin(\theta) \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right) + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \left(\frac{l \sin(\theta) \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right) \right) = -c,$$

$$\text{即 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}} \left(\left(\frac{l \sin(\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right) \left(\sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \cos(\alpha + n\theta) + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \sin(\alpha + n\theta) \right) \right) = -c,$$

$$\text{即 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}} \left(\left(\frac{l \sin(\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right) \left(\sin\left(\alpha + n\theta + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \right) \right) = -c,$$

若 $\theta = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, 則

$$\left(\frac{l \sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)} \right) \left(\sin\left(\alpha + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1} + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \right) = \left(\frac{l \sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \sin(k\pi)}{\sin(k\pi)} \right) = \frac{0}{0} .$$

利用羅必達法則，因為

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}} \left(\frac{l \sin(\theta) \sin\left(\alpha + n\theta + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\alpha + (n+1)\theta\right)} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}} \left(\frac{l \left(\cos(\theta) \sin\left(\alpha + n\theta + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) + n \sin(\theta) \cos\left(\alpha + n\theta + \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \right)}{(n+1) \cos\left(\alpha + (n+1)\theta\right)} \right) \\ &= \frac{nl \sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \cos(k\pi)}{(n+1) \cos(k\pi)} \\ &= \frac{nl \sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)}{(n+1)} = -c \end{aligned}$$

故漸近線存在，且其方程式為 $\sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) \left(x - \frac{nl}{n+1}\right) + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right) y = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ 。 ■

上述證明中發現具有漸近線的時機為 $\theta = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}$, $k \in \mathbb{Z}$ 。實際上這個時機使得「 L_1, L_2 , 漸近線」

這三條直線均平行，證明如下：

若 $L_1 \parallel L_2$, 則 $\tan(\alpha + n\theta) = -\tan \theta$

$$\text{即 } \frac{\tan \alpha + \tan(n\theta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(n\theta)} = -\tan \theta$$

$$\text{即 } \tan \alpha + \tan(n\theta) = -\tan \theta + \tan \alpha \cdot \tan \theta \cdot \tan(n\theta)$$

$$\text{即 } \tan(n\theta) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{\tan \alpha \cdot \tan \theta - 1}$$

$$\text{即 } \tan(n\theta) = -\tan(\theta + \alpha)$$

$$\text{得 } n\theta + (\theta + \alpha) = k\pi , k \in \mathbb{Z}$$

故 $\theta = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}$, $k \in \mathbb{Z}$ 恰為漸近線的斜率。 ■

因此可以將此情境想成：

當 L_1 趨近於平行 L_2 時，兩直線的交點趨近於無窮遠處，此時的交點軌跡近似一直線(即漸近線)。

漸近線分別與 L_1, L_2 之間的距離則取決於轉速比 n 。

2. n 倍等角差線的輻射點

固定 α, n, l ，可以發現漸近線 $\sin\left(\frac{-\alpha+k\pi}{n+1}\right)\left(x-\frac{nl}{n+1}\right)+\cos\left(\frac{-\alpha+k\pi}{n+1}\right)y=0$ 均通過 $\left(\frac{nl}{n+1}, 0\right)$ 。

其中 $\left(\frac{nl}{n+1}, 0\right)$ 可以看成 $\frac{n}{n+1}(l, 0) + \frac{1}{n+1}(0, 0)$ ，這個點的坐標具有「分點公式」的形式。若將 B, C 擺放在坐標平面上的相異位置，並且將 L_1, L_2 分別 B, C 為旋轉中心作逆/順時針旋轉，保持轉速為 n 倍速，所形成的曲線若有漸近線，則

漸近線均通過將 \overline{BC} 分隔為 $n:1$ 的點，並稱之為輻射點。 ■

其中在本研究中設定情境的輻射點即為 $\left(\frac{nl}{n+1}, 0\right)$ 。

備註：(1)若 $n = -1$ ，曲線沒有輻射點；

(2)若 $n < 0$ 可以看成外分點，輻射點在 \overline{BC} 外。

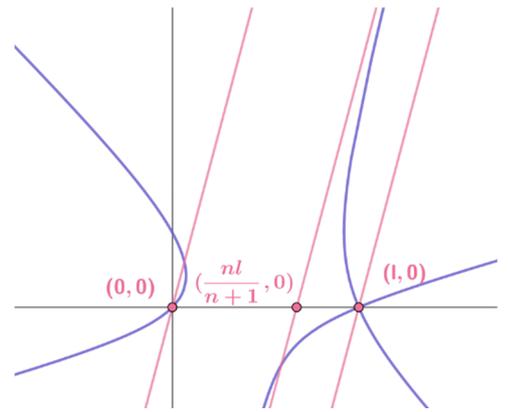


圖 22：漸近線均通過輻射點 $\left(\frac{nl}{n+1}, 0\right)$

(三) n 倍等角差線的漸近線數量

在研究結果(二)中可知漸近線方程式為 $\sin\left(\frac{-\alpha+k\pi}{n+1}\right)\left(x-\frac{nl}{n+1}\right)+\cos\left(\frac{-\alpha+k\pi}{n+1}\right)y=0$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

由於 $k \in \mathbb{Z}$ ，因此有無數個時機形成漸近線。然而漸近線並不一定會有無限多條，因為隨著 k 值的增加， $\theta = \frac{-\alpha+k\pi}{n+1}$ 可能開始出現重疊現象，這也使得漸近線出現了重疊現象。在固定 α 的情形下，隨著 n 值的不同，可以得到非同界角的數量，進而得到漸近線的數量。

1. $n \in \mathbb{Z}$ ，漸近線數量為 $|n+1|$ 條

(1) $n \in \mathbb{N}$ ：

因為 $k \in \mathbb{Z}$ ，故當 $n \in \mathbb{N}$ 時， $\theta = \frac{-\alpha+k\pi}{n+1}$ ，可以取 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ，共有 $n+1$ 個相異 k 值。當 $k = n+1$ 時， $\theta = -\alpha + \pi$ ，此時 L_1, L_2 均回到同樣的位置。因此若重疊的漸近線不重複計算，則共有 $n+1$ 條相異的漸近線。

(2) $n = 0$ ：

$\alpha = (nm+k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，圖形為 $y = 0$ ，有 1 條漸近線；

$\alpha \neq (nm+k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，圖形為一直線，有 1 條漸近線。

(3) $n = -1$ ：

$\alpha = (nm+k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，圖形為 $y = 0$ ，有 1 條漸近線；(特例)

$\alpha \neq (nm+k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，圖形為一圓，有 0 條漸近線。

(4) n 為小於 -1 的負整數：

因為 $k \in \mathbb{Z}$ ，故當 $n \in \mathbb{N}$ 時， $\theta = \frac{-\alpha+k\pi}{n+1}$ ，可以取 $k = 0, \dots, |n+1|-1$ ，共有 $n+1$ 個 k 值均不為同界角。例如右圖為 $n = -3$ 的圖形，可以發現該圖形具有 2 條漸近線與 1 個封閉圈。

綜上述(1)~(4)，可得結論：

$n \in \mathbb{Z}$ ，則 n 倍等角差線不重疊的漸近線數量為 $|n+1|$ 條。 ■

唯一的特例為當 $\alpha = (nm+k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 、且 $n = -1$ 時仍具有 1 條漸近線。

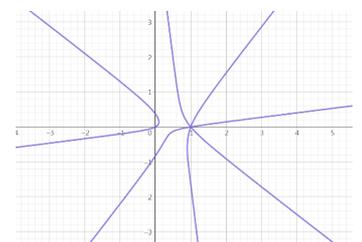


圖 23： $n = 3$ 時的圖形

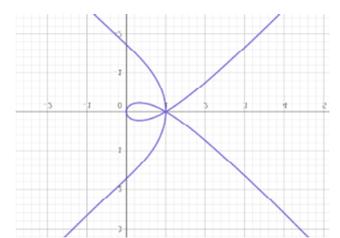


圖 24： $n = -3$ 時的圖形

2. $n \in \mathbb{Q}$ ，設 $n = \frac{q}{p}$ ，且 $(p, q) = 1$ 時，漸近線數量為 $|p+q|$ 條

當 n 為有理數時，不妨設 $n = \frac{q}{p}$ ，且 $(p, q) = 1$ ，則 $\theta = \frac{-\alpha + k\pi}{\frac{q}{p} + 1} = \frac{-p\alpha + pk\pi}{p+q}$ 。取 $k = 0, \dots, |p+q|-1$ ，

共有 $|p+q|$ 個 k 值均不為同界角，因此不重疊的漸近線數量為 $|p+q|$ 。■

另一方面，若 n 為負的有理數時， $|p+q|$ 在計算時具有「互相抵消」的感覺存在，同時可以觀察到圖形出現了封閉圈。關於漸近線數量、封閉圈數量與坐標平面被分割的區域數量關係將於後文討論。

3. n 為無理數時， n 倍等角差線有無限多條漸近線，漸近線數量的增加速率與 n 有關

因為 $k \in \mathbb{Z}$ ，所以當 n 為無理數時，無論取 k 值為多少，均不能使 $\theta = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1} = -\alpha + \text{整數倍的}\pi$ 。

因此 L_1, L_2 無論取 k 值為多少，均無法在任何時機同時回到同樣的位置，故隨著 k 值不斷增長或減少，曲線與漸近線均將持續增加且不會重疊，因此 n 為無理數時， n 倍等角差線有無限多條曲線及漸近線。

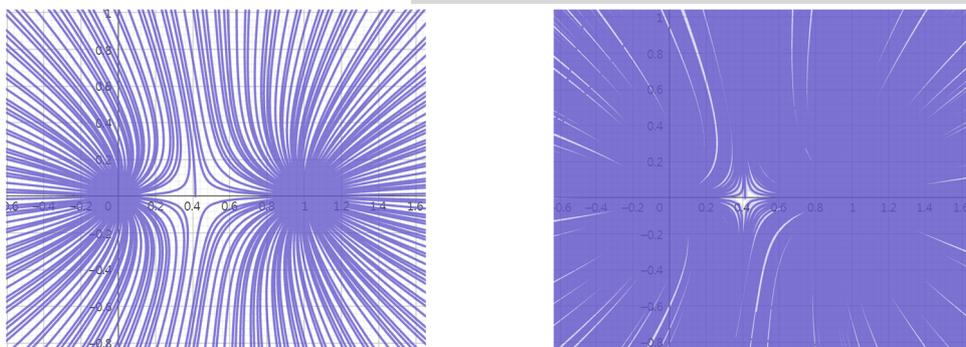


圖 25： $\alpha = 0, n = \sqrt{2}, \theta = 0 \sim 50\pi$ 及 $\theta = 0 \sim 200\pi$ 時的圖形

並且曲線條數隨著 θ 不斷增加而增加，因此漸近線亦隨著 θ 不斷增加而增加。如下圖例子：

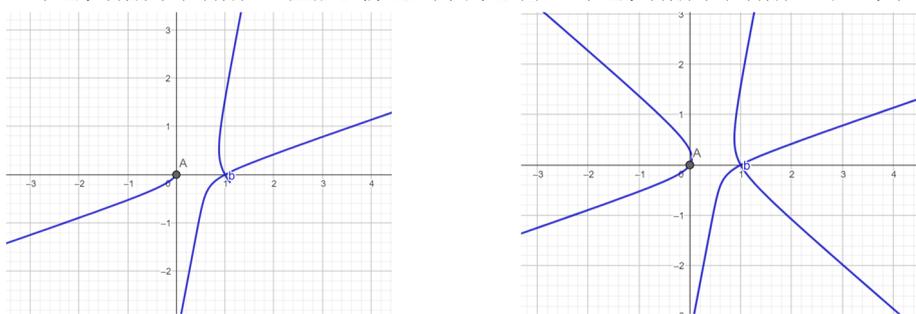


圖 26： $\alpha = 1, n = 2, \theta \in \left[1, 1 + \frac{2}{3}\pi\right]$ 及 $\theta \in \left[1, 1 + \frac{3}{3}\pi\right]$ 的圖形

① θ 每增加 $\frac{\pi}{2(n+1)}$ ，增加後的角度即為 $\theta_1 = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{-\alpha + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{n+1}$ 。

② θ 每增加 $\frac{\pi}{n+1}$ ，增加後的角度即為 $\theta_2 = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{n+1} = \frac{-\alpha + (k+1)\pi}{n+1}$

因此圖形增加了「一條」，可將漸近線視為也增加了「一條」。■

(四) n 倍等角差線是否於坐標平面佈滿或稠密的猜想

當 n 為無理數時， n 倍等角差線有無限多條漸近線，並且曲線條數隨著 θ 不斷增加而增加，會出現的猜想有二：

1. 能否取得 n 值，使得 n 倍等角差線佈滿坐標平面？
2. 若 n 倍等角差線無法佈滿坐標平面，則能否取得 n 值，使得 n 倍等角差線於坐標平面上稠密？

關於佈滿與稠密的猜想，在參考文獻[4]中，作者李永約在研究結尾前未曾提過關於佈滿的猜想，但對於稠密性的猜想則有敘述如下：

「猜想：存在 n 為正實數， $\alpha \in [0, \pi)$ ， n 倍等角差線 $\{\Gamma'_{\alpha, n}\}$ 中的所有點的集合在坐標平面上稠密。」

關於上述佈滿與稠密這兩個猜想，我們均給出反證及證明：

1. 能否取得 n 值，使得 n 倍等角差線佈滿坐標平面的猜想 (答案：否)

證明：

假設 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 佈滿坐標平面，則 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 會佈滿平面中的一條直線。

考慮此直線為 $x = l$ ，故 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 會佈滿 $x = l$ 。

因等角差線 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 為兩直線 L_1, L_2 交點之軌跡。

此時 L_2 恰為 $x = l$ ，故 $-\theta = \frac{\pi}{2} + j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}$)

在此情況下 $L_1: y = \tan\left(\alpha - \frac{n\pi}{2} - nj\pi\right)x$ ，

隨著 j 變動， L_1 亦會隨之變動(如圖， $\alpha = 1.2$ ， $n = 2.5$)。

若 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 會佈滿 $x = l$ ，則 L_1 會掃過 $x = l$ 上所有點，

故對於所有的 $r \in [0, 1)$ ，皆存在 $m, j \in \mathbb{Z}$ ，滿足 $\frac{n\pi}{2} + nj\pi = m\pi + r\pi$ ，

將這個等式化簡得 $\frac{n}{2} + nj = m + r$ 。

若 $n \in \mathbb{Q}$ ，則 $\frac{n}{2} + nj \in \mathbb{Q}$ ，則必存在 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ，使得 $\frac{n\pi}{2} + nj\pi = m\pi + r\pi$ 不成立；

同理，若 $n \in \mathbb{Q}^c$ ，則 $\frac{n}{2} + nj \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ，則必存在 $r \in \mathbb{Q}$ ，使得 $\frac{n\pi}{2} + nj\pi = m\pi + r\pi$ 不成立。

故 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 不會佈滿 $x = l$ ，

此結果與 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 佈滿坐標平面之假設矛盾，

故 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 無法佈滿坐標平面。■

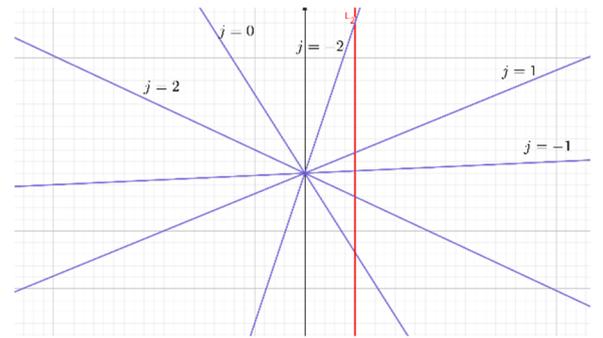


圖 27： $n = \sqrt{2}$ 時的部份圖形

因此，即使 n 為無理數時， n 倍等角差線的圖形具有無限多條曲線，亦具有無限多條漸近線。但曲線無法通過坐標平面上的所有點，即無法佈滿坐標平面。

但 n 倍等角差線不佈滿坐標平面，並不代表 n 倍等角差線不在坐標平面上稠密。例如有理數不佈滿實數軸，但有理數的所有點集合在實數上稠密。因此我們接下來處理當 n 為無理數時， n 倍等角差線中的所有點形成的集合是否在坐標平面上稠密的猜想。

2. 能否取得 n 值，使得 n 倍等角差線於坐標平面上稠密的猜想 (答案：當 n 為無理數時，猜想成立)

引理 3：(Dirichlet's approximation theorem，參考文獻[6]，本引理為已知定理)

對於任意實數 x 及大於 1 的整數 N ，皆存在整數 q 及 p ，其中 $0 < q \leq N$ ，使得 $|qx - p| < \frac{1}{N}$ 。

證明：(本證明方法為已知)

選取足夠大的正整數 N ，將 $(0,1]$ 分成 N 等分，每等分長度為 $\frac{1}{N}$ 。

令 $a_i = ix - [ix]$ ，則 $0 \leq a_i < 1$ 。

考慮 a_0, a_1, \dots, a_N 共 $N+1$ 個數，則必存在 $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, N\}$ ，且 $k_1 > k_2$ ，

使得 $|a_{k_1} - a_{k_2}| = |(k_1x - [k_1x]) - (k_2x - [k_2x])| = |(k_1 - k_2)x - [k_1x] + [k_2x]| < \frac{1}{N}$ 。

令 $(k_1 - k_2) = q$ ，則 $0 < q \leq N$ 。令 $p = [k_2x] - [k_1x]$ ，則 $p \in \mathbb{Z}$ 。

故對於任意實數 x ，及大於 1 的整數 N ，皆存在整數 q 及 p ，其中 $0 < q \leq N$ ，使得 $|qx - p| < \frac{1}{N}$ 。■

引理 4：(無理數的正整數倍的小數部分在 $[0,1]$ 上稠密。本引理為已知性質)

設 x 為無理數，則對於任意 $r \in [0,1]$ 及 $\varepsilon > 0$ ，皆存在正整數 n ，使得 $|(nx - [nx]) - r| < \varepsilon$ 。

證明：(本證明方法為已知)

給定 x 為無理數，由引理 1，存在 $p, q \in \mathbb{Z}$ ，使得 $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ 。

即對任意很小的 $\varepsilon' > 0$ ，皆存在 $p, q \in \mathbb{Z}$ ，使得 $x = \frac{p}{q} + \varepsilon'$ ，且 $\varepsilon' < \frac{1}{q^2}$ 。

考慮整數 $n = kq$ ，其中 k 為整數；並定義實數 a 的小數部分為 $\{a\} = a - [a]$ 。

因為 $nx = kqx = k(p + q\varepsilon') = kp + kq\varepsilon'$ ，且 kp 為整數，

故 nx 和 $kq\varepsilon'$ 的小數部分相等，即 $\{nx\} = \{kq\varepsilon'\}$ 。

由於 ε' 很小，對於任意 $r \in [0,1]$ 及 $\varepsilon > 0$ ，皆存在足夠大的 k ，使得 $|\{kq\varepsilon'\} - r| < \varepsilon$ ，

即對於任意 $r \in [0,1]$ 及 $\varepsilon > 0$ ，皆存在正整數 n ，使得 $|(nx - [nx]) - r| < \varepsilon$ 。■

引理 5：(無理數的正整數倍，再加上一實數後的數，其小數部分在 $[0,1]$ 上稠密。)

給定 x 為無理數、 α 為一固定實數，對於任意 $r \in [0,1]$ 及對於所有 $\varepsilon > 0$ ，皆存在正整數 n ，使得 $|(nx + \alpha) - [nx + \alpha]) - r| < \varepsilon$ 。

證明：

定義實數 a 的小數部分為 $\{a\} = a - [a]$ ，由引理 2 可知 $\{nx\}$ 在 $[0,1]$ 稠密。

因此對於任意 $r \in [0,1]$ 及 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ，皆存在正整數 n_1 ，使得 $|\{n_1x\} - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。

且因 α 為一定值，故對於任意正整數 n 亦存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ ，使得 $|\{n_1x\} - \{nx + \alpha\}| < \frac{\varepsilon}{2}$ ，

亦即 n 與 n_1 存在一一對應關係。因此我們皆可以選擇適當的 $n, n_1 \in \mathbb{N}$ ，

使得 $|\{nx + \alpha\} - r| = |\{nx + \alpha\} - \{n_1x\} + \{n_1x\} - r| < |\{nx + \alpha\} - \{n_1x\}| + |\{n_1x\} - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。■

定理 6：當 n 為無理數時， n 倍等角差線在坐標平面上稠密。

證明：

(1) x 軸以外的點：

考慮坐標平面上 x 軸以外的任意一點 (x_0, y_0) ，其中 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ 且 $y_0 \neq 0$ ，

設 $\theta = -\beta\pi$ ，使得 $L_2: y = \tan \beta\pi(x-l)$ 通過 (x_0, y_0) 。

此時 $L_1: y = \tan(\alpha + n\theta)x = \tan(\alpha + n(-\beta\pi + k\pi))x$ ，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 。

令 $L: \cos(r\pi)y = \sin(r\pi)x$ 且 L 通過 (x_0, y_0) 。

欲證明必存在 L_1 與 L_2 的交點(即存在 n 倍等角差線上的某點)，

和 (x_0, y_0) 的距離小於任意正實數，

相當於證明 L_1 斜角 $\alpha + n(-\beta\pi + k\pi)$ 的同界角及其補角，

和 L 的斜角 $r\pi$ 滿足：

對於所有 $\varepsilon > 0$ 皆存在 $k, m \in \mathbb{Z}$ ，

使得 $|\alpha + n(-\beta + k)\pi + m\pi - r\pi| < \varepsilon$ ，

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且為一定值， $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ， $r \in [0, 1]$ 。

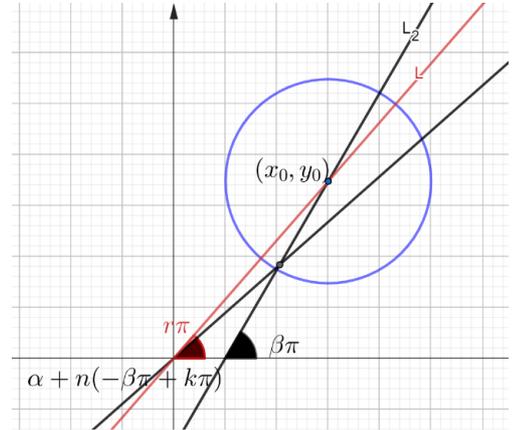


圖 28：通過 (x_0, y_0) 的直線 L

令 $\alpha = j\pi$ ， $j \in [0, 1]$ ，則我們提出絕對值內的 π 並設 $|j - n\beta + nk + m - r| < \varepsilon$ 。

因為 j, n, β 為定值， $j - n\beta$ 可視為一實數 p ，

取 $m = -[nk + p]$ ，則 $|j - n\beta + nk + m - r| = |(nk + p) - [nk + p] - r|$ ，

由引理 3，給定 n 為無理數， p 為一實數，可知對於所有 $\varepsilon > 0$ ，皆存在 $k \in \mathbb{N}$ ，

使得 $|j - n\beta + nk + m - r| = |(nk + p) - [nk + p] - r| < \varepsilon$ 。

因此當 n 為無理數時，對於任意非 x 軸上的點，皆存在 L_1 與 L_2 的交點，使得該點和 (x_0, y_0) 的距離小於任意正實數。亦即平面上任意一點 (x_0, y_0) ，其中 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ 且 $y_0 \neq 0$ ，皆為 L_1 與 L_2 交點的極限點。

(2) x 軸上的點：

對於 x 軸上的任意一點 $(t, 0)$ ，其中 $t \neq 0, l, t \in \mathbb{R}$ 。

當 n 為無理數時，對於平面上非 x 軸的任意一點皆為曲線的極限點。

因此我們可以取一以 $(t, 0)$ 為圓心，半徑為 ε 的圓，

考慮 $(x_0, y_0) = \left(t, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 皆有曲線上的點 (x, y) 滿足 $d\left(\left(t, \frac{\varepsilon}{2}\right), (x, y)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ，

則 $d((t, 0), (x, y)) < \varepsilon$ 對於所有 $\varepsilon > 0$ 皆成立。

因此 $(t, 0)$ 亦為 n 倍等角差線的極限點。

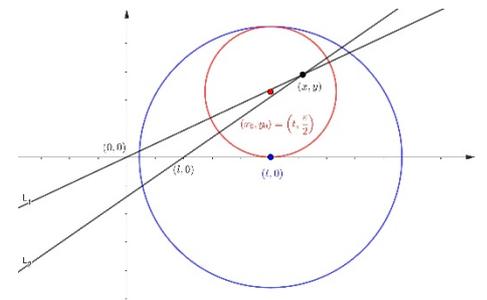


圖 29： $(t, 0)$ 亦為極限點

合併上述(1)(2)，我們得證當 n 為無理數時，平面上任意一點皆為 n 倍等角差線的極限點。

因此當 n 為無理數時， n 倍等角差線中的所有點的集合在坐標平面上稠密。■

(五) n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形

在參考文獻[4]中，作者李永約將 n 倍等角差線予以旋轉、鏡射後，發現亦為其他轉速倍率之等角差線，我們可以用以下方式處理。而經反演後的圖形具有重要的性質，且未曾於文獻中出現，於下文介紹：

1. n 倍等角差線以 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ 為中心，旋轉 π 後的圖形（對 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ 作點對稱）

設 n 倍等角差線 $\Gamma_{\alpha,n}^l = \left(\frac{l \tan(\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)}, \frac{l \tan(\theta) \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)} \right)$ ， $\theta \in \mathbb{R}$ 。

此曲線以 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ 為中心，旋轉 π 後的圖形即為對 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ 作對稱。

令 $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 對 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ 作點對稱後之圖形為 Γ' ，則有 $\Gamma' + \Gamma_{\alpha,n}^l = (l, 0)$ ，移項得：

$$\Gamma' = \left(l \left(1 - \frac{\tan(\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)} \right), \frac{-l \tan(\theta) \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)} \right) = \left(\frac{l \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)}, \frac{-l \tan(\theta) \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)} \right)$$

令 $-\alpha - n\theta = \phi$ ，則 $\theta = \frac{\alpha + \phi}{-n}$ ，故：

$$\Gamma' = \left(\frac{l \tan(-\phi)}{\tan\left(\frac{\alpha + \phi}{-n}\right) + \tan(-\phi)}, \frac{-l \tan\left(\frac{\alpha + \phi}{-n}\right) \tan(-\phi)}{\tan\left(\frac{\alpha + \phi}{-n}\right) + \tan(-\phi)} \right) = \left(\frac{l \tan(\phi)}{\tan\left(\frac{\alpha + \phi}{n}\right) + \tan(\phi)}, \frac{l \tan\left(\frac{\alpha + \phi}{n}\right) \tan(\phi)}{\tan\left(\frac{\alpha + \phi}{n}\right) + \tan(\phi)} \right) = \Gamma_{\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{n}}^l$$

是一個 $\frac{1}{n}$ 倍等角差線，且 L_1 的起始角度為 $\frac{\alpha}{n}$ 。■

圖例：藍色為 2 倍等角差線 $\Gamma_{\alpha,n}^l = \Gamma_{1,2}^1$ ；

紅色為 $\frac{1}{2}$ 倍等角差線 $\Gamma_{\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{n}}^l = \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^1$ 。

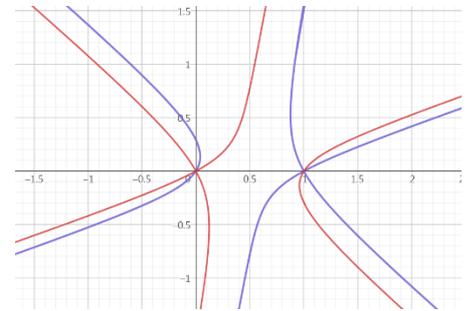


圖 30： $\Gamma_{1,2}^1$ 與 $\Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^1$

2. n 倍等角差線對直線 $x = \frac{l}{2}$ 鏡射後的圖形

類似 1，令 $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 對 $x = \frac{l}{2}$ 鏡射點對稱後之圖形為 Γ' ，

$$\text{則有 } \Gamma_{\alpha,n}^l + \Gamma' = \left(l, \frac{2l \tan(\theta) \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)} \right)$$
，移項得：
$$\Gamma' = \left(\frac{l \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)}, \frac{l \tan(\theta) \tan(\alpha + n\theta)}{\tan(\theta) + \tan(\alpha + n\theta)} \right)$$

令 $\alpha + n\theta = \phi$ ，則 $\theta = \frac{-\alpha + \phi}{n}$ ，故：

$$\Gamma' = \left(\frac{l \tan(\phi)}{\tan\left(\frac{-\alpha + \phi}{n}\right) + \tan(\phi)}, \frac{l \tan\left(\frac{-\alpha + \phi}{n}\right) \tan(\phi)}{\tan\left(\frac{-\alpha + \phi}{n}\right) + \tan(\phi)} \right) = \Gamma_{\frac{-\alpha}{n}, \frac{1}{n}}^l$$

是一個 $\frac{1}{n}$ 倍等角差線，且 L_1 的起始角度為 $-\frac{\alpha}{n}$ 。■

圖例：藍色為 2 倍等角差線 $\Gamma_{\alpha,n}^l = \Gamma_{1,2}^l$ ；

紅色為 $\frac{1}{2}$ 倍等角差線 $\Gamma_{\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{n}}^l = \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^l$ 。

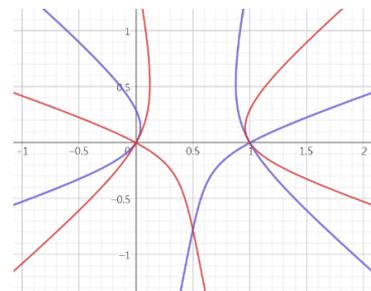


圖 31： $\Gamma_{1,2}^l$ 與 $\Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^l$

3. n 倍等角差線對圓 $x^2 + y^2 = l^2$ 反演後的圖形

考慮 n 倍等角差線的參數式 $\begin{cases} x = \frac{l \cdot \sin \theta \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r \cdot \cos(\alpha + n\theta) \\ y = \frac{l \cdot \sin \theta \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r \cdot \sin(\alpha + n\theta) \end{cases}, r = \frac{l \cdot \sin \theta}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)}, \theta \in \mathbb{R}。$

並且考慮反演圓為 $x^2 + y^2 = l^2$ ，即反演中心 O 為 $(0,0)$ ，反演幂為 l^2 。

以 T 表示反演變換、 $\Gamma' T$ 表示反演變換後的曲線，即 $T(\Gamma_{\alpha,n}^l) = \Gamma' = k\Gamma_{\alpha,n}^l$ ：

因為 $|\Gamma_{\alpha,n}^l| = \left| \frac{l \sin(\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right|$ ，

所以 $|T(\Gamma_{\alpha,n}^l)| = |\Gamma'| = \left| \frac{l \sin(\alpha + (n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \right| = k \left| \frac{l \sin(\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} \right|$ ，則 $k = \frac{\sin^2(\alpha + (n+1)\theta)}{\sin^2(\theta)}$ ，

可知 $\Gamma' = \left(\frac{l \sin(\alpha + (n+1)\theta) \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\theta)}, \frac{l \sin(\alpha + (n+1)\theta) \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\theta)} \right)$ 。

令 $\alpha + (n+1)\theta = -\phi$ ，故：

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \left(\frac{l \sin(-\phi) \cos\left(\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\phi\right)}{\sin\left(\frac{-\alpha}{n+1} - \frac{1}{n+1}\phi\right)}, \frac{l \sin(-\phi) \sin\left(\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\phi\right)}{\sin\left(\frac{-\alpha}{n+1} - \frac{1}{n+1}\phi\right)} \right) \\ &= \left(\frac{l \sin(\phi) \cos\left(\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\phi\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{n+1} + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\phi\right)}, \frac{l \sin(\phi) \sin\left(\frac{\alpha}{n+1} - \frac{n}{n+1}\phi\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{n+1} + \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\phi\right)} \right) = \Gamma_{\frac{\alpha}{n+1}, \frac{-n}{n+1}}^l \end{aligned}$$

是一個 $\frac{-n}{n+1}$ 倍等角差線，且 L_1 的起始角度為 $\frac{\alpha}{n+1}$ 。■

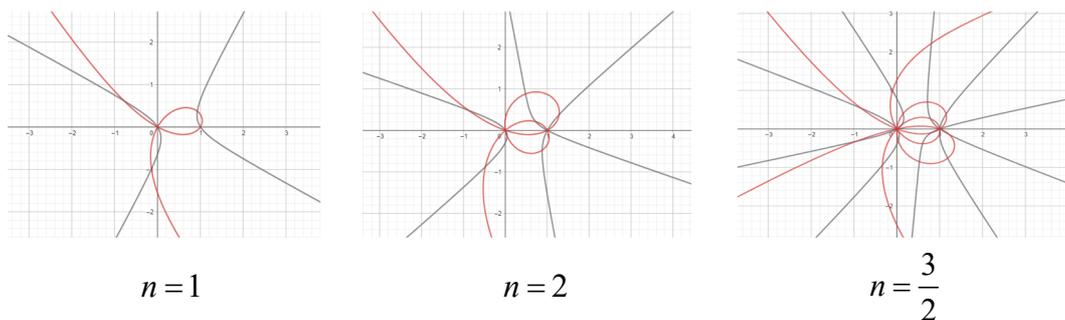


圖 32：反演變換的圖例： $n=1, 2, \frac{3}{2}$ 時， $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 與 Γ' 圖形的比較

(六) n 倍等角差線的封閉圈數與分割區域數

1. n 倍等角差線的自相交與發散情形

性質 7： n 倍等角差線的軌跡隨 θ 增加時而產生時，除了 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 可從不同方向通過以外，其餘點的通過方向固定。

證明：

考慮 $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 上， $(0,0)$ 與 $(l,0)$ 以外的一點 A ，在通過此點 θ_A 的前一刻 θ_A^- 與下一刻 θ_A^+ ， L_2 均為順時針旋轉。故除了 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 可從不同方向通過，其餘點通過方向固定。

另一方面，例如圖形若通過 $(0,0)$ ，則此時 $\theta = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

此時 L_1 可能有許多不同的斜角，因此曲線可以從不同的方向通過 $(0,0)$ 。

同理曲線可以從不同的方向通過 $(l,0)$ 。■

性質 8： n 倍等角差線的每一條漸近線，都只由一組相反方向的發散曲線形成。

證明：

如研究目的(二)中的觀察：

每條漸近線皆發生在兩線平行時，此時兩平行直線皆是唯一的，且此兩直線轉速皆固定，故此斜率的上一刻，及下一刻這兩線的轉動也是固定的。

故每一條漸近線，都只由一組相反方向的發散曲線形成。(兩曲線從 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 出發)。■

關於曲線的自相交，根據性質 2，我們可以發現：

(1) 第一類 n 倍等角差線只有且必有 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 兩個自相交點。

(2) 第二類 n 倍等角差線除了 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 外還有一點自相交點 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$ 。

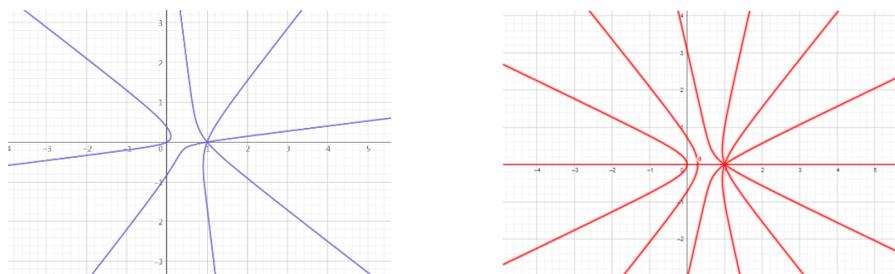


圖 33：曲線的自相交點 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ ，當 $\alpha = (nm + k)\pi$ 時還有 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$

在 $\alpha \neq (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，因為只有 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 有從不同方向通過，故若有封閉圈。必定為 $(0,0) \rightarrow (l,0) \rightarrow (0,0)$ 或 $(l,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (l,0)$ ，且過程中不形成發散曲線，亦不具有漸近線。

性質 9：當 n 為正實數時， n 倍等角差線的每一條曲線皆為發散曲線。

證明：

(1) 考慮 $\theta \in [r\pi, (r+1)\pi]$ ， $r \in \mathbb{Z}$ ：

因為漸近線發生在 $\theta = \frac{-\alpha + m\pi}{n+1}$ ， $m \in \mathbb{Z}$ 處，

又 $\frac{1}{n+1} < 1$ ，故 $\forall r \in \mathbb{Z}$ ， $\exists m \in \mathbb{Z}$ ，滿足 $\frac{-\alpha + m\pi}{n+1} \in [r\pi, (r+1)\pi]$ ，

故 $(0,0) \rightarrow (l,0) \rightarrow (0,0)$ 的過程中必有漸近線形成。

(2) 令 $\alpha + n\theta = \phi$ ，則 $\theta = \frac{-\alpha + \phi}{n}$ ，

考慮 $\phi \in [r\pi, (r+1)\pi]$ ， $r \in \mathbb{Z}$ ：

因為漸近線發生在 $\theta = \frac{-\alpha + \phi}{n} = \frac{-\alpha + m\pi}{n+1}$ ， $m \in \mathbb{Z}$ 處，

又 $\frac{n}{n+1} < 1$ ，故對於所有的 $r \in \mathbb{Z}$ ，皆存在 $m \in \mathbb{Z}$ ，滿足 $\frac{\alpha + nm\pi}{n+1} \in [r\pi, (r+1)\pi]$ ，

故 $(l,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (l,0)$ 的過程中必有漸近線形成。

由(1)(2)得知，當 n 為正實數時， n 倍等角差線的每一條曲線皆為發散曲線。■

2. n 倍等角差線的封閉圈數

根據反演變換中的推論，以及排除 $n \in \mathbb{R}^+$ 時皆為發散曲線後，可以對封閉圈做以下的定義：

n 倍等角差線的封閉圈：

(1) 當 $n \in [-1, 0)$ 時，封閉曲線皆由 $(0,0)$ 出發，且 $\theta \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 時， n 倍等角差線的圖形皆是連續的，故稱 n 倍等角差線在 $\theta \in [k\pi, (k+1)\pi]$ 時具有一個封閉圈。

(2) 當 $n \in (-\infty, -1)$ 時，封閉曲線皆由 $(l,0)$ 出發，且 $\theta \in \left[\frac{-\alpha + (k+1)\pi}{n}, \frac{-\alpha + k\pi}{n} \right]$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 時， n 倍等角差線的圖形皆是連續的，故稱 n 倍等角差線在 $\theta \in \left[\frac{-\alpha + (k+1)\pi}{n}, \frac{-\alpha + k\pi}{n} \right]$ 時具有一個封閉圈。

如圖 34，在研究目的(五)的反演曲線例子中：

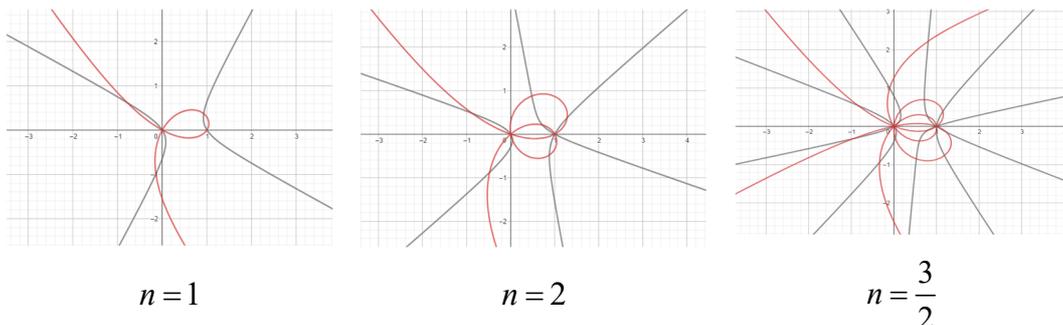


圖 34： $n=1, 2, \frac{3}{2}$ 時， $\Gamma'_{\alpha, n}$ 與 Γ' 圖形的比較

觀察 $n=1, 2, \frac{3}{2}$ 時， $\Gamma'_{\alpha, n}$ 與 Γ' 圖形，藍色曲線為 $\Gamma'_{\alpha, n}$ ，紅色曲線為 Γ' 。可以發現過 $(l, 0)$ 之發散曲線經過反演變換後，會變成封閉曲線，相反的封閉曲線經反演變換後會變為過 $(l, 0)$ 之發散曲線。而過 $(0, 0)$ 之曲線反演過後依舊為發散曲線，且會具有漸近線。意即

$n \in \mathbb{Q}^+$ 時，將 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 之漸近線數減去 Γ' 之漸近線數，即為 Γ' 之封閉圈數。

將 n 分為 $(-1, 0)$ 之間的有理數及 $(-\infty, -1]$ 之間的有理數來看，首先 $n \in (-1, 0) \setminus \mathbb{Q}^c$ 時：

性質 10：對於所有的 $-\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ 、 $(p, q) = 1$ 、 $p > q$ ，設 $n = \frac{q}{p-q}$ ，則：

n 倍等角差線 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 之漸近線數為 $|p|$ ，對 $x^2 + y^2 = l^2$ 反演後 Γ' 之漸近線數為 $|p-q|$ ，

此時 Γ' 之封閉圈數為 $|p| - |p-q| = q$ 。

而當 $n \in (-\infty, -1]$ 時，令 $n = -\frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ 、 $(p, q) = 1$ 、 $p > q$ ，

將 $\Gamma'_{\alpha, -\frac{q}{p}}$ 透對 $(\frac{l}{2}, 0)$ 點對稱變換為 $\Gamma'_{\alpha, -\frac{p}{q}}$ ，故 $\Gamma'_{\alpha, -\frac{p}{q}}$ 與 $\Gamma'_{\alpha, -\frac{q}{p}}$ 之封閉圈數相等，皆為 p 。

如此便可以處理所有 n 倍等角差線 $\Gamma'_{\alpha, n}$ 的封閉圈數。

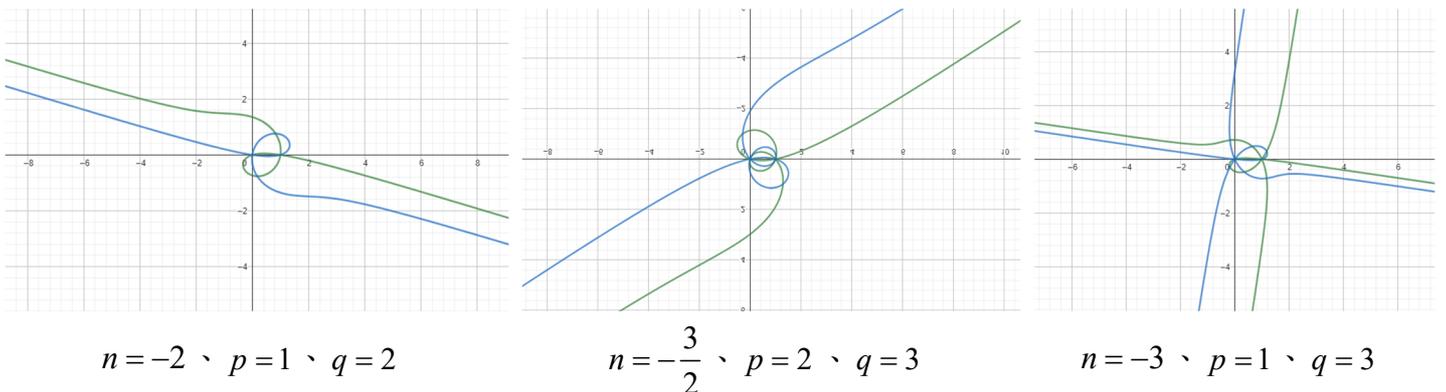


圖 35：綠色為原 n 倍等角差線，藍色是原圖形對 $(\frac{l}{2}, 0)$ 點對稱變換所得之曲線。

3. n 倍等角差線的分割區域數

無論 n 倍等角差線是否具有封閉圈，曲線的「發散曲線」與「封閉曲線」一同將坐標平面分割成數個區域，而這個區域數是可以被計算出來的，見下文說明。

首先，當 n 為無理數時，可以知道發散曲線有無限多條，因此分割區域數亦為無限多個。因此本文僅需討論當 n 為有理數時的分割區域數。

考慮平面上的尤拉公式 $V - E + F = 1$ ：其中 V 為圖形頂點數， E 為圖形邊數， F 為圖形面數。在 n 倍等角差線中將曲線的自相交點視為頂點、將曲線本身視為邊、將分割區域視為面來處理。

設 $n = \frac{q}{p}$ ，其中 $(p, q) = 1$ ：

(1) $\alpha \neq (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = 0$ 時：

圖形為斜直線，分割區域數為 2。

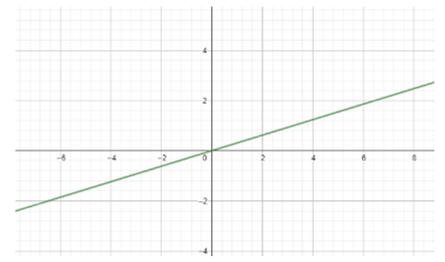


圖 36： $\alpha \neq (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = 0$ 時分割區域數為 2

(2) $\alpha \neq (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n \neq 0$ 時：

因為 $V = 2$ (即 $(0,0), (l,0)$)，

根據前文，漸近線可視為為兩條曲線構成，

故此處一條漸近線對應到兩條曲線；

且 $n < 0$ 時亦有封閉圈，

一個封閉圈表示從 $(0,0) \rightarrow (l,0) \rightarrow (0,0)$ 或 $(l,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (l,0)$ ，

因此一個封閉圈對應到兩條曲線，

故 $E = 2|p + q| + (|p| + |q| - |p + q|) = |p| + |q| + |p + q|$ 。

代入 $V - E + F = 1$ ，得 $F = |p| + |q| + |p + q| - 1$ 。

例如右圖綠色的 2 倍等角差線中， $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 、 $n = -2$ 。

可以取 $p = 2, q = -1$ ，得分割區域數為

$$F = |p| + |q| + |p + q| - 1 \\ = |2| + |-1| + |2 + (-1)| - 1 = 2 + 1 + 1 - 1 = 3 \text{ (個分割區域)}$$

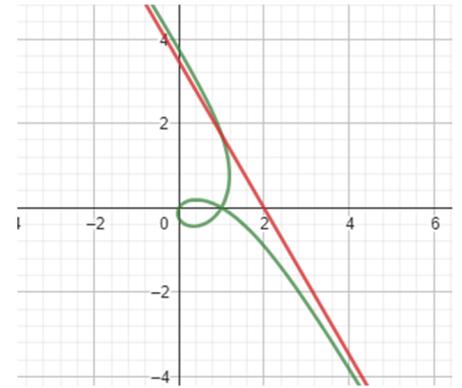


圖 37： $\alpha \neq (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = -2$ 時分割區域數為 2

(3) $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = 0$ 時：圖形為水平線，分割區域數為 2。

(4) $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = 1$ 時：圖形為鉛直線，分割區域數為 4。

(5) $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = -1$ 時：圖形為水平線，分割區域數為 2。

(6) $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， n 為不包含 $0, 1, -1$ 的整數及其倒數，即 $n \in \left\{ t, \frac{1}{t} \mid t \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\} \right\}$ 時：

因為 $V = 2$ (即 $(0,0), (l,0)$)，根據前文，漸近線可視為為兩條曲線構成，

故此處一條漸近線對應到兩條曲線，

而水平線因為通過 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 、 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$ 其中兩點，故需再加 1；

且 $n < 0$ 時亦有封閉圈，

一個封閉圈表示從 $(0,0) \rightarrow (l,0) \rightarrow (0,0)$ 或 $(l,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (l,0)$ ，

因此一個封閉圈對應到兩條曲線，

故 $E = 2|p + q| + (|p| + |q| - |p + q|) + 1 = |p| + |q| + |p + q| + 1$ ，

代入 $V - E + F = 1$ ，得 $F = |p| + |q| + |p + q|$ 。

例如右圖綠色的 -3 倍等角差線中， $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 、 $n = -3$ 。

可以取 $p = 1, q = -3$ ，得分割區域數為

$$F = |p| + |q| + |p + q| = |1| + |-3| + |1 + (-3)| = 6 \text{ (個分割區域)}$$

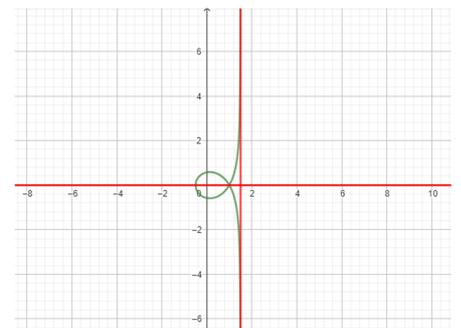


圖 38： $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ， $n = -3$ 時分割區域數為 6

(7) $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$, n 不為整數及其倒數時 :

因為 $V = 3$ (即 $(0,0), (l,0), (\frac{l}{n+1}, 0)$) ,

根據前文, 漸近線可視為為兩條曲線構成, 故在此一條漸近線等價於兩條曲線;

而水平線因為同時通過 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 、 $(\frac{l}{n+1}, 0)$ 三點, 故需再加 2;

且 $n < 0$ 時亦有封閉圈, 一個封閉圈表示從 $(0,0) \rightarrow (l,0) \rightarrow (0,0)$ 或 $(l,0) \rightarrow (0,0) \rightarrow (l,0)$,

因此一個封閉圈等價於兩條曲線,

故 $E = 2|p+q| + (|p|+|q|-|p+q|) + 2 = |p|+|q|+|p+q| + 2$ 。

代入 $V - E + F = 1$, 得 $F = |p|+|q|+|p+q|$ 。

例如右圖綠色的 $\frac{-5}{2}$ 倍等角差線中, $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 、 $n = \frac{-5}{2}$ 。

可以取 $p = 2, q = -5$, 得分割區域數為

$F = |p|+|q|+|p+q| = |2|+|-5|+|2+(-5)| = 10$ (個分割區域)

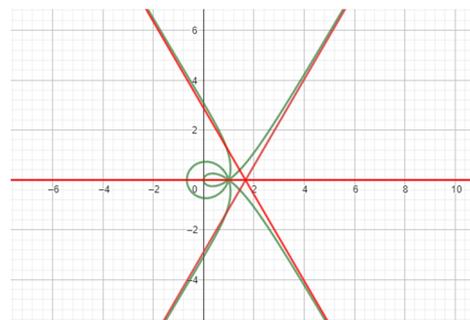


圖 39 : $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$,

$n = \frac{-5}{2}$ 時分割區域數為 10

結論如以上(1)~(7)的分類, 原則是設 $n = \frac{q}{p}$, 其中 $(p, q) = 1$:

排除掉兩個特例(見下表), 皆可適用:

第一類 n 倍等角差線的分割區域數為 $F = |p|+|q|+|p+q| - 1$;

第二類 n 倍等角差線的分割區域數為 $F = |p|+|q|+|p+q|$ 。

另承前述結果, 封閉圈數亦可表示為 $\frac{|p|+|q|-|p+q|}{2}$ 。

以下表格分類舉例列出 n 倍等角差線的封閉圈數及分割區域數:

表 5 : 第一類 n 倍等角差線的封閉圈數及分割區域數的例子

n	$ p + q $	$ p+q $ 漸近線條數	$\frac{ p + q - p+q }{2}$ (封閉圈數)	$ p + q + p+q -1$ (分割區域數)
$\frac{4}{1}$	$ 4 + 1 =5$	$ 4+1 =5$	0	9
0 (特例)	$ 0 + 1 =1$	$ 0+1 =1$	0	2 (特例)
$-\frac{2}{5}$	$ (-2) + 5 =7$	$ (-2)+5 =3$	2	9

表 6 : 第二類 n 倍等角差線的封閉圈數及分割區域數的例子

n	$ p + q $	$ p+q $ 漸近線條數	$\frac{ p + q - p+q }{2}$ (封閉圈數)	$ p + q + p+q $ (分割區域數)
$\frac{4}{1}$	$ 4 + 1 =5$	$ 4+1 =5$	0	10
-1 (特例)	$ (-1) + 1 =2$	1 (特例)	0	2
$-\frac{2}{5}$	$ (-2) + 5 =7$	$ (-2)+5 =3$	2	10

(七)當 n 為有理數時，在已知為 n 倍等角差線的前提下，由圖形特徵逆推 n 值

1. n 倍等角差線的圖形與 n 值有一一對應關係

我們可藉由輻射點得到以下性質

性質 11：若 n 倍等角差線具有輻射點，則 n 倍等角差線的圖形與 n 值有一一對應關係。

證明：

考慮兩個圖形相同的 n 倍等角差線，其 n 值分別為 n_1 與 n_2 且 $n_1 \neq n_2$ 。由於圖形的輻射點只由 n 值決定，因此兩個圖形的輻射點分別位在 $\left(\frac{n_1 l}{n_1 + 1}, 0\right)$ 與 $\left(\frac{n_2 l}{n_2 + 1}, 0\right)$ ，由於圖形相同代表輻射點位置相同，即

$\frac{n_1 l}{n_1 + 1} = \frac{n_2 l}{n_2 + 1}$ ，故 $n_1 = n_2$ ，與假設矛盾，因此給定一 n 倍等角差線圖形會唯一決定 n 的值。另外給定 n

值時，按照 n 倍等角差線的定義作圖，其軌跡曲線也必唯一。

因此我們可以得到結論： n 倍等角差線的圖形與 n 值有一一對應關係。■

唯二的特例，是第二類 n 倍等角差線中的兩種情形：當 $n = 0$ 及 $n = -1$ 時的圖形均為水平線 $y = 0$ 。

2. 當 n 為有理數時，由 n 倍等角差線的圖形特徵逆推 n 值

性質 11 給了我們藉由圖形逆推 n 值的可能性。在已知圖形為 n 倍等角差線的前提下，當 n 為無理數時，圖形會在平面上稠密，不易觀察對應的 n 值，因此我們先考慮當 n 為有理數時的圖形。

我們可藉由觀察圖形的漸近線條數、封閉圈數、分割區域數，並利用輻射點、反演給出的公式判斷 n 值。以下給出逆推步驟：

(1) 判斷 n 值為正或負：

若 n 倍等角差線圖形沒有封閉圈，則 $n > 0$ ；

若 n 倍等角差線圖形有封閉圈，則 $n < 0$ 。

由性質 8 可知當 n 為正實數時， n 倍等角差線的每一條曲線皆為發散曲線，圖形沒有封閉圈，反之亦然。另外由反演變換可知當 n 為正實數時，反演變換後的 n' 倍等角差線 $n' = \frac{-n}{n+1}$ 必為負數，故由性質 10 可知當 $n < 0$ 時圖形有封閉圈數，反之亦然。

(2) 若 n 倍等角差線圖形有封閉圈 ($n < 0$ 時)：

令圖形的漸近線數為 a ，封閉圈數為 b 。

若發散曲線由 $(0,0)$ 延伸，則 $n = \frac{-b}{a+b}$ ；若發散曲線由 $(l,0)$ 延伸，則 $n = \frac{a+b}{-b}$ 。

證明：

由性質 10，設 $n = -\frac{q}{p}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ 、 $(p, q) = 1$ 、 $p > q$ 時， n 倍等角差線的漸近線數為

$|p - q| = a$ ，封閉圈數為 $q = b$ ，因此可得 $p = a + b$ 、 $q = b$ ， $n = -\frac{b}{a+b}$ 。再由研究結果(五)的 1. 中對此

等角差線以 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ 為中心進行點對稱變換，變換後的 $n = -\frac{a+b}{b}$ 具有相同的漸近線數與封閉圈數，因此

當 n 倍等角差線圖形的漸近線數為 a ，封閉圈數為 b 時， $n = -\frac{b}{a+b}$ 或 $n = -\frac{a+b}{b}$ 。

接著由輻射點 $\left(\frac{nl}{n+1}, 0\right)$ 判斷，當 $n = -\frac{b}{a+b}$ 時，輻射點為 $\left(-\frac{b}{a}l, 0\right)$ 必在 x 軸負向，由此推得當

$n = -\frac{b}{a+b}$ 時，發散曲線必由 $(0, 0)$ 延伸，此亦符合(六)2.(1)關於封閉圈數的定義。同理，當

$n = -\frac{a+b}{b}$ 時，輻射點為 $\left(\frac{a+b}{a}l, 0\right)$ 必在 $(l, 0)$ 右側，故當 $n = -\frac{a+b}{b}$ 時，發散曲線必由 $(l, 0)$ 延伸。■

(3)若 n 倍等角差線圖形沒有封閉圈 ($n > 0$ 時)：

令圖形通過 $(0, 0)$ 的曲線數為 p ，通過 $(l, 0)$ 的曲線數為 q ，則 $n = \frac{q}{p}$ 。

證明：

考慮 n 倍等角差線 Γ 的 $n = \frac{-q}{p+q}$ ，其中 $p, q \in \mathbb{N}$ 、 $(p, q) = 1$ ，由性質 9 可知 Γ 的漸近線數為

$|(p+q)-q| = p$ 、封閉圈數為 $|p+q| - |(p+q)-q| = q$ ，再由上述(2)可知 Γ 的發散曲線由 $(0, 0)$ 延伸。

對 Γ 進行反演變換得到 Γ' ，其中 $n' = \frac{q}{p}$ 。而 Γ' 圖形中由 $(0, 0)$ 延伸的發散曲線變換後仍為發散曲線，通過 $(l, 0)$ 的封閉圈則變換為發散曲線，因此 Γ' 圖形中通過 $(0, 0)$ 的曲線數為 Γ 中的發散曲線數即為漸近線數 p ；通過 $(l, 0)$ 的曲線數為 Γ 中的封閉曲線數 q 。故若 n 倍等角差線圖形沒有封閉圈時，圖形通過 $(0, 0)$ 的曲線數為 p ，通過 $(l, 0)$ 的曲線數為 q ，則 $n = \frac{q}{p}$ 。■

3.由圖形逆推 n 值的例子

由上述 2.(1)(2)(3)得知，當 n 為有理數時，給定一 n 倍等角差線圖形皆可逆推 n 值。舉二例如下：

(1) 如圖 40：

圖形有封閉圈，因此 $n < 0$ ，漸近線條數為 1、封閉圈數為 2，發散曲線由 $(l, 0)$ 延伸，

因此 n 值為 $-\frac{1+2}{2} = -\frac{3}{2}$ 。

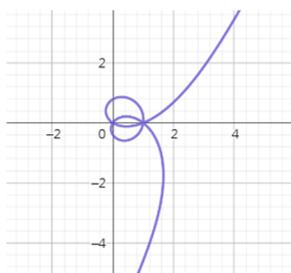


圖 40：(有封閉圈) 第一類 n 倍等角差線圖形逆推 n 值

(2) 如圖 41：

圖形沒有封閉圈，因此 $n > 0$ ，通過 $(0,0)$ 的曲線有 3 條，通過 $(l,0)$ 的曲線有 2 條，因此 $n = \frac{q}{p} = \frac{2}{3}$ 。

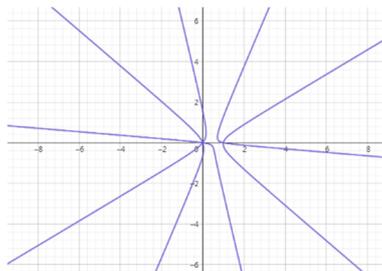


圖 41：(無封閉圈)第一類 n 倍等角差線圖形逆推 n 值

4. 第二類 n 倍等角差線的 n 值判斷

(1) 圖形有封閉圈：

由性質 2，當 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 時，除了 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 外的曲線自相交點有 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$ 。因此當看到圖形有一封閉圈通過 x 軸上異於 $(0,0)$ 及 $(l,0)$ 的點時需判斷 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ，此時我們一樣正常計算封閉圈數、漸近線數則須多考慮水平線，接著一樣觀察發散曲線(包含水平線)是由 $(0,0)$ 還是 $(l,0)$ 延伸即可判斷 n 值。舉例如下：

如圖 42：

封閉圈數為 4、漸近線數為 1(水平線)，發散曲線由 $(0,0)$ 延伸，因此 $n = -\frac{4}{1+4} = -\frac{4}{5}$ 。

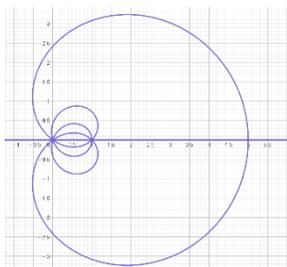


圖 42：(有封閉圈) 第二類 n 倍等角差線圖形逆推 n 值

(2) 圖形沒有封閉圈：

同理，由性質 3，當看到圖形有一發散曲線通過 x 軸上異於 $(0,0)$ 及 $(l,0)$ 的點時需判斷為 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ ，此時須將水平線視為同時通過 $(0,0)$ 及 $(l,0)$ 的發散曲線計算，即可正確判斷 n 值。舉例如下：

如圖 43：

通過 $(0,0)$ 的發散曲線數為 $3+1$ ；通過 $(l,0)$ 的發散曲線數為 $2+1$ ，因此 n 值為 $\frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$ 。

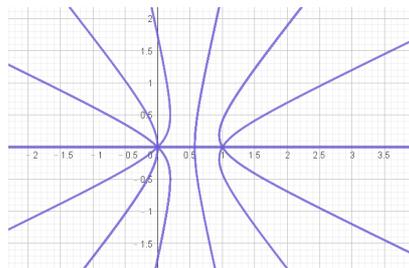


圖 43：(無封閉圈) 第二類 n 倍等角差線圖形逆推 n 值

伍、研究結論

(一) n 倍等角差線的圖形分類

1. 第一類 n 倍等角差線與第二類 n 倍等角差線

性質 1: $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n$ 倍等角差線包含水平線 $y = 0$ 。

定義: 第一類 n 倍等角差線與第二類 n 倍等角差線

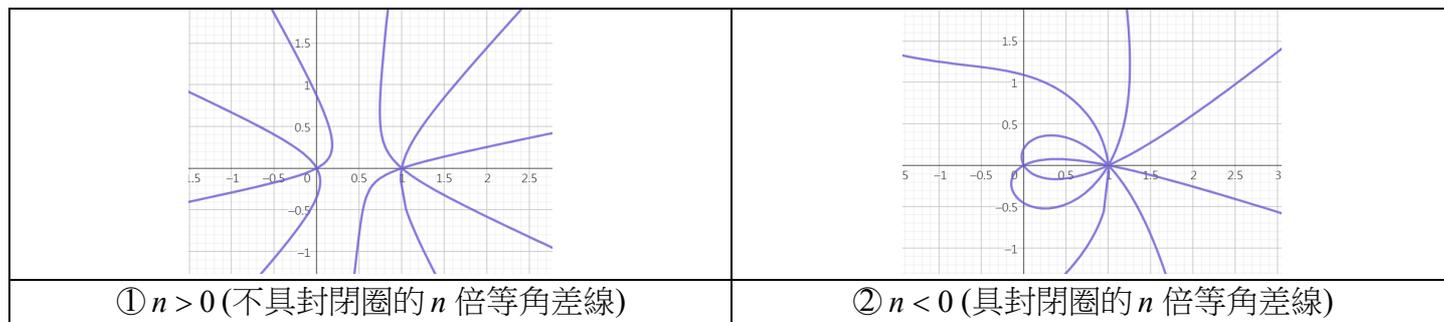
(1) 不滿足 $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 的 n 倍等角差線稱為「第一類 n 倍等角差線」, 其圖形不包含水平線 $y = 0$;

(2) 滿足 $\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 的 n 倍等角差線稱為「第二類 n 倍等角差線」, 其圖形包含水平線 $y = 0$ 。

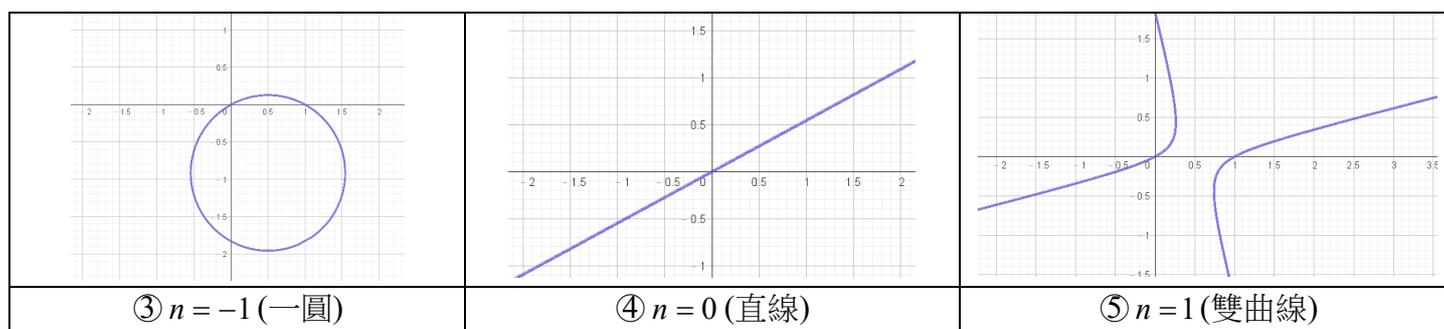
性質 2: 第二類 n 倍等角差線通過 $\left(\frac{l}{n+1}, 0\right)$ 。

2. 第一類 n 倍等角差線的圖形分類

$\alpha \neq (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線一般情形:

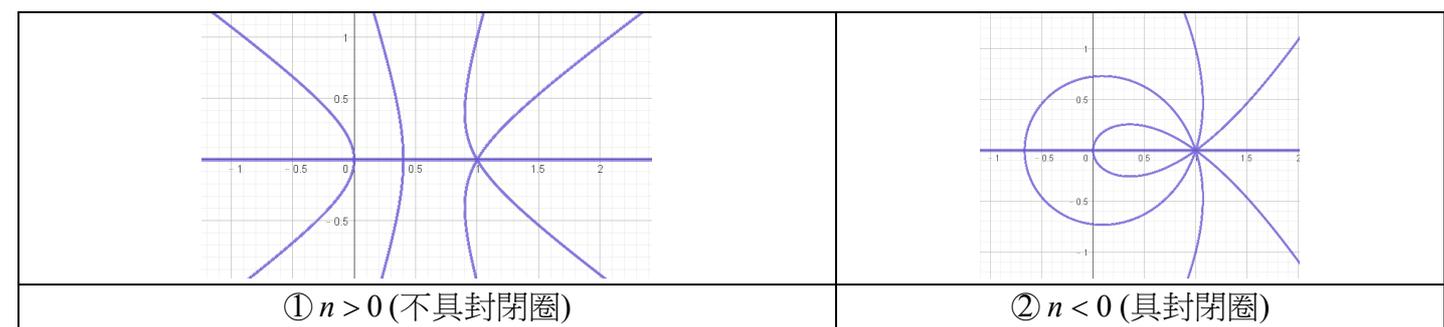


$\alpha \neq (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線特別情形:

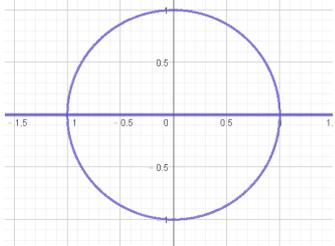
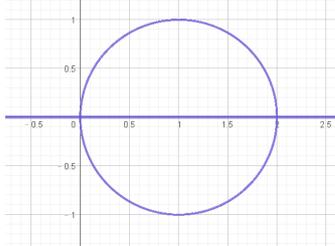
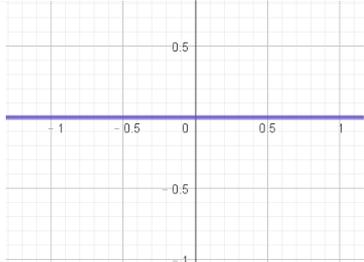
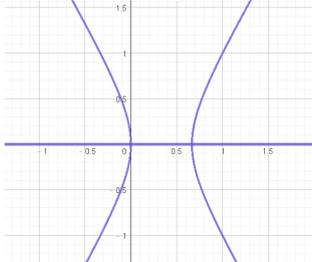
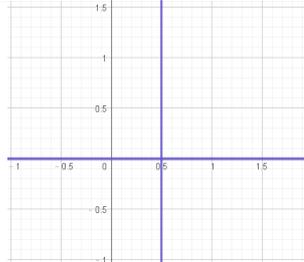
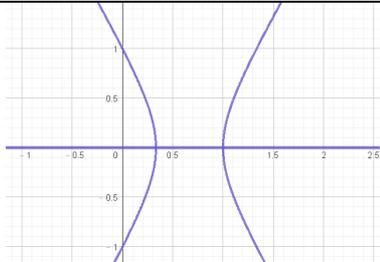


3. 第二類 n 倍等角差線的圖形分類

$\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線一般情形: 共同部份為 $y = 0$



$\alpha = (nm + k)\pi$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 時的 n 倍等角差線特別情形：共同部份為 $y = 0$, 其餘的部份如下

		
③ $n = -2$ (一圓)	④ $n = -1$ (僅有 x 軸)	⑤ $n = -\frac{1}{2}$ (一圓)
		
⑥ $n = 0$ (僅有 x 軸)	⑦ $n = \frac{1}{2}$ (雙曲線)	⑧ $n = 1$ (鉛直線)
		
⑨ $n = 2$ (雙曲線)		

(二) n 倍等角差線的漸近線與輻射點

1. n 倍等角差線的漸近線

n 倍等角差線的漸近線方程式為 $\sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)\left(x - \frac{nl}{n+1}\right) + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)y = 0$, $k \in \mathbb{Z}$ 。

2. n 倍等角差線的輻射點

將 B, C 隨意擺放在坐標平面上的相異位置，並且將 L_1, L_2 分別 B, C 為旋轉中心作逆/順時針旋轉，保持轉速為 n 倍速。所形成的曲線若有漸近線，則漸近線均會通過將 \overline{BC} 分隔為 $n:1$ 的點，並稱之為輻射點。

備註：(1)若 $n = -1$ ，曲線沒有輻射點；(2)若 $n < 0, n \neq -1$ 可以看成外分點，輻射點在 \overline{BC} 外。

(三) n 倍等角差線的漸近線數量

1. $n \in \mathbb{Z}$ ，漸近線數量為 $|n+1|$ 條

$n \in \mathbb{Z}$ ，則 n 倍等角差線不重疊的漸近線數量為 $|n+1|$ 條。

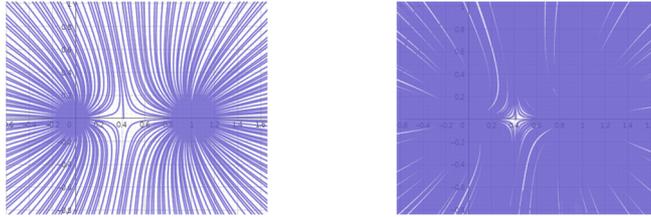
唯一的特例為當 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 、且 $n = -1$ 時仍具有 1 條漸近線。

2. $n \in \mathbb{Q}$ ，設 $n = \frac{q}{p}$ ，且 $(p, q) = 1$ 時，漸近線數量為 $|p+q|$ 條

當 n 為有理數時，不妨設 $n = \frac{q}{p}$ ，且 $(p, q) = 1$ ，則 $\theta = \frac{-p\alpha + pk\pi}{p+q}$ 。

取 $k = 0, \dots, |p+q|-1$ ，共有 $|p+q|$ 個 k 值均不為同界角，因此不重疊的漸近線數量為 $|p+q|$ 。

3. n 為無理數時， n 倍等角差線有無限多條漸近線，漸近線數量的增加速率與 n 有關



$\alpha = 0, n = \sqrt{2}, \theta = 0 \sim 50\pi$ 及 $\theta = 0 \sim 200\pi$ 時的圖形

(四) n 倍等角差線是否於坐標平面佈滿或稠密的猜想

1. 能否取得 n 值，使得 n 倍等角差線佈滿坐標平面的猜想 (答案：否)

即使 n 為無理數時， n 倍等角差線的圖形具有無限多條曲線，亦具有無限多條漸近線。但曲線無法通過坐標平面上的所有點，即無法佈滿坐標平面。

2. 能否取得 n 值，使得 n 倍等角差線於坐標平面上稠密的猜想 (答案：當 n 為無理數時，猜想成立)

定理 6：當 n 為無理數時， n 倍等角差線在坐標平面上稠密。

(五) n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形

1. n 倍等角差線以 $(\frac{l}{2}, 0)$ 為中心，旋轉 π 後的圖形(對 $(\frac{l}{2}, 0)$ 作點對稱)

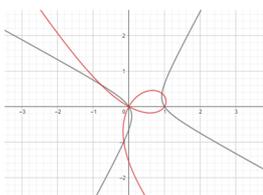
$$\Gamma_{\alpha, n}^l \text{ 對 } \left(\frac{l}{2}, 0\right) \text{ 作點對稱後之圖形為 } \Gamma' = \Gamma_{\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{n}}^l$$

2. n 倍等角差線對直線 $x = \frac{l}{2}$ 鏡射後的圖形

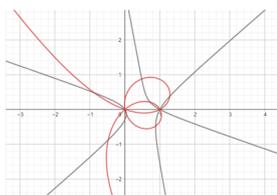
$$\Gamma_{\alpha, n}^l \text{ 對 } x = \frac{l}{2} \text{ 鏡射後之圖形為 } \Gamma' = \Gamma_{\frac{-\alpha}{n}, \frac{1}{n}}^l$$

3. n 倍等角差線對圓 $x^2 + y^2 = l^2$ 反演後的圖形

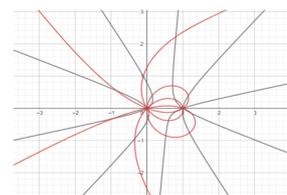
$$\Gamma_{\alpha, n}^l \text{ 對圓 } x^2 + y^2 = l^2 \text{ 反演變換後之圖形為 } \Gamma' = \Gamma_{\frac{\alpha}{n+1}, \frac{-n}{n+1}}^l$$



$n = 1$



$n = 2$



$n = \frac{3}{2}$

(六) n 倍等角差線的封閉圈數與分割區域數

1. n 倍等角差線的自相交與發散情形

性質 7： n 倍等角差線的軌跡隨 θ 增加時而產生時，除了 $(0,0)$ 、 $(l,0)$ 可從不同方向通過以外，其餘點的通過方向固定。

性質 8： n 倍等角差線的每一條漸近線，都只由一組相反方向的發散曲線形成。

性質 9： 當 n 為正實數時， n 倍等角差線的每一條曲線皆為發散曲線。

2. n 倍等角差線的封閉圈數

設 $n = \frac{q}{p}$ ，其中 $(p, q) = 1$ ：封閉圈數為 $\frac{|p| + |q| - |p+q|}{2}$ 。

3. n 倍等角差線的分割區域數

設 $n = \frac{q}{p}$ ，其中 $(p, q) = 1$ ：排除掉兩個特例後(第一類的 $n = 0$ 及第二類的 $n = -1$)，皆可適用

第一類 n 倍等角差線的分割區域數為 $F = |p| + |q| + |p+q| - 1$ ；

第二類 n 倍等角差線的分割區域數為 $F = |p| + |q| + |p+q|$ 。

(七) 當 n 為有理數時，在已知為 n 倍等角差線的前提下，由圖形特徵逆推 n 值

1. n 倍等角差線的圖形與 n 值有一一對應關係

若 n 倍等角差線具有輻射點，則 n 倍等角差線的圖形與 n 值有一一對應關係。

唯二的特例，是第二類 n 倍等角差線中的兩種情形：當 $n = 0$ 及 $n = -1$ 時的圖形均為水平線 $y = 0$ 。

2. 當 n 為有理數時，由 n 倍等角差線的圖形特徵逆推 n 值

(1) 判斷 n 值為正或負：

若 n 倍等角差線圖形沒有封閉圈，則 $n > 0$ ；若 n 倍等角差線圖形有封閉圈，則 $n < 0$ 。

(2) 若 n 倍等角差線圖形有封閉圈 ($n < 0$ 時)：

令圖形的漸近線數為 a ，封閉圈數為 b 。

若發散曲線由 $(0,0)$ 延伸，則 $n = \frac{-b}{a+b}$ ；若發散曲線由 $(l,0)$ 延伸，則 $n = \frac{a+b}{-b}$ 。

(3) 若 n 倍等角差線圖形沒有封閉圈 ($n > 0$ 時)：

令圖形通過 $(0,0)$ 的曲線數為 p ，通過 $(l,0)$ 的曲線數為 q ，則 $n = \frac{q}{p}$ 。

陸、參考文獻

[1] 李永約。(2021年12月)。等角差線一漸近線及其性質。數學傳播, 45卷(4期), pp.34-42。

[2] 鍾文體。(2022年3月)。等角差線實為雙曲線。數學傳播, 46卷(1期), pp.84-87。

[3] 張鎮華。(2022年9月)。再談等角差線—兼談108數學課綱之圓錐曲線教學。數學傳播 46卷3期, pp.38-48。

[4] 李永約。(2023年6月)。等角差線定義修正與 n 倍等角差線(nE.D.L.)猜想。數學傳播 47卷2期, pp.65-76。

[5] 宋秉信。(1998年9月)。從尤拉公式到空間的平面分割。數學傳播, 22卷(3期), pp.54-60。

[6] Wikipedia contributors. (2024, May 10). Dirichlet's approximation theorem. In Wikipedia, from https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet%27s_approximation_theorem

【評語】 050409

本作品研究 n 倍等角差線，其定義如下：給定平面上的兩條直線，分別在其之上各取一定點，以定點為旋轉中心，旋轉通過它的直線（旋轉速度相差 n 倍），兩線交點的軌跡定義為 n 倍等角差線。作者廣泛的研究了 n 倍等角差線相關的性質，包括漸近線及其交點的位置及數量、其繞圈數、和將平面分割成的區域數。其中，區域數的計算套用尤拉公式。雖然其證明都十分簡單，且發想也十分直接，但是處理的手法還算創新，雖然本作品幾乎已涵蓋全部想得到的性質，堪稱完整，但是作者沒能找出 n 倍等角差線的應用，也未能清楚說明 n 倍等角差線的研究意涵，參考文獻中相似結果也無詳盡比較，是比較可惜之處。

作品簡報

n 倍等角差線

摘要

本研究從分析產生 n 倍等角差線的聯立方程式與參數式出發，首先觀察圖形的變化及計算，得到不同初始條件下的圖形分類，進一步探索其漸近線、輻射點的特性，並解決是否於坐標平面佈滿或稠密的猜想。本研究再考慮 n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後的圖形，討論封閉圈數與求得分割區域數。並且整理出當 n 為有理數時，利用圖形逆推產生曲線之 n 、 l 、 α 。

曲線介紹

設 n 為一實數，考慮 α 為一常數、 θ 為一變數、 l 為一大於 0 的常數。給定兩直線 L_1, L_2 ，其中 L_1 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\alpha + n\theta$ 的直線； L_2 為通過原點且與 x 軸正向夾角為 $\pi - \theta$ 的直線。將 L_1, L_2 分別以原點 $B(0,0)$ 及 $C(l,0)$ 為旋轉中心，並且同時以 θ 作為變數開始旋轉。此時 L_1, L_2 的交點 A 所形成的軌跡稱為 n 倍等角差線，並將此軌跡記作 $\Gamma_{\alpha,n}^l$ 。

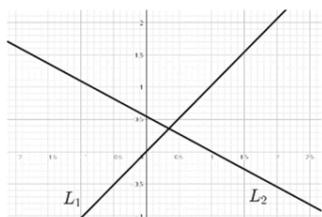


圖 1： $n=1$ 的兩直線 L_1, L_2

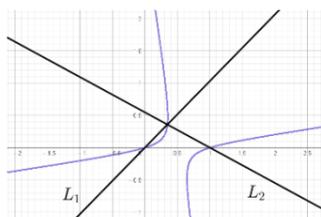


圖 2： $n=1$ 的交點軌跡(雙曲線)

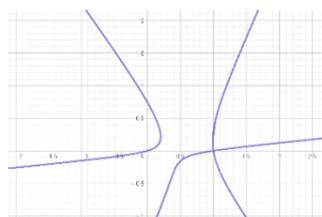


圖 3： $n=2$ 的 n 倍等角差線

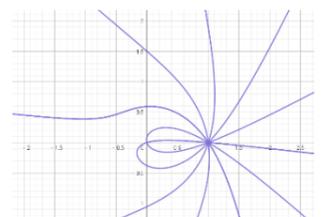


圖 4： $n=-3.5$ 的 n 倍等角差線

研究目的

- 一、將 n 倍等角差線的圖形分類。
- 二、探索 n 倍等角差線的漸近線與輻射點。
- 三、探索 n 倍等角差線的漸近線數量。
- 四、處理 n 倍等角差線是否於坐標平面佈滿或稠密的猜想。
- 五、探索 n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形。
- 六、探索 n 倍等角差線的封閉圈數及分割區域數。
- 七、當 n 為有理數時，在已知為 n 倍等角差線的前提下，由圖形特徵逆推 n 、 l 、 α 。

研究結果

一、 n 倍等角差線的圖形分類

n 倍等角差線即為聯立方程式 $\begin{cases} L_1: y = \tan(\alpha + n\theta)x \\ L_2: y = -\tan\theta \cdot (x-l) \end{cases}$ 的交點軌跡，將聯立方程式轉為 θ 的參數式，可得

$$\begin{cases} x = \frac{l \cdot \tan\theta}{\tan\theta + \tan(\alpha + n\theta)} \\ y = \frac{l \cdot \tan\theta \cdot \tan(\alpha + n\theta)}{\tan\theta + \tan(\alpha + n\theta)} = \tan(\alpha + n\theta) \cdot x \end{cases} \quad \text{或表為} \quad \begin{cases} x = \frac{l \cdot \sin\theta \cos(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r \cdot \cos(\alpha + n\theta) \\ y = \frac{l \cdot \sin\theta \sin(\alpha + n\theta)}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)} = r \cdot \sin(\alpha + n\theta) \end{cases}, \quad \text{其中 } r = \frac{l \cdot \sin\theta}{\sin(\alpha + (n+1)\theta)}.$$

性質 1： $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n$ 倍等角差線包含水平線 $y=0$ 。

定義：第一類 n 倍等角差線與第二類 n 倍等角差線

(1) 不滿足 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 的 n 倍等角差線稱為「第一類 n 倍等角差線」，其圖形不包含水平線 $y=0$ ；

(2) 滿足 $\alpha = (nm + k)\pi$ ， $m, k \in \mathbb{Z}$ 的 n 倍等角差線稱為「第二類 n 倍等角差線」，其圖形包含水平線 $y=0$ 。

性質 2：第二類 n 倍等角差線通過 $(\frac{l}{n+1}, 0)$ 。

表 1：第一類 n 倍等角差線 $\alpha \neq (nm + k)\pi$ 的圖形分類

(1)一般情形		(2)特別情形		
① $n > 0$ (不具封閉圈)	② $n < 0$ (具封閉圈)	③ $n = -1$ (一圓)	④ $n = 0$ (一直線)	⑤ $n = 1$ (雙曲線)

表 2：第二類 n 倍等角差線 $\alpha = (nm + k)\pi$ 的圖形分類

(1)一般情形		(2)特別情形		
① $n > 0$ (不具封閉圈)	② $n < 0$ (具封閉圈)	③ $n = -2$ (一圓及一直線)	④ $n = -1$ (一直線)	⑤ $n = -\frac{1}{2}$ (一圓及一直線)
(2)特別情形				
⑥ $n = 0$ (一直線)	⑦ $n = \frac{1}{2}$ (雙曲線及一直線)	⑧ $n = 1$ (相垂直的兩直線)	⑨ $n = 2$ (雙曲線及一直線)	

二、 n 倍等角差線的漸近線與輻射點

1. 當 $n \neq -1$ ， $\theta = \frac{-\alpha + k\pi}{n+1}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 時， n 倍等角差線具有漸近線。

漸近線方程式為 $\sin\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)\left(x - \frac{nl}{n+1}\right) + \cos\left(\frac{-\alpha + k\pi}{n+1}\right)y = 0$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

2. n 倍等角差線若有 2 條以上的漸近線，則漸近線均通過 $(\frac{nl}{n+1}, 0)$ ，

我們將其稱之為輻射點，且輻射點為 B, C 之分點。

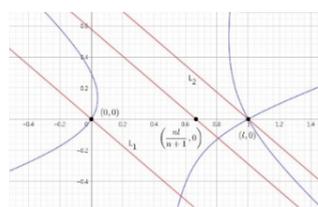


圖 5： L_1, L_2 與漸近線均平行

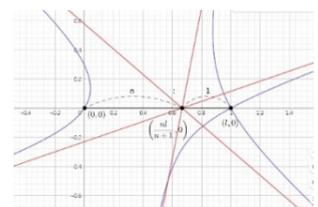
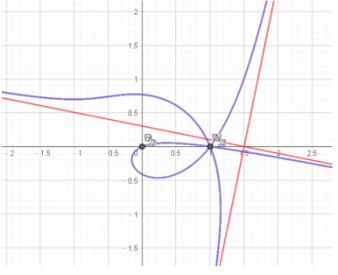
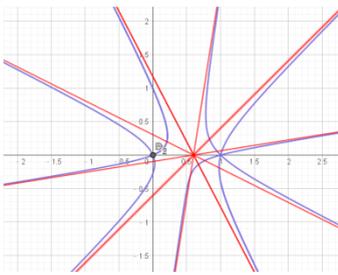
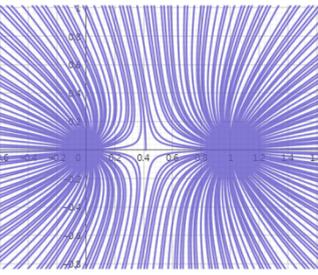
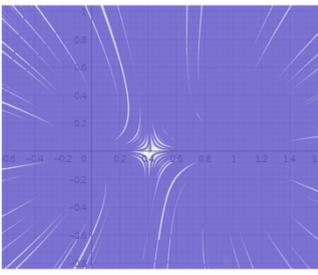


圖 6：漸近線均通過 $(\frac{nl}{n+1}, 0)$

三、 n 倍等角差線的漸近線數量

表 3： n 倍等角差線的漸近線數量

n 的數值	n 為 -1 以外的整數時	n 為 $0, -1$ 以外的有理數時， 設 $n = \frac{q}{p}$ ， p, q 為互質的整數	n 為無理數時	
漸近線數量	$ n+1 $	$ p+q $	無限多條	
說明	$\theta = \frac{-\alpha+k\pi}{n+1}$ ，取 $k=0, 1, \dots, n+1 -1$ ， 共取 $ n+1 $ 個 k 值。	$\theta = \frac{-\alpha+k\pi}{n+1}$ ，取 $k=0, 1, \dots, p+q -1$ ， 共取 $ p+q $ 個 k 值。	當 n 為無理數且 $k \neq 0$ 時，無論取 k 值為多少， 均不能使 $\theta = \frac{-\alpha+k\pi}{n+1} = \frac{-\alpha}{n+1} + k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。	
圖例	 圖 7： $n = -3$	 圖 8： $n = \frac{3}{2}$	 圖 9： $n = \sqrt{2}, \theta \in [0, 50\pi]$	 圖 10： $n = \sqrt{2}, \theta \in [0, 200\pi]$

備註：第二類 n 倍等角差線在 $n = -1$ 時仍具有 1 條漸近線 $y = 0$ 。

四、 n 倍等角差線是否於坐標平面佈滿或稠密的猜想

定理 6-1：無論 n 值為何， n 倍等角差線均無法佈滿坐標平面。

證明架構

- ① 利用反證法，考慮當 $\theta = (0.5+k)\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，即 L_2 為鉛直線時。
- ② 固定 L_2 為鉛直線，取各種斜角的 L_1 ，考慮 L_1 與 L_2 的交點，其交點是否能佈滿 L_2 。
- ③ 將 L_1 與 L_2 的交點是否能佈滿 L_2 的問題，轉化為考慮 L_1 的斜角問題。

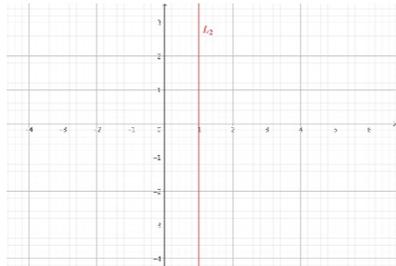


圖 11：特別取 L_2 為鉛直線時

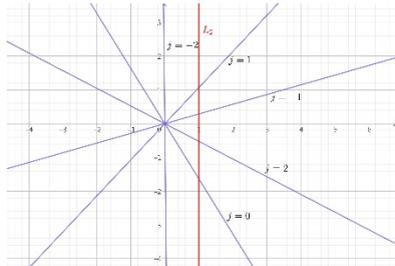


圖 12：不同斜角的 L_1 與 L_2 相交

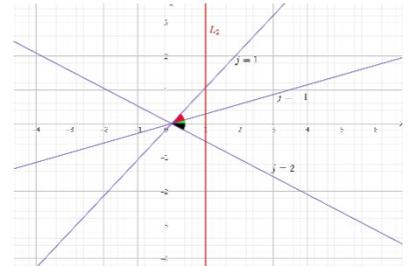


圖 13：將直線相交問題轉化為角度問題

定理 6-2：當 n 為無理數時， n 倍等角差線在坐標平面上稠密。

證明架構

(1) x 軸以外的點：

- ① 在 x 軸以外的點 (x_0, y_0) ，作以 (x_0, y_0) 為圓心，任意正實數為半徑的圓。
- ② 使 L_2 通過 (x_0, y_0) ，欲證存在某條 L_1 ，使 L_1 與 L_2 的交點在圓內。
- ③ 作通過 $(0, 0)$ 與 (x_0, y_0) 的直線 L ，用 L_1 的斜角逼近 L 的斜角。

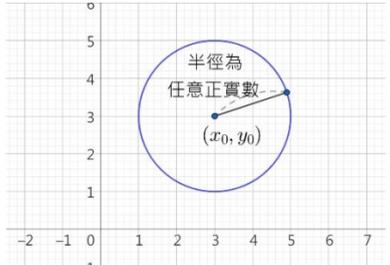


圖 14：圓半徑可以取任意小的正實數

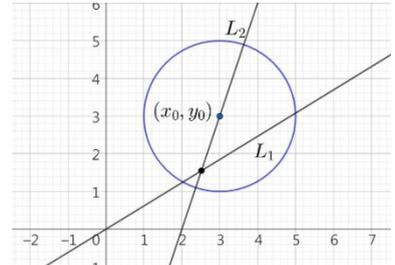


圖 15：希望圓內有 L_1 與 L_2 的交點

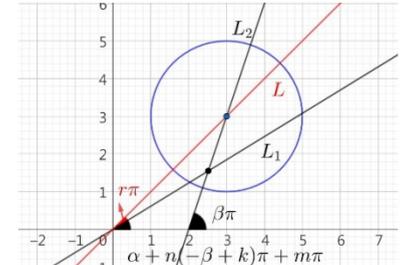


圖 16：將直線交點問題轉化為角度問題

(2) x 軸上的點：

- ① 在 x 軸上的點 $(t, 0)$ ，作以 $(t, 0)$ 為圓心，任意正實數為半徑的大圓。
- ② 在大圓內作一圓心在 x 軸以外的點之小圓，且小圓完全落在大圓以內。
- ③ 將小圓圓心視為情況(1)中的 (x_0, y_0) ，即可利用(1)的結論完成證明。

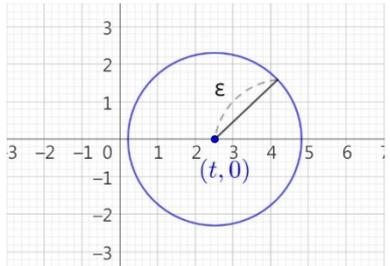


圖 17：任取 x 軸上的點 $(t, 0)$

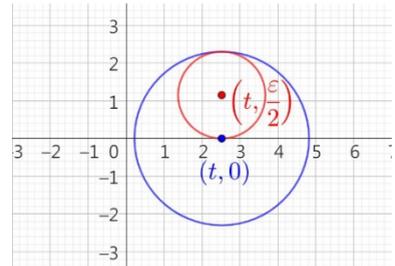


圖 18：半徑取適當長便可保證小圓完全落在大圓以內

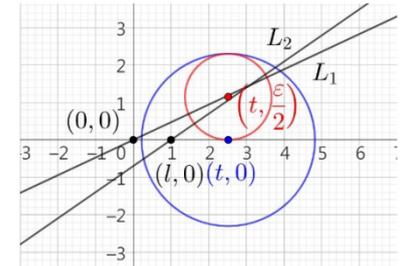
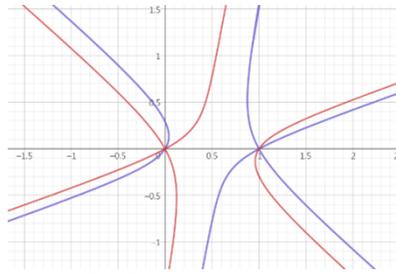
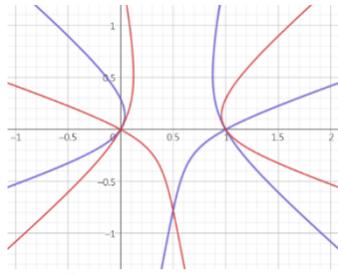
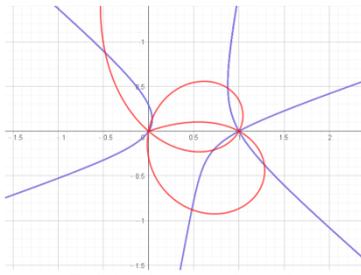


圖 19：將問題轉化為 x 軸以外的點，利用(1)的結論

五、 n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形

表 4： n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形

變換種類	旋轉	鏡射	反演
變換方法	以點 $(\frac{l}{2}, 0)$ 為中心，旋轉 π	對直線 $x = \frac{l}{2}$ 鏡射	對圓 $x^2 + y^2 = l^2$ 反演
變換前的圖形	$\Gamma'_{\alpha, n}$ (L_1 起始角 α 、轉速 n 倍)	$\Gamma'_{\alpha, n}$ (L_1 起始角 α 、轉速 n 倍)	$\Gamma'_{\alpha, n}$ (L_1 起始角 α 、轉速 n 倍)
變換後的圖形	$\Gamma'_{\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{n}}$ (L_1 起始角 $\frac{\alpha}{n}$ 、轉速 $\frac{1}{n}$ 倍)	$\Gamma'_{\frac{\alpha}{n}, \frac{1}{n}}$ (L_1 起始角 $\frac{\alpha}{n}$ 、轉速 $\frac{1}{n}$ 倍)	$\Gamma'_{\frac{\alpha}{n+1}, \frac{-n}{n+1}}$ (L_1 起始角 $\frac{\alpha}{n+1}$ 、轉速 $\frac{-n}{n+1}$ 倍)
圖例 藍色曲線：變換前 紅色曲線：變換後	 圖 20： $l = 1, \alpha = 1, n = 2$	 圖 21： $l = 1, \alpha = 1, n = 2$	 圖 22： $l = 1, \alpha = 1, n = 2$

六、 n 倍等角差線的封閉圈數與分割區域數

n 倍等角差線的封閉圈數

當 n 為無理數時， n 倍等角差線的封閉圈具有無限多圈；

當 n 為有理數時我們有下列的性質：

性質 10： n 為有理數時，設 $n = \frac{q}{p}$ ，其中 $p \in \mathbb{N}$ ， $q \in \mathbb{Z}$ ， $(p, q) = 1$ 或 $q = 0$ 。

則 n 倍等角差線的封閉圈數為 $\frac{|p| + |q| - |p + q|}{2}$ 。

n 倍等角差線的分割區域數

當 n 為無理數時，因為發散曲線有無限多條，所以曲線將坐標平面分割成無限多個區域；

當 n 為有理數時我們有下列的性質：

性質 11：(1) 當 n 為非零之有理數時，設 $n = \frac{q}{p}$ ，其中 $(p, q) = 1$ 。則：

第一類 n 倍等角差線的分割區域數 $F = |p| + |q| + |p + q| - 1$ ；

第二類 n 倍等角差線的分割區域數 $F = |p| + |q| + |p + q|$ 。

(2) $n = 0$ 時， n 倍等角差線的分割區域數為 2。

圖例：

第一類 n 倍等角差線 $n = -\frac{2}{5}$ ：

取 $(p, q) = (5, -2)$ ，得：

封閉圈數為 2、分割區域數為 9

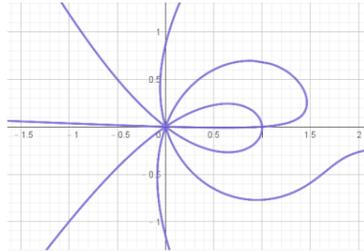


圖 23：第一類 n 倍等角差線的圖例

圖例：

第二類 n 倍等角差線 $n = \frac{4}{1}$ ：

取 $(p, q) = (1, 4)$ ，得：

封閉圈數為 0、分割區域數為 10

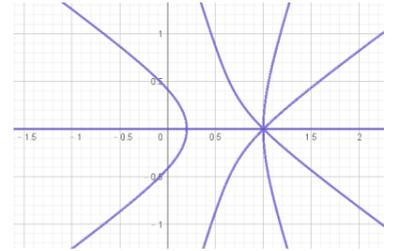


圖 24：第二類 n 倍等角差線的圖例

七、當 n 為有理數時，在已知為 n 倍等角差線的前提下，由圖形特徵逆推 n 、 l 、 α

表 5：逆推程序表

程序	圖例
<p>(1) 判斷是第一類 n 倍等角差線或第二類 n 倍等角差線：</p> <p>若圖形並非只有一直線，則</p> <p>① 不包含一直線的為第一類 n 倍等角差線。</p> <p>② 包含一直線的為第二類 n 倍等角差線。</p>	<p>圖 25：判斷類別</p> <p>圖形並非只有一直線，且圖形包含一直線，故為第二類 n 倍等角差線。</p>
<p>(2) 利用自相交點判斷 l：</p> <p>① 用曲線的自相交點先找出其中一條直線的旋轉中心。</p> <p>② 用輻射點的分點性質找出第二條直線的旋轉中心。</p> <p>③ 兩個旋轉中心之間的距離即為 l，並且分別定坐標為 $(0, 0)$ 及 $(l, 0)$。</p>	<p>圖 26：判斷 l</p> <p>取右側自相交點為旋轉中心，再利用分點性質得到另一個旋轉中心。</p>
<p>(3) 利用通過兩直線的旋轉中心之曲線數量判斷 n：</p> <p>① 沒有封閉圈時，令過 $(0, 0)$ 的曲線數為 p，過 $(l, 0)$ 的曲線數為 q，則 $n = \frac{q}{p}$。</p> <p>② 有封閉圈時，令漸近線數為 a，封閉圈數為 b。</p> <p>發散曲線由 $(0, 0)$ 延伸，則 $n = \frac{-b}{a+b}$；發散曲線由 $(l, 0)$ 延伸，則 $n = \frac{a+b}{-b}$。</p>	<p>圖 27：判斷 n</p> <p>沒有封閉圈，通過 $(0, 0)$ 的曲線數為 5，通過 $(l, 0)$ 的曲線數為 2，則 $n = \frac{5}{2}$。</p>
<p>(4) 利用切線判斷 α：</p> <p>當 $n \neq 0$ 時，設 n 倍等角差線圖形的 $n = \frac{q}{p}$，其中 $p \in \mathbb{N}$，$q \in \mathbb{Z}$ 且 $(p, q) = 1$，則 α 的所有可能為通過 $(0, 0)$ 的所有曲線在 $(0, 0)$ 切線的斜角。</p> <p>考慮 $\alpha \in [0, \pi)$，則共有 p 個相異的 α。</p>	<p>圖 28：判斷 α</p> <p>考慮曲線在 $(0, 0)$ 切線的斜角，可以取 α 為 0 及 $\frac{\pi}{2}$。</p>

* 本研究之作品說明書及海報的圖表皆由本研究作者團隊自行繪製

研究結論

- 一、將圖形分為不包含 $y = 0$ 的第一類 n 倍等角差線及包含 $y = 0$ 的第二類 n 倍等角差線，且兩類分別具有一些特別情形。
- 二、求得 n 倍等角差線的漸近線方程式，並得出輻射點為兩旋轉中心 $n:1$ 之分點。
- 三、求得 n 為整數及有理數時的漸近線數量；得出當 n 為無理數時， n 倍等角差線有無限多條漸近線。
- 四、證明無論 n 值為何， n 倍等角差線均無法佈滿坐標平面；證明當 n 為無理數時， n 倍等角差線在坐標平面上稠密。
- 五、求得 n 倍等角差線經旋轉、鏡射、反演後之圖形與原圖形之間起始角與轉速的關係。
- 六、求得 n 倍等角差線的封閉圈數及分割區域數。
- 七、當 n 為有理數時，利用 n 倍等角差線的性質，構造由圖形逆推 n 、 l 、 α 的方法。

參考文獻

- [1] 李永約。(2021 年 12 月)。等角差線—漸近線及其性質。數學傳播, 45 卷(4 期), pp.34-42。
- [2] 鍾文體。(2022 年 3 月)。等角差線實為雙曲線。數學傳播, 46 卷(1 期), pp.84-87。
- [3] 張鎮華。(2022 年 9 月)。再談等角差線—兼談 108 數學課綱之圓錐曲線教學。數學傳播 46 卷 3 期, pp.38-48。
- [4] 李永約。(2023 年 6 月)。等角差線定義修正與 n 倍等角差線(nE.D.L.)猜想。數學傳播 47 卷 2 期, pp. 65-76。
- [5] 宋秉信。(1998 年 9 月)。從尤拉公式到空間的平面分割。數學傳播, 22 卷(3 期), pp.54-60。
- [6] Wikipedia contributors. (2024, May 10). Dirichlet's approximation theorem. In Wikipedia, from https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet%27s_approximation_theorem