中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050408

對應編號入坐的圓桌錯位問題之研究

學校名稱：國立屏東高級中學

作者：	指導老師：
高二 許楷侑	張宮明

關鍵詞：圓桌問題、坐法、次序數

摘要

會議室圓桌上有n個座位，順時針依序放有號碼 1、2、3、⋯、n，共n張名牌。參加這場議會的人都有自己的編號，依序為 1、2、3、⋯、n，假設編號 1 的人一定先進入並坐到號碼 2 的位子，剩下的人則為亂序進入，先找到自己名牌的位子，如果自己的位子是空的，就直接坐下，如果位子被佔了，則順時針或逆時針找最近的空位入坐，若順時針與逆時針最近的空位距離相等，則順時針入坐(例如編號 2 到達時，發現自己的位子被坐，順時針距離最近的空位是號碼 3，逆時針距離最近的位子是號碼 1，則編號 2 坐到號碼 3)。等到前一個人坐下後，下一個人再進入會議室。

依此規則，探討其坐法循環規律、坐法分布、坐法總數，並找出有幾種入座順序對應相同的坐法，以及坐錯位子人數的期望值。

壹、前言

一、研究動機

我在台灣 2018 國際科學展覽會，發現有一篇名叫乾坤大挪移的科展作品(文獻[1])，這篇作品在討論一個關於圓桌的問題如下：有 12 位教授在一個圓桌上舉行會議，其中每位教授都有自己的編號（1～12 號），此時圓桌的 12 個位子也各自有依順時針擺放的編號（1～12 號）與教授的編號對應，其中第一個進來的 1 號教授因精神不濟，坐到圓桌上 2 號教授的位子，之後的教授們亂序進入，若發現自己的位子是空的，就直接坐下；若發現自己的位子被佔了，就順時針尋找空位，直到有空位才坐下，剩下的十一位教授進來的入座順序很多，但最多有幾種不同的坐法？

有人利用遞迴關係解出答案為 1024，其作法如下:

令n人時，最後會有a_n不同的坐法，則12人時，最後會有a_{12}不同的坐法。

以下考慮兩種情況:

情況1: 1 號進來後，2 號接著進來，因為 2 號位子被佔了，因此坐在 3 號位子，此時剩下$3 \sim n$號坐剩下的位子，這最後有a_{n-1}種不同坐法。

情況2: 1 號進來後，k號接著進來$(3 \leq k \leq n)$，因為自己的位子空著，因此坐在k號位子，此時可將k號去除，變成$n-1$人坐圓桌，這最後也有a_{n-1}種不同坐法。

由上，得$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1}$，又因為$a_2 = 1$，故$a_{12} = 2^{10} = 1024$。

但文獻[1]作者針對此問題的各個面向去做進一步的延伸:

(一) 是不是隨便寫出一種坐法，就存在一組相對應的入坐的次序?

(二) 給定一組教授進入的次序，能否立刻找出相應的坐法?

(三) 到底有幾種進入的次序，都會變成同一種坐法?

(四) 找出每位教授坐錯位子的機率、恰有k人坐錯位子的機率，及計算出坐錯位子人數的期望值。

文獻[1]的作者在展望提出，當自己的位子被坐時，則順時針或逆時針找最近的位子入坐，該問題還未解決，因此我朝著這方面去研究，期望能發現更多有趣

的現象與公式。

二、研究目的

(一)研究n人入座的圓桌問題，規則為當自己的位子被坐時，則順時針或逆時針找最近的位子入坐，若順時針與逆時針最近的位子距離相等，則順時針入坐。探討最後的坐法規律、坐法分布、坐法總數，與文獻[1](只能順時針入坐)的圓桌問題有何不同?

(二) 研究次序數的遞迴關係、次序數公式，與文獻[1]的圓桌問題有何不同?

(三)研究n位教授，恰有k人坐錯位子的機率，以及計算出坐錯位子人數的期望值。

三、文獻回顧

引用文獻[1]的定義如下:

定義1 : 1-a_2-a_3- ⋯-a_n表示n位教授，入座順序為 1、a_2、a_3、⋯、a_n，稱為次序。

定義2 : $_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$表示共有$n$位教授，最後坐法為 1 號坐到 2 號位，2 號坐到a_1位，a_1坐到a_2位，⋯，a_k坐到 1 號位的循環，其他人均坐在自己號碼的位子，稱為坐法。

定義3 : $\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$表示$n$位教授，有多少種次序對應的坐法皆為 $_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$，稱為次序數。

定義4: $E(X)$表示坐錯人數的期望值，隨機變數X表示n人入坐時坐錯的人數。

已知文獻[1]的結果有下列 6 項:

1 : 每種坐法的循環恰為數列 1,2, ⋯,n以 1,2 開頭的子數列。最後會有2^{n-2}種坐法。

2 : $\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_n(1,2,3,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ ($a_1\neq 3$) (對稱性)

3 : 設集合S={3,4, ⋯,n}，A={$a_1,a_2,\cdots,a_k$}為S的子集(集合S,A的元素必須由小排到大)，則$\#_n(1,2,A)\cdot\#_n(1,2,S\text{-}A)=(n-2)!$ (互補性)

4 : 當$a_k=n$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

當$a_k\neq n$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1},a_k)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1})$

$5:\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$

$6:H_n=\frac{1}{n!}[2\cdot\sigma_{n-1}+3\cdot\sigma_{n-2}+\cdots+n\cdot\sigma_1+(n+1)\cdot\sigma_0]-1$

(σ_i代表在 $1\sim n-1$取i個數的乘積和)

我想研究新的入座規則產生的結果與文獻[1]的結果有何差異?

貳、研究方法與推論

一、暴力窮舉法

開始我先重新定義入座的規則，有n位教授，1 號教授坐到圓桌上 2 號位子，當自己的位子被坐時，則順時針或逆時針找距離最近的位子入坐，若順時針最近的位子與逆時針最近的位子距離相等，則找順時針距離最近的位子入坐。例如 2 號教授發現自己的位子被坐，順時針距離最近的位子是 3 號，逆時針距離最近的位子是 1 號，則 2 號教授坐到 3 號。

由於剛開始我沒有頭緒，決定先利用窮舉法將n人入座的圓桌問題中人數較少(n =2,3,4,5,6)的情形，所有次序與其對應的坐法，還有每種坐法的次序數給全部列舉出來。

(一)兩個人

入座次序	1-2
對應坐法	$_2(1,2)$
次序數	$\#_2(1,2)=1$

(二)三個人

1-2-3	1-3-2
$_3(1,2,3)$	$_3(1,2)$
$\#_3(1,2,3)=1$	$\#_3(1,2)=1$

(三)四個人

1-2-3-4	1-2-4-3、1-4-2-3	1-3-2-4、1-3-4-2、1-4-3-2
${}_4(1,2,3,4)$	${}_4(1,2,3)$	${}_4(1,2)$
$\#_4(1,2,3,4)=1$	$\#_4(1,2,3)=2$	$\#_4(1,2)=3$

(四)五個人

1-2-3-4-5	1-2-4-3-5、1-4-2-3-5	1-2-3-5-4、1-2-5-3-4、1-5-2-3-4
${}_5(1,2,3,4,5)$	${}_5(1,2,3,5)$	${}_5(1,2,3,4)$
$\#_5(1,2,3,4,5)=1$	$\#_5(1,2,3,5)=2$	$\#_5(1,2,3,4)=3$

1-2-4-5-3、1-2-5-4-3、1-4-2-5-3、1-4-5-2-3、1-5-2-4-3、1-5-4-2-3
${}_5(1,2,3)$
$\#_5(1,2,3)=6$

1-3-2-4-5、1-3-2-5-4、1-3-4-2-5、1-3-4-5-2、1-3-5-2-4、1-3-5-4-2、 1-4-3-2-5、1-4-3-5-2、1-4-5-3-2、1-5-3-2-4、1-5-3-4-2、1-5-4-3-2
${}_5(1,2)$
$\#_5(1,2)=12$

(五)六個人

1-2-3-4-5-6	1-2-4-3-5-6、1-4-2-3-5-6	1-2-3-5-4-6、1-2-5-3-4-6、1-5-2-3-4-6
${}_6(1,2,3,4,5,6)$	${}_6(1,2,3,5,6)$	${}_6(1,2,3,4,6)$
$\#_6(1,2,3,4,5,6)=1$	$\#_6(1,2,3,5,6)=2$	$\#_6(1,2,3,4,6)=3$

1-2-4-3-6-5、1-2-3-6-4-5、1-2-6-3-4-5、1-6-2-3-4-5	1-2-4-3-6-5、1-2-4-6-3-5、1-2-6-4-3-5、1-4-2-3-6-5、1-4-2-6-3-5、1-4-6-2-3-5、1-6-2-4-3-5、1-6-4-2-3-5
$_{6}(1,2,3,4,5)$	$_{6}(1,2,3,5)$
$\#_{6}(1,2,3,4,5)=4$	$\#_{6}(1,2,3,5)=8$

1-2-3-5-6-4、1-2-3-6-5-4、1-2-5-3-6-4、1-2-5-6-3-4、1-2-6-3-5-4、1-2-6-5-3-4、1-5-2-3-6-4、1-5-2-6-3-4、1-5-6-2-3-4、1-6-2-3-5-4、1-6-2-5-3-4、1-6-5-2-3-4
$_{6}(1,2,3,4)$
$\#_{6}(1,2,3,4)=12$

1-2-4-5-3-6、1-2-4-5-6-3、1-2-4-6-5-3、1-2-5-4-3-6、1-2-5-4-6-3、1-2-5-6-4-3、1-2-6-4-5-3、1-2-6-5-4-3、1-4-2-5-3-6、1-4-2-5-6-3、1-4-2-6-5-3、1-4-5-2-3-6、1-4-5-2-6-3、1-4-5-6-2-3、1-4-6-2-5-3、1-4-6-5-2-3、1-5-2-4-3-6、1-5-2-4-6-3、1-5-2-6-4-3、1-5-4-2-3-6、1-5-4-2-6-3、1-5-4-6-2-3、1-5-6-2-4-3、1-5-6-4-2-3、1-6-2-4-5-3、1-6-2-5-4-3、1-6-4-2-5-3、1-6-4-5-2-3、1-6-5-2-4-3、1-6-5-4-2-3
$_{6}(1,2,3)$
$\#_{6}(1,2,3)=30$

1-3-2-4-5-6、1-3-2-4-6-5、1-3-2-5-4-6、1-3-2-5-6-4、1-3-2-6-4-5、1-3-2-6-5-4、1-3-4-2-5-6、1-3-4-2-6-5、1-3-4-5-2-6、1-3-4-5-6-2、1-3-4-6-2-5、1-3-4-6-5-2、1-3-5-2-4-6、1-3-5-2-6-4、1-3-5-4-2-6、1-3-5-4-6-2、1-3-5-6-2-4、1-3-5-6-4-2、1-3-6-2-4-5、1-3-6-2-5-4、1-3-6-4-2-5、1-3-6-4-5-2、1-3-6-5-2-4、1-3-6-5-4-2、1-4-3-2-5-6、1-4-3-2-6-5、1-4-3-5-2-6、1-4-3-5-6-2、1-4-3-6-2-5、1-4-3-6-5-2、1-4-5-3-2-6、1-4-5-3-6-2、1-4-5-6-3-2、1-4-6-3-2-5、1-4-6-3-5-2、1-4-6-5-3-2、1-5-3-2-4-6、1-5-3-2-6-4、1-5-3-4-2-6、1-5-3-4-6-2、1-5-3-6-2-4、1-5-3-6-4-2、1-5-4-3-2-6、1-5-4-3-6-2、1-5-4-6-3-2、1-5-6-3-2-4、1-5-6-3-4-2、1-5-6-4-3-2、1-6-3-2-4-5、1-6-3-2-5-4、1-6-3-4-2-5、1-6-3-4-5-2、1-6-3-5-2-4、1-6-3-5-4-2、1-6-4-3-2-5、1-6-4-3-5-2、1-6-4-5-3-2、1-6-5-3-2-4、1-6-5-3-4-2、1-6-5-4-3-2
$_{6}(1,2)$
$\#_{6}(1,2)=60$

二、列舉後的發現及證明

列舉的過程與結果中，發現n人入座的圓桌問題(可順可逆) 的一些定理跟文獻[1]n人入座的圓桌問題(只能順時針入坐)相同，也會產生許多跟文獻[1]相異的定理，以下一一提出並證明之。為方便起見，以下所說n人入座的圓桌問題，皆是當自己的位子被坐時，則順時針或逆時針找距離最近的位子入坐，若順時針最近的位子與逆時針最近的位子距離相等，則找順時針距離最近的位子入坐。

【定理 1】 坐法僅會產生一個循環。換言之，不可能產生$(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_m)$ $(b_1,b_2,\cdots,b_k)$兩個循環。

【證明】

利用反證法證明之，設某個次序P對應的坐法有兩個循環，令為$(1,2,a_1,a_2,$ $\cdots,a_m)$ $(b_1,b_2,\cdots,b_k)$ ，一開始，因為 1 號會坐到 2 號位，所必定會有一個以 1,2 開頭的循環。

由於b_1坐到了b_2的位置，這表示b_1比b_2先入坐，否則若b_2會比b_1先入坐，b_2會先尋找自己的位子，當發現位子被坐了，才會順時針或逆時針尋找最近的空位坐下，這將造成在b_1進來前b_2位早被自己或其他人坐了，後來進來的b_1就不可能坐到b_2位。同理，由於b_2坐到了b_3位，所以b_2比b_3先入坐，依此類推，b_{k-1}會比b_k先入坐，但最後因為b_k坐到了b_1位，因此b_k又比b_1先入坐，矛盾。 □

在證明定理 2 之前，設$d(a_1,a_2)$ 表示 a_1 坐到 a_2 的最近距離，定義$d(a_1,a_2)$滿足$1 \leq d(a_1,a_2) \leq \mathrm{n}-1$，且$d(a_1,a_2) \equiv a_1 - a_2 \ (mod\ n)$。

【定理 2】n人入座的圓桌問題，坐法 $_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$必須滿足 1<2<$a_1$<$a_2$<$\cdots$<$a_k$ 。

【證明】

一開始，1 號會坐到 2 號， 2 號入坐時，找順時針最近的位子a_1或逆時針最近的位子 1 號坐下，若$d(2,1) < d(2,a_1)$，則 2 號會坐到 1 號，就結束這次循環

(因為剩下的人都找的到自己的座位)，產生坐法$_n$(1,2)；若$d(2,1) \geq d(2, a_1)$，2 號會坐到a_1，此時 2 號到a_1皆有人坐，因為若 2 號到a_1有空位，2 號會坐到此空位，產生矛盾，接著當a_1入坐時，找順時針最近的位子a_2或逆時針最近的位子 1 號坐下，以此類推。由此可以發現到找逆時針最近的位子時皆為 1 號，由文獻[1]的結果可得，若這次循環皆為順時針入坐時，滿足 1<2<a_1<a_2< ⋯<a_k；若這次循環a_i 出現逆時針入坐時，可視為a_i 順時針坐到 1 號，所以亦滿足 1<2<a_1<a_2< ⋯<a_k。 □

【定理 3】坐法$_n$(1, 2,a_1,a_2, ⋯,a_k)必須滿足$a_{i+1} < 2a_i$ 。($i \in \{1,2,\cdots, k-1\}$)

【證明】

坐法$_n$(1, 2,a_1,a_2, ⋯,a_k)，必須滿足$d(a_i, 1) \geq d(a_i, a_{i+1})$，否則

若$d(a_i, 1) < d(a_i, a_{i+1})$，由於$a_i$離 1 號較近，$a_i$就會逆時針坐到 1 號，產生坐法$_n$(1, 2,$a_1$,$a_2$, ⋯,$a_i$)，矛盾。

因為$a_{i+1} > a_i > 1$，故$d(a_i, 1) = a_i - 1$，$d(a_i, a_{i+1}) = a_{i+1} - a_i$，

$a_i - 1 \geq a_{i+1} - a_i$

$2a_i \geq a_{i+1} + 1$

$a_{i+1} \leq 2a_i - 1$

因為a_i,$a_{n+1} \in N$，所以$a_{i+1} \leq 2a_i - 1$可化成$a_{i+1} < 2a_i$。 □

由上述證明，我們發現到，不可能出現坐法$_n$(1,2,4, ⋯)，因為4不可能小於2×2，由此可得以下文獻[1]的定理不成立:

$\#_n$(1,2,a_1,a_2, ⋯,a_k)= $\#_n$(1,2,3,a_1,a_2, ⋯,a_k) ($a_1 \neq 3$)

(對稱性，兩個不同的坐法其次序數相等)

但是文獻[1]的互補性在特定情況下會成立，例如$\#_6$(1,2,3,4,6)=3、$\#_6$(1,2,3,5)=8，$\#_6$(1,2,3,4,6)·$\#_6$(1,2,3,5)=(6-2)!=24，於此可得以下定理 4。

【定理 4】設集合S={4, ⋯,n}，A={a_1,a_2, ⋯,a_k}為S的子集(集合S, A的元素必須由

小排到大)，則集合S,A最大的的元素大於$\frac{n}{2}$時，

$\#_n(1,2,3,A)\cdot\#_n(1,2,3,S\text{-}A)=(n-2)!$。

【註】定理 4 的證明，待定理 7 次序數的公式出現後便不證自明。

在計算n人入座有幾種不同的坐法之前，我先舉兩個例子:

以六個人為例，可能出現坐法有$_6(1,2)$、$_6(1,2,3)$、$_6(1,2,3,4)$、$_6(1,2,3,5)$、$_6(1,2,3,4,5)$、$_6(1,2,3,4,6)$、$_6(1,2,3,5,6)$、$_6(1,2,3,4,5,6)$ ，坐法一共有$1+1+1+2+3=8$種。

以七個人為例，可能出現坐法有$_7(1,2)$、$_7(1,2,3)$、$_7(1,2,3,4)$、$_7(1,2,3,5)$、$_7(1,2,3,4,5)$、$_7(1,2,3,4,6)$、$_7(1,2,3,5,6)$、$_7(1,2,3,4,5,6)$ 、$_7(1,2,3,4,7)$、$_7(1,2,3,5,7)$、$_7(1,2,3,4,5,7)$、$_7(1,2,3,4,6,7)$、$_7(1,2,3,5,6,7)$、$_7(1,2,3,4,5,6,7)$，坐法一共有$1+1+1+2+3+6=14$種。

由上述舉例，可總結出以下結論:

n人圓桌問題的總坐法數，可分為(1)第n人坐到n號位，(2)第n人沒有坐到n號位，情況(1)為$n-1$人圓桌問題的總坐法數，情況(2)由定理 2 知為所有為$_n(1,\cdots,n)$ 的坐法數，也就是所有最後一項為n的坐法。

令φ_k為所有為$_n(1,\cdots,k)$ 的坐法數，也就是所有最後一項為k的坐法。

7 人圓桌問題的坐法共有$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5+\varphi_6+\varphi_7$種。觀察$_7(1,2,3,4,7)$、$_7(1,2,3,5,7)$、$_7(1,2,3,4,5,7)$、$_7(1,2,3,4,6,7)$、$_7(1,2,3,5,6,7)$、$_7(1,2,3,4,5,6,7)$，可以發現到$6=1+2+3$，即$\varphi_7=\varphi_4+\varphi_5+\varphi_6$。

可以發現到，φ_k似乎有某種遞迴關係。因此，我將上述結果整理成定理 5。

【定理 5】設$f(n)$為n人入座的圓桌問題總坐法數，則$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$。

【證明】

n人入座的圓桌問題總坐法數，可由最後一項分別為 1,2,3, ⋯, n 的坐法累加而得，即

$f(n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$

$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ □

【定理 5.1】k為奇數時，$\varphi_k = 2\varphi_{k-1}$

【定理 5.2】k為偶數時，$\varphi_k = 2\varphi_{k-1} - \varphi_{\frac{k}{2}}$ (4≤ $k \le n$)

在證明定理 5.1 和定理 5.2 之前，先證明以下引理 1。

【引理 1】在文獻[1]的規則中n人入座的圓桌問題，令α_k為所有為 $_n(1, \cdots, k)$ 的坐法數，則$\alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}$。

【引理 1 的證明】

最後一項為k的總坐法數為α_k，也可寫成以下的總坐法數相加，$_n(1, k)$的坐法數共有α_1種，$_n(1,2,k)$的坐法數共有α_2種，$_n(1,2,3,k)$坐法數共有α_3種，⋯，$_n(1,2, \cdots, k-1, k)$的坐法數為α_{k-1}種。

由上述可得，$\alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}$。

接著回到定理 5.1 和定理 5.2 的證明

【證明】

由本文的定理 3 知$a_{i+1} < 2a_i$ 時，不可能出現坐法 $_n(1,2,a_1,a_2, \cdots, a_i, 2a_i, \cdots, a_k)$。因此，$n$人入座的圓桌問題，分成兩種情況討論:

k為奇數時，令$k = 2t + 1$，由引理 1 可得$\alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}$，但由本文的定理 3 知，不可能出現坐法 $_n(1, 2t+1)$、$_n(1,2, 2t+1)$、⋯、$_n(1,2, \cdots, t, 2t+1)$。

可得$\varphi_{2t+1} = \varphi_{t+1} + \varphi_{t+2} + \cdots + \varphi_{2t}$

k為偶數時，令$k = 2t$，由引理 1 可得，$\alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1}$，但由本文的

定理 3 知，不可能出現坐法 ${}_n(1\ ,2t)$、 ${}_n(1,2\ ,2t)$、⋯、 ${}_n(1,2,\cdots,t,2t)$ 。

可得$\varphi_{2t}=\varphi_{t+1}+\varphi_{t+2}+\cdots+\varphi_{2t-1}$ 。

可以發現到$\varphi_{2t+1}=\varphi_{t+1}+\varphi_{t+2}+\cdots+\varphi_{2t-1}+\ \varphi_{2t}$

$$=\ \varphi_{2t}+\ \varphi_{2t}$$

$$=2\varphi_{2t}$$

$$\varphi_{2t}=\varphi_{t+1}+\varphi_{t+2}+\cdots+\varphi_{2t-1}$$

$$=(\varphi_t+\varphi_{t+1}+\cdots+\varphi_{2t-1})-\varphi_t$$

$$=2\varphi_{2t-1}-\varphi_t$$

所以φ_k的遞迴關係可整理成

k為奇數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}$

k為偶數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}-\varphi_{\frac{k}{2}}$ □

上述定理 5，明顯與文獻[1]的結果不同，我們對定理 5 的$f(n)$與φ_k取 n 從 1 到 11 及 k 從 1 到 11 的值如下列表一與表二。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	1	2	3	5	8	14	25	47	89	173	338

表一：在$1\le n\le 12$， $f(n)$的數值。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ_k	0	1	1	1	2	3	6	11	22	42	84	165

表二：在$1\le k\le 12$，φ_k的數值。

我在 OEIS 數列搜尋網站找到相同的數列 A062178 及 A002083，並循參考文獻找到文獻[2]與文獻[3]，其中文獻[2]提出 Narayana-Zidek-Capell sequence(A002083)，給出n人淘汰賽(knock-out tournaments)的方法數T_n，恰滿足$\varphi_k=T_{k-1}$，且由我的定理 5.1 與定理 5.2 可推得$\varphi_k\le\varphi_i\cdot 2^{k-i}(k\ge i)$，並由表二可知

$\varphi_{12}=165$，可得$\varphi_k\le\varphi_{12}\cdot 2^{k-12}$，即$\varphi_k\le\frac{165}{256}\cdot 2^{k-4}$，故得定理 5.3。

【定理 5.3】$\varphi_k\le\frac{165}{256}\cdot 2^{k-4}$，$k\ge 12$。

接下來的研究，我要利用文獻[1]中n人入座的圓桌問題的次序數公式，來嘗試找出n人時所有坐法的次序數。最終，我得到了在可順可逆的n人圓桌問題下，在不同情況，次序數公式會有所不同，我將在下一段的討論中揭曉。

三、次序數公式的發現

關於次序數的算法，我發現坐法$_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)$，在 $a_k > \frac{n}{2}$ 和 $a_k \le \frac{n}{2}$ 時，次序數分別有不同的遞迴關係，利用次序數的遞迴關係，可以得出在$a_k > \frac{n}{2}$時與$a_k \le \frac{n}{2}$時的次序數公式。

【定理 6】設$n \ge 3$，$a_k \le n-1$，則:

當$a_k > \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k) = (n-2) \cdot \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

$$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n) = \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$$

當$a_k \le \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k) = (n-1) \cdot \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

【證明】

設$n-1$人時，次序 1-b_2-b_3- ⋯-b_{n-2}-a_k對應的坐法為$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$，當人數增為n人時，新加入的編號n，在次序 1-b_2-b_3- ⋯-b_{n-1}-a_k中，共有$n-1$個空隙可以插入。

當$n < 2a_k$時，其中只有 1 個空隙會讓他進入到坐法的循環中，其它$n-2$個空隙皆會使編號n的人坐到編號n的位置，不會改變坐法，如下表所示:

n人時的次序	n人時對應的坐法
1-n-b_2-b_3- ⋯-b_{n-2}-a_k 1-b_2-n-b_3- ⋯-b_{n-2}-a_k 1-b_2-b_3-n- ⋯-b_{n-2}-a_k ⋮ 1-b_2-b_3- ⋯-b_{n-2}- n -a_k (共$n-2$個)	$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$
1-b_2-b_3- ⋯-b_{n-2}-a_k-n	$(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)$

所以坐法$_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$的其中一種次序，當人數增為$n$人，其餘維持不變時，其對應的次序會變為$(n-2)$種，即

$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。

同理，坐法$_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$的其中一種次序，當人數增為$n$人，在其次序最後加上$n$時，其對應的次序會變為 1 種，即

$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

當$n\ \geq\ 2a_k$時，$n-1$個空隙皆會使編號n的人坐到編號n的位置，不會改變坐法，如下表所示:

n人時的次序	n人時對應的坐法
1-n-b_2-b_3-⋯-b_{n-2}-a_k 1-b_2-n-b_3-⋯-b_{n-2}-a_k 1-b_2-b_3-n-⋯-b_{n-2}-a_k ⋮ 1-b_2-b_3-⋯-b_{n-2}- a_k-n (共$n-1$個)	$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

所以坐法 $_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$的其中一種次序，當人數增為$n$人，其餘維持不變時，其對應的次序會變為$(n-1)$種，即

$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-1)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。 □

在進入證明次序數公式之前，先舉兩個例子利用定理 6 的公式來計算次序數:

在 12 人的圓桌問題，坐法為 $_{12}(1,2,3,5,6,9)$。$(a_k>\frac{n}{2})$

$$
\begin{aligned}
\#_{12}(1,2,3,5,6,9) &= (12-2)\cdot\#_{11}(1,2,3,5,6,9)\\
&= (12-2)(11-2)\cdot\#_{10}(1,2,3,5,6,9)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)\cdot\#_{9}(1,2,3,5,6,9)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)\cdot\#_{8}(1,2,3,5,6)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)\cdot\#_{7}(1,2,3,5,6)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)(7-2)\cdot\#_{6}(1,2,3,5,6)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)(7-2)\cdot\#_{5}(1,2,3,5)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)(7-2)\cdot\#_{4}(1,2,3)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)(7-2)(4-2)\cdot\#_{3}(1,2,3)\\
&= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)(7-2)(4-2)\cdot\#_{2}(1,2)
\end{aligned}
$$

此時的$\#_2(1,2)$顯然是 1，於是

$$
\begin{aligned}
\#_{12}(1,2,3,5,6,9) &= (12-2)(11-2)(10-2)(8-2)(7-2)(4-2)\\
&= 10\cdot9\cdot8\cdot6\cdot5\cdot2=43200
\end{aligned}
$$
。

注意到$a_k > \frac{n}{2}$次序數的計算，其實就是不在此坐法循環中的數減2相乘。

在 12 人的圓桌問題，坐法為 $_{12}(1,2,3,5)$。($a_k < \frac{n}{2}$)

$$\begin{aligned}
\#_{12}(1,2,3,5) &= (12-1)\cdot \#_{11}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)\cdot \#_{10}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)\cdot \#_{9}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)\cdot \#_{8}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)\cdot \#_{7}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)(7-2)\cdot \#_{6}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)(7-2)(6-2)\cdot \#_{5}(1,2,3,5) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)(7-2)(6-2)\cdot \#_{4}(1,2,3) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)(7-2)(6-2)(4-2)\cdot \#_{3}(1,2,3) \\
&= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)(7-2)(6-2)(4-2)\cdot \#_{2}(1,2)
\end{aligned}$$

此時的$\#_2(1,2)$顯然是 1，於是

$$\begin{aligned}
\#_{12}(1,2,3,5) &= (12-1)(11-1)(10-1)(9-2)(8-2)(7-2)(6-2)(4-2) \\
&= 11\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2 = 1663200
\end{aligned}$$
。

注意到$a_k \le \frac{n}{2}$次序數的計算，其實就是小於等於$2a_k - 1$且不在此坐法循環中的數減2，與大於$2a_k - 1$的數減1相乘。

由於 $\#_9(1,2,3,5)=(9-2)(8-2)(7-2)(6-2)(4-2)$，所以 $\#_{12}(1,2,3,5)$ 也可以寫成

$$\begin{aligned}
\#_{12}(1,2,3,5) &= (12-1)(11-1)(10-1)\times \#_9(1,2,3,5) \\
&= \frac{(12-1)!}{(10-1)!} \times \#_9(1,2,3,5)
\end{aligned}$$

接下來，將上述兩個例子，做一般化推廣得下列定理 7。

【定理 7】當$a_k > \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$ (1)

當$a_k \le \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \frac{(n-1)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)(2a_k-2)}$ (2)

【證明】

設S={3,4, ⋯,n}，A={a_1,a_2, ⋯,a_k}

當$a_k > \frac{n}{2}$時，則:

$$
\begin{aligned}
\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) &= \prod_{i\in S-A}(i-2) \\
&= \frac{\prod_{i\in S-A}(i-2)\times\prod_{i\in A}(i-2)}{\prod_{i\in A}(i-2)} \\
&= \frac{\prod_{i\in S}(i-2)}{\prod_{i\in A}(i-2)} \\
&= \frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}
\end{aligned}
$$

當$a_k \le \frac{n}{2}$時，則:

$$
\begin{aligned}
\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) &= \#_{2a_k-1}(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)\times\frac{(n-1)!}{(2a_k-1-1)!} \\
&= \frac{(2a_k-1-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}\times\frac{(n-1)!}{(2a_k-2)!} \\
&= \frac{(2a_k-3)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}\times\frac{(n-1)!}{(2a_k-2)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)(2a_k-2)}
\end{aligned}
$$

□

四、坐錯位子人數的期望值

在計算坐錯位子人數的期望值之前，先假設每種入坐次序的機率相等的情況下，坐錯位子人數的期望值為$E(X)$。令$f(n,k)$代表n人的圓桌問題，坐錯k人的總入座次序數。

【定理 8】

$$
E(X)=\sum_{k=2}^{n} k\cdot\frac{\sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\le n}\frac{1}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)}+\sum_{3\le j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\le\frac{n}{2}}\frac{(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{n-1}
$$

【證明】

考慮n人的圓桌問題，設隨機變數X表示坐錯位子的人數，

令$3 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-2} \leq n$，$3 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-2} \leq \frac{n}{2}$，則

$f(n,k)$可由所有坐錯k人的坐法$_n(1,2,i_1,i_2,\cdots,i_{k-2})$(公式(1))，減去所有最後一項$j_{k-2} \leq \frac{n}{2}$的坐錯$k$人的坐法$_n(1,2,j_1,j_2,\cdots,j_{k-2})$(公式(1))，加上所有最後一項$j_{k-2} \leq \frac{n}{2}$的坐錯$k$人的坐法$_n(1,2,j_1,j_2,\cdots,j_{k-2})$(公式(2))。得

$$f(n,k)$$
$$= \sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{(n-2)!}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} - \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \frac{(n-2)!}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)}$$
$$+ \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \#_n(1,2,j_1,j_2,\cdots,j_{k-2})$$
$$= \sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{(n-2)!}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \left[\frac{(n-1)}{(2j_{k-2}-2)} - 1\right]$$
$$\times \frac{(n-2)!}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)}$$
$$= \sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{(n-2)!}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)}$$
$$+ \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \frac{(n-2)!(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}$$

$$P(X=k)$$
$$= \frac{f(n,k)}{(n-1)!}$$
$$= \frac{\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{(n-2)!}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \frac{(n-2)!(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{(n-1)!}$$
$$= \frac{\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{1}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \frac{(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{n-1}$$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot P(X=k)$$
$$= \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{f(n,k)}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{1}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq\frac{n}{2}} \frac{(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{n-1}$$

參、研究成果

n人入座的圓桌問題，第一個進來的為編號1，並且坐到編號2的位子，當自己的位子被坐時，則順時針或逆時針找距離最近的位子入坐，若順時針最近的位子與逆時針最近的位子距離相等，則找順時針距離最近的位子入坐。我計算出坐法分布與規律、坐法總數與對應的次序數、坐錯位子人數的期望值，以下將前段研究的結果做個簡單的總整理

<table>
<tr><td rowspan="4">坐
法
部
分</td><td>每種坐法的循環恰為數列 1,2, ⋯,n以 1,2 開頭的子數列。</td></tr>
<tr><td>坐法 $_n(1, 2,a_1,a_2, \cdots,a_k)$必須滿足$a_{i+1} <2a_i$ 。($i \in \{1,2,\cdots, k-1\}$)</td></tr>
<tr><td>設集合S={4, ⋯,n}，A={$a_1,a_2, \cdots,a_k$}為S的子集(集合S, A的元素必須由小排到大)，則集合S, A最大的的元素大於 $\frac{n}{2}$時，
$\#_n(1,2,3,A)\cdot \#_n(1,2,3,S\text{-}A)=(n-2)!$。</td></tr>
<tr><td>設$f(n)$為n人入座的圓桌問題總坐法數，則$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$
φ_k為所有為 $_n(1, \cdots,k)$ 的坐法數，$\varphi_1=0$、$\varphi_2=1$、$\varphi_3=1$
k為奇數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}$ ，k為偶數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}-\varphi_{\frac{k}{2}}$ ($4\leq k\leq n$)
$\varphi_k \leq \frac{165}{256}\cdot 2^{k-4}(k\geq 12)$</td></tr>
</table>

次序數與期望值部分	當$a_k > \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k) = (n-2)\cdot \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$ $\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n) = \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$
	當$a_k \leq \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k) = (n-1)\cdot \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$
	當$a_k > \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$
	當$a_k \leq \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \frac{(n-1)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)(2a_k-2)}$
	$E(X) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{\sum_{3\leq i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\leq n} \frac{1}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\leq j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{n-1}$

肆、結論與應用

一、本研究是關於n人入座的圓桌問題(可順時針或逆時針入坐，若順時針與逆時針最近的位子距離相等，則順時針入坐)的探討。透過觀察與討論，得出坐法循環規律、坐法分布、坐法總數。

二、我觀察到次序數的遞迴關係，會因為坐法循環的最後一項有所不同，並給出本研究最簡潔且優美的公式:

當$a_k > \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$

當$a_k \leq \frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \frac{(n-1)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)(2a_k-2)}$

最後，我利用隨機變數X來計算出坐錯位子人數的期望值。

三、未來展望

(一)n人入座的圓桌問題(可順時針或逆時針入坐，若順時針與逆時針最近

的位子距離相等，則順時針入坐)，1 號教授坐到k號位$(3 \leq k \leq n)$，探討其坐法循環規律、坐法分布、坐法總數、次序數遞迴關係、次序數公式、錯位數期望值。

伍、參考文獻

[1] 張志傑、温顥然(2018)。乾坤大挪移。2018 年臺灣國際科學展覽會。

[2] P. Capell and T. V. Narayana, On knock-out tournaments, *Canad. Math. Bull.*, 13 (1970), 105-109. MR 0264997

[3] Nathaniel D. Emerson, A Family of Meta-Fibonacci Sequences Defined by Variable-Order Recursions, Journal of Integer Sequences, Vol. 9 (2006).

【評語】050408

本作品接繼文獻[1]，探討的題目：考慮有 n 人（編號分別為 1 到 n）要入座到圓桌上他們對應的 n 個坐位（編號順時針依序為 1 到 n），1 號先入座，不慎坐到 2 號位，後面亂序進入的人，則由其編號對應的坐位起順時針坐到第一個空位，問共有幾種可能的坐法。文獻上已完整的給出解答為 2 的冪次，本作品則是修改入座規則，要求入座者坐入離自己的編號最近的空位。但由於規則的修改導致題目結構被破壞，使得方法數只能以遞迴式表示。作品其餘的部分，如計算有多少不同的入桌次序可以導致同一坐法，或是坐錯位子人數的期望值，其計算過程是類似於文獻的手法，作者沒有進一步詮釋或觀察所得之期望值。整體而言，作者給出完整的結果並敘述結果和文獻[1]的差異處，作者討論的問題和作法多數參考文獻[1]，原創性可再改善。

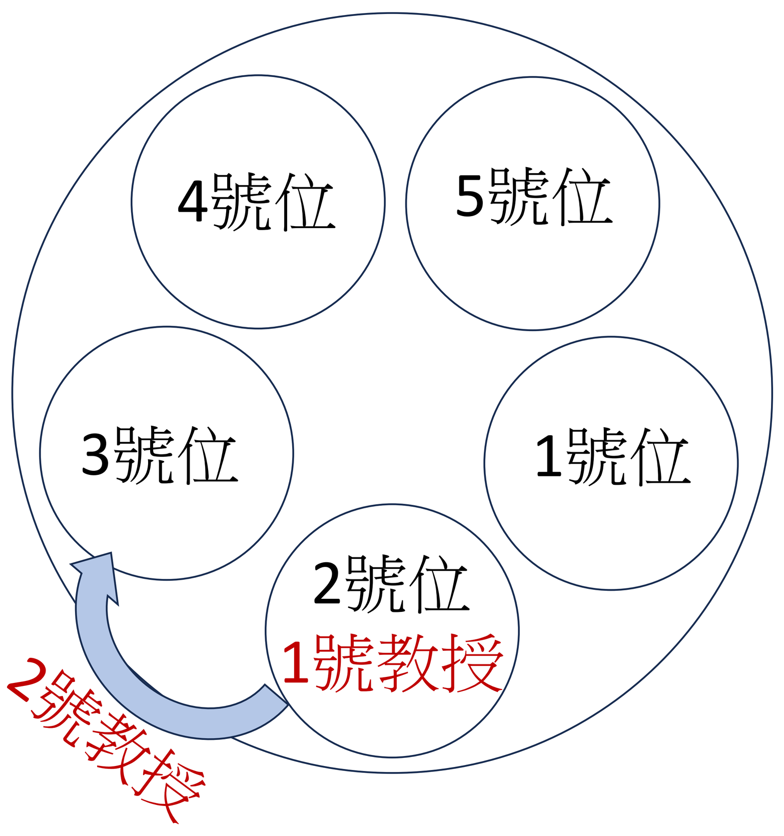
作品簡報

對應編號入坐的圓桌
錯位問題之研究

壹、前言

一、研究動機

我發現一篇名叫《乾坤大挪移》的科展作品，在探討 n 位教授在圓桌舉行會議，其中每位教授都有自己的編號（1～ n 號），圓桌的n個位子也各自有依順時針擺放的編號（1～ n號）與教授們的編號對應。第一個進來的 1 號教授坐到圓桌上2號教授的位子，之後的教授們亂序進入，若發現與自己編號相同的位子是空的，就直接坐下；反之，當位子被坐則順時針找最近的空位入坐。文獻[1]的作者在展望提出還未解決的問題，當自己位子被坐時，順時針或逆時針找最近的位子入坐，順時針與逆時針最近的位子距離相等時，則順時針入坐。因此，我期望能從這方面加以研究，找到更多的研究成果。



圖一:2號教授發現自己的位子被坐，順時針和逆時針距離最近的空位分別是3號位與1號位，則2號教授順時針坐到3號位。

二、研究目的

(一)研究n人入座的圓桌問題，探討最後的坐法規律、坐法分布、坐法總數，與文獻[1]圓桌問題有何不同?

(二)研究次序數的遞迴關係、次序數公式，與文獻[1]的圓桌問題有何不同?

(三)研究n位教授，恰有k人坐錯位子的機率，以及計算出坐錯位子人數的期望值。

三、文獻回顧

- 定義1 : $1\text{–}a_2\text{–}a_3\text{–}\cdots\text{–}a_n$表示$n$位教授，入座順序為1、 a_2、a_3、⋯、a_n，稱為次序。其中$a_i \in \{2,3,\cdots n\}$
- 定義2 : ${}_n(1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$表示共有$n$位教授，最後坐法為1號坐到2號位，2號坐到$a_1$位，$a_1$坐到$a_2$位，，$a_k$坐到1號位的循環，其他人均坐在自己號碼的位子，稱為坐法。
- 定義3 : $\#_n(1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$表示$n$位教授，有多少種次序對應的坐法皆為 ${}_n(1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ ，稱為次序數。
- 定義4 : E(X)表示坐錯人數的期望值，隨機變數X表示n人入坐時坐錯的人數。
- 文獻[1] : 作者張志傑、温顥然探討在順時針入坐條件下得到以下結果。

  1、每種坐法循環恰為數列1,2, ⋯, n以1,2開頭的子數列，最後會有2^{n-2}種坐法。

  2、 $\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)= \#_n(1,2,3,a_1,a_2,\cdots,a_k)$

  3、設集合$S=\{3,4,\cdots,n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$為S的子集(集合S, A的元素須由小排到大)，$\#_n(1,2,A)\cdot\#_n(1,2,S\text{-}A)=(n-2)!$

  4、當$a_k = n$ 時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k) = (n\text{-}2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$，當$a_k \neq n$時， $\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1},a_k) = \#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_{k-1})$

  5、$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \dfrac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$

四、名詞定義

- 設$d(a_1,a_2)$ 為 a_1 坐到 a_2 的最近距離，$d(a_1,a_2) \equiv a_1 - a_2 \pmod n$，且滿足$1 \le d(a_1,a_2) \le n-1$
- 設φ_k為所有為 ${}_n(1,\cdots,k)$ 的坐法數，也就是所有最後一項為k的坐法
- 設$f(n)$為n人入座的圓桌問題總坐法數

貳、研究方法與過程

一、研究目的(一)的探討

定理1 :坐法僅會產生一個循環 ${}_n(1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 。

證明: 一開始1號坐到2號位，某次序對應坐法$(1,2,a_3,\cdots,a_m)$ $(b_1,b_2,\cdots,b_k)$ 。由於b_1坐到了b_2號位，表示b_1比b_2先入坐，否則若b_2比b_1先入坐，b_2會先坐b_2位，若被坐了才找順時針或逆時針最近的空位坐下，導致b_2位早被坐了，b_1就不可能坐到b_2位。同理，b_{i-1}比b_i先入坐，但b_k最後坐到b_1位，因此b_k比b_1先入坐，矛盾。

定理2 : n人入座的圓桌問題，坐法 ${}_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)$必須滿足$1<2<a_1<a_2<\cdots<a_k$。

證明: 引用文獻[1]的定理2的結果。一開始1號坐到2號，2號入坐時，順時針或逆時針找最近的空位a_1或1號坐下，若2號逆時針坐到1號則結束循環；若順時針2號坐到a_1，因為2號到a_1皆有人坐，a_1入坐時也會找順時針或逆時針最近的空位a_2或1號坐下。依此類推，逆時針最近的空位皆為1號，若a_i皆為順時針入坐時，滿足$1<2<a_1<a_2<\cdots<a_k$；若a_i 逆時針入坐時，可視為a_i 順時針坐到1號，所以亦滿足$1<2<a_1<a_2<\cdots<a_k$。

定理3: 坐法 ${}_n(1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$必須滿足$a_{i+1} <2a_i$ 。$(i \in \{1,2,\cdots,k-1\})$

證明: 坐法 ${}_n(1,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 必須滿足$d(1,a_i) \ge d(a_{i+1},a_i)$，否則若$d(1,a_i) < d(a_{i+1},a_i)$，由於$a_i$離1號較近，$a_i$ 就會逆時針坐到1號，產生坐法 ${}_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_i)$，矛盾。 $d(1,a_i) \ge d(a_{i+1},a_i)$化簡得$a_{i+1} <2a_i$ 。

利用定理3，得出不可能出現坐法 $_n(1,2,4,\cdots)$，因為4不可能小於2×2，由此可得以下文獻[1]的定理不成立:

$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)=\#_n(1,2,3,a_1,a_2,\cdots,a_k)$ ($a_1\neq 3$)(對稱性)

定理4: 設集合$S=\{4,\cdots,n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$為S的子集(集合S,A的元素須由小排到大)，則當集合S,A最大的的元素大於 $\frac{n}{2}$ 時，$\#_n(1,2,3,A)\cdot\#_n(1,2,3,S\text{-}A)=(n-2)!$。

證明:由定理 7 次序數的公式(1)可得證。

定理5: 設$f(n)$為n人入座的圓桌問題總坐法數，則$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k$。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	0	1	2	3	5	8	14	25	47	89	173	338

表一：在$1\le n\le 12$，$f(n)$的數值。

證明: n人入座的圓桌問題總坐法數，可由最後一項分別為$1,2,3,\cdots,n$ 的坐法累加而得，故得證。 □

我在OEIS數列搜尋網站找到相同的數列A062178 及A002083，並循參考文獻找到文獻[2]與文獻[3]，其中文獻[2]提出Narayana-Zidek-Capell sequence(A002083)，給出n人淘汰賽(knock-out tournaments)的方法數T_n，恰滿足$\varphi_k=T_{k-1}$。

定理5.1: k為奇數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}$

定理5.2: k為偶數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}-\varphi_{\frac{k}{2}}(4\le k\le n)$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
φ_k	0	1	1	1	2	3	6	11	22	42	84	165

表二：在$1\le k\le 12$，φ_k的數值。

證明: 最後一項為k的總坐法數為φ_k，也可寫成以下的總坐法數相加，$_n(1,k)$的坐法數共有φ_1種，$_n(1,2,k)$的坐法數共有φ_2種，$_n(1,2,3,k)$坐法數共有φ_3種，⋯，$_n(1,2,\cdots,k-1,k)$坐法數共有φ_{k-1}種。由定理3可得k為奇數時，令$k=2t+1$，不可能出現坐法$_n(1,2t+1)$、$_n(1,2,2t+1)$、⋯、$_n(1,2,\cdots,t,2t+1)$。k為偶數時，令$k=2t$，不可能出現坐法$_n(1,2t)$、$_n(1,2,2t)$、⋯、$_n(1,2,\cdots,t,2t)$。得$\varphi_{2t+1}=\varphi_{t+1}+\varphi_{t+2}+\cdots+\varphi_{2t}$；$\varphi_{2t}=\varphi_{t+1}+\varphi_{t+2}+\cdots+\varphi_{2t-1}$。

$$\varphi_{2t+1}=\varphi_{t+1}+\varphi_{t+2}+\cdots+\varphi_{2t}=\varphi_{2t}+\varphi_{2t}=2\varphi_{2t}$$

可整理成，k為奇數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}$；k為偶數時，$\varphi_k=2\varphi_{k-1}-\varphi_{\frac{k}{2}}(4\le k\le n)$ □

定理5.3: $\varphi_k\le\frac{165}{256}\cdot 2^{k-4}$，$k\ge 12$

證明:定理5.1與定理5.2可推得$\varphi_k\le\varphi_i\cdot 2^{k-i}(k\ge i)$，$\varphi_{12}=165$，可得$\varphi_k\le\varphi_{12}\cdot 2^{k-12}$，即$\varphi_k\le\frac{165}{256}\cdot 2^{k-4}$，故得證。

二、研究目的(二)的探討

定理6: 設$n\ge 3$，$a_k\le n-1$，當$a_k>\frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

當$a_k\le\frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-1)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

證明: 設$n-1$人時，次序$1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$對應的坐法為$(1,2,a_1,\cdots,a_k)$。當人數增為$n$人時，新加入的編號$n$，在次序$1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-1}\text{-}a_k$中，共有$n-1$個空隙可以讓編號$n$插入。

n人時的次序	n人時對應的坐法
$1\text{-}n\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ $1\text{-}b_2\text{-}n\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ ⋮ $1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}n\text{-}a_k$ (共$n-2$個)	$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)$
$1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k\text{-}n$	$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)$

表三：當$a_k>\frac{n}{2}$時，編號 n 插入後其對應的坐法。

在表三中，只有1個空隙會讓他進入到坐法的循環中，其它$n-2$個空隙皆會使編號n的人坐到編號n的位置，不會改變坐法，$\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$對應的次序會變為$(n-2)$種，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)$對應的次序會變為1種，

得當$a_k>\frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-2)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k,n)=\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

在表四中，$n-1$個空隙皆會使編號n的人坐到編號n的位置，不會改變坐法，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)$對應的次序會變為$(n-1)$種，

得當$a_k>\frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=(n-1)\cdot\#_{n-1}(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

n人時的次序	n人時對應的坐法
$1\text{-}n\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ $1\text{-}b_2\text{-}n\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k$ ⋮ $1\text{-}b_2\text{-}b_3\text{-}\cdots\text{-}b_{n-2}\text{-}a_k\text{-}n$ (共$n-1$個)	$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)$

表四：當$a_k\le\frac{n}{2}$時，編號 n 插入後其對應的坐法。

定理7: 當$a_k>\frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=\frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}$ (1)

當$a_k\le\frac{n}{2}$時，$\#_n(1,2,a_1,\cdots,a_k)=\frac{(n-1)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)(2a_k-2)}$ (2)

證明: 設$S=\{3,4,\cdots,n\}$，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，利用定理6，得$a_k>\frac{n}{2}$次序數的計算，其實就是不在此坐法循環中的數減2相乘。

$$\begin{aligned}\text{則}\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k)&=\textstyle\prod_{i\in S-A}(i-2)\\&=\frac{\prod_{i\in S}(i-2)}{\prod_{i\in A}(i-2)}\\&=\frac{(n-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)}\end{aligned}$$

$a_k \le \frac{n}{2}$次序數的計算，其實就是小於等於$2a_k-1$且不在此坐法循環中的數減2，與大於$2a_k-1$的數減1相乘。則$\#_n(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) = \#_{2a_k-1}(1,2,a_1,a_2,\cdots,a_k) \times \frac{(n-1)!}{(2a_k-1-1)!}$

$$= \frac{(2a_k-1-2)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)} \times \frac{(n-1)!}{(2a_k-2)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(a_1-2)(a_2-2)\cdots(a_k-2)(2a_k-2)} \quad \square$$

三、研究目的(三)的探討

定理8: $E(X) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{\sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\le n}\frac{1}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\le j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\le \frac{n}{2}}\frac{(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{n-1}$

證明: n人的圓桌問題，令$3 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-2} \le n$，$3 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-2} \le \frac{n}{2}$，$f(n,k)$代表$n$人的圓桌問題，坐錯$k$人的總入座次序數。 $f(n,k)$可由所有坐錯k人的坐法$_n(1,2,i_1,i_2,\cdots,i_{k-2})$(公式(1))，減去所有最後一項$j_{k-2} \le \frac{n}{2}$的坐錯$k$人的坐法$_n(1,2,j_1,j_2,\cdots,j_{k-2})$(公式(1))，加上所有最後一項$j_{k-2} \le \frac{n}{2}$的坐錯$k$人的坐法$_n(1,2,j_1,j_2,\cdots,j_{k-2})$(公式(2))。得

$$f(n,k) = \sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\le n}\frac{(n-2)!}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\le j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\le \frac{n}{2}}\frac{(n-2)!(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}$$

$$P(X=k) = \frac{f(n,k)}{(n-1)!}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E(X)$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{67}{24}$	$\frac{341}{120}$	$\frac{173}{60}$	$\frac{407}{140}$	$\frac{3691}{1260}$	$\frac{7417}{2520}$

表五 :在$2 \le n \le 10$，: $E(X)$的數值。

$$E(X) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k \cdot \frac{\sum_{3\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-2}\le n}\frac{1}{(i_1-2)(i_2-2)\cdots(i_{k-2}-2)} + \sum_{3\le j_1<j_2<\cdots<j_{k-2}\le \frac{n}{2}}\frac{(n-2j_{k-2}+1)}{(j_1-2)(j_2-2)\cdots(j_{k-2}-2)(2j_{k-2}-2)}}{n-1} \quad \square$$

參、結論與展望

一、結論

本研究是關於n人入座的圓桌問題的探討，入座規則為順時針或逆時針入坐，若順時針與逆時針最近的位子距離相等，則順時針入坐，主要結果有三部分，除了定理1與定理2結果與文獻[1]相同之外，其餘定理3至定理8皆與文獻[1]不同。

在第一部分，利用反證法得出每種坐法的循環恰為數列1,2, ⋯,n以1,2開頭的子數列 ，利用$d(1,a_i) \ge d(a_{i+1},a_i)$ 推導出定理3 $a_{i+1} < 2a_i$，並利用定理3得出定理5.1和定理5.2 ，結合定理5可得出n人入座的圓桌問題總坐法數。

在第二部分，我觀察到次序數的遞迴關係，會因為坐法循環的最後一項有所不同，得出定理6並利用次序數遞迴關係推得次序數公式。

在第三部分，我利用隨機變數X，來計算出坐錯位子人數的期望值。

二、未來展望

再次改變規則如 : n人入座的圓桌問題入座，順時針或逆時針入坐，若順時針與逆時針最近的位子距離相等，則順時針入坐，1 號教授坐到k號位($3 \le k \le n$)，探討其坐法循環規律、坐法分布、坐法總數、次序數遞迴關係、次序數公式、錯位數期望值。

肆、參考文獻

[1]張志傑、温顥然(2018)。乾坤大挪移。2018 年臺灣國際科學展覽會。

[2] P. Capell and T. V. Narayana, On knock-out tournaments, *Canad. Math. Bull.*, 13 (1970), 105-109. MR 0264997

[3] Nathaniel D. Emerson, A Family of Meta-Fibonacci Sequences Defined by Variable-Order Recursions, Journal of Integer Sequences, Vol. 9 (2006).