中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050407

「餘」霞成綺----利用組合數探討 Stirling Number of the Second Kind Triangle Fractal 與質數同餘性質

學校名稱： 國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 游倢立 高二 游子杰	藍格維

關鍵詞： 第二類斯特靈數三角形、質數、組合數

摘要

本研究旨在利用組合數來分析第二類斯特靈數在模質數下的性質。研究分為五階段：第一階段我們參考 O-Yeat Chan 等人的論文，並改良了其證明過程，得到一個同餘組合數。第二階段利用第一階段的奇偶性定理發現$\binom{3n}{n}$與$S(2n,n)$同餘 mod 2 並改良論文證明，使得證明更易推廣。第三階段我們更推廣到更一般的結論：滿足$S(pn,n) \equiv \binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$時，p 與 p'是線性關係。第四階段與第五階段繪製熱圖時，我們發現圖中存在謝爾賓斯基三角形，對此進行了研究，並成功證明斯特靈數三角形在模 2 與模 3 下具有碎形結構與謝爾賓斯基三角形，這是文獻中都沒有探討過的。

壹、 研究動機

在高一下學習排列組合的時候，發現了一個與組合領域相關的數稱作斯特靈數，好奇心驅使下自己做了一點研究，發現斯特靈數在國外的文獻中有許多數論的定理與性質，於是決定研究這個神奇的數，並推廣一些結論與性質。

貳、研究目的

一、以組合數來描述$S(n,k)$的奇偶性。

二、改良原論文證明滿足$S(2n,n)$ 是奇數時，n屬於 Fibbinary numbers。

三、推廣至滿足$S(3n,n)$是奇數時，n的條件。

四、推廣滿足$S(5n,n) \equiv \binom{pn}{n}\ (mod\ 2)$ 時，與p的關係。

五、推廣滿足$S(pn,n) \equiv \binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$ 時，p與p'的關係。

六、利用 python 做出斯特靈數的奇偶性圖並觀察

七、研究斯特靈數三角形模 2 時的圖形性質。

八、研究斯特靈數$S(n,k)$在 mod 3 條件下的奇偶性

九、研究斯特靈數三角形在 mod 3 下的圖形性質

參、名詞定義與性質介紹

一、第二類斯特靈數(Stirling number of second kind)

(一) 第二類斯特靈數(Stirling number of second kind)的定義

第二類斯特靈數$S(n,k)$，其中n,k為正整數，被定義為將n個元素分配到k個非空集合的方法數。以$S(4,k)$為例：A、B、C、D 四人，若所有人分成 1 組，只能所有人在同一組，因此$S(4,1)$=1。若所有人分成 4 組，只能每人獨立一組，因此$S(4,4)$=1。若分成 2 組，即{A, B}{C, D} , {A, C}{B, D} , {A, D}{B, C} , {A}{B, C, D} , {B}{A, C, D} , {C}{A, B, D} , {D}{A, B, C} , 因此 $S(4,2)=7$，同理$S(4,3)=6$。

(二) 第二類斯特靈數(Stirling number of second kind)的性質[2]

他有以下遞迴性質：

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$$

對於 k ≥ 0，有生成函數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\,x^n=\prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix}$$

也有另一個公式可直接計算（在本研究沒有用到）：

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n$$

對於$n<k$時：$S(n,k)=0$

我們特別的定義：$S(0,0)=1$

＊為了敘述方便，以下將『第二類斯特靈數$S(n,k)$』皆稱為『斯特靈數』

二、$v_p(n)$的定義與性質

(一) $v_p(n)$的定義

$v_p(n)$的定義：

對一個質數p，我們定義$v_p(n)=\max\{i\in\mathbb{N}: p^i \mid n\}$。

(二) $v_p(n)$有以下性質（在本研究中未使用，但文獻回顧中有使用到故在此解釋）

1. $v_p(ab)=v_p(a)+v_p(b)$
2. $v_p\left(\frac{a}{b}\right)=v_p(a)-v_p(b)$
3. $\forall n\in\mathbb{N},\ v_p(n!)=\frac{n-s_p(n)}{p-1}$
4. $v_p\left(\binom{n}{k}\right)=\frac{s_p(k)+s_p(n-k)-s_p(n)}{p-1}$

三、$s_p(n)$的定義

> $s_p(n)$的定義：
>
> 我們定義$s_p(n)$為p進制下$(n)_p$之各位數字之和。例$s_2(5)=2$

肆、研究過程或方法

【研究一】$\boldsymbol{S(n,k)}$的奇偶性

一、利用組合數來描述斯特靈數的奇偶性

在這部分的研究中，我們要研究的是$S(n,k)$的奇偶性，為了方便後續的研究，我們利用組合數來表達，也方便後續研究的計算。

> **【定理1】**[1]：對於正整數n,k我們有：
>
> $$S(n,k)\equiv\begin{cases}0, & (mod\ 2)\ ,if n<k\\ \binom{n-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}{n-k} & (mod\ 2)\ ,if n\geq k\end{cases}$$

【證明】

我們分兩部份來證明

(一) 由定義當$n<k$,時，$S(n,k)=0$，故$S(n,k)\equiv 0\ (mod\ 2)$

(二) 當$n\geq k$時：

我們使用斯特靈數的生成函數

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\,x^n=\prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix}\equiv\frac{x^k}{(1-x)^{\lfloor k+1/2\rfloor}}\ (mod\ 2)$$

$$\frac{x^k}{(1-x)^{\lfloor k+1/2\rfloor}}=x^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}{n}x^n$$

$$=x^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\left(\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1\right)-1}{n}x^n$$

將組合數展開，用連乘符號化簡得

$$=x^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\prod_{j=0}^{n-1}\left(\left(n-\left(\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1\right)-1\right)-j\right)}{n!}x^n$$

$$=x^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\left((n-1)-j-\left(\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1\right)\right)x^n$$

$$=x^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\left(j-\left(\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1\right)\right)x^n$$

$$=x^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}-\left(\left(\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1\right)-j\right)x^n$$

$$=x^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}\left(\left(\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1\right)-j\right)x^n=x^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor+n-1}{n}x^n$$

$$\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor-k-1}{n-k}x^n\ (mod\ 2)$$

最後將x^n的係數簡化後即是我們要的結果，證畢。

註：定理 1 參考自 O-Yeat Chan 等人[1]的論文，我們改進了其證明過程，並利用這個定理來進行後續的研究。

【文獻探討】$\mathbf{O-Yeat\ Chan}$等人證明滿足$\boldsymbol{S(2n,n)}$是奇數時，$\boldsymbol{n}$屬於 Fibbinary numbers

在 O-Yeat Chan 等人[1]的研究中，其中一個目標是找出可以滿足$S(2n,n)$是奇數的n。以下為該論文的方法與過程。

一、原論文的證明當$S(2n,n)$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers 的過程

(一) 以窮舉法尋找可以滿足條件的n

首先逐一計算符合條件的n值，得到前 25 項如下：

0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 20, 21, 32, 33, 34, 36, 37, 40, 41, 42, 64, 65, 66, 68

接著將這個數列輸入進 Sloane's Online Encyclopedia of Integer Sequences(OEIS)[3]中，發現有一個與它唯一對應的數列：A003714，又被稱作 Fibbinary numbers [4]，它的性質是該數列中每一項的二進制任取相鄰兩位數相加小於 2，換句話說，即二進制中沒有連續的 1 (例如 $21=(10101)_2$, $19=(10011)_2$ 即不符)。因此他們猜測，若要使得$S(2n,n)$是奇數，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers。下面將證明這個猜測。

(二) 證明$S(2n,n)$是奇數，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers

分成奇數與偶數兩部分來證明，易知當 Fibbinary numbers 乘以 2 時不會影響其二進制中不存在連續兩個 1 的特性，故期待**【引理 2.1】**成立

【引理 2.1】：$\forall n\in\mathbb{N}$

$$S(2n,n)\equiv S(4n,2n)\ (mod\ 2)$$

【證明】

由【定理1】得知

$$S(2n,n)\equiv\binom{2n+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-n-1}{2n-n}(mod\ 2)$$

分成兩部分討論，若n是奇數，設$n=2t+1$得

$$S(2n,n)\equiv\binom{4t+2-t-1}{2t+1}=\binom{3t+1}{2t+1}\ (mod\ 2)$$

也知道

$$S(4n,2n)\equiv\binom{3n-1}{2n}=\binom{6t+2}{4t+2}=\binom{2(3t+1)}{2(2t+1)}(mod\ 2)$$

由$v_p(n)$性質 3.知

$$v_2\left(\binom{\alpha}{\beta}\right)=s_2(\beta)+s_2(\alpha-\beta)-s_2(\beta)=s_p(2\beta)+s_p\big(2(\alpha-\beta)\big)-s_p(2\alpha)=v_2\left(\binom{2\alpha}{2\beta}\right)$$

$\forall\alpha,\beta\in N\ \ 0\le\beta\le\alpha$ 取$\alpha=3t+1,\beta=2t+1$

若n為偶數，設$n=2t$得

$$S(2n,n)\equiv\binom{4t-t-1}{2t}=\binom{3t-1}{2t}\ (mod\ 2)$$

與$S(4n,2n)$比較可得

$$S(4n,2n)\equiv\binom{6t-1}{4t}=\frac{6t-1}{2t-1}\binom{6t-2}{4t}(mod\ 2)$$

由$v_p(n)$性質 1.與性質 2.知

$$v_2\left(\binom{6t-1}{4t}\right)=v_2\left(\frac{6t-1}{2t-1}\binom{6t-2}{4t}\right)$$

$$=v_2\left(\binom{6t-2}{4t}\right)+v_2(6t-1)-v_2(2t-1)=v_2\left(\binom{6t-2}{4t}\right)$$

取$\alpha=3t-1,\beta=2t$ 證畢

【定理 2.1】：$\forall n\in\mathbb{N}$

當$S(2n,n)$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers

【證明】

由**【引理 2.1】**可知，只需要討論n為奇數的情況，因為若n為偶數(Fibbinary numbers 中的奇數$\times 2^k$)也同樣是 Fibbinary numbers

設$n=2t+1$ 由**【定理1】**可知

$$S(2n,n)=S(4t+2,2t+1)\equiv\binom{3t+1}{2t+1}(\,mod\ 2)$$

由$v_p(n)$性質 3.可得$S(2n,n)$為奇數若且唯若

$$v_2\left(\binom{3t+1}{2t+1}\right)=s_2(2t+1)+s_2(t)-s_2(3t+1)=0$$

若t為偶數，則成立。若為奇數，則

$$s_2(2t+1)=s_2(t)+1$$

$$s_2(2t+1)+s_2(t)-s_2(3t+1)=2s_2(t)+1-s_2(3t+1)$$

因為t為奇數，$3t$也為奇數，故$s_2(3t)\geq s_2(3t+1)$，因此

$$v_2\left(\binom{3t+1}{2t+1}\right)=2s_2(t)+1-s_2(3t+1)$$

$$\geq 2s_2(t)+1-s_2(3t)=1+v_2\left(\binom{3t}{t}\right)\geq 1$$

得t必為偶數。

我們現在把問題簡化成每個t要使得$\binom{3t+1}{2t+1}$為奇數，換句話說，t要使得

$$2s_2(t)+1-s_2(3t+1)=0$$

因為t為偶數，$3t$也為偶數，得

$$s_2(3t+1)=s_2(3t)+1$$

因此

$$v_2\left(\binom{3t+1}{2t+1}\right)=2s_2(t)-s_2(3t)=2s_2(t)-s_2(2t+t)$$

若上述式子等於0，若且唯若$2t$與t於二進制下沒有連續的1，因為

$$s_2(a+b)\leq s_2(a)+s_2(b)$$

等號成立於當且僅當加法$a+b$沒有進位。由於$2k$和k的二進位加法意味著將k的數位向左移動，然後加到k上，因此僅當k的二進位表示包含連續的 1 時，才會出現進位。綜上所述，我們已經證明，對於奇數 n，當且僅當 $k=\frac{n-1}{2}$ 是偶數二進位數時，$S(2n,n)$是奇數。易知，這等價於n是奇數 Fibbinary numbers，因此得到：當$S(2n,n)$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers。證畢。

以上為 O-Yeat Chan 等人的方法，在證明當$S(2n,n)$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers 時，他們給了一個不直觀且主要為使用$v_p(n)$即 LTE 升冪引理來證明。我們為這個定理推導出一個更簡潔且直觀的證明。

【研究二】證明滿足$S(2n,n),\binom{3n}{n}$是奇數時，n屬於 Fibbinary numbers

一、我們證明當$S(2n,n)$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers 的方法

(一) 首先，先證幾個引理（在往後的研究中將會用到）

【引理 3.1】：

$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} (mod\ p)$$

【證明】

易知將n,m在p進制下乘以p僅為在尾數多加一個 0，並不影響盧卡斯定理的乘積情況，故

$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} (mod\ p)$$

證畢 By 盧卡斯定理(詳見第 9 頁)

【引理 3.2】：當p為質數，n,m,r,s為非負整數，且$0 \le r,s \le p-1$，我們有

$$\binom{np+r}{mp+s} \equiv \binom{n}{m}\binom{r}{s} (mod\ p)$$

【證明】

考慮$\binom{np+r}{mp+s}$，$np+r$在p進制下可看做n在p進制表示下後面接著r，同理$mp+s$可看做n在p進制表示下後面接著s

又因為$0 \le r,s \le p-1$，r,s在p進制下只有 1 位，運用盧卡斯定理得

$$\binom{np+r}{mp+s} \equiv \binom{n}{m}\binom{r}{s} (mod\ p)$$

其中，$\binom{n}{m}$涵蓋了np和mp在p進位下的所有高位數字，而$\binom{r}{s}$則是最低位數字，證畢。

【引理 3.3】： n,m,r,s為非負整數，且$0 \le r,s \le 1$，我們有

$$\binom{2n-r}{2m-s} \equiv \binom{n}{m}\binom{r}{s} (mod\ 2)$$

【證明】

由**【引理 3.2】**得知，這是類似$p=2$的情況，而我們易知

$$\binom{2n-r}{2m-s} 易變換成 \binom{2n'+r}{2m'+s}$$

故在$p=2$時成立

$$\binom{np-r}{mp-s} \equiv \binom{n}{m}\binom{r}{s} (mod\ p)$$

證畢。

(二) 現在，我們先證明 $S(2n,n) \equiv \binom{3n}{n} (mod\ 2)$

【定理 3.1】：$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S(2n,n) \equiv \binom{3n}{n} \pmod 2$$

【證明】

由【定理 1】

$$S(2n,n) \equiv \binom{2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{n} \pmod 2$$

由於組合數中有高斯符號，我們將n分成奇數與偶數兩部分討論

1. 當n是偶數時，由【引理 3.1】得

$$\binom{2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{n} \equiv \binom{3n-2}{2n} \pmod 2$$

我們令$n = 2t \ (t \in \mathbb{N})$，由【引理 3.3】得

$$\binom{3n-2}{2n} = \binom{6t-2}{4t} \equiv \binom{3t-1}{2t} \equiv \binom{3t-1}{t-1} \equiv \binom{3t}{t} \pmod 2$$

2. 當n是奇數時，由【引理 3.1】得

$$\binom{2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{n} \equiv \binom{3n}{n} \pmod 2$$

我們令$n = 2t + 1 \ (t \in \mathbb{N})$，則

$$\binom{3n}{n} = \binom{6t+3}{2t+1} = \binom{3(2t+1)}{2t+1}$$

令$t' = 2t + 1$得

$$\binom{3(2t+1)}{2t+1} = \binom{3t'}{t'} \pmod 2$$

總合以上兩點，我們可以整合成：$\forall n \in \mathbb{N}$我們有

$$S(2n,n) \equiv \binom{3n}{n} \pmod 2$$

證畢。

(三) 當$\binom{3n}{n}$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers

這部分的研究中，我們想瞭解滿足組合數成奇數時，n的條件，因此我們使用*盧卡斯定理*（*Lucas' Theorem*）[5]來證明。

盧卡斯定理（Lucas' Theorem）：

給定n,k是p進制下的表示法，其中p是一個質數。

$$n = a_0 + a_1p^1 \cdots + a_{i-1}p^{i-1} + a_ip^i + \cdots + a_rp^r = \sum_{i=0}^{r} a_ip^i$$

$$k = b_0 + b_1p^1 + \cdots + b_{i-1}p^{i-1} + b_ip^i \cdots + b_rp^r = \sum_{i=0}^{r} b_ip^i$$

其中$i \in \mathbb{N} \cup 0$，且 $0 \le a_i, b_i \le p-1, 0 \le i \le r$

$$\binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} \ (mod\ p)$$

現在證明當$\binom{3n}{n}$為奇數時，n 於二進位下須滿足:每個 1 不相鄰

【定理 3.2】：

當$\binom{3n}{n}$是奇數時，n若且唯若屬於 Fibbinary numbers

【證明】

我們將$\binom{3n}{n}$中的$3n$ 與n轉換成2進位展開

$3n = a_0 + a_12^1 \cdots + a_{i-1}2^{i-1} + a_i2^i,\ n = b_0 + b_12^1 + \cdots + b_{i-1}2^{i-1} + b_i2^i$

並利用盧卡斯定理得:

$$\binom{3n}{n} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} \ (mod\ 2)$$

其中$i \in \mathbb{N} \cup 0$，且 $0 \le a_i, b_i \le p-1, 0 \le i \le r$

若要使得$\binom{3n}{n}$為奇數，每個$\binom{a_i}{b_i}$都必定是 1，否則

$$\prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} = 0 \Rightarrow \binom{3n}{n} \text{ 是偶數。}$$

而只有三種情況會使得$\binom{a_i}{b_i} = 1$，分別是$\begin{cases} a_i = 1, b_i = 1 \\ a_i = 1, b_i = 0 \\ a_i = 0, b_i = 0 \end{cases}$

我們使用反證法證明當$\binom{3n}{n}$為奇數時，n 於二進位下須滿足每個 1 不相鄰。

假設n的二進制存在連續兩個位元$b_k = 1, b_{k+1} = 1$, 且$\binom{3n}{n}$為奇數，例如 1011_2，若乘以 $3=11_2$ 即 $1011_2 \times 11_2 = 100001_2$，其中

$$\begin{cases} a_k = 1, a_{k+1} = 0 \\ b_k = 1, b_{k+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \binom{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \binom{0}{1} = 0 \Rightarrow \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} = 0$$

得到$\binom{3n}{n}$是偶數，與假設矛盾。

故n於二進位下必須滿足每個 1 不相鄰，證畢。

據此，我們可以發現將$S(2n,n)$轉成等價的$\binom{3n}{n}$來證明二進制性質較為直觀(trivial)且簡潔，相比於論文用 LTE lemma，我們用 *Lucas' Theorem* 即組合數的方法來證明更簡易，且更容易推廣至其他斯特靈數（如$S(3n,n)$, $S(5n,n)$）！

(四) 分析與討論

由【**定理 3.1**】和【**定理3.2**】，我們觀察到$S(2n,n)$與$\binom{3n}{n}$成奇數時，n都是 Fibbinary numbers，而剛好 2 和 3 恰巧是相鄰的質數，於是我們又思考，會不會$S(3n,n)$成奇數的條件與$\binom{5n}{n}$相同呢？於是我們展開了研究三。

【研究三】滿足$S(3n,n)$是奇數時，n的條件

一、我們證明，滿足$S(3n,n)$是奇數時，n的條件是否也等同於$\binom{5n}{n}$。

【**定理 4.1**】：$\forall n \in \mathbb{N}$ $$S(3n,n) \equiv \binom{5n}{n} \pmod 2$$

【證明】

由【**定理 1**】得

$$S(3n,n) \equiv \binom{3n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{2n} \pmod 2$$

由於組合數中有高斯符號，我們將n分成奇數與偶數兩部分討論

(一) 當n是偶數時，由【**引理 3.1**】得

$$\binom{3n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{2n} \equiv \binom{5n-2}{4n} \equiv \binom{5n-2}{n-2} \pmod 2$$

我們令$n = 2t$ $(t \in \mathbb{N})$，則由【**引理 3.1**】和【**引理 3.3**】得

$$\binom{5n-2}{n-2} = \binom{10t-2}{2t-2} = \binom{2(5t-1)}{2(t-1)} \equiv \binom{5t-1}{t-1} \equiv \binom{5t}{t} \pmod 2$$

(二) 當n是奇數時，由【**引理 3.1**】得

$$\binom{3n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{2n} \equiv \binom{5n-1}{4n} = \binom{5n-1}{n-1} \ (mod\ 2)$$

我們令$n = 2t + 1 \ (t \in \mathbb{N})$ ，則由【**引理 3.1**】得

$$\binom{5n-1}{n-1} = \binom{10t+4}{2t} = \binom{10t+4}{8t+4} \equiv \binom{5t+2}{4t+2} \equiv \binom{5t}{t} \ (mod\ 2)$$

總合以上兩點，我們可以整合成：$\forall n \in \mathbb{N}$我們有

$$S(3n,n) \equiv \binom{5n}{n} (mod\ 2)$$

證畢。

二、尋找滿足$\binom{5n}{n}$為奇數的n值

由【**定理 4.1**】我們若想找到$S(3n,n)$成奇數時n的條件，可以利用$\binom{5n}{n}$來推導，因爲組合數相對斯特靈數好討論。

在本部分的研究中，我們利用與研究二中一樣的方法，先利用 Python 窮舉找出滿足$\binom{5n}{n}$為奇數的n值，前 25 項如下，程式碼詳見附件四。

0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 17, 18, 19, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 48, 49, 50, 51

接著我們將這個看似毫無規律的數列輸入進 OEIS 中，發現有一個唯一與它對應的數列：A048716 [6]，它的性質是該數列中每一項對於一個給定的二進位數表示中的任意位i，如果該位的值為 1，則該位前後各兩位的值必須為 0，如 $1001_2 = 9$。因此我們猜測，若要使得$S(3n,n)$是奇數，n若且唯若屬於 A048716 數列。下面我們將證明這個猜測。

【定理 4.2】：

當$\binom{5n}{n}$為奇數時，n 於二進位下須滿足每個 1 往前後數二位都是 0

【證明】

(一) 我們將$\binom{5n}{n}$中的$5n$ 與n轉換成2進位展開

$$5n = a_0 + a_1 2^1 \cdots + a_{i-1} 2^{i-1} + a_i 2^i, n = b_0 + b_1 2^1 + \cdots + b_{i-1} 2^{i-1} + b_i 2^i$$

並利用盧卡斯定理得:

$$\binom{5n}{n} \equiv \prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} \ (mod\ 2)$$

其中$i \in \mathbb{N} \cup 0$，且 $0 \le a_i, b_i \le p-1, 0 \le i \le r$

(二) 若要使得$\binom{5n}{n}$為奇數，每個$\binom{a_i}{b_i}$都必定是 1，否則

$$\prod_{i=0}^{r} \binom{a_i}{b_i} = 0 \Rightarrow \binom{5n}{n} \text{ 是偶數。}$$

而只有三種情況會使得$\binom{a_i}{b_i} = 1$，分別是$\begin{cases} a_i = 1, b_i = 1 \\ a_i = 1, b_i = 0 \\ a_i = 0, b_i = 0 \end{cases}$

(三) 我們使用反證法證明當$\binom{5n}{n}$為奇數時，n 於二進位下須滿足每個 1 往前後數二位都是 0。假設n的二進制存在一個位元k滿足

$$b_k = 1, \mathrm{b_{k-2}} = 1$$

且$\binom{5n}{n}$為奇數，則

$$\mathrm{a_k} = b_{k-2} + b_k (\text{未進位})$$

進位後得到

$$a_k = 0 \Rightarrow \binom{a_k}{b_k} = \binom{0}{1} = 0$$

所以$\binom{5n}{n}$為偶數，與假設矛盾。故得證n於二進位下須滿足每個 1 的前後兩位都是 0。

二、分析與討論

在這部分的研究中，我們證明了$S(3n, n) \equiv \binom{5n}{n} \ (mod\ 2)$，我們好奇是否對於 $S(5n, n)$中也有與之對應的組合數$\binom{pn}{n}$使它們兩個同餘 mod 2，因此我們展開了研究四。

【研究四】對於$\boldsymbol{S(5n,n)}$中也有與之對應的組合數$\boldsymbol{\binom{pn}{n}}$使它們兩個同餘 $\boldsymbol{mod\ 2}$

一、我們證明，對於$S(5n,n)$中也有與之對應的組合數$\binom{pn}{n}$使它們兩個同餘 mod 2

【定理 5.1】：$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S(5n,n) \equiv \binom{9n}{n} \ (mod\ 2)$$

【證明】

由**【定理 1】**得

$$S(5n,n) \equiv \binom{5n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{4n} \ (mod\ 2)$$

由於組合數中有高斯符號，我們將n分成奇數與偶數兩部分討論

(一) 當n是偶數時，由**【引理 3.1】**得

$$\binom{5n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{4n} \equiv \binom{9n-2}{8n} \equiv \binom{9n-2}{n-2} \ (mod\ 2)$$

我們令$n = 2t \ \ (t \in \mathbb{N})$ ，則由**【引理 3.1】**和**【引理 3.3】**得

$$\binom{9n-2}{n-2} = \binom{18t-2}{2t-2} = \binom{2(9t-1)}{2(t-1)} \equiv \binom{9t-1}{t-1} \equiv \binom{9t}{t} \ (mod\ 2)$$

(二) 當n是奇數時，由**【引理 3.1】**得

$$\binom{5n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1}{4n} \equiv \binom{9n-1}{8n} = \binom{9n-1}{n-1} \ (mod\ 2)$$

我們令$n = 2t+1 \ (t \in \mathbb{N})$ ，則由**【引理 3.1】**得

$$\binom{9n-1}{n-1} = \binom{18t+8}{2t} = \binom{18t+8}{16t+8} \equiv \binom{9t+4}{8t+4} \equiv \binom{9t}{t} \ (mod\ 2)$$

總合以上兩點，我們可以整合成：$\forall n \in \mathbb{N}$我們有

$$S(5n,n) \equiv \binom{9n}{n} (mod\ 2)$$

證畢。

二、分析與討論

在這部分的研究中，我們證明了$S(5n,n) \equiv \binom{9n}{n} \ (mod\ 2)$，我們好奇是否對於所有$S(pn,n)$中都有與之對應的組合數$\binom{p'n}{n}$使它們兩個同餘 mod 2，因此我們展開了研究五。

【研究五】滿足$S(pn,n)\equiv\binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$時，$p$與$p'$的關係

一、推廣過程

由研究二、三與四，我們發現$S(2n,n)\equiv\binom{3n}{n}\ (mod\ 2)$、$S(3n,n)\equiv\binom{5n}{n}\ (mod\ 2)$，於是我們用與**【定理 3.2】**類似的證明方法，同時使用 Python 輔助驗證，推出了以下列表一。

表一：$S(pn,n)\equiv\binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$時，$p$與$p'$之關係

$S(pn,n)\equiv\binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$			
$p=2$	$p'=3$	$p=17$	$p'=33$
$p=3$	$p'=5$	$p=19$	$p'=37$
$p=5$	$p'=9$	$p=23$	$p'=45$
$p=7$	$p'=13$	$p=29$	$p'=57$
$p=11$	$p'=21$	$p=31$	$p'=61$
$p=13$	$p'=25$	$p=37$	$p'=73$

由上表，我們觀察並猜測滿足$S(pn,n)\equiv\binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$時，$p'=2p-1$，以下證明這個猜想。

【定理 6】$\forall n\in\mathbb{N},p$是質數

$$S(pn,n)\equiv\binom{(2p-1)n}{n}\ (mod\ 2)$$

【證明】

由**【定理 1】**得

$$S(pn,n)\equiv\binom{pn-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{(p-1)n}(mod\ 2)$$

我們分成n為偶數與奇數兩部分來討論

(一) n為偶數

$$\binom{pn-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{(p-1)n}\equiv\binom{2pn-\lfloor n\rfloor-2}{2(p-1)n}=\binom{2pn-n-2}{2(p-1)n}\ (mod\ 2)$$

令$n=2t\ \ (t\in\mathbb{N})$

$$\binom{2pn-n-2}{2(p-1)n}\equiv\binom{(2p-1)t-1}{2(p-1)t}=\binom{(2p-1)t-1}{t-1}\equiv\binom{(2p-1)t}{t}\ (mod\ 2)$$

(二) n為奇數

$$\binom{pn-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{(p-1)n} \equiv \binom{2pn-(n-1)-2}{2(p-1)n} = \binom{(2p-1)n-1}{2(p-1)n} = \binom{(2p-1)n-1}{n-1}$$

$$\equiv \binom{(2p-1)n}{n} \ (mod\ 2)$$

由(一)、(二)兩點得

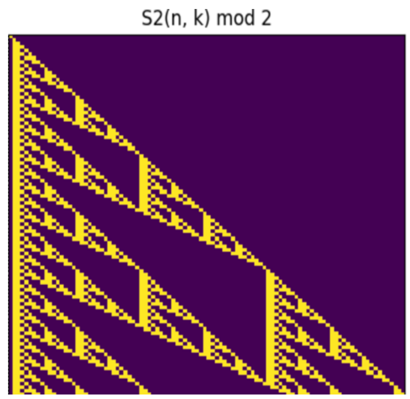
$$S(pn,n) \equiv \binom{(2p-1)n}{n} \ (mod\ 2)$$

證畢。

【研究六】繪製熱圖來觀察$S(n,k)$之奇偶性分佈

在這部分的研究中，我們使用 Python 來描繪$S(n,k)$的奇偶性，其中$0 \le n,k \le 100$縱軸為n(由上而下依序為 0~100)，橫軸為k(由左而右依序為 0~100)，黃色像素表其值為 1，紫色為 0。

在圖一中，我們可以觀察到幾個有趣的現象，其一為分佈圖中的右斜上半部中皆為餘 0 (紫色)。其二為分佈圖中存在類似謝爾賓斯基三角形(Sierpinski triangle)的圖形，隨著n,k的值越來越大，週期性的存在也越來越明顯。



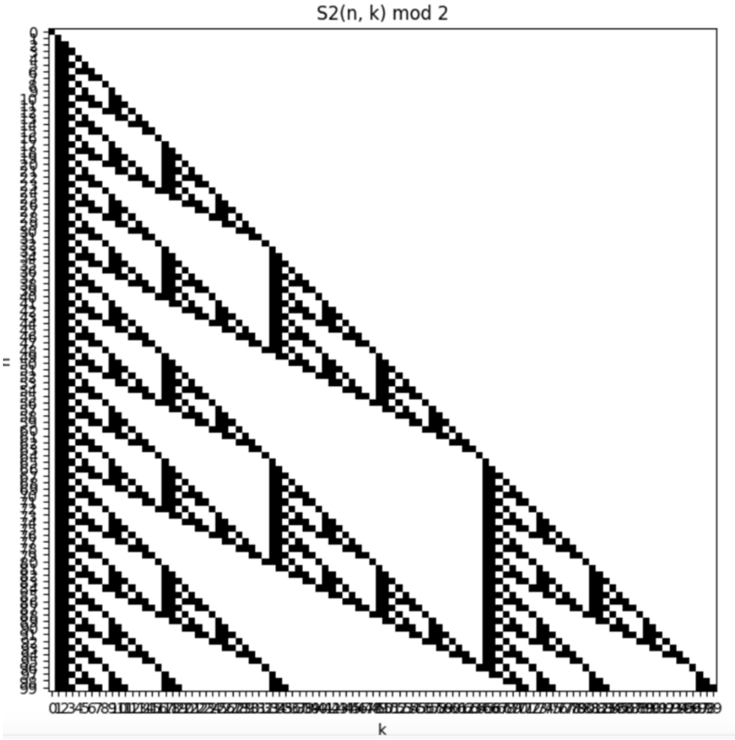
圖一：$S(n,k)$的奇偶性分佈圖（本圖由作者親自製作）

註：謝爾賓斯基三角形是一種碎形，可以通過從一個等邊三角形中反復移除三角形子集來構造：從一個等邊三角形開始，將其細分為四個較小的全等等邊三角形，並移除中心的三角形。對剩餘的每個較小三角形重複移除中心的三角形無限次，如圖二所示。

圖二：謝爾賓斯基三角形構造方式示意 [8]

【研究七】斯特靈數三角形模 2 時的碎形結構

在這部分的研究中，查詢相關文獻後發現並沒有人給出相關的證明或討論，因此我們想要自己證明斯特靈數在模 2 下存在著碎形中的謝爾賓斯基三角形，而謝爾賓斯基三角形是自相似集中的一個例子，因此若證明斯特靈數有謝爾賓斯基三角形中的自我相似性，我們大可以說它具有碎形結構，且是謝爾賓斯基三角形。下圖三為我們利用 Python 畫出的斯特靈數三角形模 2 時的座標圖，每個像素都代表一個$S(n,k)\ (mod\ 2)$的值，黑色為 1（奇數），白色為 0（偶數），總軸為 n，橫軸為 k。可以觀察到圖中存在明顯的謝爾賓斯基三角形，而謝爾賓斯基三角形最大的特色就是有自我相似性，因此我們證明之後的思路著重在其，而在證明自我相似性前，我們先定義一些名詞與符號。



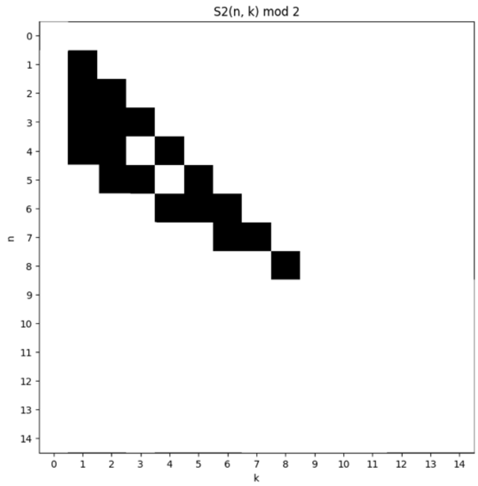
圖三：$S(n,k)$的奇偶性分佈圖 (黑白版，本圖由作者親自製作）

我們定義以n,k帶入第二類斯特靈數後模質數的值而產生的圖稱為斯特靈數座標系統，座標圖中，橫軸k由左往右漸增，縱軸n由上往下漸增，定義符號$[A_i]_j$為在斯特靈數座標系統中範圍長寬j的區塊，其中i為一個編號用的變數例如

$$[A_i]_2 = \begin{bmatrix} S(n,k) & S(n,k+1) \\ S(n+1,k) & S(n+1,k+1) \end{bmatrix}$$

為一個長寬為 2 的區塊，其中$S(n,k)$為第二類斯特靈數，且n,k為正整數。接著我們定義$[A_i+(x,-y)]_2$為將區塊$[A_i]_2$向下平移y單位，向右平移x單位。且我們說$[A_m]_2 \equiv [A_n]_2\ (mod\ p)$當區塊內對應的元素皆兩兩模$p$同餘。其中$\omega$是正整數，可以看作是遞迴的項數。最後，我們說$[A_\omega]_i \cup [A_\omega]_j$為兩個區塊的拼接。

現在，我們來證明自我相似性，首先我們觀察到整張圖可以看成是由一個「單位三角形」透過複製、平移與貼上而構成的，單位三角形如下圖四：



圖四：單位三角形示意圖（本圖由作者親自製作）

我們可以將這個最基本的三角形寫成下式，且定義$[A_1]_8$

$$[A_1]_8=\begin{bmatrix} S(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(2,1) & S(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(5,2) & S(5,3) & S(5,4) & S(5,5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(6,4) & S(6,5) & S(6,6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(7,6) & S(7,7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(8,8) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (mod\ 2)$$

其中僅有$S(4,3)$和$S(5,4)$為偶數，其餘皆為奇數。透過計算可得

$$[A_1]_8 \cup [A_1+(0,-4)]_8 \cup [A_1+(8,-8)]_8=[A_2]_{16}$$

其中$[A_1+(0,-4)]_8$的意義為將$[A_1]_8$往下(y 軸)平移四個單位，$[A_1+(8,-8)]_8$的意義為將$[A_1]_8$往下平移八個單位再往右八個單位，詳細過程如下

$$\begin{bmatrix} S(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(2,1) & S(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(5,2) & S(5,3) & S(5,4) & S(5,5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(6,4) & S(6,5) & S(6,6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(7,6) & S(7,7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(8,8) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} S(5,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(6,1) & S(6,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(7,1) & S(7,2) & S(7,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(8,1) & S(8,2) & S(8,3) & S(8,4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(9,2) & S(9,3) & S(9,4) & S(9,5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(10,4) & S(10,5) & S(10,6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(11,6) & S(11,7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(12,8) \end{bmatrix}$$

$$\cup \begin{bmatrix} S(9,9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(10,9) & S(10,10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(11,9) & S(11,10) & S(11,11) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(12,9) & S(12,10) & S(12,11) & S(12,12) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(13,10) & S(13,11) & S(13,12) & S(13,13) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(13,12) & S(14,13) & S(14,14) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(15,14) & S(15,15) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(16,16) \end{bmatrix} =$$

$$
\begin{bmatrix}
S(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(2,1) & S(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(5,1) & S(5,2) & S(5,3) & S(5,4) & S(5,5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(6,1) & S(6,2) & 0 & S(6,4) & S(6,5) & S(6,6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(7,1) & S(7,2) & S(7,3) & 0 & 0 & S(7,6) & S(7,7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S(8,1) & S(8,2) & S(8,3) & S(8,4) & 0 & 0 & 0 & S(8,8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & S(9,2) & S(9,3) & S(9,4) & S(9,5) & 0 & 0 & 0 & S(9,9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S(10,4) & S(10,5) & S(10,6) & 0 & 0 & S(10,9) & S(10,10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(11,6) & S(11,7) & 0 & S(11,9) & S(11,10) & S(11,11) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(12,8) & S(12,9) & S(12,10) & S(12,11) & S(12,12) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(13,10) & S(13,11) & S(13,12) & S(13,13) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(14,12) & S(13,13) & S(14,14) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(15,14) & S(15,15) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(16,16)
\end{bmatrix}
$$

而我們也可將上式寫成

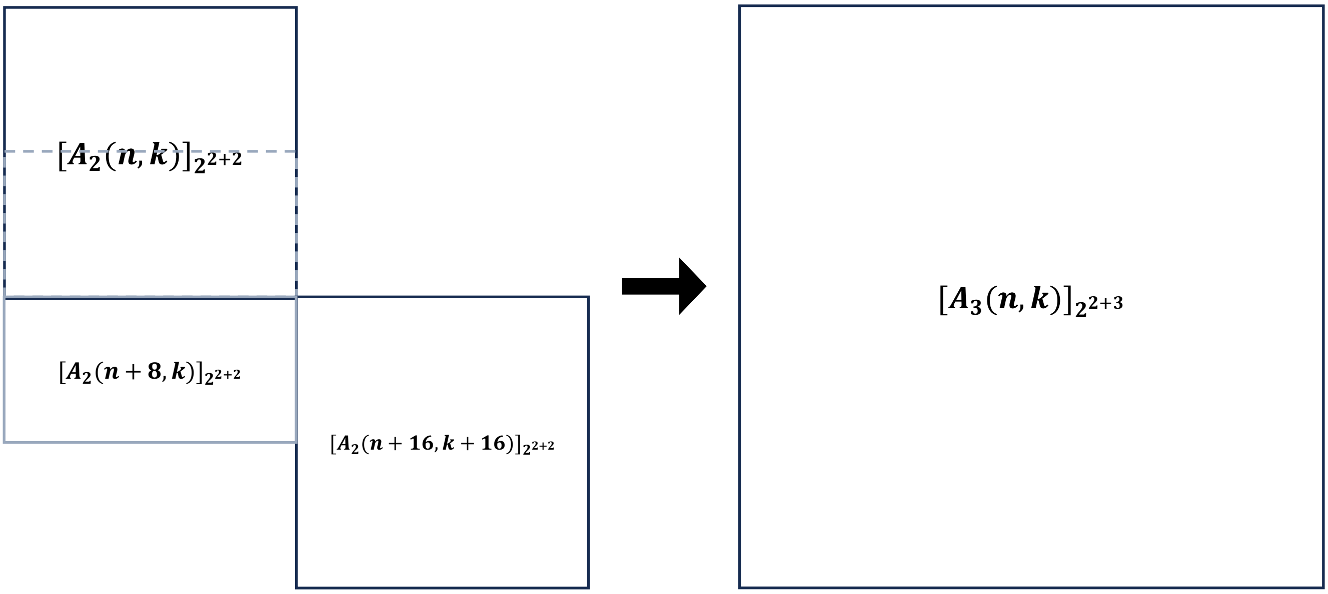
$$[A_1]_{2^{2+1}} \cup [A_1 + (0,-4)]_{2^{2+1}} \cup [A_1 + (8,-8)]_{2^{2+1}} = [A_2]_{2^{2+2}}$$

以上我們成功描述了這個自我相似性的第一步，即將最上方的三角形複製二次，並往下及往右平移。

有了第一步後，我們繼續推導後續，一樣透過計算可得

$$[A_2]_{2^{2+2}} \cup [A_2 + (0,-8)]_{2^{2+2}} \cup [A_2 + (16,-16)]_{2^{2+2}} = [A_3]_{2^{2+3}}$$

拼接方法如圖五所示。

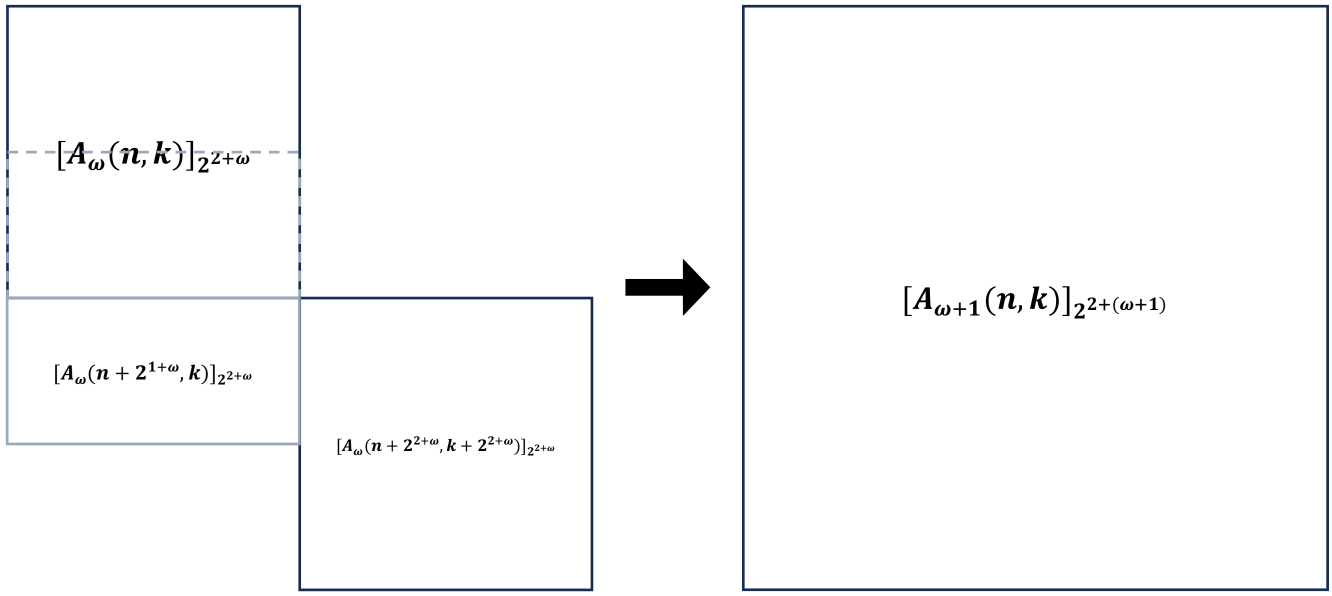


圖五：區塊拼接示意圖（本圖由作者親自製作）

可以看到圖四中拼接的過程中僅有兩個區塊會疊合到，但又因為重疊上其內的元素有一方都是 0，所以事實上可以看作是互相獨立的區塊相加，並不會有加法進位的問題。

而由上面我們可以觀察出符合這樣平移手法的遞迴通式，示意圖如圖六：

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}} \cup [A_\omega + (0,-2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}} \cup [A_\omega(2^{2+\omega},-2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}} = [A_{\omega+1}]_{2^{(2+\omega)+1}} \text{------①}$$



圖六：區塊拼接示意圖（本圖由作者親自製作）

上圖展示了實際在座標系統上做加減平移的概念，其中若①式成立，則我們就可以說斯特靈數模質數下之圖形具有碎形結構，現在我們證明①式。在證明之前我們先證一個組合數同餘引理。

【引理 7.1】 若$n,k<p^m$且$\forall l,q\geq 0$

$$\binom{l\times p^m+n}{q\times p^m+k}\equiv\binom{l}{q}\binom{n}{k}\ (mod\ p)$$

【證明】

當$n,k<p^m$則$n_i=k_i=0$所以 By 盧卡斯定理（Lucas' Theorem）

$$\binom{l\times p^m+n}{q\times p^m+k}\equiv\binom{l_M}{q_M}\binom{l_{M-1}}{q_{M-1}}\cdots\binom{l_0}{q_0}\binom{n_{m-1}}{k_{m-1}}\cdots\binom{n_0}{k_0}(mod\ p)$$

$$\equiv\binom{l}{q}\binom{n}{k}\ (mod\ p)$$

證畢。

現在，我們來證①式：

【定理 7.2】 $\forall \omega \in \mathbb{N}$，斯特靈數三角形滿足：

$$[\boldsymbol{A_\omega}]_{2^{2+\omega}} \cup [\boldsymbol{A_\omega} + (\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{2}^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}} \cup [\boldsymbol{A_\omega}(\boldsymbol{2}^{2+\omega}, -\boldsymbol{2}^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}} = [\boldsymbol{A_{\omega+1}}]_{2^{(2+\omega)+1}}$$

【證明】

我們先證左邊

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}} \equiv [A_\omega + (0, -2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}} \ (mod\ 2)$$

根據**【定理1】**對於正整數n, k我們有：

$$S(n,k) \equiv \begin{cases} 0, & (mod\ 2)\ , if n < k \\ \binom{n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1}{n - k} & (mod\ 2)\ , if n \geq k \end{cases}$$

由**【定理1】**知

$$\begin{cases} S(n+a, k+b) \equiv \binom{n + a - \left\lfloor \frac{k+b}{2} \right\rfloor - 1}{n + a - k - b} \ (mod\ 2) \\ S(n + 2^{1+\omega} + a, k+b) \equiv \binom{n + a + 2^{1+\omega} - \left\lfloor \frac{k+b}{2} \right\rfloor - 1}{n + 2^{1+\omega} + a - k - b} \ (mod\ 2) \end{cases}$$

又由**【引理 7.1】**

$$\binom{n + a + 2^{1+\omega} - \left\lfloor \frac{k+b}{2} \right\rfloor - 1}{n + 2^{1+\omega} + a + -k - b} = \binom{n + a - \left\lfloor \frac{k+b}{2} \right\rfloor - 1 + 2^{1+\omega}}{n + a - k - b + 2^{1+\omega}}$$

$$\equiv \binom{n + a - \left\lfloor \frac{k+b}{2} \right\rfloor - 1}{n + a - k - b} (mod\ 2)$$

我們再證右邊

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}} \equiv [A_\omega(2^{2+\omega}, -2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}} \ (mod\ 2)$$

又

$$\begin{cases} S(n+a, k+b) \equiv \binom{n + a - \left\lfloor \frac{k+b}{2} \right\rfloor - 1}{n + a - k - b} \ (mod\ 2), \\ S(n + 2^{2+\omega} + a, k + 2^{2+\omega} + b) \equiv \binom{n + a + 2^{2+\omega} - \left\lfloor \frac{k + 2^{2+\omega} + b}{2} \right\rfloor - 1}{n + 2^{2+\omega} + a + -k - 2^{2+\omega} - b} \ (mod\ 2) \end{cases}$$

$$\binom{n+a+2^{2+\omega}-\left\lfloor\frac{k+2^{2+\omega}+b}{2}\right\rfloor-1}{n+2^{2+\omega}+a-k-2^{2+\omega}-b}=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{2+\omega}-2^{1+\omega}}{n+a+-k-b+2^{2+\omega}-2^{2+\omega}}$$

$$=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{1+\omega}(2-1)}{n+a-k-b}=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{1+\omega}}{n+a-k-b}$$

$$\equiv\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1}{n+a-k-b}\ (mod\ 2)$$

證畢。

由於定理 7.2 中$[A_\omega]_{2^{2+\omega}}$、$[A_\omega+(0,-2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}}$、$[A_\omega(2^{2+\omega},-2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}}$這三個區塊相加不為 0 的元素均不互相疊合，故無進位的問題，可視為互相獨立的區塊相加，而無元素的部分可以視為加 0，因此綜上我們得到：

$$[\boldsymbol{A_\omega}]_{2^{2+\omega}}\cup[\boldsymbol{A_\omega}+(\mathbf{0},-\mathbf{2}^{\mathbf{1}+\boldsymbol{\omega}})]_{2^{2+\omega}}\cup[\boldsymbol{A_\omega}(\mathbf{2}^{\mathbf{2}+\boldsymbol{\omega}},-\mathbf{2}^{\mathbf{2}+\boldsymbol{\omega}})]_{2^{2+\omega}}=[\boldsymbol{A_{\omega+1}}]_{2^{(2+\omega)+1}}$$

也就代表其有自我相似的性質，且是謝爾賓斯基三角形的模式。

以上七個研究我們幾乎已將 mod 2 研究透徹，但我們的野心不僅於此，於是我們想要推廣至 mod 3。因此我們開啟了研究八。

【研究八】利用組合數表示$S(n,k)\ (mod\ 3)$的餘數

在研究一中我們推導出一個$mod\ 2$下的組合同餘式，所以在推廣時我們先從這個面向推導一個$mod\ 3$下的組合同餘式，也以利後續的研究。

【定理 8】對於正整數n,k我們有：

$$\begin{cases} S(n,k)\equiv\binom{\left\lfloor\frac{k+1}{3}\right\rfloor+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}(mod\ 3)\ ,if n\geq k, n\equiv k\ (mod\ 2) \\ S(n,k)\equiv 0\ (mod\ 3), otherwise \end{cases}$$

【證明】

Case 1, if $\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{0}$ (mod 3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\,x^n=\prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix}\equiv\frac{x^k}{(1-x^2)^{\frac{k}{3}}}\ (mod\ 3)$$

因討論$\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{0}$ **(mod 3)**所以令$k=3t, t\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

$$\frac{x^k}{(1-x^2)^{\frac{k}{3}}}=\frac{x^{3t}}{(1-x^2)^t}=x^{3t}(1+x^2+x^4+\cdots)^t$$

又由廣義二項式定理推導後再把x^{3t}乘進去得

$$\left(\frac{1}{(1-x^2)}\right)^t = (1-x^2)^{-t} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m-1}{m}x^{2m}$$

$$\Rightarrow x^{3t}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m-1}{m}x^{2m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m-1}{m}x^{3t+2m}$$

令$n = 3t + 2m$，則$m = \frac{n-3t}{2}$

$$\sum_{\substack{n\geq 3t \\ n\equiv 3t\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{t+\frac{n-3t}{2}-1}{\frac{n-3t}{2}}x^n = \sum_{\substack{n\geq k \\ n\equiv k\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{\frac{k}{3}+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}x^n$$

Otherwise : $S(n,k) \equiv 0\ (mod\ 3)$

證畢

Case 2, if $\boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}$ (mod 3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\,x^n = \prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix} \equiv \frac{x^k}{(1-x^2)^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor}(1-x)}\ (mod\ 3)$$

$$= x^k\frac{1}{(1-x^2)^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor}}\left(\frac{1}{1-x}\right) = x^k\left(\frac{1}{(1-x^2)}\right)^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= x^k(1+x^2+x^4+\cdots)^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor}(1+x+x^2+\cdots)$$

因討論$\boldsymbol{k} \equiv \mathbf{1}$ **(mod 3)**所以令$k = 3t+1\ t \in \mathrm{N}\cup\{0\}$ 得

$$x^{3t+1}(1+x^2+x^4+\cdots)^t(1+x+x^2+\cdots)$$

利用廣義二項式定理

$$= x^{3t+1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\binom{t+i-1}{i}x^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\right)$$

合併後得到

$$= x^{3t+1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{t+i-1}{i}x^{2i+j}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{t+i-1}{i}x^{3t+1+2i+j}$$

令$n = 3t+1+2i+j$ 得

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=\frac{n-(3t+1)}{2}}\binom{t+i-1}{i}\right)x^n=\sum_{\substack{n\geq k\\ n\equiv k\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{\frac{k-1}{3}+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}x^n$$

證畢

Case 3, if $\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{2}$ (mod 3) 運用與 Case 1, if $\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{0}$ (mod 3)相同手法證明

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\,x^n=\prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix}\equiv\frac{x^k}{(1-x^2)^{\frac{k+1}{3}}}\ (mod\ 3)$$

因討論$\boldsymbol{k}\equiv\mathbf{2}$ **(mod 3)**所以令$k=3t+2,t\in\mathrm{N}\cup\{0\}$

$$\frac{x^k}{(1-x^2)^{\frac{k+1}{3}}}=\frac{x^{3t+2}}{(1-x^2)^{t+1}}=x^{3t+2}(1+x^2+x^4+\cdots)^{t+1}$$

又由廣義二項式定理可得

$$\left(\frac{1}{(1-x^2)}\right)^{t+1}=(1-x^2)^{-(t+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m}{m}x^{2m}$$

把x^{3t+2}乘進去得

$$x^{3t+2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m}{m}x^{2m}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m}{m}x^{2m+3t+2}$$

令$n=3t+2m+2$，則$m=\frac{n-3t-2}{2}$

$$\sum_{\substack{n\geq 3t+2\\ n\equiv 3t-2\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{t+\frac{n-3t}{2}-1}{\frac{n-3t}{2}-1}x^n=\sum_{\substack{n\geq k\\ n\equiv k\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{\frac{k-2}{3}+\frac{n-k}{2}}{\frac{n-k}{2}}x^n$$

Otherwise : $S(n,k)\equiv 0\ (mod\ 3)$

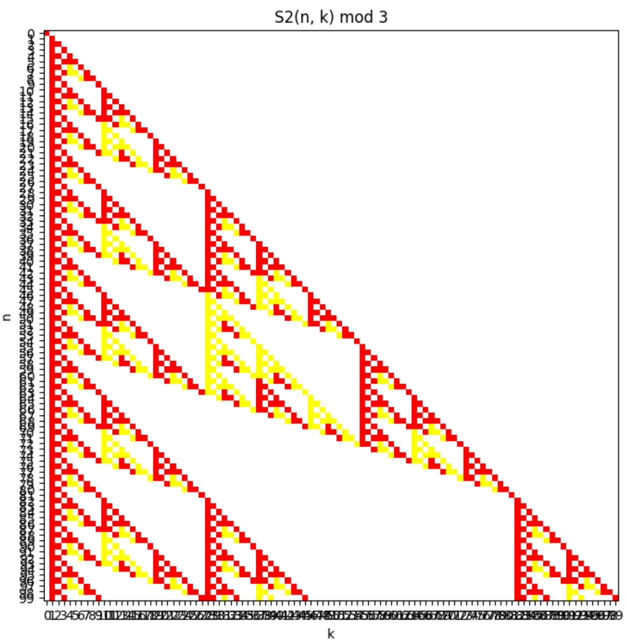
證畢

由上述三點我們可以用高斯符號合併成：

$$\begin{cases}S(n,k)\equiv\binom{\left\lfloor\frac{k+1}{3}\right\rfloor+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}(mod\ 3)\ ,if n\geq k,n\equiv k(mod\ 2)\\ S(n,k)\equiv 0\ (mod\ 3),otherwise\end{cases}$$

【研究九】探討斯特靈數三角形在模3下的圖形性質

在研究七中，我們確認了斯特靈數在模 2 下的三角形是具有碎形結構的，於是我們好奇模 3 也有這個漂亮的現象嗎？所以我們一樣利用 python 畫圖得到下圖七，其中白色為 0，紅色為 1，黃色為 2：



圖七：斯特靈數三角形 mod 3 （本圖由作者親自製作）

我們又可以發現圖中具有漂亮的規律，而且也是謝爾賓斯基的樣式，經過文獻探討我們確認並沒有任何文獻探討這種現象。因此我們一樣決定自己證明這個性質，並利用研究八的組合數來推導。

首先我們定義A_1是這個組成碎形的這個單位三角形

$$A_1=\begin{bmatrix} S(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(2,1) & S(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(5,1) & S(5,2) & S(5,3) & S(5,4) & S(5,5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(6,1) & S(6,2) & S(6,3) & S(6,4) & S(6,5) & S(6,6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(7,3) & S(7,4) & S(7,5) & S(7,6) & S(7,7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(8,6) & S(8,7) & S(8,8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(9,9) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&2&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&2&2&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} (mod\ 3)$$

經過計算得（其中$[A_\omega]$代表元素中$0\to 0, 1\to 2, 2\to 1$）

$$[A_1]\cup[A_1+(0,-6)]\cup[A_\omega+(9,-9)]\cup[A_\omega+(0,-12)]\cup[A_\omega+(9,-15)]\cup[A_\omega+(18,-18)]=[A_2]$$

再放大一個倍率計算得

$$[A_2]\cup[A_2+(0,-18)]\cup[A_2+(27,-27)]\cup[A_\omega+(0,-36)]\cup[A_\omega+(27,-45)]\cup[A_\omega+(54,-54)]=[A_3]$$

透過觀察我們猜想通式為

$$[A_\omega] \cup [A_\omega + (0, -2 \times 3^\omega)] \cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (0, -4 \times 3^\omega)] \cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -2 \times 3^\omega - 3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (2 \times 3^{\omega+1}, -2 \times 3^{\omega+1})] = [A_{\omega+1}]$$

【定理 9】

$\forall \omega \in \mathbb{N}$ 斯特靈數三角形在模 3 下滿足，其中

$$[A_\omega] \cup [A_\omega + (0, -2 \times 3^\omega)] \cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (0, -4 \times 3^\omega)] \cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -2 \times 3^\omega - 3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (2 \times 3^{\omega+1}, -2 \times 3^{\omega+1})] = [A_{\omega+1}]$$

【證明】

一、 首先，我們先證

$$[A_\omega] \equiv [A_\omega + (0, -2 \times 3^\omega)]\ (mod\ 3)$$

1. 當$k = 3t$時，由**【定理 8】**

$$S(n+a,k) \equiv \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a-k}{2} - 1}{\frac{n+a-k}{2}} (mod\ 3)\ if\ n \geq k, n \equiv k\ (mod\ 2)$$

$$S(n+a+2\times 3^\omega,k) \equiv \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a+2\times 3^\omega-k}{2} - 1}{\frac{n+a+2\times 3^\omega-k}{2}} (mod\ 3)\ if\ n \geq k, n \equiv k\ (mod\ 2)$$

又

$$\binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a+2\times 3^\omega-k}{2} - 1}{\frac{n+a+2\times 3^\omega-k}{2}} = \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a-k}{2} - 1 + 3^\omega}{\frac{n+a-k}{2} + 3^\omega} \equiv \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a-k}{2} - 1}{\frac{n+a-k}{2}} (mod\ 3)$$

故得證

2. 當$k = 3t + 1$時，與 1. 狀況類似，僅數字改變，故得證。

3. 當$k = 3t + 2$時，與 1. 狀況也類似，僅數字改變，故得證。

二、 再來我們證

$$[A_\omega] \equiv [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})]\ (mod\ 3)$$

1. 當$k = 3t$時，由**【定理 8】**

$$S(n+a,k) \equiv \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a-k}{2} - 1}{\frac{n+a-k}{2}} (mod\ 3)\ if\ n \geq k, n \equiv k\ (mod\ 2)$$

$$S(n+a+2\times 3^\omega,k+2\times 3^\omega) \equiv \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a+2\times 3^\omega-k-2\times 3^\omega}{2} - 1}{\frac{n+a+2\times 3^\omega-k-2\times 3^\omega}{2}} (mod\ 3)\ if\ n \geq k, n \equiv k\ (mod\ 2)$$

又

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k}{3}+\dfrac{n+a+2\times 3^{\omega}-k-2\times 3^{\omega}}{2}-1 \\ \dfrac{n+a+2\times 3^{\omega}-k-2\times 3^{\omega}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{k}{3}+\dfrac{n+a-k}{2}-1 \\ \dfrac{n+a-k}{2} \end{pmatrix}$$

得證

2. 當$k=3t+1$時，與 1. 狀況類似，這邊不證。
3. 當$k=3t+2$時，與 1. 情況也類似，這邊不證
4. 又因為

$$[A_\omega+(0,-4\times 3^{\omega})]=[A_\omega+(0,2(-2\times 3^{\omega}))]$$

$$[A_\omega+(2\times 3^{\omega+1},-2\times 3^{\omega+1})]=[A_\omega+(2(3^{\omega+1}),2(-3^{\omega+1}))]$$

故這兩塊顯然的也有自我相似性（透過重複做兩次平移故依舊同餘），得證。

5. 特別的

$[A_\omega+(3^{\omega+1},-2\times 3^{\omega}-3^{\omega+1})]$ $=[A_\omega+(0,-2\times 3^{\omega})]+[A_\omega+(3^{\omega+1},-3^{\omega+1})]$

又因$[A_\omega+(0,-2\times 3^{\omega})]=[A_\omega+(3^{\omega+1},-3^{\omega+1})]$故元素$0+0\equiv 0\ (mod\ 3), 1+1=2\ (mod\ 3),\ 2+2\equiv 1(mod\ 3)$因此會有$[A_\omega]$代表元素中$0\to 0, 1\to 2, 2\to 1$。

綜上，我們得到所有的區塊均有同餘性質，綜觀來看有自我相似性，因此我們得到斯特靈數三角形在模 3 下是謝爾賓斯基三角形。

伍、研究結果

一、**【定理1】**：對於正整數n,k我們有：

$$S(n,k) \equiv \begin{cases} 0, & (mod\ 2)\ , if n < k \\ \binom{n-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}{n-k} & (mod\ 2)\ , if n \geq k \end{cases}$$

可參考第 3-4 頁

二、改進與簡化原論文的證明

在文獻中，原論文使用 LTE 升冪引理的方式證明$S(2n,n)$是奇數時，n屬於 Fibbinary numbers，在【研究二】中，我們提出利用組合數$\binom{3n}{n} \equiv S(2n,n)\ (mod\ 2)$來證明，由於其簡易性與易算性，為下一步推廣打下了基礎。 可參考第 4-10 頁

三、**【定理4.1】**$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S(3n,n) \equiv \binom{5n}{n}\ (mod\ 2)$$

四、**【定理4.2】**$\forall n \in \mathbb{N}$

當$S(3n,n)$、$\binom{5n}{n}$為奇數時，n 於二進位下須滿足每個 1 往前後數二位都是 0

可參考第 10-12 頁

五、**【定理 5】**$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S(5n,n) \equiv \binom{9n}{n}\ (mod\ 2)$$

可參考第 13 頁

六、**【定理 6】**$\forall n \in \mathbb{N},\ p$是任意質數

$$S(pn,n) \equiv \binom{(2p-1)n}{n}\ (mod\ 2)$$

可參考第 14-15 頁

七、**【定理 7】**$\forall \omega \in \mathbb{N}$，斯特靈數三角形在模 2 下滿足：

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}} \cup [A_\omega + (0,-2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}} \cup [A_\omega(2^{2+\omega},-2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}} = [A_{\omega+1}]_{2^{(2+\omega)+1}}$$

可參考第 16-21 頁

八、**【定理 8】**對於正整數n,k我們有：

$$\begin{cases} S(n,k) \equiv \binom{\left\lfloor\frac{k+1}{3}\right\rfloor+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}(mod\ 3)\ , if n \geq k, n \equiv k(mod\ 2) \\ S(n,k) \equiv 0\ (mod\ 3), otherwise \end{cases}$$

可參考第 21-23 頁

九、**【定理 9】**

$\forall\omega \in \mathbb{N}$ 斯特靈數三角形在模 3 下滿足下式，且具有自我相似性，其中

$$[A_\omega] \cup [A_\omega + (0, -2 \times 3^\omega)] \cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (0, -4 \times 3^\omega)]$$
$$\cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -2 \times 3^\omega - 3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (2 \times 3^{\omega+1}, -2 \times 3^{\omega+1})] = [A_{\omega+1}]$$

可參考第 24-26 頁

十、討論

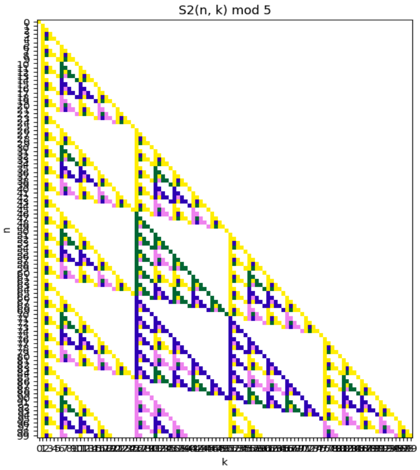
我們利用$S(n,k)(mod\ 2)$時的組合數同餘式，在後續證明$S(pn,n)$的過程中，也因組合數相較於斯特靈數本身容易計算，使得後面的證明較為簡潔。同時，我們已找出滿足$S(2n,n)$、$S(3n,n)$為奇數時n的條件，且都與二進制表達有直接相關，不過目前沒有推出滿足$S(pn,n)$為奇數時n的條件，這部分值得繼續探討，我們認為與其二進制表達式也有高度相關。

在定理六，我們得到一個更一般的結論。證明過程中，我們原先以為p與p'為相鄰質數，但後來才發現兩者關係更為簡潔，甚至是線性關係，看似複雜的斯特靈數，竟然與組合數有如此漂亮的關係。

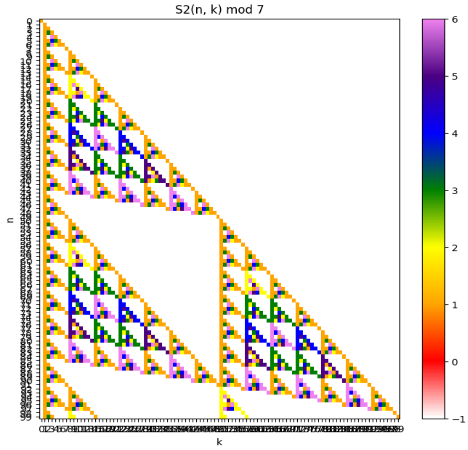
在研究六我們利用 Python 作圖後發現圖中有漂亮且驚人的規律，一開始我們並不知道那是謝爾賓斯基三角形，在上網查找後發現並沒有任何文獻探討這個有趣的現象，但是我們同時發現巴斯卡三角形[7]有這個特性，且是廣為人知的性質，所以我們相信斯特靈數三角形也有這個性質，因此我們在研究七中利用自我相似性證明了這件事，隨著ω越來越大，整個謝爾賓斯基三角形的分佈越來越明顯。證明過程中遇到最難解決的問題是因為最基本的單位三角形的底部斜率並非 0，而是階梯狀，與巴斯卡三角形討論的情況不同[7]，為了解決這個問題，我們使用類似矩陣加法的概念來處理，透過定義即複製與平移的手法來證明，而最終得到一個嶄新的結果。在研究八中，我們自己推出了一個模 3 下的斯特靈數組合同餘式，這個定理讓我們可以在研究九中可以利用他來證明並推廣斯特靈數三角形不僅在模 2 下有碎形性質，在模 3 下也具有！且也是謝爾賓斯基三角形的樣式。特別的，在模 3 的情況下，有一個區塊會跟其他不一樣的現象，造成整體的碎形性質更加容易觀察而且漂亮！

陸、未來展望

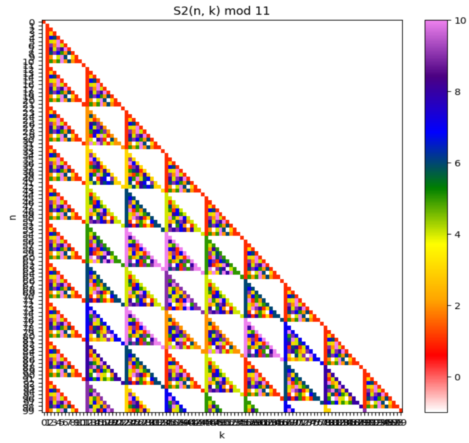
針對研究七與九，事實上不只模 2 與 3 有碎形結構，我們發現模其他質數也有類似的圖形，不過隨著除數變大，餘數的可能值也越來越多，以下為模不同質數的圖形。未來期待能證明出對於任意質數都有謝爾賓斯基三角形這樣的性質。



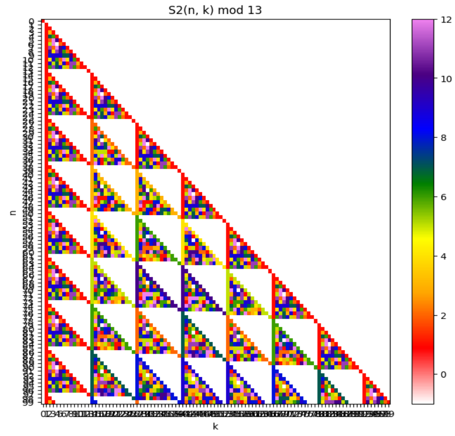
圖八：模 5 （本圖由作者親自製作）



圖九：模 7（本圖由作者親自製作）



圖十：模 11（本圖由作者親自製作）



圖十一：模 13（本圖由作者親自製作）

柒、結論

我們透過斯特靈數的生成函數以及其與組合數之間的巧妙關係推導出，給定n與k時斯特靈數的奇偶性，並在過程中運用 Python, OEIS 等進行研究，不僅改進了一篇論文的證明過程，也運用二進制的特殊性質與盧卡斯定理，推廣出第二類斯特靈數與組合數較為一般的結論，最後我們證明了斯特靈數三角形模 2 與模 3 皆存在謝爾賓斯基三角形，且任何文獻中都未曾討論過，也推出了$S(n,k)$模 2 與模 3 下的組合同餘式。

捌、參考文獻

[1] Chan, O., & Manna, D.V. (2009). Congruences for Stirling Numbers of the Second Kind. Mathematics. Published 2009.

[2] Cynthia, & Chahat. (2023). Stirling Numbers of the Second Kind. MIT PRIMES Circle Spring 2023

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Retrieved February 11, 2024, from https://oeis.org

[4] Sequence A003714. In The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Retrieved February 11, 2024, from https://oeis.org/search?q=A003714

[5] Meštrović, R. (2014). Lucas' Theorem: Its Generalizations, Extensions and Applications (1878-2014).

[6] Sequence A048716. In The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Retrieved February 11, 2024, from https://oeis.org/A048716

[7] Bannink, T., & Buhrman, H. (2017). Quantum Pascal's triangle and Sierpinski's carpet. *arXiv: Quantum Physics*.

[8] 謝爾賓斯基三角形示意圖：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/謝爾賓斯基三角形

玖、附錄

表三：滿足$S(pn,n)$,$\binom{p'n}{n}$為奇數時的n值

p	p'	前 15 項
2	3	0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 20, 21, 32, 33
3	5	0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 17, 18, 19, 24, 25
5	9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 20
7	13	0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 16, 17, 19, 22, 24, 27
11	21	0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 33, 36
13	25	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 20
17	33	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
19	37	0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 17, 18, 19, 24, 25
23	45	0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 16, 17, 19, 22, 24, 27
29	57	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 20
31	61	0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 16, 22, 24, 32, 43, 44
37	73	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 20

【評語】050407

本作品研究第二類斯特靈數 S(n,k)的奇偶性，其中 S(n,k)定義成將 n 個元素分配到 k 個非空集合的方法數。文獻已證明 S(2n, n)是奇數若且唯若 n 的二進位表達式中不會出現相鄰的 1。作者在改良的證明過程中，意外發現 S(n,k)與特定組合數同奇偶，據此推廣延伸，最終得到若 p 是質數，則 S(pn,n)與組合數(2p − 1)n 取 n 同奇偶，且當 p=3 時，作者還刻劃了 S(pn,n)的奇偶性與 n 的二進位表達式之間的等價關係。除此之外，作者又證明將 S(n,k)的奇偶性畫在平面上可以有碎形的性質，而且 S(n,k)除以 3 的餘數畫在平面上也有相同的碎形性質。定理 1 扮演重要角色，作者雖說改進了文獻中的證明，但實際上和原證明的脈絡相同。探討 S(m,k)的奇偶性分佈碎形的結構。碎形的研究，由於碎形就是局部類似於全貌，因此用遞迴關係研究可說是固定的技巧和方法。整體而言，本研究內容十分有趣。

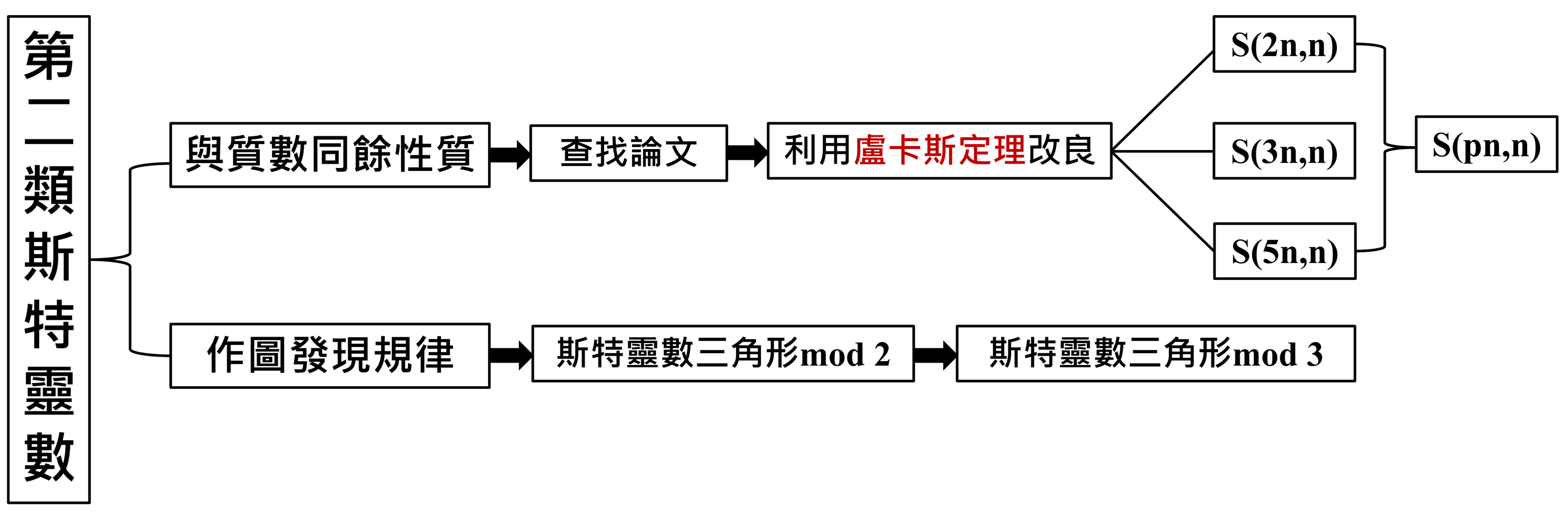
作品簡報

「餘」霞成綺——————利用組合數探討 Stirling Number of the Second Kind Triangle Fractal 與質數同餘性質

壹、摘要與研究動機

我們看到了Chan,O-Y.[1]等人對於斯特靈數的研究論文，其中發現一項內容在探討$S(2n,n)$的奇偶性，但看到其方法複雜不直觀，因此決定自己改良證明方法，而後想推廣到$S(3n,n)$。在利用python製作斯特靈數的奇偶圖時發現其有驚人的規律美，查找文獻卻沒有看到相關探討與研究，因此毅然決然投入這項證明，最後不僅證明出mod 2的情況，更是推廣到mod 3的模式。

貳、研究目的與架構



圖一：研究架構圖（本圖由作者親自製作）

參、名詞符號與解釋

第二類斯特靈數 (Stirling number of the second kind)定義：

第二類斯特靈數$S(n,k)$，其中n,k為正整數，被定義為將n個相異元素分配到k個非空集合的方法數。

性質:

遞迴性質：$S(n,k) = S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$

生成函數：

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\,x^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{x}{1-ix}$$

公式:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n$$

盧卡斯定理（Lucas' Theorem）：

給定n,k是p進制下的表示法，其中p是一個質數。其中$i \in \mathbb{N}\cup 0$，且$0 \le a_i, b_i \le p-1, 0 \le i \le r$

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i\,, k = \sum_{i=0}^{r} b_i p^i\,, \binom{n}{k} \equiv \prod_{i=0}^{r}\binom{a_i}{b_i}\ (mod\ p)$$

定義1. 符號$[S(n,k)]_i$為在斯特靈數座標系統中範圍長寬為i的區塊，例如$[S(n,k)]_2 = \begin{bmatrix} S(n,k) & S(n,k+1) \\ S(n+1,k) & S(n+1,k+1)\end{bmatrix}$為一個長寬為2的區塊，其中$S(n,k)$為第二類斯特靈數

定義2. 定義$[A_i + (x,-y)]_2$為將區塊$[A_i]_2$向下平移y單位，向右平移x單位。

定義3. $[S(n,k)]_i \equiv [S(n',k')]_i\ (mod\ p)$ 當區塊內對應的元素皆兩兩模p同餘。最後，我們說$[A_\omega]_i \cup [A_\omega]_j$為兩個區塊的拼接。

肆、研究過程與方法

研究一：推導$S(n,k)$ 的組合同餘式

【定理1】

對於正整數n,k我們有：

$$S(n,k) \equiv \begin{cases} 0, & (mod\ 2)\,, if n < k \\ \binom{n-\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}{n-k} & (mod\ 2)\,, if n \ge k\end{cases}$$

【證明】

(一) 由定義當$n < k$時，$S(n,k) = 0$，故$S(n,k) \equiv 0\ (mod\ 2)$

(二)當$n \ge k$時，我們使用斯特靈數的生成函數

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\,x^n = \prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix} \equiv \frac{x^k}{(1-x)^{\lfloor(k+1)/2\rfloor}}\ (mod\ 2)$$

$$\frac{x^k}{(1-x)^{\lfloor(k+1)/2\rfloor}} = x^k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}{n}x^n$$

將組合數展開，經過化簡得

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor-k-1}{n-k}x^n\ (mod\ 2)$係數簡化後即證畢。

文獻探討[1]：$S(2n,n)$是奇數n的條件

【**定理**】：$\forall n \in \mathbb{N}$ 當$S(2n,n)$是奇數時，n於二進位下必須滿足每個1不相鄰

【**證明**】

原文獻利用$v_p(n)$、$s_p(n)$、LTE升冪引理與二進位的關係來證明因其證明方法太過複雜、較隱晦且不易推廣至 $S(3n,n)$，所以我們展開了研究二。

研究二：改良原論文的證明$S(2n,n)$是奇數n的條件

【定理3.1】： $\forall n \in \mathbb{N}$： $\boldsymbol{S(2n,n) \equiv \binom{3n}{n}(mod\ 2)}$

【證明】

由【**定理1**】$S(2n,n) \equiv \binom{2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{n}\ (mod\ 2)$。由於組合數中有高斯符號，我們將$n$分成奇數與偶數兩部分討論。當$n$是偶數時，得$\binom{2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{n} \equiv \binom{3n-2}{2n}\ (mod\ 2)$。我們令$n = 2t\ \ (t \in \mathbb{N})$ 得$\binom{3n-2}{2n} = \binom{6t-2}{4t} = \binom{3t-1}{2t} \equiv \binom{3t-1}{t-1} \equiv \binom{3t}{t}\ (mod\ 2)$，而當$n$是奇數時，得$\binom{2n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{n} \equiv \binom{3n}{n}\ (mod\ 2)$。我們令$n = 2t+1\ (t \in \mathbb{N})$，則$\binom{3n}{n} = \binom{6t+3}{2t+1} = \binom{3(2t+1)}{2t+1}$。令$t' = 2t+1$得$\binom{3(2t+1)}{2t+1} = \binom{3t'}{t'}\ (mod\ 2)$。

總合以上，我們可以整合成：$\forall n \in \mathbb{N}$我們有$S(2n,n) \equiv \binom{3n}{n}\ (mod\ 2)$。證畢。

【定理3.2】： $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ **當$\binom{3n}{n}$是奇數時，$\boldsymbol{n}$於二進位下必須滿足每個1不相鄰**

【證明】

利用盧卡斯定理，將$\binom{3n}{n}$中的$3n$與n轉換成2進位展開$3n = a_0 + a_1 2^1 + \cdots + a_{i-1}2^{i-1} + a_i 2^i, n = b_0 + b_1 2^1 + \cdots + b_{i-1}2^{i-1} + b_i 2^i$得:$\binom{3n}{n} \equiv \prod_{i=0}^{r}\binom{a_i}{b_i}\ (mod\ 2)$,其中$i \in \mathbb{N}\cup 0$，且$0 \le a_i, b_i \le p-1, 0 \le i \le r$,若要使得$\binom{3n}{n}$為奇數，每個$\binom{a_i}{b_i}$都必定是1,而只有三種情況會使得$\binom{a_i}{b_i} = 1$，分別是$a_i = 1, b_i = 1;\ a_i = 1, b_i = 0; a_i = 0, b_i = 0$。再利用反證法假設當$\binom{3n}{n}$為奇數時，$n$的二進制存在連續兩個位元為1，運算後與假設矛盾。故n於二進位下必須滿足每個1不相鄰，證畢。

研究三：推廣$S(3n,n)$是奇數n的條件

【定理4.1】： $\forall n \in \mathbb{N}$：$\boldsymbol{S(3n,n) \equiv \binom{5n}{n}(mod\ 2)}$

證明手法與【**定理3.1**】相同，只需將【**定理3.1**】之$2n$改為$3n$。當n是偶數時，得$\binom{3n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{2n} \equiv \binom{5n-2}{n-2}\ (mod\ 2)$。令$n = 2t\ \ (t \in \mathbb{N})$ 得$\binom{5n-2}{n-2} \equiv \binom{5t}{t}\ (mod\ 2)$。當$n$是奇數時，得$\binom{3n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1}{2n} \equiv \binom{5n-1}{n-1}\ (mod\ 2)$。令$n = 2t+1\ (t \in \mathbb{N})$，得$\binom{5n-1}{n-1} \equiv \binom{5t}{t}\ (mod\ 2)$。

【定理4.2】： $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ **當$\binom{5n}{n}$為奇數時，$\boldsymbol{n}$於二進位下須滿足每個1往前後數二位都是0**

證明手法與【**定理3.2**】相同，只需將【**定理3.2**】之$3n$改為$5n$。利用盧卡斯定理得$\binom{5n}{n} \equiv \prod_{i=0}^{r}\binom{a_i}{b_i}\ (mod\ 2)$,其中$i \in \mathbb{N}\cup 0$，且$0 \le a_i, b_i \le p-1, 0 \le i \le r$,再利用反證法假設當$\binom{5n}{n}$為奇數時，$n$的二進制存在一個位元$k$滿足$b_k = 1, b_{k-2} = 1$，運算後與假設矛盾。故$n$於二進位下須滿足每個1往前後數二位都是0，證畢。

研究四：推廣$S(5n,n)$是奇數n的條件

【定理5】：$\forall n\in\mathbb{N}\ \ S(5n,n)\equiv\binom{9n}{n}\ (mod\ 2)$

【證明】

由【定理1】得$S(5n,n)\equiv\binom{5n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{4n}\ (mod\ 2)$。由於組合數中有高斯符號，我們將$n$分成奇數與偶數兩部分討論。當$n$是偶數時，得$\binom{5n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{4n}\equiv\binom{9n-2}{8n}\equiv\binom{9n-2}{n-2}\ (mod\ 2)$。我們令$n=2t\ \ (t\in\mathbb{N})$得$\binom{9n-2}{n-2}=\binom{18t-2}{2t-2}=\binom{2(9t-1)}{2(t-1)}\equiv\binom{5t-1}{t-1}\equiv\binom{9t}{t}\ (mod\ 2)$。當$n$是奇數時，得$\binom{5n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{4n}\equiv\binom{9n-1}{8n}=\binom{9n-1}{n-1}\ (mod\ 2)$。我們令$n=2t+1\ (t\in\mathbb{N})$，則得$\binom{9n-1}{n-1}=\binom{18t+8}{2t}=\binom{18t+8}{16t+8}\equiv\binom{9t+4}{8t+4}\equiv\binom{9t}{t}\ (mod\ 2)$。

總合以上兩點，我們可以整合成：$\forall n\in\mathbb{N}$我們有$S(5n,n)\equiv\binom{9n}{n}(mod\ 2)$證畢。

研究五：$S(pn,n)\equiv\binom{p'n}{n}\ (mod\ 2)$時，$p$與$p'$的關係

【定理6】：$\forall n,p\in\mathbb{N},S(pn,n)\equiv\binom{(2p-1)n}{n}\ (mod\ 2)$

【證明】

由【定理1】得$S(pn,n)\equiv\binom{pn-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{(p-1)n}(mod\ 2)$。我們將$n$分成偶數與奇數兩部分來討論， 當$n$為偶數$\binom{pn-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{(p-1)n}\equiv\binom{2pn-\lfloor n\rfloor-2}{2(p-1)n}=\binom{2pn-n-2}{2(p-1)n}\ (mod\ 2)$令$n=2t\ (t\in\mathbb{N})\binom{2pn-n-2}{2(p-1)n}\equiv\binom{(2p-1)t-1}{2(p-1)t}=\binom{(2p-1)t-1}{t-1}\equiv\binom{(2p-1)t}{t}(mod\ 2)$。當$n$為奇數$\binom{pn-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}{(p-1)n}\equiv\binom{2pn-(n-1)-2}{2(p-1)n}=\binom{(2p-1)n-1}{n-1}\equiv\binom{(2p-1)n}{n}\ (mod\ 2)$

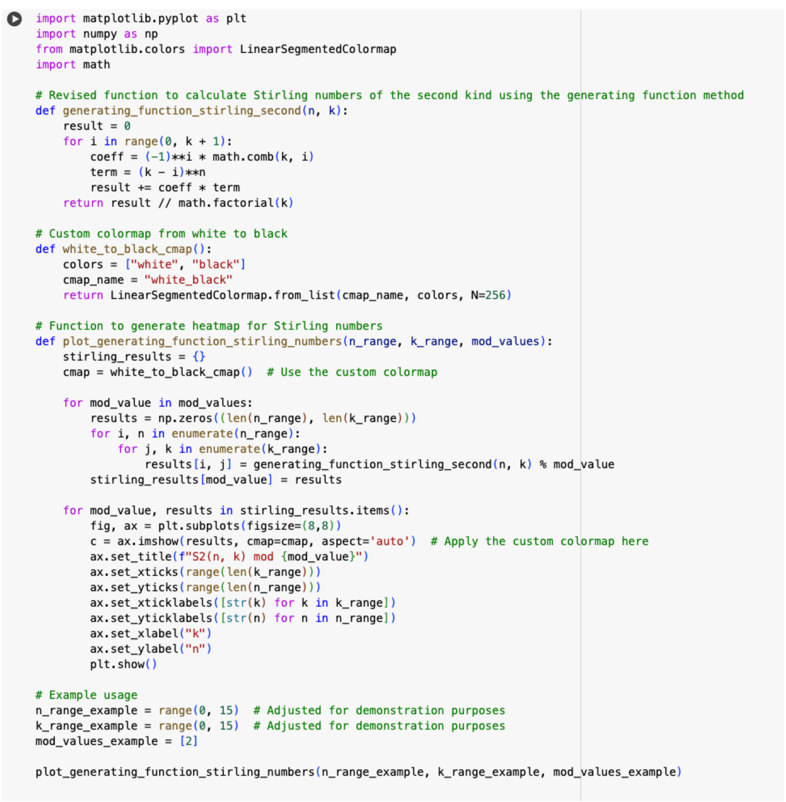
由(一)、(二)兩點得$S(pn,n)\equiv\binom{(2p-1)n}{n}\ (mod\ 2)$ 證畢。

研究六：自寫程式繪製熱圖來觀察$S(n,k)$之奇偶性分佈

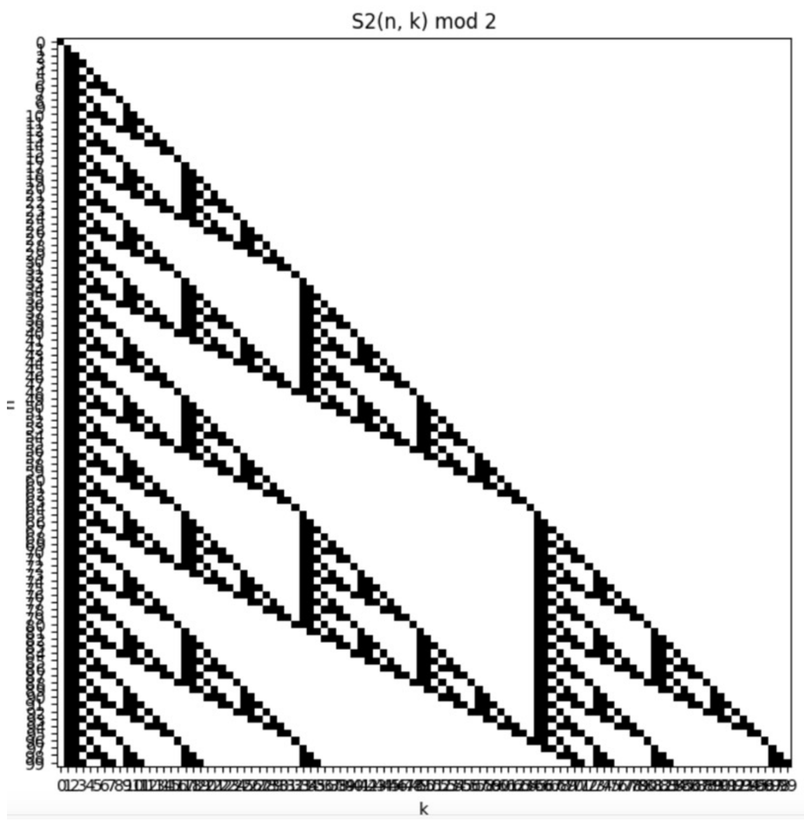
在這部分的研究中，我們使用 Python 來描繪$S(n,k)$的奇偶性，其中$0\le n,k\le 100$ 縱軸為n(由上而下依序為 0~100)，橫軸為k(由左而右依序為 0~100)黃色像素表其值為1，紫色為0，程式碼詳見附錄。

在右圖中，我們可以觀察到幾個有趣的現象，其一為分佈圖中的右斜上半部中皆為餘 0 (紫色)。其二為分佈圖中存在類似謝爾賓斯基三角形(Sierpinski triangle)的圖形，隨著n,k的值越來越大，週期性的存在也越來越明顯．

圖二：謝爾賓斯基三角形[4]



圖三：模質數下的python程式碼示意圖
（本圖由作者親自製作）



圖四：模2下的斯特靈數三角形
（本圖由作者親自製作）

研究七：斯特靈數三角形模2時的碎形結構

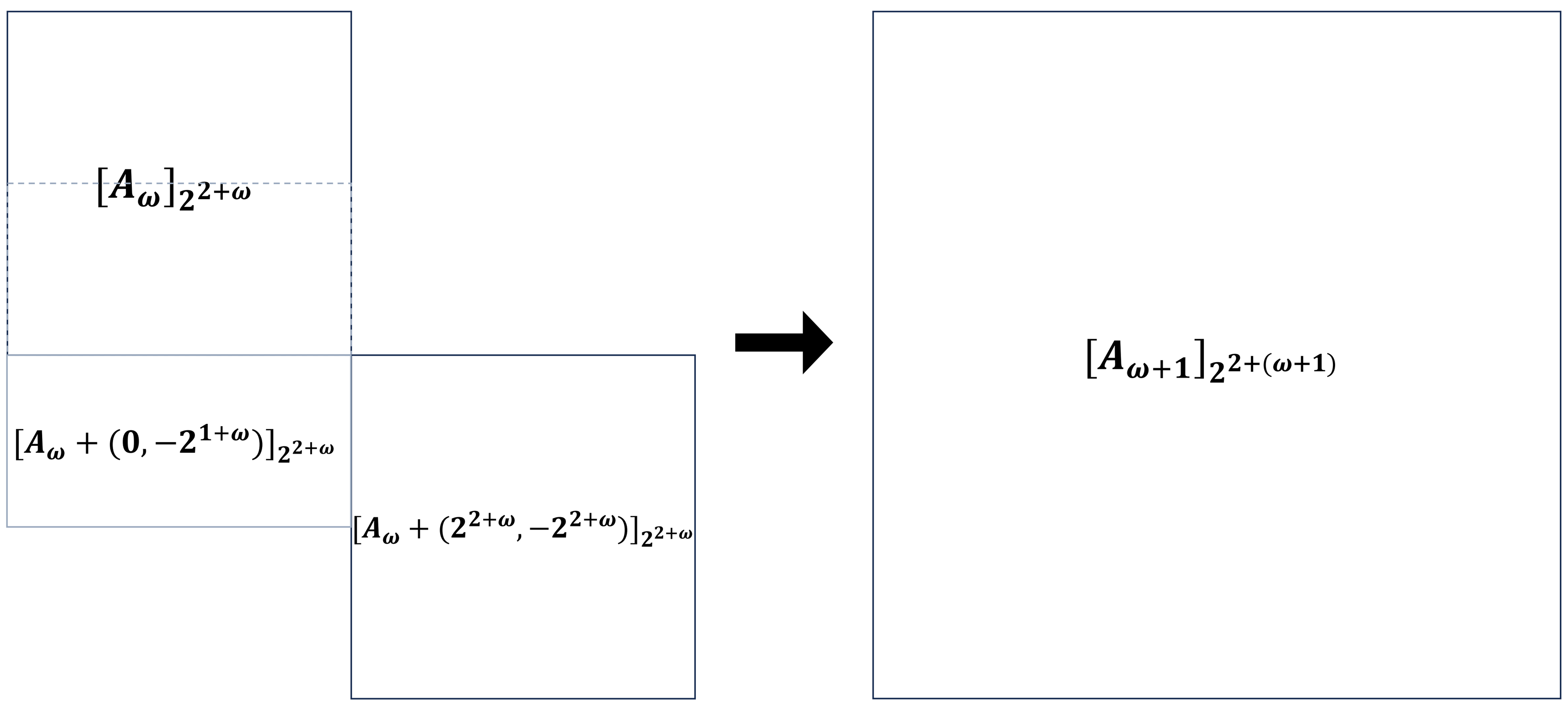
我們觀察到整張圖可以看成是由一個「單位三角形」透過複製、平移與貼上而構成的，單位三角形可以寫成下式且定義$[A_1]_8$ ：

$$[A_1]_8=\begin{bmatrix}S(1,1)&0&0&0&0&0&0&0\\S(2,1)&S(2,2)&0&0&0&0&0&0\\S(3,1)&S(3,2)&S(3,3)&0&0&0&0&0\\S(4,1)&S(4,2)&S(4,3)&S(4,4)&0&0&0&0\\0&S(5,2)&S(5,3)&S(5,4)&S(5,5)&0&0&0\\0&0&0&S(6,4)&S(6,5)&S(6,6)&0&0\\0&0&0&0&0&S(7,6)&S(7,7)&0\\0&0&0&0&0&0&0&S(8,8)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}(mod\ 2)$$

透過計算可得：$[A_1]_8\cup[A_1+(0,-4)]_8\cup[A_1+(8,-8)]_8=[A_2]_{16}$

其中$[A_1+(0,-4)]_8$的意義為將$[A_1]_8$往下(y軸)平移四個單位，$[A_1+(8,-8)]_8$的意義為將$[A_1]_8$往下平移八個單位再往右八個單位，以這個規律繼續計算，我們猜想通式：$[\boldsymbol{A_\omega}]_{2^{2+\omega}}\cup[\boldsymbol{A_\omega}+(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{2^{1+\omega}})]_{2^{2+\omega}}\cup[\boldsymbol{A_\omega}+(\boldsymbol{2^{2+\omega}},-\boldsymbol{2^{2+\omega}})]_{2^{2+\omega}}=[\boldsymbol{A_{\omega+1}}]_{2^{(2+\omega)+1}}$

若上式成立，則我們就可以說斯特靈數模2下之圖形具有自我相似性，現在我們證明上式。



圖五:拼接示意圖（本圖由作者親自製作）

【定理7】$\forall\omega\in\mathbb{N}$，斯特靈數三角形滿足：

$[\boldsymbol{A_\omega}]_{2^{2+\omega}}\cup[\boldsymbol{A_\omega}+(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{2^{1+\omega}})]_{2^{2+\omega}}\cup[\boldsymbol{A_\omega}+(\boldsymbol{2^{2+\omega}},-\boldsymbol{2^{2+\omega}})]_{2^{2+\omega}}=[\boldsymbol{A_{\omega+1}}]_{2^{(2+\omega)+1}}$

【證明】

我們先證左邊

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}}\equiv[A_\omega+(0,-2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}}\ (mod\ 2)$$

由【定理1】知

$$\binom{n+a+2^{1+\omega}-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1}{n+2^{1+\omega}+a+-k-b}=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{1+\omega}}{n+a-k-b+2^{1+\omega}}$$

$$\equiv\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1}{n+a-k-b}(mod\ 2)$$

我們再證右邊

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}}\equiv[A_\omega+(2^{2+\omega},-2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}}\ (mod\ 2)$$

又由【定理1】知

$$\binom{n+a+2^{2+\omega}-\left\lfloor\frac{k+2^{2+\omega}+b}{2}\right\rfloor-1}{n+2^{2+\omega}+a-k-2^{2+\omega}-b}=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{2+\omega}-2^{1+\omega}}{n+a+-k-b+2^{2+\omega}-2^{2+\omega}}$$

$$=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{1+\omega}(2-1)}{n+a-k-b}=\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1+2^{1+\omega}}{n+a-k-b}$$

$$\equiv\binom{n+a-\left\lfloor\frac{k+b}{2}\right\rfloor-1}{n+a-k-b}\ (mod\ 2)$$

證畢。

由於定理7中$[A_\omega]_{2^{2+\omega}}$、$[A_\omega+(0,-2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}}$、$[A_\omega+(2^{2+\omega},-2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}}$這三個區塊相加不為0的元素均不互相疊合，故無進位的問題，可視為互相獨立的區塊相加，而無元素的部分可以視為加0。

研究八：利用組合數表示$S(n,k)\ (mod\ 3)$的餘數

【定理8】對於正整數n,k我們有：

$$\begin{cases}S(n,k)\equiv\binom{\left\lfloor\frac{k+1}{3}\right\rfloor+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}(mod\ 3)\ ,if n\ge k,n\equiv k\ (mod\ 2)\\ S(n,k)\equiv 0\ (mod\ 3),otherwise\end{cases}$$

【證明】

Case 1, if $k\equiv 0$ (mod 3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\,x^n=\prod_{i=1}^{k}\frac{x}{1-ix}\equiv\frac{x^k}{(1-x^2)^{\frac{k}{3}}}\ (mod\ 3)$$

因討論$k\equiv 0$ **(mod 3)**所以令$k=3t,t\in\mathrm{N}\cup\{0\}$

$$\frac{x^k}{(1-x^2)^{\frac{k}{3}}}=\frac{x^{3t}}{(1-x^2)^t}=x^{3t}(1+x^2+x^4+\cdots)^t$$

又由廣義二項式定理推導後再把x^{3t}乘進去得

$$(1-x^2)^{-t}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m-1}{m}x^{2m}\Rightarrow x^{3t}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m-1}{m}x^{2m}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{t+m-1}{m}x^{3t+2m}$$

令$n=3t+2m$，則$m=\frac{n-3t}{2}$

$$\sum_{\substack{n\ge 3t\\ n\equiv 3t\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{t+\frac{n-3t}{2}-1}{\frac{n-3t}{2}}x^n=\sum_{\substack{n\ge k\\ n\equiv k\ (mod\ 2)}}^{\infty}\binom{\frac{k}{3}+\frac{n-k}{2}-1}{\frac{n-k}{2}}x^n$$

Otherwise：$S(n,k)\equiv 0\ (mod\ 3)$

Case 2, if $k\equiv 1$ (mod 3), Case 3, if $k\equiv 2$ (mod 3)情況類似，可參考報告書。

研究九：斯特靈數三角形模3時的碎形結構

我們又可以發現圖中具有漂亮的規律，而且也是謝爾賓斯基的樣式，經過文獻探討我們確認並沒有任何文獻探討這種現象。因此我們一樣決定自己證明這個性質，並利用研究八的組合數來推導。

圖六：模3下的斯特靈數三角形（本圖由作者親自製作）

首先我們定義A_1是組成這個碎形的單位三角形

$A_1 =$

$$\begin{bmatrix} S(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(2,1) & S(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(4,1) & S(4,2) & S(4,3) & S(4,4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(5,1) & S(5,2) & S(5,3) & S(5,4) & S(5,5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(6,1) & S(6,2) & S(6,3) & S(6,4) & S(6,5) & S(6,6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(7,3) & S(7,4) & S(7,5) & S(7,6) & S(7,7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(8,6) & S(8,7) & S(8,8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(9,9) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (mod\ 3)$$

經過計算得（其中$[A_\omega]$代表元素中$0 \to 0, 1 \to 2, 2 \to 1$）

$$[A_1] \cup [A_1 + (0,-6)] \cup [A_\omega + (9,-9)] \cup [A_\omega + (0,-12)] \cup [A_\omega + (9,-15)] \cup [A_\omega + (18,-18)] = [A_2]$$

再放大一個倍率計算得

$$[A_2] \cup [A_2 + (0,-18)] \cup [A_2 + (27,-27)] \cup [A_\omega + (0,-36)] \cup [A_\omega + (27,-45)] \cup [A_\omega + (54,-54)] = [A_3]$$

透過觀察我們猜想通式為

【定理9】$\forall \omega \in \mathbb{N}$ 斯特靈數三角形在模3滿足下式，具有類自我相似性，其中

$$[\boldsymbol{A_\omega}] \cup [\boldsymbol{A_\omega} + (\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{3^\omega})] \cup \left[\boldsymbol{A_\omega} + \left(\boldsymbol{3^{\omega+1}}, -\boldsymbol{3^{\omega+1}}\right)\right] \cup [\boldsymbol{A_\omega} + (\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{4}\times\boldsymbol{3^\omega})]$$
$$\cup \left[\boldsymbol{A_\omega} + \left(\boldsymbol{3^{\omega+1}}, -\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{3^\omega} - \boldsymbol{3^{\omega+1}}\right)\right] \cup \left[\boldsymbol{A_\omega} + \left(\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{3^{\omega+1}}, -\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{3^{\omega+1}}\right)\right] = [\boldsymbol{A_{\omega+1}}]$$

【證明】

1. 首先，我們先證

$$[A_\omega] \equiv [A_\omega + (0, -2\times3^\omega)]\ (mod\ 3)$$

$$\binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a+2\times3^\omega-k}{2} - 1}{\frac{n+a+2\times3^\omega-k}{2}} \equiv \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a-k}{2} - 1}{\frac{n+a-k}{2}} (mod\ 3)$$

故得證

2. 當$k = 3t+1$時，與1. 狀況類似，僅數字改變，故得證。

3. 當$k = 3t+2$時，與1. 狀況也類似，僅數字改變，故得證。

4. 再來我們證

$$[A_\omega] \equiv [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})]\ (mod\ 3)$$

$$\binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a+2\times3^\omega-k-2\times3^\omega}{2} - 1}{\frac{n+a+2\times3^\omega-k-2\times3^\omega}{2}} = \binom{\frac{k}{3} + \frac{n+a-k}{2} - 1}{\frac{n+a-k}{2}}$$

得證

5. 當$k = 3t+1$時，與4. 狀況類似，僅數字改變，故得證。

6. 當$k = 3t+2$時，與4. 情況也類似，僅數字改變，故得證。

7. 又因為

$$[A_\omega + (0, -4\times3^\omega)] = [A_\omega + (0, 2(-2\times3^\omega))]$$
$$[A_\omega + (2\times3^{\omega+1}, -2\times3^{\omega+1})] = [A_\omega + (2(3^{\omega+1}), 2(-3^{\omega+1}))]$$

故這兩塊顯然的也有自我相似性（透過重複做兩次平移故依舊同餘）

特別的

$$[A_\omega + (3^{\omega+1}, -2\times3^\omega - 3^{\omega+1})] = [A_\omega + (0, -2\times3^\omega)] + [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})]$$

又因$[A_\omega + (0, -2\times3^\omega)] = [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})]$故元素$0 + 0 \equiv 0\ (mod\ 3), 1 + 1 = 2\ (mod\ 3),\ 2 + 2 \equiv 1 (mod\ 3)$因此會有$[A_\omega]$代表元素中$0 \to 0, 1 \to 2, 2 \to 1$。

伍、研究結果與討論

【定理1】：對於正整數n, k我們有：

$$S(n,k) \equiv \begin{cases} 0, & (mod\ 2)\ , if n < k \\ \dbinom{n - \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor - 1}{n-k} & (mod\ 2)\ , if n \geq k \end{cases}$$

【文獻探討】中，原論文使用p-adic valuation的方式證明$S(2n,n)$是奇數時，n屬於Fibbinary numbers，在**【研究二】**中，**我們提出利用組合數**$\binom{3n}{n} \equiv S(2n,n)\ mod\ 2$來證明，由於其簡易性與易算性，為下一步推廣打下了基礎。

【定理4.1】$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S(3n,n) \equiv \binom{5n}{n} (mod\ 2)$$

【定理4.2】$\forall n \in \mathbb{N}$

當$S(3n,n)$、$\binom{5n}{n}$為奇數時，n於二進位下須滿足每個1往前後數二位都是0。

【定理5】$\forall n \in \mathbb{N}$

$$S(5n,n) \equiv \binom{9n}{n} (mod\ 2)$$

【定理6】$\forall n, p \in \mathbb{N}$,

$$S(pn,n) \equiv \binom{(2p-1)n}{n} (mod\ 2)$$

【定理7】$\forall \omega \in \mathbb{N}$，斯特靈數三角形在模2下滿足：

$$[A_\omega]_{2^{2+\omega}} \cup [A_\omega + (0, -2^{1+\omega})]_{2^{2+\omega}} \cup [A_\omega + (2^{2+\omega}, -2^{2+\omega})]_{2^{2+\omega}} = [A_{\omega+1}]_{2^{(2+\omega)+1}}$$

【定理8】對於正整數n, k我們有：

$$\begin{cases} S(n,k) \equiv \dbinom{\left\lfloor\frac{k+1}{3}\right\rfloor + \frac{n-k}{2} - 1}{\frac{n-k}{2}} (mod\ 3)\ , if n \geq k, n \equiv k (mod\ 2) \\ S(n,k) \equiv 0\ (mod\ 3), otherwise \end{cases}$$

【定理9】$\forall \omega \in \mathbb{N}$ 斯特靈數三角形在模3下滿足下式，且具有自我相似性其中

$$[A_\omega] \cup [A_\omega + (0, -2\times3^\omega)] \cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (0, -4\times3^\omega)]$$
$$\cup [A_\omega + (3^{\omega+1}, -2\times3^\omega - 3^{\omega+1})] \cup [A_\omega + (2\times3^{\omega+1}, -2\times3^{\omega+1})] = [A_{\omega+1}]$$

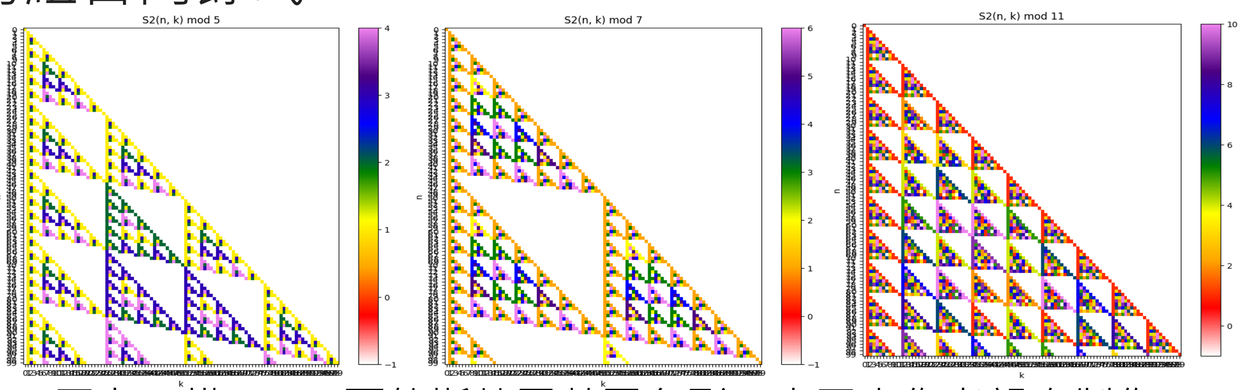
討論：我們利用$S(n,k)$的$mod\ 2$時的組合數同餘式，在後續證明$S(pn,n)$的過程中，也因組合數相較於斯特靈數本身容易計算，使得後面的證明較為簡潔。同時，我們已找出滿足$S(2n,n)$、$S(3n,n)$為奇數時n的條件且都與二進制表達有直接相關。在定理六，我們得到一個更一般結論。證明過程中，我們原先以為p與p'為相鄰質數，但後來才發現兩者關係更為簡潔，甚至是線性關係，看似複雜的斯特靈數，竟然與組合數有如此漂亮的連結。在研究六我們利用Python作圖後發現圖中有謝爾賓斯基三角形，在上網查找後發現並沒有任何文獻探討這個有趣的現象，但是我們同時發現巴斯卡三角形[3]有這個特性，且是廣為人知的性質，所以我們相信斯特靈數三角形也有這個性質，因此我們在研究七中利用自我相似性證明了這件事。證明過程中遇到最難解決的問題是因為最基本的單位三角形的底部斜率並非0，而是階梯狀，我們使用類似矩陣加法的概念來處理這個問題，透過定義即複製與平移的手法來證明。在研究八中，我們自己推出了一個模3下的斯特靈數組合同餘式，這個定理讓我們可以在研究九中可以利用他來證明並推廣斯特靈數三角形不僅在模2下有碎形性質，在模3下也具有！

陸、結論與未來展望

結論：我們透過**代數**方法(斯特靈數的生成函數)以及其與**組合**數之間的巧妙關係推導出，給定n與k時斯特靈數**數論**中的奇偶性，並在過程中運用Python, OEIS等進行研究，不僅改進了一篇論文使用較隱晦的升冪引理的證明過程，也運用二進制的特殊性質與盧卡斯定理，推廣出第二類斯特靈數與組合數較為一般的結論，最後我們證明了斯特靈數三角形模2與模3皆存在謝爾賓斯基三角形的**幾何**性質，且任何文獻中都未曾討論過，也推出了$S(n,k)$模2與模3下的組合同餘式。

未來展望：

針對研究七與九，事實上不只模2與3有碎形結構，我們發現模其他質數也有類似的圖形，不過隨著除數變大，餘數的可能值也越來越多。未來期待能證明出對於任意質數都有謝爾賓斯基三角形這樣的性質。



圖七：模5,7,11下的斯特靈數三角形（本圖由作者親自製作）

柒、參考文獻

[1] Chan, O-Y. & Manna, D. (2009). Congruences for Stirling Numbers of the Second Kind. Mathematics. Published 2009.

[2] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. (n.d.). Retrieved February 11, 2024.

[3] Bannink, T., & Buhrman, H. (2017). Quantum Pascal's Triangle and Sierpinski's carpet

[4]謝爾賓斯基三角形示意圖：https://zh.wikipedia.org/zh-tw/謝爾賓斯基三角形