

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

第三名

050406

內切圓半徑與分割點的幾何探索

學校名稱：臺北市立永春高級中學

作者： 高二 周博元	指導老師： 高晟鈞
---------------	--------------

關鍵詞：解析幾何、內切圓、分割點

摘要

本作品靈感來自於其中一題日本算額問題 (Sangaku problem)。該題是將一正 $\triangle ABC$ 的三邊上依固定比例各作其內分點，並由三頂點與各邊內分點連線段，此三線段會將 $\triangle ABC$ 被分割成四個三角形 (如圖二)。本研究改變其分割方式，研究題目為：在 $\triangle ABC$ 中， L 、 M 、 N 分別為 \overline{BC} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上一點，若 $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 之內切圓半徑相等，則 $\triangle ABC$ 內切圓半徑等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑加三等圓半徑。此外，本研究找到 $\triangle ABC$ 各邊上三點 L 、 M 、 N 的相對位置，並透過二次體擴張的概念說明 L 、 M 、 N 三點的相對位置是能夠利用尺規作圖實現的。最後也計算當 $\triangle LMN$ 存在時，三等圓半徑 (r) 的上界。從上述的分割三角形的方式擴展至正 n 邊形時，也將原先在 $\triangle ABC$ 中的分割手法延伸至正 n 邊形和正四面體進行研究。

壹、前言

一、研究動機

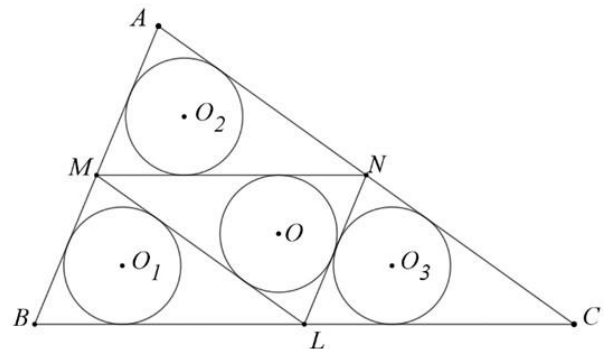
本人對數學有著濃厚的興趣，某次在數學課聽到老師講述著關於中點三角形的性質，如圖一，點 L 、 M 、 N 分別為 \overline{BC} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC}

的中點，而 $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 、 $\triangle LMN$ 四個三角形的內切圓半徑會相等。老師同時也提出了一篇 Sangaku problem 的題目讓我閱讀 (如圖二)，該題針對已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，探討圖中四個內切圓為等圓時，其內部正 $\triangle A'B'C'$ 邊長 (l) 與正 $\triangle ABC$ 邊長 (x) 的關係為

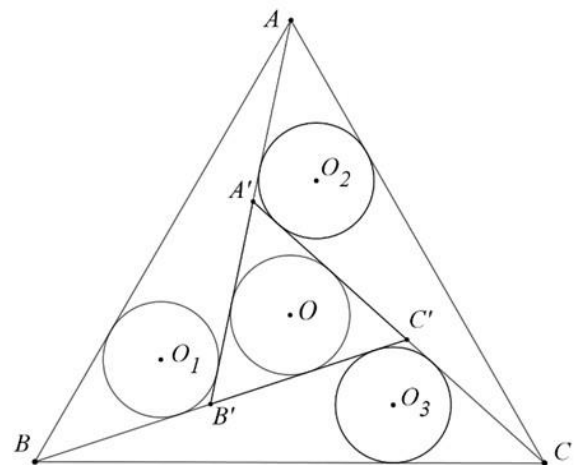
$$l = \frac{\sqrt{21}-3}{4}x \text{ (參考文獻 [7])}。$$

在閱讀完該篇文章後令我開始思考：「若是將分割三角形的方式改為由相異邊上點的連線段，會不會具備其它有意思的性質」。在與指導老師相關主題時，在網路上看到了一篇文章 (如圖三)，其題目如下：若 $\triangle ABC$ 為任意三角形， $\triangle ABC$ 內有三等圓 O_1 、 O_2 、 O_3 ，且

此三等圓皆與 $\triangle ABC$ 的其中兩邊相切，在 $\triangle ABC$ 的三邊上各有一點 L 、 M 、 N ，當 $\triangle LMN$ 的三邊分別與三等圓相切時，證明 $\triangle ABC$ 內切圓半徑等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑加三等圓半徑。該篇文章僅拋出上述的題目提問，並未有任何證明的任何線索或說明；

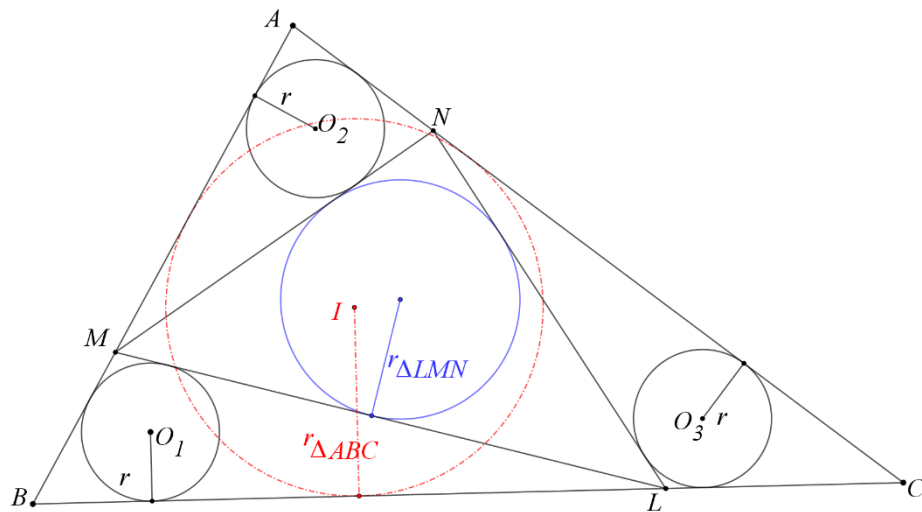


圖一： $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形。研究者自製



圖二：參考文獻 [7] 作者 Angela Drei 提供的圖形

另外，該篇文章並未提及 ΔLMN 的存在性與 L 、 M 、 N 三點的位置該如何確定？基於對幾何圖形的好奇心開始了本篇研究。



圖三：參考文獻資料 [2]。研究者重製

二、研究目的

(一) 如圖三， ΔABC 為任意三角形，其內切圓半徑為 $r_{\Delta ABC}$ ，在 ΔABC 內有三個半徑為 r 的等圓與 ΔABC 的其中兩邊相切， L 、 M 、 N 三點分別在 ΔABC 三邊上，且 ΔLMN 的三邊與三等圓相切。若 ΔLMN 存在，則其內切圓半徑 ($r_{\Delta LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，等於 ΔABC 的內切圓半徑 ($r_{\Delta ABC}$)，即 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。

(二) 承一，已知 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。給定正 ΔABC 邊長與指定三等圓 (r) 半徑時，刻劃出 ΔABC 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。以及討論任意 ΔABC 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。

(三) 證明正 n 邊形 $\{A_n\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 等於其內接正 n 邊形 $\{B_n\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{B_n\}}$) 加「與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 同時相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$)」，即

$$r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}。若 \{B_n\} 內接正 n 邊形 \{C_n\}，則上式可推廣為$$

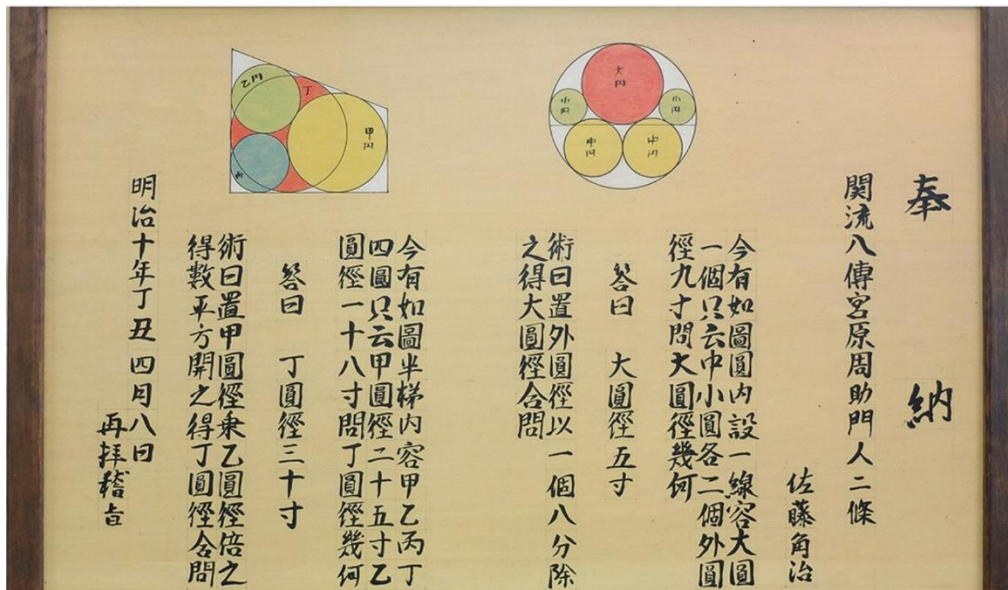
$$r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}} \dots。$$

(四) 在 ΔABC 為正三角形的前提下，將三等圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑比從 $1:1:1$ 改為 $1:2:1$ ，探討 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 等式是否成立。

(五) 探討將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體時，正四面體 $\{A_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4\}$) 的內切球半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 與其內接八面體 $\{B_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 的內切球半徑 ($r_{\{B_n\}}$) 和 4 個小正四面體內切球半徑 (r) 之關係。

三、文獻回顧

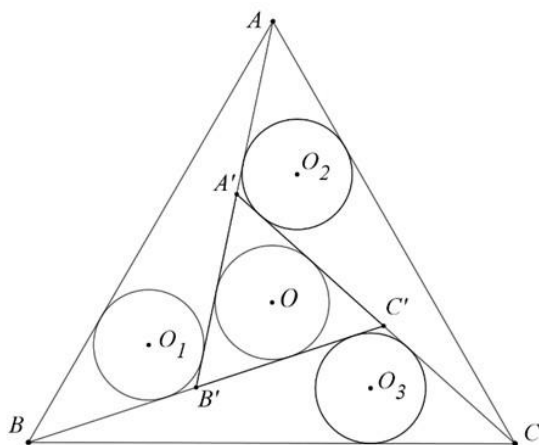
Sangaku (從原文被翻譯成“算額”，字面意思是“計算板”)，起源於日本和西方文化隔絕的兩個世紀，是被刻在木板上的一種特殊的幾何問題，於日本神社或寺廟屋頂下的奉獻性數學木製平板上較為常見。這些數學問題在當地帶有宗教和祭祀的性質，而 Japanese Temple Geometry Problem 時常有著極其有趣的幾何問題和數學性質，並且解決這些問題被認為是一種對神靈的奉獻與尊敬的方式。目前可考的 Japanese Temple Geometry Problem 在名古屋、大阪甚至東京都有留下不少資料，許多寺廟都有 Sangaku，較著名的 Sangaku problem 包含 Malfatti's problem (如圖四)、Japanese theorem for cyclic polygons。透過當地的文化和宗教背景下的演進，它們代表了數學和宗教之間獨特的交匯點。



圖四：與 Malfatti's problem 相關的 Sangaku。取自參考文獻 [1]

如圖二， $\triangle ABC$ 為一個正三角形，三頂點各與其對邊固定比例的內分點連線後，可巧妙地將 $\triangle ABC$ 分割成四個三角形，即 $\triangle AB'B$ 、 $\triangle BC'C$ 、 $\triangle AA'C$ 和 $\triangle A'B'C'$ 。其中 $\triangle AB'B$ 、 $\triangle BC'C$ 、 $\triangle AA'C$ 三個三角形顯然全等故其內切圓半徑相同，由於是採固定比例的內分點連線，故 $\triangle A'B'C'$ 顯然是一正三角形。當正 $\triangle A'B'C'$ 的內切圓半徑也與 $\triangle AB'B$ 、 $\triangle BC'C$ 、 $\triangle AA'C$ 三個三角形的內切圓半徑相同時，討論正 $\triangle A'B'C'$ 與正 $\triangle ABC$ 的邊長關係。2012 年，Angela Drei 對上述的問題提出了一種解法。(參考文獻 [7])。

首先，證明 $\Delta O_1O_2O_3$ 為一正三角形，也計算出 $\overline{O_1O_2}$ 為 4 倍的三等圓的半徑，最後透過面積的計算，得出正 ΔABC 邊長的 $\frac{\sqrt{21}-3}{4}$ 倍會等於正 $\Delta A'B'C'$ 的邊長。



與圖二相同：參考文獻 [7] 作者 Angela Drei 提供的圖形

貳、研究設備及器材

紙、筆、筆電、Geogebra 5.0、MAGMA、Microsoft Word

參、研究過程或方法

一、名詞解釋

- (一) $a_{\text{多邊形}}$ 即為該多邊形的面積，例如： $a_{\Delta ABC}$ 是 ΔABC 的面積。
- (二) $s_{\text{多邊形}}$ 即為該多邊形周長的一半（半周長），例如： $s_{\Delta ABC}$ 是 ΔABC 的半周長。
- (三) $r_{\text{多邊形}}$ 即為該多邊形的內切圓半徑，例如： $r_{\Delta ABC}$ 是 ΔABC 的內切圓半徑。
- (四) 圖一中當 L 、 M 、 N 為分別為 \overline{BC} 、 \overline{AB} 、 \overline{AC} 之中點時， ΔLMN 即稱為 ΔABC 之中點三角形。
- (五) $\{A_n\}$ 是正 n 邊形。
- (六) $\{B_n\}$ 是 $\{A_n\}$ 的內接正 n 邊形。
- (七) $\{C_n\}$ 是 $\{B_n\}$ 的內接正 n 邊形。

(八) $\{O_n\}$ 是與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 相切的 n 個等圓圓心連線所形成之正多邊形。

(九) $\{O'_n\}$ 是與 $\{B_n\}$ 和 $\{C_n\}$ 相切的 n 個等圓圓心連線所形成之正多邊形。

(十) 同時與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 相切的 n 個等圓的半徑表示為 $r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 。

(十一) 同時與 $\{B_n\}$ 和 $\{C_n\}$ 相切的 n 個等圓的半徑表示為 $r_{\{B_n\}-\{C_n\}}$ 。

二、研究過程

在證明研究目的(一)等式

$r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 之前，先以純幾何作

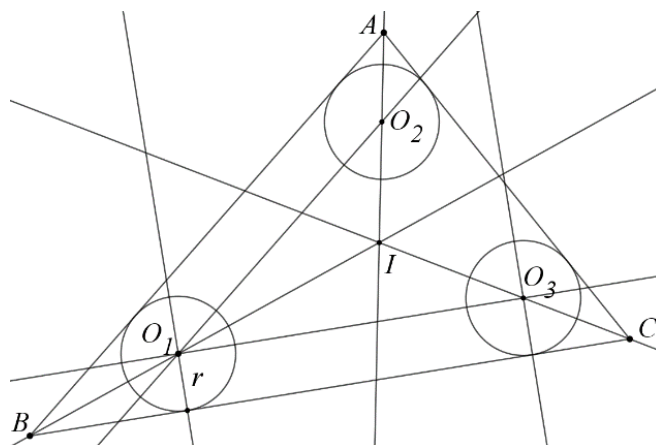
圖作出 ΔABC 內的三等圓。首先在任意 ΔABC 三頂點 A 、 B 、 C 上各作一條內角平分線，然後在角 B 的角平分線上任取一點 O_1 ，以 O_1 點為圓心，

O_1 點到 \overline{BC} 的垂直距離為半徑

(r)，決定圓心和半徑後即可作一個

圓 O_1 。接著以 O_1 對 \overline{AB} 、 \overline{BC} 作平行線且與另兩頂點之內角平分線交於 O_2 、 O_3 ，最

後以 O_2 、 O_3 為圓心， r 為半徑即可以作出三個等圓，如圖五。



圖五： ΔABC 內的三等圓之尺規作圖。研究者自製

(一) **主定理**： ΔABC 為任意三角形，其內切圓半徑為 $r_{\Delta ABC}$ ，在 ΔABC 內有三個半徑為 r 的等圓與 ΔABC 的其中兩邊相切， L 、 M 、 N 三點分別在 ΔABC 三邊上，且 ΔLMN 的三邊與三等圓相切。若 ΔLMN 存在，則其內切圓半徑 ($r_{\Delta LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，等於 ΔABC 的內切圓半徑 ($r_{\Delta ABC}$)，即 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。

圖三的三个小圓是半徑相等的等圓， ΔABC 的內切圓半徑是 $r_{\Delta ABC}$ ， ΔLMN 的內切圓半徑是 $r_{\Delta LMN}$ ，三個等圓的半徑是 r ，求證 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。由於證明過程中，需要以下兩個引理 *Lemma1* 及 *Lemma2*，其敘述與證明過程如下：

Lemma1：若 $\triangle ABC$ 為任意三角形，則其內切圓半徑 $r_{\triangle ABC} = \frac{a_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}$

Pf:

假設任意 $\triangle ABC$ 之內心為 I

$$\because a_{\triangle ABC} = a_{\triangle AIB} + a_{\triangle BIC} + a_{\triangle CIA}$$

$$\Rightarrow a_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \times r_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC} \times r_{\triangle ABC} \quad \therefore r_{\triangle ABC} = \frac{a_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}$$

Lemma2：若 $\triangle ABC$ 為任意三角形，則其面積 $a_{\triangle ABC} = r_{\triangle ABC}^2 (\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2})$

Pf:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{CE} + \overline{AE})$$

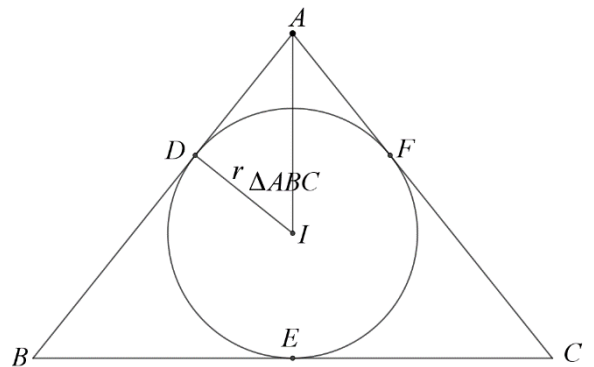
$$\because \cot \frac{A}{2} = \frac{\overline{AF}}{\overline{IF}} = \frac{\overline{AF}}{r_{\triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow \overline{AF} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{A}{2}$$

$$\text{同理，} \overline{AD} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{A}{2}, \overline{BD} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{B}{2},$$

$$\overline{BE} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{B}{2}, \overline{CE} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{C}{2}, \overline{CF} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = r_{\triangle ABC} \cot \frac{A}{2} + r_{\triangle ABC} \cot \frac{B}{2} + r_{\triangle ABC} \cot \frac{C}{2} = r_{\triangle ABC} (\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2})$$



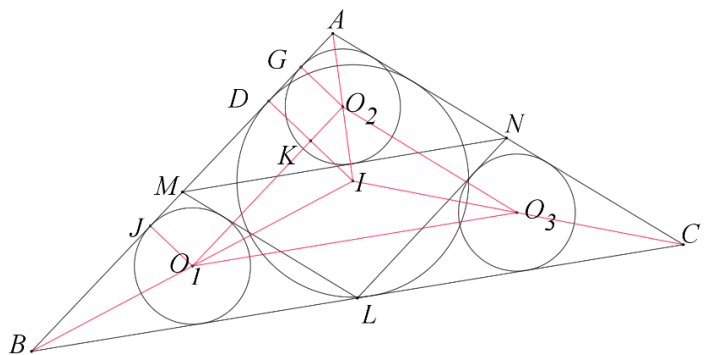
圖六：Lemma2 示意圖。研究者自製

並且將其代入 Lemma1。

$$a_{\triangle ABC} = r_{\triangle ABC} \times S_{\triangle ABC}$$

$$= r_{\triangle ABC} \times r_{\triangle ABC} (\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2})$$

$$= r_{\triangle ABC}^2 (\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2})$$



圖七：研究目的（一）之示意圖。研究者自製

在說明完 Lemma1 與 Lemma2 後，主定理的證明過程如下：

如圖七，圓 O_2 ，圓 I ，圓 O_1 ，與 \overline{AB} 切點為 G 、 D 、 J ，

$\overline{O_2G} \perp \overline{AB}, \overline{O_1J} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{O_2G} \parallel \overline{O_1J}$ 且 $\overline{O_2G} = \overline{O_1J}$ ，所以四邊形 GO_2O_1J 是平行四邊形，故 $\overline{O_2O_1} \parallel \overline{AB}$ ，同理 $\overline{O_1O_3} \parallel \overline{BC}$ 、 $\overline{O_2O_3} \parallel \overline{AC}$ 。在 $\triangle AMN$ 中， $\overleftrightarrow{AO_2}$ 為 $\angle MAN$ 的內角分角線，在 $\triangle ABC$ 中， \overleftrightarrow{AI} 為 $\angle BAC$ 的內角分角線，因此得知 $A、O_2、I$ 三點共線，同理 $B、O_1、I、C、O_3、I$ 均三點共線。因 $\overleftrightarrow{O_3C}$ 為 $\angle ACB$ 之內角平分線 $\Rightarrow \angle ACO_3 = \angle BCO_3$ ，又因為 $\overline{O_1O_3} \parallel \overline{BC}$ 、 $\overline{O_2O_3} \parallel \overline{AC}$ ，故 $\angle O_2O_3I = \angle ACI$ 、 $\angle O_1O_3I = \angle BCI \Rightarrow \angle O_2O_3I = \angle O_1O_3I \Rightarrow \overleftrightarrow{O_3I}$ 為 $\angle O_1O_3O_2$ 之內角平分線，又 $C、O_3、I$ 三點共線，同理 $\overleftrightarrow{O_2I}$ 為 $\angle O_1O_2O_3$ 之內角平分線，又 $A、O_2、I$ 三點共線，故 I 亦為 $\triangle O_1O_2O_3$ 的內心。因 $\overline{ID} \perp \overline{AB}$ 且 \overline{ID} 交 $\overline{O_1O_2}$ 於 K ，又 $\overline{O_1O_2} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{IK} \perp \overline{O_1O_2}$ ，故 \overline{KI} 即為 $\triangle O_1O_2O_3$ 內切圓半徑。令 $\overline{KI} = r_{\triangle O_1O_2O_3}$ ，因

$\overline{ID} = r + \overline{KI} = r + r_{\triangle O_1O_2O_3}$ ，因此只要證明 $\triangle O_1O_2O_3$ 內切圓半徑等於 $\triangle LMN$ 的內切圓半徑，主定理中的等式 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 即可得證。

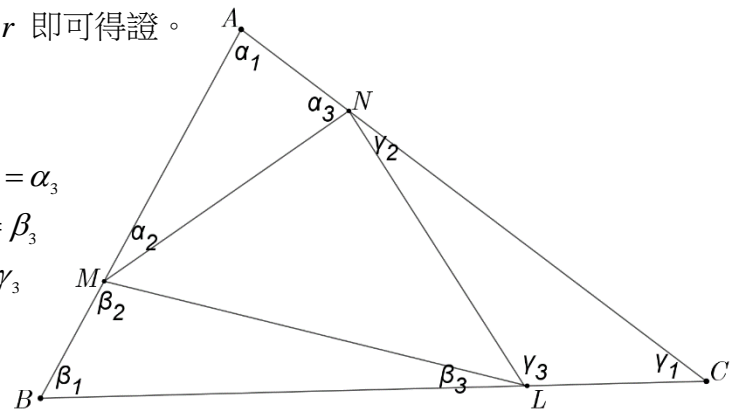
如圖八，

$$\begin{aligned}
 \text{令 } \angle MAN &= \alpha_1, \angle AMN = \alpha_2, \angle ANM = \alpha_3 \\
 \angle MBL &= \beta_1, \angle BML = \beta_2, \angle MLB = \beta_3 \\
 \angle LCN &= \gamma_1, \angle CNL = \gamma_2, \angle NLC = \gamma_3
 \end{aligned}$$

由圖九可知，

$$\begin{aligned}
 s_{\triangle LMN} &= \frac{1}{2}(\overline{MN} + \overline{ML} + \overline{NL}) \\
 &= \frac{1}{2} \left((r \cot \frac{\alpha_2}{2} + r \cot \frac{\alpha_3}{2}) + (r \cot \frac{\beta_2}{2} + r \cot \frac{\beta_3}{2}) + (r \cot \frac{\gamma_2}{2} + r \cot \frac{\gamma_3}{2}) \right) \\
 &= \frac{r}{2} \left(\cot \frac{\alpha_2}{2} + \cot \frac{\alpha_3}{2} + \cot \frac{\beta_2}{2} + \cot \frac{\beta_3}{2} + \cot \frac{\gamma_2}{2} + \cot \frac{\gamma_3}{2} \right) \text{———①}
 \end{aligned}$$

$$s_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}(\overline{O_1O_2} + \overline{O_1O_3} + \overline{O_2O_3})$$



圖八：假設角度。研究者自製

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(r \cot \frac{\alpha_2}{2} + r \cot \frac{\beta_2}{2} + r \cot \frac{\beta_3}{2} + r \cot \frac{\gamma_3}{2} + r \cot \frac{\gamma_2}{2} + r \cot \frac{\alpha_3}{2} \right) \\
&= \frac{r}{2} \left(\cot \frac{\alpha_2}{2} + \cot \frac{\alpha_3}{2} + \cot \frac{\beta_2}{2} + \cot \frac{\beta_3}{2} + \cot \frac{\gamma_2}{2} + \cot \frac{\gamma_3}{2} \right) \text{———②}
\end{aligned}$$

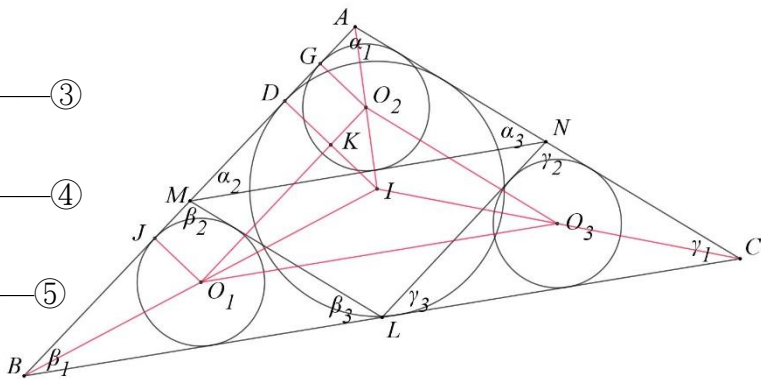
對比 ① 和 ② $\Rightarrow s_{\Delta LMN} = s_{\Delta O_1 O_2 O_3}$

由 Lemma2 得知

$$a_{\Delta AMN} = r^2 \left(\cot \frac{\alpha_1}{2} + \cot \frac{\alpha_2}{2} + \cot \frac{\alpha_3}{2} \right) \text{———③}$$

$$a_{\Delta BML} = r^2 \left(\cot \frac{\beta_1}{2} + \cot \frac{\beta_2}{2} + \cot \frac{\beta_3}{2} \right) \text{———④}$$

$$a_{\Delta CLN} = r^2 \left(\cot \frac{\gamma_1}{2} + \cot \frac{\gamma_2}{2} + \cot \frac{\gamma_3}{2} \right) \text{———⑤}$$



圖九：研究目的（一）之示意圖。研究者自製

又四邊形 AO_2O_1B 為梯形，

$$\begin{aligned}
a_{AO_2O_1B} &= \frac{r}{2} \times \left[\left(r \cot \frac{\alpha_2}{2} + r \cot \frac{\beta_2}{2} \right) + \left(r \cot \frac{\alpha_1}{2} + r \cot \frac{\alpha_2}{2} + r \cot \frac{\beta_1}{2} + r \cot \frac{\beta_2}{2} \right) \right] \\
&= \frac{r^2}{2} \left(2 \cot \frac{\alpha_2}{2} + 2 \cot \frac{\beta_2}{2} + \cot \frac{\alpha_1}{2} + \cot \frac{\beta_1}{2} \right) \text{———⑥}
\end{aligned}$$

$$\text{同理， } a_{BO_1O_3C} = \frac{r^2}{2} \left(2 \cot \frac{\gamma_3}{2} + 2 \cot \frac{\beta_3}{2} + \cot \frac{\beta_1}{2} + \cot \frac{\gamma_1}{2} \right) \text{———⑦}$$

$$a_{CO_3O_2A} = \frac{r^2}{2} \left(2 \cot \frac{\alpha_3}{2} + 2 \cot \frac{\gamma_2}{2} + \cot \frac{\alpha_1}{2} + \cot \frac{\gamma_1}{2} \right) \text{———⑧}$$

$$\text{又 } a_{\Delta ABC} = a_{\Delta AMN} + a_{\Delta BML} + a_{\Delta CLN} + a_{\Delta LMN} = \text{③} + \text{④} + \text{⑤} + a_{\Delta LMN}$$

$$a_{\Delta ABC} = a_{AO_2O_1B} + a_{BO_1O_3C} + a_{CO_3O_2A} + a_{\Delta O_1O_2O_3} = \text{⑥} + \text{⑦} + \text{⑧} + a_{\Delta O_1O_2O_3}$$

可得 $a_{\Delta LMN} = a_{\Delta O_1O_2O_3}$ 。再透過前述的 $s_{\Delta LMN} = s_{\Delta O_1O_2O_3}$ 及 Lemma1，可知 ΔLMN 和

$\Delta O_1O_2O_3$ 的內切圓半徑相等，故 $r_{\Delta LMN} = r_{\Delta O_1O_2O_3} = r_{\Delta ABC} - r$ ，即 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。

至此，本研究證明 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。且顯然此關係式為 ΔLMN 存在之必要條件。且此關係式 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 為貫穿本研究最重要的主定理。

(二) 承研究目的（一），已知 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。給定正 ΔABC 邊長與指定三等圓 (r)

半徑時，刻劃出 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。以及討論任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。

為了討論任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置，本研究先從幾個特殊的三角形（正三角形、等腰直角三角形）開始著手。透過數學繪圖軟體 *Geogebra* 繪製圖形時發現，若三個等圓半徑太大，顯然 $\triangle LMN$ 不存在。意即三等圓之內切圓半徑明顯有其上界，以下針對正 $\triangle ABC$ 邊長為 a 時，推導三等圓內切圓半徑 r 之上界。

1. $\triangle ABC$ 為正三角形時，討論 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。

假設正 $\triangle ABC$ 邊長為 a ，則 $a_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ， $s_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2}$ ，根據 *Lemma1* 可知

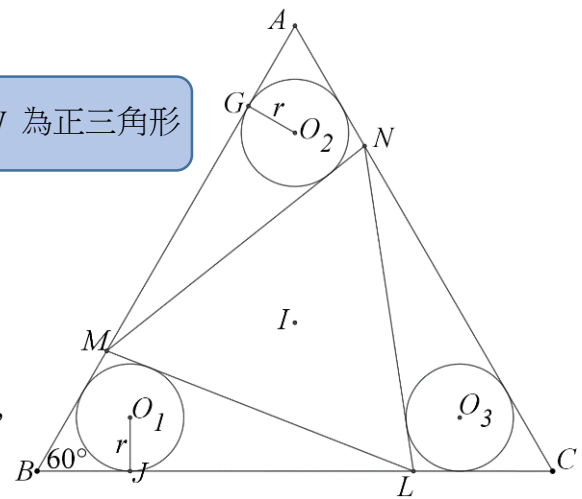
$$r_{\triangle ABC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a。由主定理可知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ ，故 $r_{\triangle LMN} = \frac{\sqrt{3}}{6}a - r$ 。$$

Lemma3：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，則 $\triangle LMN$ 為正三角形

Pf:

如圖十

$\because \overline{BJ} = \sqrt{3}r = \overline{AG}$ ，同理得知 $\overline{LJ} = \overline{GM}$ ，
故可知 $\overline{AM} = \overline{BL}$ ，同理 $\overline{AN} = \overline{BM}$ ，
且 $\angle A = 60^\circ = \angle B$ ，故 $\triangle AMN \cong \triangle BLM$ (SAS)，
故得知 $\overline{MN} = \overline{LM}$ ，同理 $\overline{MN} = \overline{LN}$ ，
故 $\triangle LMN$ 為正三角形。



圖十：*Lemma3* 之示意圖。研究者自製

在確定 $\triangle LMN$ 是正三角形後，本研究針對三等圓內切圓半徑 (r) 的上界進行計算與說明。

令 $\overline{LM} = t$ ，根據 *Lemma1* 和 *Lemma3*，

$$\Rightarrow \triangle LMN \text{ 的內切圓半徑 } r_{\triangle LMN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}t^2}{\frac{3t}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}t$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}a - r = \frac{\sqrt{3}}{6}t \Rightarrow t = a - 2\sqrt{3}r > 0 \Rightarrow r < \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

$$\text{令 } \overline{BL} = \overline{AM} = \overline{CN} = x$$

在 $\triangle BML$ 中，由餘弦定理可知

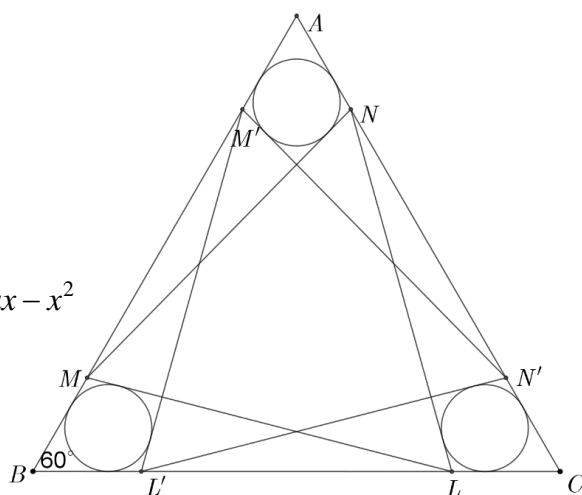
$$\cos 60^\circ = \frac{x^2 + (a-x)^2 - (a-2\sqrt{3}r)^2}{2x(a-x)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - (a^2 - 4\sqrt{3}ar + 12r^2) = ax - x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3ax + 4\sqrt{3}ar - 12r^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - (48\sqrt{3}ar - 144r^2)}}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}$$



圖十一：當 $r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時。 $\triangle LMN$ 之位置示意圖。研究者自製

其中，將判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2$ 分成以下三個情況討論：

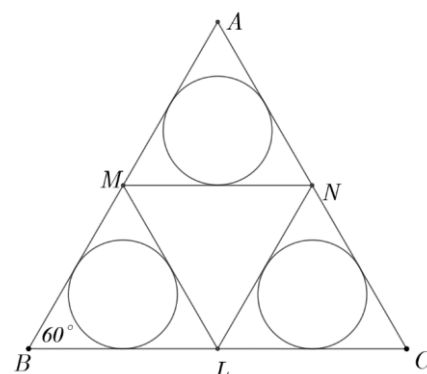
第一個情況：若判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2 > 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}a - 12r)(3\sqrt{3}a - 12r) > 0$$

$$\Rightarrow r < \frac{\sqrt{3}}{12}a \text{ 或 } r > \frac{\sqrt{3}}{4}a \text{ (不合, 因為 } r < \frac{\sqrt{3}a}{6} \text{)}$$

可以得知在 $r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， $\triangle LMN$ 有兩解，

即 $\triangle LMN$ 和 $\triangle L'M'N'$ ，如圖十一。



圖十二：當 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時。 $\triangle LMN$ 之位置示意圖。研究者自製

第二個情況：若判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2 = 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}a - 12r)(3\sqrt{3}a - 12r) = 0$$

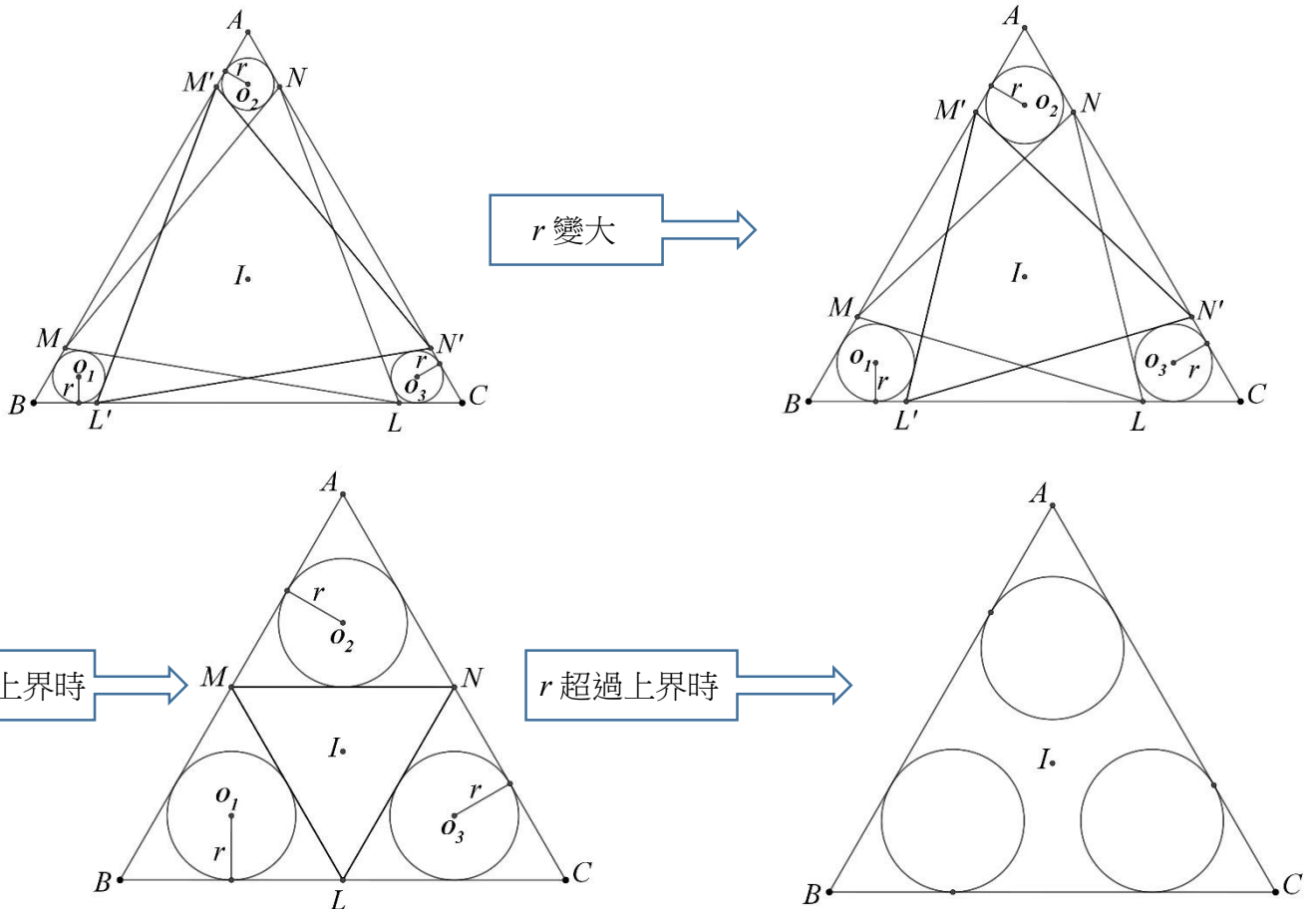
$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{12}a \text{ 或 } r = \frac{\sqrt{3}}{4}a \text{ (不合, 因為 } r < \frac{\sqrt{3}a}{6} \text{)}$$

即 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ ，此時 $x = \frac{a}{2}$ （重根），可發現當 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， L 、 M 、 N 位於

$\triangle ABC$ 三邊的中點。且此時 L 、 M 、 N 三點的位置恰只有一處，即 $\triangle LMN$ 。如圖十二。

第三個情況：若是判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2 < 0$ ，則此時 x 不為實數。

綜合上述三種情況可以得知 $r \leq \frac{\sqrt{3}}{12}a$ ，故 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 為 r 的上界。



圖十三：當 r 由小至大時， L 、 M 、 N 之位置示意圖。研究者自製

透過圖十三，可以發現 r 在變大過程中且尚未達到上界時 ($r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$)，

$\triangle LMN$ 存在且 L 、 M 、 N 的位置有兩解；當 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， L 的位置會與 L' 重

合，此時 $\triangle LMN$ 唯一；當 $r > \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時，則 $\triangle LMN$ 不存在。

至此本研究說明了正 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置至多兩解，以及三等圓內切圓半徑之上界與正 $\triangle ABC$ 的邊長 a 之間的關係為 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 。

在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，上述的計算過程可以得知

$$\overline{BL} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}$$

。在得到了 \overline{BL} 的長度後，就能夠透過尺規作圖找到 L 、 M 、 N 三點的相對位置，進而能利用 *Geogebra* 繪圖軟體作出一個 $\triangle LMN$ 的生成器。具體步驟如下：

Step 1：在給定一單位長、正 $\triangle ABC$ 邊長 a 及三等圓半徑 r 後，透過比例線段

作出 a^2 和 r^2 ，因此即可作出 $9a^2$ 和 $144r^2$ 的線段長度。

Step 2：透過子母相似性質作出 $\sqrt{3}$ ，因此可以作出 $48\sqrt{3}$ ，再透過比例線段即可作出 $48\sqrt{3}ar$ 的線段長度。

Step 3：結合前兩個步驟後即可作出 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2$ ，再透過子母相似性質即可作出 $\sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}$ 。

Step 4：透過 Step 3 就可以作出 \overline{BL} ，即 $\frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}$ ，透過此線段長即可作出如圖十一的 L 和 L' 點，再透過圓外點作圓的切線，進而就能夠作出 $\triangle LMN$ 和 $\triangle L'M'N'$ 。

在解決正 $\triangle ABC$ 的邊長 (a) 與三等圓內切圓半徑 (r) 的關係，並找到三等圓內切圓半徑 r 的上界，以及將 L 、 M 、 N 的相對位置作圖完畢後，本研究想利用類似上述的計算方式，試著討論當 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形時， L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。

2. $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形時，討論 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。

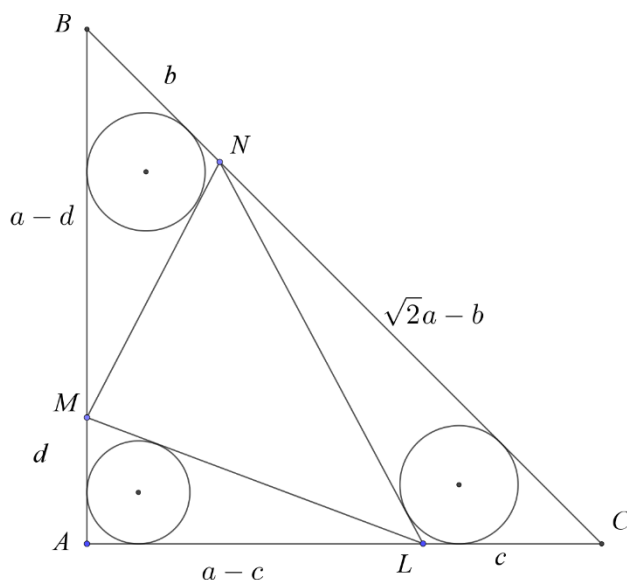
如圖十四，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中，
 令 $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ ， $\overline{BN} = b$ ，
 $\overline{CN} = \sqrt{2}a - b$ ， $\overline{CL} = c$ ， $\overline{AL} = a - c$ ，
 $\overline{AM} = d$ ， $\overline{BM} = a - d$

在 $\triangle AML$ 、 $\triangle BMN$ 、 $\triangle CNL$ 中，
 由餘弦定理可知

$$\begin{aligned} \overline{LM} &= \sqrt{d^2 + (a-c)^2 - 2d(a-c) \times \cos 90^\circ} \\ &= \sqrt{a^2 + c^2 + d^2 - 2ac} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{b^2 + (a-d)^2 - 2b(a-d) \times \cos 45^\circ} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + d^2 - 2ad - \sqrt{2}ab + \sqrt{2}bd} \end{aligned}$$

$$\overline{LN} = \sqrt{c^2 + (\sqrt{2}a-b)^2 - 2c(\sqrt{2}a-b) \times \cos 45^\circ} = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2 - 2\sqrt{2}ab - 2ac + \sqrt{2}bc}$$



圖十四：假設變量。研究者自製

由 Lemma1 可知

$$r = \frac{2 \times \frac{1}{2} d (a-c) \times \sin 90^\circ}{d+a-c+\sqrt{a^2+c^2+d^2-2ac}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} b (a-d) \times \sin 45^\circ}{b+a-d+\sqrt{a^2+b^2+d^2-2ad}-\sqrt{2ab}+\sqrt{2bd}}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{2} c (\sqrt{2}a-b) \times \sin 45^\circ}{\sqrt{2}a-b+c+\sqrt{2a^2+b^2+c^2-2\sqrt{2}ab-2ac}+\sqrt{2}bc}$$

從上述的連等式可以看出，想要化簡得到一個有關於 a 、 b 、 c 、 d 的關係式並不容易。可想而知在討論任意 $\triangle ABC$ 時，必然會有更多連等式與更多的變量。因此本研究決定更換方法，換一個不同的思路試圖解決任意 $\triangle ABC$ 時，三點 L 、 M 、 N 的相對位置與三等圓半徑 (r) 的上界時，。

3. 討論任意 $\triangle ABC$ 中， L 、 M 、 N 的三點相對位置。

如圖十五。假設點 B 為原點， \overrightarrow{BC} 為 x 軸正向。假設 $\overline{MK} = m$ ， $\overline{LK} = n$ ，在 $\triangle BML$ 中，根據海龍公式及三角形面積公式

$$a_{\triangle BML} = \sqrt{\left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m+n\right) \times m \times n \times \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}}\right)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{r(a+c-b)}{r_{\triangle ABC}} + 2(m+n)\right) \times r$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m+n\right) \times m \times n \times \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}}\right) = r^2 \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m+n\right)^2$$

$$\Rightarrow m \times n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} = r \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m+n\right)$$

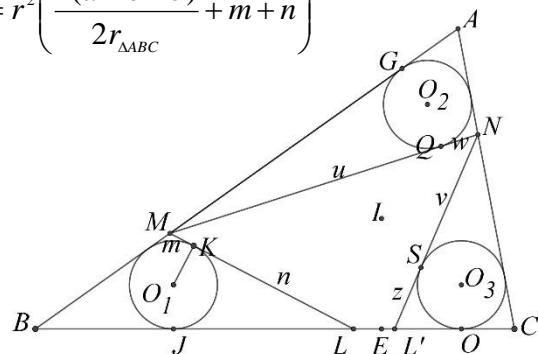
$$\Rightarrow m \times n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} = \frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + mr + nr$$

$$\Rightarrow m \times \left(n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} - r\right) = \frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + nr$$

$$\Rightarrow m = \left(\frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + nr\right) \times \left(\frac{1}{n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} - r}\right)$$

$$\Rightarrow m = \left(\frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + nr\right) \times \frac{2r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2rr_{\triangle ABC}} \Rightarrow m = \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}}$$

由圖十五顯然 $\triangle BO_1J \sim \triangle BIE$ ，故 $\overline{BJ} = \frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}}$ ，



圖十五：研究目的（二）之示意圖。研究者自製

$$\text{同理 } \overline{CO} = \frac{r(a+b-c)}{2r_{\Delta ABC}}, \quad \overline{AG} = \frac{r(b+c-a)}{2r_{\Delta ABC}}。$$

如圖十五令 $\overline{MQ} = u = \overline{MG}$, $\overline{QN} = w$, $\overline{NS} = v$, $\overline{OL'} = z = \overline{SL'}$

$$u = c - \frac{r(a+c-b)}{2r_{\Delta ABC}} - \frac{r(b+c-a)}{2r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow u = c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}$$

同樣地，根據海龍公式及三角形面積公式可知

$$w = \frac{r^2(b+c-a) + 2ur \cdot r_{\Delta ABC}}{u(b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}, \quad v = b - \frac{br}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2ur \cdot r_{\Delta ABC}}{u(b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}$$

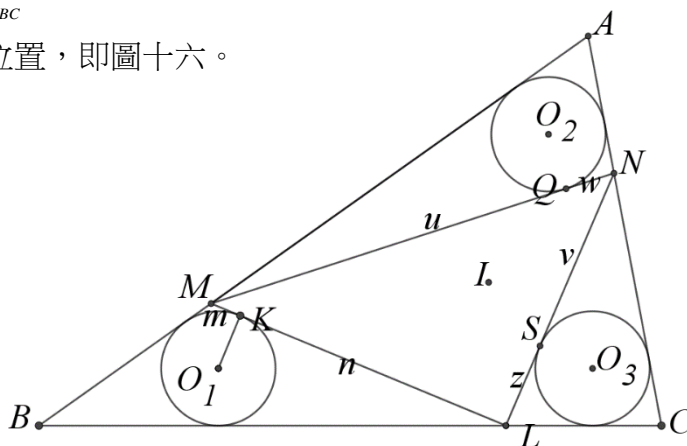
$$z = \frac{r(a+b-c) + v}{a+b-c - 2r_{\Delta ABC}} \Rightarrow L \text{ 的點坐標為 } \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\Delta ABC}} + n, 0 \right)$$

$$L' \text{ 的點坐標為 } \left(a - \frac{r(a+b-c)}{2r_{\Delta ABC}} - z, 0 \right)$$

$$\text{當 } L = L' \text{ 時，即 } \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\Delta ABC}} + n, 0 \right) = \left(a - \frac{r(a+b-c)}{2r_{\Delta ABC}} - z, 0 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$$

當 $\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$ 成立時，則 $L = L'$ ，即可得知在任意 ΔABC 中 L 、 M 、 N 三點的位置，即圖十六。



圖十六：當 $\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$ 成立時之示意圖。研究者自製

由於等式 $\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$ 中，有著 n 、 z 兩個變量，其中 z 可以用 v 代換、

v 可以用 u 代換，將兩者同時代入上式，可使得上式形成一個 u 的式子：

$$\Rightarrow \frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - \frac{r(a+b-c) + b - \frac{br}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2ur \cdot r_{\Delta ABC}}{u(b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}}{a+b-c-2r_{\Delta ABC}}$$

接著將 $u = c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}$ 代入上式，可得：

$$\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - \frac{r(a+b-c) + b - \frac{br}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2r \cdot r_{\Delta ABC} \left(c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}} \right)}{\left(c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}} \right) (b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}}{a+b-c-2r_{\Delta ABC}}$$

由上式可見，為了使得 $L = L'$ ，即 $\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$ 等式成立，整體式子可化簡

為關於 n 的式子，但由於算式較為複雜，本研究決定換個方式處理上式的計算與化簡，利用 *MAGMA* 程式輔以計算。然而 *MAGMA* 程式無法直接表達多項式除法，因此在操作程式時，先將前面提及的變量 v 與 u 之等式化成無分母的型態，在 *MAGMA* 程式中定義，其程式碼如圖十七：

```
P1 := (n*R + a*(r-R))*(v*(a+b-c)-2*r*R) + R*(r^2*(a+b-c)+ v*2*r*R);
P2 := (u*R + c*(r-R))*(n*(a+c-b)-2*r*R) + R*(r^2*(a+c-b)+ n*2*r*R);
P3 := (v*R + b*(r-R))*(u*(b+c-a)-2*r*R) + R*(r^2*(b+c-a)+ u*2*r*R);
```

圖十七：P1、P2 和 P3 的定義。研究者自製

為了將 P1、P3 中的 v 的變量消除，將 P3 中的 v 變量乘上 P1 再減掉 P1 中的 v 變量乘上 P3，如此一來就可以寫出一個變量僅有 $a、b、c、r、r_{\Delta ABC}、n、u$ 的式子，並且本人將其定義成 P4，再透過一樣的方法，將 P4 中的 u 變量乘上 P2 再減掉 P2 中的 u 變量乘上 P4，這樣就可以寫出一個變量僅有 $a、b、c、r、r_{\Delta ABC}、n$ 的式子，其程式碼如圖十八：

```
P4:= P1 * Coefficient(P3,v,1) - P3 * Coefficient(P1,v,1);
P5:= P2 * Coefficient(P4,u,1) - P4 * Coefficient(P2,u,1);
```

圖十八：P4 和 P5 的定義。研究者自製

為了解 L 的位置是否可以使用尺規作圖的方式找到，應確認 L 點在坐標平面上的 x 坐標（因 L 點在 x 軸上，故其 y 坐標為 0），若將其表達為 n 的多項式時，次方數是否不大於二次。此時透過 *MAGMA* 程式將 P5 中 n 的多項式

中 2 次項係數單獨抽離出來計算，並將其定義為 Q2，其程式碼如圖十九：

$$Q2:=\text{Coefficient}(P5,n,2);$$

圖十九：Q2 的定義。研究者自製

由於在程式輸出的結果中，發現其 n 的二次項係數中各項皆有 $r_{\Delta ABC}$ （程式中的 R），因此將其提出，其結果如下：

$$\begin{aligned} <r^2R^4a+r^2R^4b+r^2R^4c+1/4r^2R^2a^3-1/4r^2R^2a^2b- \\ &1/4r^2R^2a^2c-1/4r^2R^2a^2b^2+5/2r^2R^2a^2b^2c- \\ &1/4r^2R^2a^2c^2+1/4r^2R^2b^3-1/4r^2R^2b^2c- \\ &1/4r^2R^2b^2c^2+1/4r^2R^2c^3-1/4r^2a^3b^2c+ \\ &1/4r^2a^2b^2c+1/4r^2a^2b^2c^2+1/4r^2a^2b^3c- \\ &1/2r^2a^2b^2c^2+1/4r^2a^2b^2c^3-1/4r^2b^4c+1/4r^2b^3c^2+ \\ &1/4r^2b^2c^3-1/4r^2b^2c^4-2r^2R^3a^2b^2c+1/2r^2R^3a^3b^2c- \\ &1/2r^2R^3a^2b^2c-1/2r^2R^3a^2b^2c^2-1/2r^2R^3a^2b^3c+r^2R^3a^2b^2c^2 \\ &-1/2r^2R^3a^2b^2c^3+1/2r^2R^3b^4c-1/2r^2R^3b^3c^2-1/2r^2R^3b^2c^3+ \\ &1/2r^2R^3b^2c^4-1/4R^2a^3b^2c+1/4R^2a^2b^2c+1/4R^2a^2b^2c^2 \\ &+1/4R^2a^2b^3c-1/2R^2a^2b^2c^2+1/4R^2a^2b^2c^3-1/4R^2b^4c \\ &+1/4R^2b^3c^2+1/4R^2b^2c^3-1/4R^2b^2c^4, 1> \end{aligned}$$

圖二十：將 $r_{\Delta ABC}$ 提出後的程式碼。研究者自製

從中可發現若減去 $4rr_{\Delta ABC}^2(2abc(r_{\Delta ABC}-r)-rr_{\Delta ABC}^2(a+b+c))$ ，就可以再提出 $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ ，本人定義其方程式為 Q22，並且其程式碼如圖二十一：

$$Q20:=Q2 \text{ div } R;$$

$$Q21:=Q20-(4r^2R^2(2a^2b^2c(R-r)-r^2R^2(a+b+c)));$$

$$Q22:=Q21 \text{ div } ((b+c-a)(a+c-b)(a+b-c));$$

圖二十一：Q22 的定義。研究者自製

透過上述的計算，被因式分解後的算式，即

$Q22 = r^2(r_{\Delta ABC}^2 - bc) + 2bcrr_{\Delta ABC} - bcr_{\Delta ABC}^2$ ，因此 Q2（ n 的二次項係數）的式子就會成為 Q22 乘上 $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ 再加上 $4rr_{\Delta ABC}^2(2abc(r_{\Delta ABC}-r)-rr_{\Delta ABC}^2(a+b+c))$ ，最後再乘上 $r_{\Delta ABC}$ 。至此可以發現此式當中在 a 、 b 、 c 、 r 給定時， $r_{\Delta ABC}$ 也會是定值，自然可以得知上述 n 次方程式的次方數顯然不大於 2 次。一個數是否可以被尺規作圖，可參考張海潮教授曾經發表過的文章，即參考文獻 [3]。文章中指出，如欲使用尺規作出的數只涉及

一元二次方程式的解，則該數必可尺規作圖。透過上述的說明，得以顯見 \overline{BL} 的長度必然會是一個 n 的二次方程式的解，故 \overline{BL} 的長度必然可以透過計算方程式的解的方法將其數值計算出來，因此將 \overline{BL} 的長度透過尺規進行作圖必然可以被實現。然而，只要 \overline{BL} 能夠被尺規作圖，在找到了 L 點的位置以後，透過圓外點作圓之切線的作圖方法，即可將 M 、 N 作出來，意即 $\triangle LMN$ 能透過尺規作圖實現。

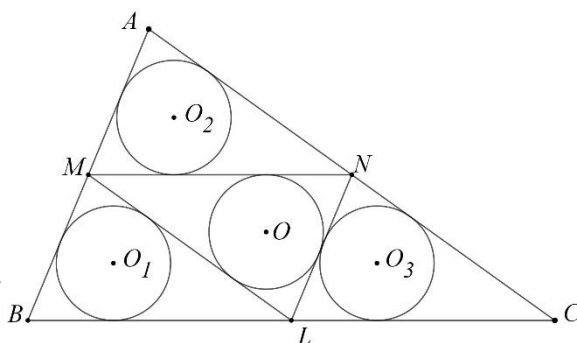
4. 計算在任意 $\triangle ABC$ 中，三等圓半徑 (r) 的上界。

由圖十三的討論可知，當 $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形時，三等圓半徑

(r) 有其上界。此時， $s_{\triangle LMN} = \frac{a+b+c}{4}$ 。

根據海龍公式，

$$\begin{aligned} a_{\triangle LMN} &= \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - \frac{a}{2})(s_{\triangle ABC} - \frac{b}{2})(s_{\triangle ABC} - \frac{c}{2})} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)} \end{aligned}$$



根據 Lemma1，

$$r = r_{\triangle LMN} = \frac{2 \times \frac{1}{4} \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}}{s_{\triangle ABC}}$$

圖二十二： $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形。研究者自製

$$\Rightarrow r_{\triangle LMN} = r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}{s_{\triangle ABC}}}$$

(三) 證明正 n 邊形 $\{A_n\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 等於其內接正 n 邊形 $\{B_n\}$ 內切圓半徑

($r_{\{B_n\}}$) 加「與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 同時相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$)」，即

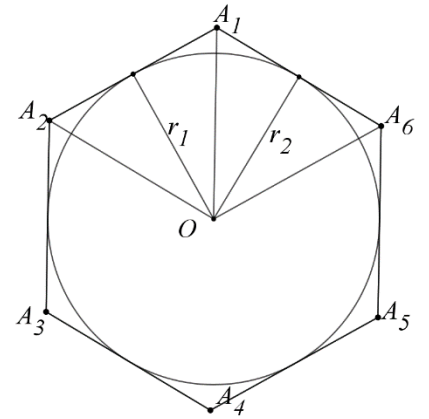
$r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 。若 $\{B_n\}$ 內接正 n 邊形 $\{C_n\}$ ，則上式可推廣為

$$r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}} \dots。$$

在證明 $r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r$ 過程中，需先證明以下兩個性質，分別為 *Lemma4* 及

Lemma5，其證明過程如下：

Lemma4：當多邊形為正多邊形時，則必有內切圓。



圖二十三：*Lemma 4* 之示意圖。研究者自製

Pf:

如圖二十三，正 n 邊形中必有一對稱中心 O 。

連 $\overline{OA_1}$ 、 $\overline{OA_2}$ 、 $\overline{OA_6}$ ，因為 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_6A_1}$ 又

$$\angle A_1A_2O = \angle A_6A_1O, \overline{OA_1} = \overline{OA_1}$$

故 $\triangle OA_1A_2 \cong \triangle OA_6A_1 (SAS) \Rightarrow \overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_6}$

$\Rightarrow r_1 = r_2 \Rightarrow$ 正 n 邊形之中心到各邊距離相等，此即為其內切圓半徑，亦即 O 為內切圓圓心。

Lemma5：當 n 邊形為正 n 邊形時，則其內切圓半徑 $r_{\{A_n\}} = \frac{a_{\{A_n\}}}{s_{\{A_n\}}}$

Pf:

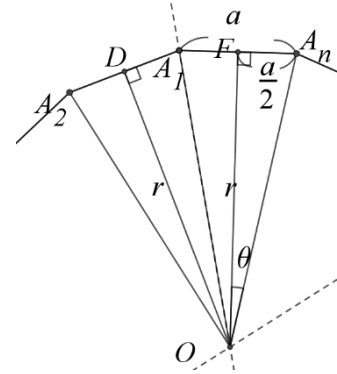
如圖二十四，令此正 n 邊形邊長為 a ，其內切圓半徑為 r ， $\angle FOA_n = \theta$ ，即

$$\overline{A_1A_2} = a = \overline{A_1A_n}, \overline{A_nF} = \frac{a}{2}, \text{ 由圖可知}$$

$$r = \frac{a}{2} \times \cot \theta, \text{ 且此正 } n \text{ 邊形之半周長為}$$

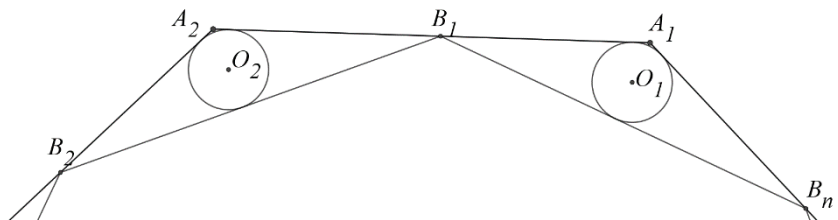
$$s_{\{A_n\}} = \frac{na}{2}, \text{ 面積 } a_{\{A_n\}} = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \cot \theta \times \frac{1}{2} \times 2n$$

$$\Rightarrow r_{\{A_n\}} = \frac{a_{\{A_n\}}}{s_{\{A_n\}}} = \frac{\frac{a_{\{A_n\}}}{2}}{\frac{na}{2}}$$



圖二十四：*Lemma5* 之示意圖。研究者自製

如圖二十五，在 $\triangle A_2B_2B_1$ 和 $\triangle A_1B_1B_n$ 中，因為 $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1}$



圖二十五： n 邊形的部份圖。研究者自製

且 $\angle B_1A_2B_2 = \angle B_nA_1B_1$ ，又 $\overline{A_2B_1} = \overline{A_1B_n}$ ，故 $\triangle A_2B_2B_1 \cong \triangle A_1B_1B_n (SAS)$

$\Rightarrow \angle A_2 B_2 B_1 = \angle A_1 B_1 B_n$, $\angle A_2 B_1 B_2 = \angle A_1 B_n B_1$, 又

$$\overline{B_1 B_2} = r \cot \frac{\angle A_2 B_1 B_2}{2} + r \cot \frac{\angle A_2 B_2 B_1}{2} , \quad \overline{O_1 O_2} = r \cot \frac{\angle A_2 B_1 B_2}{2} + r \cot \frac{\angle A_1 B_1 B_n}{2}$$

$\Rightarrow \overline{B_1 B_2} = \overline{O_1 O_2}$, 其餘邊長同理, 因此可以知道 $\{B_n\} \cong \{O_n\}$, 故 $\{B_n\}$ 和 $\{O_n\}$ 的半周長與面積都相同, 透過 Lemma5, 即可知 $r_{\{B_n\}} = r_{\{O_n\}}$ 。

$$\therefore r_{\{B_n\}} = r_{\{O_n\}} = r_{\{A_n\}} - r_{\{A_n\}-\{B_n\}} , \quad \text{即 } r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}} 。$$

至此, 本研究將研究目的 (三) 的等式 $r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 證明完畢。

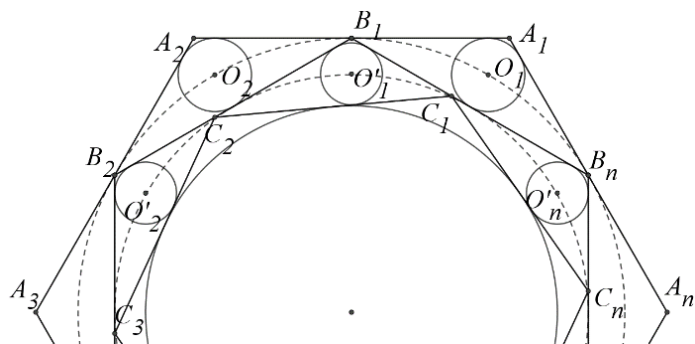
若是在 $\{B_n\}$ 內接一正 n 邊形 $\{C_n\}$ 時, 參考圖二十六, 利用上式得知

$$r_{\{B_n\}} = r_{\{C_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} ,$$

$$\text{又 } r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}} ,$$

$$\text{故 } r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}} 。$$

透過上述的說明可知, 形如這樣的推論過程可以透過一層層的內接正 n 邊形繼續推廣。



圖二十六： n 邊形的部分圖。研究者自製

(四) 在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下, 將三等圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑比從 $1:1:1$ 改

為 $1:2:1$, 探討 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 等式是否成立。

改變圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑比例, 將前述研究目的 (一)、(二), 由三等圓改為 $r_{O_1}:r_{O_2}:r_{O_3}=1:2:1$ 。在尚未開始計算前, 本研究猜想即使改變了圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑比例, 仍擁有類似於 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 的關係。假設

$$r_{\triangle ABC} = \alpha r_{\triangle LMN} + \beta(r_{O_1} + r_{O_2} + r_{O_3}) , \quad \text{並給定正 } \triangle ABC \text{ 邊長和圓 } O_1、O_2、O_3 \text{ 半徑的實際}$$

數字, 計算 α 和 β 。其計算過程如下:

如圖二十七, 正 $\triangle ABC$ 邊長為 10, 圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑分別為 1、2、1。假設

點 B 為原點, \overrightarrow{BC} 為 x 軸正向, $\overline{MG} = m$, $\overline{LG} = n$ 。

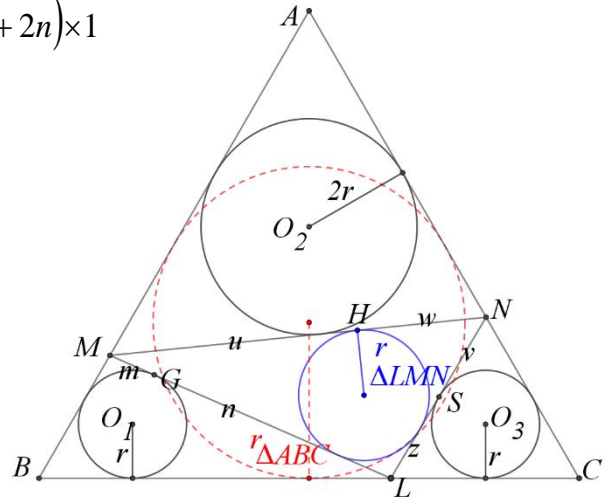
在 $\triangle BML$ 中，根據海龍公式及三角形面積公式

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{3} + m + n) \cdot m \cdot n \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} + 2m + 2n) \times 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{3} + m + n) \cdot m \cdot n \cdot \sqrt{3}} = (\sqrt{3} + m + n)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} + m + n) \cdot m \cdot n \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3} + m + n)^2$$

$$\Rightarrow m \cdot n \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3} + m + n) \Rightarrow n = \frac{\sqrt{3} + m}{\sqrt{3}m - 1}$$



圖二十七： r 的半徑比為 2；1；1 之示意圖。研究者自製

如圖二十七令 $\overline{MH} = u$ ， $\overline{HN} = w$ ， $\overline{NS} = v$ ， $\overline{SL} = z \Rightarrow u = 10 - 3\sqrt{3} - m$

同理可得： $w = \frac{2u + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}u - 2}$ ， $v = 10 - 3\sqrt{3} - w$ ， $z = \frac{\sqrt{3} + v}{\sqrt{3}v - 1}$ 。

計算完上述變量後，就可以計算出 $a_{\triangle LMN}$ 和 $s_{\triangle LMN}$ ，也就可以計算 $r_{\triangle LMN}$ 。並且當圓

O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑分別為 1 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{2}$ 時， $r_{\triangle LMN}$ 也是一樣的計算邏輯，將其計算

出來之後，就可透過聯立方程式解 α 和 β 。也就代表可將

$r_{\triangle ABC} = \alpha r_{\triangle LMN} + \beta(r_{O_1} + r_{O_2} + r_{O_3})$ 此關係式解出。然而，目前的困難在於透過上述的變

量可發現 $r_{\triangle LMN}$ 的數字較為複雜，以至於無法簡潔地表述 $r_{\triangle LMN}$ 的數值。未來本研究盼能找出減少變量的假設方法，完成 α 和 β 的計算。

(五) 探討將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體時，正四面體 $\{A_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4\}$) 的內切球

半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 與其內接八面體 $\{B_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 的內切球半徑 ($r_{\{B_n\}}$) 和

4 個小正四面體內切球半徑 (r) 之關係。

如圖二十八，令正四面體 $\{A_n\}$ 邊長為 $2\sqrt{3}a$ ，並且 A_2 為原點， $\overrightarrow{A_2A_3}$ 為 x 軸

正向。令 $A_3(2\sqrt{3}a, 0, 0)$ 、 $A_4(\sqrt{3}a, 3a, 0)$

$\Rightarrow \triangle A_2A_3A_4$ 之重心坐標為 $(\sqrt{3}a, a, 0)$ 。令 $A_1(\sqrt{3}a, a, 2\sqrt{2}a)$ 。

⇒正四面體 $\{A_n\}$ 之內切球半徑為

$$\frac{1}{4} \times \text{高} = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a。$$

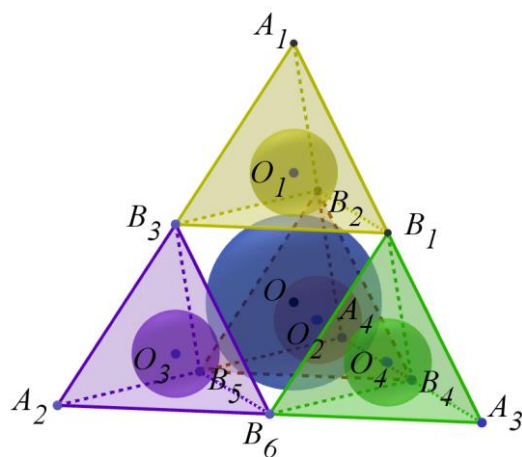
接著討論當 $\{B_n\}$

($n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 的六個點皆為正四面體 $\{A_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4\}$) 六個邊上

之中點時，即 $B_1\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \sqrt{2}a\right)$ 、

$$B_2(\sqrt{3}a, 3a, \sqrt{2}a)、B_3\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \sqrt{2}a\right)、$$

$$B_4\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}, \frac{3a}{2}, 0\right)、B_5\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{3a}{2}, 0\right)、B_6(\sqrt{3}a, 0, 0)。$$



圖二十八：將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體時之示意圖。研究者自製

在繪製出如圖二十八之圖形後，其內接八面體 $\{B_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 為了確認是否會有一顆與八個面相切的球，本研究先將此八面可被分為兩組，其中一組是由黃、綠、紅、紫色的面所組成的，另一組則是由剩下沒有顏色的四個面所組成的。首先由黃、綠、紅、紫色的面所組成的內切球球心應與 $\triangle B_3B_5B_6$ 、 $\triangle B_1B_4B_6$ 、 $\triangle B_2B_4B_5$ 、 $\triangle B_4B_5B_6$ 之四個重心所形成之新的正四面體之外接球球心共點。

$\triangle B_3B_5B_6$ 之重心坐標為 $\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\triangle B_1B_4B_6$ 之重心坐標為

$\left(\frac{4\sqrt{3}a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\triangle B_2B_4B_5$ 之重心坐標為 $\left(\sqrt{3}a, \frac{5a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\triangle B_4B_5B_6$ 之重心坐標

為 $(\sqrt{3}a, a, \sqrt{2}a)$ ，故此四個重心所形成之正四面體的外接球球心坐標為

$$\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3} + \frac{4\sqrt{3}a}{3} + \sqrt{3}a + \sqrt{3}a, \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{5a}{3} + a, \frac{\sqrt{2}a}{3} + \frac{\sqrt{2}a}{3} + \frac{\sqrt{2}a}{3} + \sqrt{2}a\right) = \left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$$

，由於四個重心所形成的正四面體的外接球球心與四個重心所在平面之內切球球心

共點。因此，黃、綠、紅、紫色四面所組成的內切球球心坐標為 $\left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$ ，

且其半徑為 $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。

同理，剩下沒有顏色的四個面所組成的內切球球心應與 $\Delta B_2 B_3 B_5$ 、 $\Delta B_1 B_3 B_6$ 、 $\Delta B_1 B_2 B_4$ 、 $\Delta B_4 B_5 B_6$ 之四個重心所形成之新的正四面體之外接球球心共點。

$\Delta B_2 B_3 B_5$ 之重心坐標為 $\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, \frac{4a}{3}, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\Delta B_1 B_3 B_6$ 之重心坐標為

$\left(\sqrt{3}a, \frac{a}{3}, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\Delta B_1 B_2 B_4$ 之重心坐標為 $\left(\frac{4\sqrt{3}a}{3}, \frac{4a}{3}, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\Delta B_4 B_5 B_6$ 之重心坐標

為 $(\sqrt{3}a, a, 0)$ ，故此四個重心所形成之正四面體的外接球球心坐標為

$\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3} + \sqrt{3}a + \frac{4\sqrt{3}a}{3} + \sqrt{3}a, \frac{4a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{4a}{3} + a, \frac{2\sqrt{2}a}{3} + \frac{2\sqrt{2}a}{3} + \frac{2\sqrt{2}a}{3} + 0\right) = \left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$

，由於四個重心的正四面體的外接球球心與四個重心所在平面之內切球球心共點，

因此，四個沒有顏色的面所組成之內切球球心坐標為 $\left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$ ，且其半徑為

$\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。

由上述計算發現兩組面之內切球是同一顆，故內接八面體 $\{B_n\}$

$(n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ 有一顆內切球，且其半徑為 $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。與原正四面體的內切球

半徑相同，故正四面體 $\{A_n\}$ $(n \in \{1, 2, 3, 4\})$ 內切球半徑 $(r_{\{A_n\}})$ 與其內接八面

體 $\{B_n\}$ $(n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ 的內切球半徑 $(r_{\{B_n\}})$ 和 4 個小正四面體內切球半

徑 (r) 之間，不會有類似於研究目的 (一) 的等式需要討論。

肆、研究結果

- 一、 ΔABC 為任意三角形，其內切圓半徑為 $r_{\Delta ABC}$ ，在 ΔABC 內有三個半徑為 r 的等圓與 ΔABC 的其中兩邊相切， L 、 M 、 N 三點分別在 ΔABC 三邊上，且 ΔLMN 的三邊與三等圓相切。若 ΔLMN 存在，則其內切圓半徑 $(r_{\Delta LMN})$ 加三等圓半徑 (r) ，

等於 ΔABC 的內切圓半徑 ($r_{\Delta ABC}$)，即 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 。此等式證明完成。

二、(一) 已知 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ ，在 ΔABC 是正三角形時，三等圓內切圓半徑 r 的上界

發生在 ΔLMN 為 ΔABC 之中點三角形時，且 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ ，此時 ΔLMN 唯一；當

$r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， ΔLMN 存在兩個。若 B 為原點， \overrightarrow{BC} 為 x 軸正向，則 L 的坐標為

$$\left(\frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}, 0 \right)$$

。在有了 L 的坐標後，即可透過圓外點作切線的尺規作圖過程，分別畫出 M 、 N 兩點的相對位置。

(二) 已知 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ ，在 ΔABC 是任意三角形時，三等圓內切圓半徑 r 的上界發生在 ΔLMN 為 ΔABC 之中點三角形時，且

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\Delta ABC} - a)(s_{\Delta ABC} - b)(s_{\Delta ABC} - c)}{s_{\Delta ABC}}}$$

，此時 ΔLMN 唯一；而當

$$r < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\Delta ABC} - a)(s_{\Delta ABC} - b)(s_{\Delta ABC} - c)}{s_{\Delta ABC}}}$$

時， ΔLMN 存在兩個。若 B 為原點， \overrightarrow{BC} 為 x

軸正向，則 \overline{BL} 的長度必然可以透過計算方程式的解的方法將其數值計算出來，由

於該方程式的次方數不大於二次，故 \overline{BL} 的長度透過尺規作圖必然可被實現。然

而，在找到了 L 點的位置以後，透過圓外點作圓之切線的作圖方法，即可分別畫出 M 、 N 兩點的相對位置，意即 ΔLMN 能透過尺規作圖實現。

三、證明正 n 邊形 $\{A_n\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 等於其內接正 n 邊形 $\{B_n\}$ 內切圓半徑

($r_{\{B_n\}}$) 加「與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 同時相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$)」，即

$$r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$$

。若 $\{B_n\}$ 內接正 n 邊形 $\{C_n\}$ ，則上式可推廣為

$$r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}}$$

。且上式顯然可透過一層層的內接正 n 邊形繼續推廣。

四、當 ΔABC 為正三角形，本研究猜想即使改變了圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑比例，仍擁

有類似於 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 的關係，故假設 $r_{\Delta ABC} = \alpha r_{\Delta LMN} + \beta(r_{O_1} + r_{O_2} + r_{O_3})$ 的等式成

立，然而後續計算時，由於算式過於繁雜不易整理，未來本研究盼能找出減少變量的假設方法，完成 α 和 β 的計算。

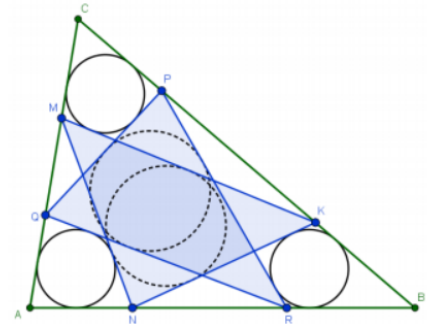
五、將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體後，本研究發現正四面體 $\{A_n\}$ 內接的八面體 $\{B_n\}$ 之內切球和正四面體 $\{A_n\}$ 之內切球是同一顆內切球，因此 $r_{\{A_n\}}$ 不會等於 $r_{\{B_n\}} + r$ 。

伍、討論

在查找與本研究相關文章時，意外發現在 2018 年以色列國內的數學奧林匹亞的第六題，即參考文獻 [8]，該問題提及的圖與本研究之圖三相同，都是在 $\triangle ABC$ 內有三個等圓與 $\triangle ABC$ 的其中兩邊相切，在 $\triangle ABC$ 三邊上各找到一點，使得三點形成的三角形各邊與三等圓分別相切，這樣的三角形有兩個（即右圖中的 $\triangle MNK$ 與 $\triangle PQR$ ），試證此兩個三角形的內切圓半徑相等。其實這個競賽試題透過本研究的主定理就可以自然的發現。

在本篇研究中，將類似的分割方式從 $\triangle ABC$ 推廣至正 n 邊形時，發現仍然有類似於主定理的性質後，本研究嘗試不同的分割方式試圖尋找是否有相關或類似的性質時，進行了如下的嘗試：在正六邊形上，每隔一個頂點連線，所連成之「正三角形內切圓半徑」與「原正六邊形各邊和內部形成的正三角形相切之三等圓半徑」相加其實並不會等同於原正六邊形的內切圓半徑。

In the corners of triangle ABC there are three circles with the same radius. Each of them is tangent to two of the triangle's sides. The vertices of triangle MNK lie on different sides of triangle ABC , and each edge of MNK is also tangent to one of the three circles. Likewise, the vertices of triangle PQR lie on different sides of triangle ABC , and each edge of PQR is also tangent to one of the three circles (see picture below). Prove that triangles MNK, PQR have the same inradius.



圖二十九：Israel 2018 Q6。
參考文獻 [8]

一、本研究之實用性

假設 $\triangle ABC$ 為一塊三角形的土地，三頂點 A 、 B 、 C 分別為敵對國家派遣來進攻此土地的士兵，則三個等圓是我國用來防禦敵國士兵的防禦基地，這個防禦基地的用途是使得敵國士兵因為被防禦基地擋住視線，而無法使用武器去攻擊土地內的居民，但仍不排除士兵會進行爆破式攻擊，即是將爆裂物擲入土地中，所以我國設計了一個 $\triangle LMN$ 作為保護土地上居民的建築物，讓居民可以在 $\triangle LMN$ 區域中保證不會受到攻擊。另外，本研究之圖形亦可以運用於公共環境中的裝飾藝術。

二、未來展望

在研究目的（二）中，本研究對正 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置是透過解析幾何的方法，計算 L 的坐標位置，進而透過圓外一點作圓之切線的尺規作圖過程，完成透過尺規作圖找到 L 、 M 、 N 的目標，換言之，若沒有計算出 L 的坐標位置，後續的作圖仍無法完成。未來本研究想透過純幾何作圖的方法找出 L 、 M 、 N 三點的相對位

置。另外，本研究在尋找其他作圖方式時，有作過如下的嘗試：先計算 \overline{LM} 和圓 O_1 的切點，此切點會依三等圓之內切圓半徑 r 的變大與縮小，產生不同的切點位置，在觀察其不同位置所造成的軌跡時，與三葉線十分雷同，雖尚未確定該軌跡方程式為何，未來或許可以嘗試朝切點軌跡方程式的研究方向努力。

最後在研究目的（四）中，因為 $r_{\Delta LMN}$ 的數字過於複雜，以至於無法成功將 α 和 β 的實際數字計算出來，這點著實非常可惜，因此未來將會嘗試透過其他可以減少變量的方式去計算，期待未來可以計算出 α 和 β 的實際數字，並進一步的計算出 $r_{\Delta ABC} = \alpha r_{\Delta LMN} + \beta(r_D + r_E + r_F)$ 正確的線性組合。

陸、結論

在尋找研究題目時，看到了一篇網路貼文（如圖三），文中提及圓 O_1 、 O_2 、 O_3 為等圓， ΔABC 內切圓半徑（ $r_{\Delta ABC}$ ）等於 ΔLMN 內切圓半徑（ $r_{\Delta LMN}$ ）加三等圓半徑（ r ）時（即 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ ）。因為該篇文章僅提供了此等式但並未提及證明或任何說明文字，這使我很好奇該等式的正確性，也好奇若該等式正確，應當如何進行該等式的證明。研究初期，我使用 *Geogebra* 數學軟體嘗試去繪製此圖形。一開始因為不了解該圖形的作圖要領，也不清楚具備該等式時應有的性質為何，只能透過軟體不斷嘗試，在 ΔABC 三邊上各取一點 L 、 M 、 N ，此時光是要控制 ΔAMN 、 ΔBML 、 ΔCLN 三個三角形的內切圓半徑並使之相等就花了一番努力。顯然，在移動 L 、 M 、 N 三點的過程中，不但 ΔLMN 的內切圓半徑 $r_{\Delta LMN}$ 會有所改變， ΔAMN 、 ΔBML 、 ΔCLN 三個三角形也會隨著 L 、 M 、 N 三點的位置變化導致 r 可能不盡相同。但透過不斷地嘗試，我發現在 r 近似相等（因為縱使透過肉眼看起來是一樣的，但總會在小數點後的某一位就看出差異）且 ΔLMN 存在的前提下， $r_{\Delta ABC}$ 的數值確實幾乎等於 $r + r_{\Delta LMN}$ 。透過 *Geogebra* 繪圖的實驗過程也讓我有理由相信該等式 $r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$ 是對的、可以被證明的，因而開啟了本研究的證明過程。

然而在研究過程中，我並不是利用純幾何作圖的方式去完成本篇的研究目的，而是使用解析幾何的方法，計算出所需的點坐標，進而完成本篇的研究目的。計算的過程中，時常因為變量過多使得算式過於繁雜且無法簡潔地化簡，花了相當多的時間在思考該透過什麼手段減少本篇研究的變量。本研究一開始先是討論特殊三角形的相關性質後再延伸討論至任意三角形，本研究最終也透過 *MAGMA* 程式計算 \overline{BL} 的長度，在把 \overline{BL} 的長度表示成 n 的多項式後，確認了其次方數不大於二次，故 \overline{BL} 的長度可被尺規作圖。然而，在找到了 L 點的位置以後，透過圓外點作圓之切線的作圖方法，即可將 M 、 N 作出來，意即 ΔLMN 能透過尺規作圖實現。

在本研究的研究目的（三）中，將三角形推廣至多邊形，但由於不是每一個多邊形都會有內切圓，所以本研究目前只有針對正 n 邊形討論，未來將會嘗試建構一個保證會有內切圓的非正 n 邊形之多邊形並持續進行研究之。而在研究目的（五）中，本研究將原題從二維嘗試推廣至三維，但由於正四面體 $\{A_n\}$ 的內接八面體 $\{B_n\}$ 的內切球和正四面體 $\{A_n\}$ 之內切球是同一顆內切球，因此 $r_{\{A_n\}}$ 並不會等於 $r_{\{B_n\}} + r$ ，也就代表本研究的定理並不會在正四面體中成立。

幾何的世界十分廣闊，本研究只完成了其中一小部分，但對我而言，本研究的意義非凡，即使現在對於研究中可延伸的方向依舊充滿著許多未知數，相信隨著我在數學領域上的不斷學習，未來必能在幾何領域中慢慢探索且更加了解之。

柒、參考文獻及資料

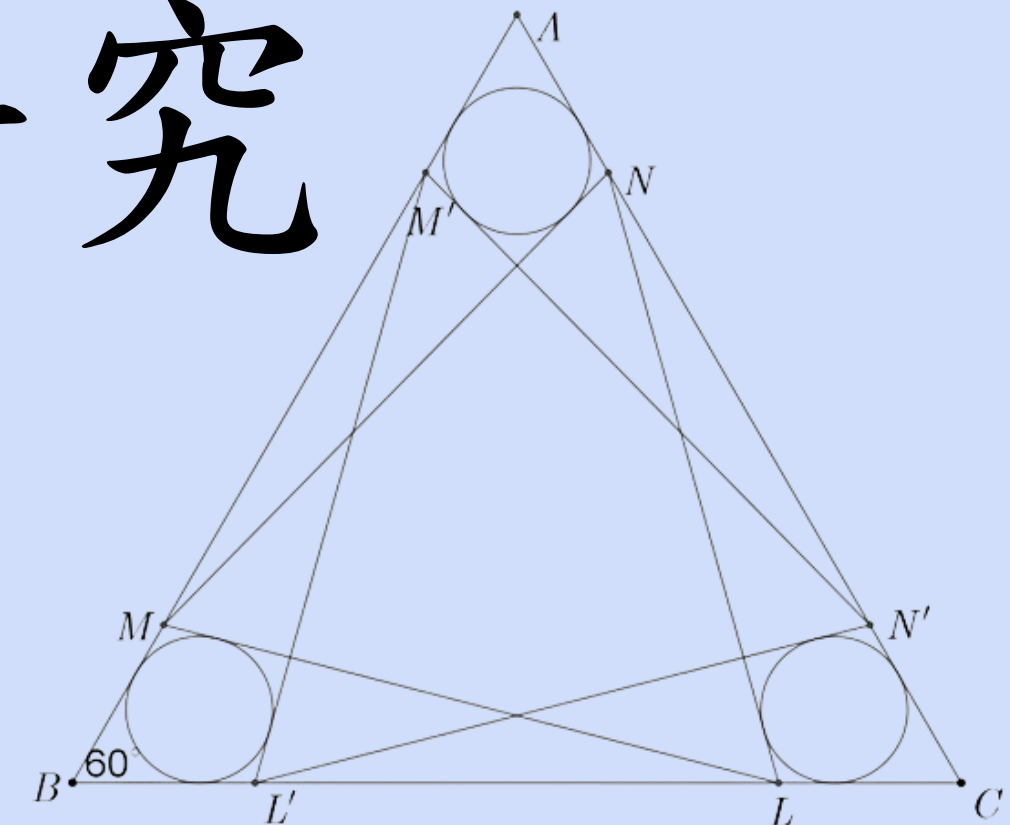
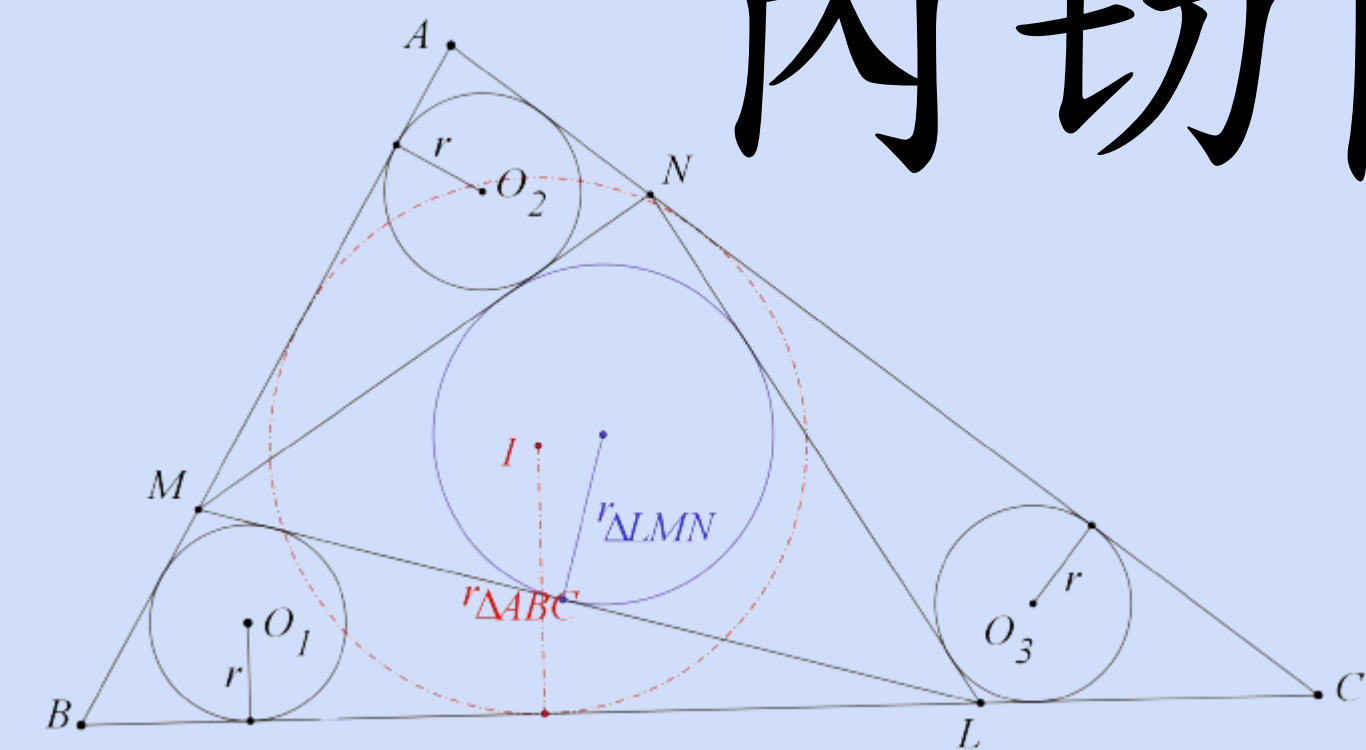
- [1] 史丹福（民107），日本寺廟的幾何難題，取自 <https://reurl.cc/m0XY6l>
- [2] 姜很羣（民 110），與切圓有關的幾何趣題，取自 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/341824742>
- [3] 張海潮（民 112），尺規作圖的代數面，取自 <https://reurl.cc/qrqmQ0>
- [4] 莊健祥（民 100），數學傳播，第三十五卷，第四期，第 82-85 頁
- [5] 馮玉華（民 110），三角形的內切圓半徑與三角形面積。國中數學第五冊數學講義（頁 165）。台南市：翰林出版事業股份有限公司
- [6] 燈火闌珊（民 97）。日本的寺廟幾何：天算不如人算。Udn 網路城邦。
- [7] Angela Drei (2012). Four Incircles in an Equilateral Triangle, a Sangaku. from <https://reurl.cc/0Z25MA>
- [8] AoPSOnline (2019). Israel 2018 Q6 - Equal circles inside a triangle, from <https://reurl.cc/9vxD2Y>
- [9] Steiner (1826). Malfatti's Problem. from <https://reurl.cc/RyDkde>
- [10] R. Honsberger (1985). An Old Japanese Theorem. from <https://reurl.cc/RyDk4e>

【評語】 050406

本作品的主要貢獻在於下述主定理：給定一個三角形，將它分成四個小三角形，其中三個在角上，一個在內部，若三個角上的三角形的內切圓都一樣大，則其半徑加上內部小三角形的內切圓半徑，等於原三角形的內切圓半徑。這個題目算是相當有趣。此外，作者也算出符合上述條件的三個角上的三角形的內切圓半徑的極大值以及用電腦程式輔助證明給定小圓半徑時，三角形的切割可以通過尺規作圖完成。以上結果算是有趣，且其部分證明也有運用到三角函數的對稱性，值得嘉許。最後，作者也有嘗試做出延伸推廣，如改成設定三個角上的三角形的內切圓半徑成固定比例，或是將原三角形改成正多邊形、正四面體，然而都沒能取得有趣的結果，比較可惜。整體撰寫得不錯，建立一些基本性質成工具來解決特殊圖形。

作品簡報

內切圓半徑與分割點的幾何研究

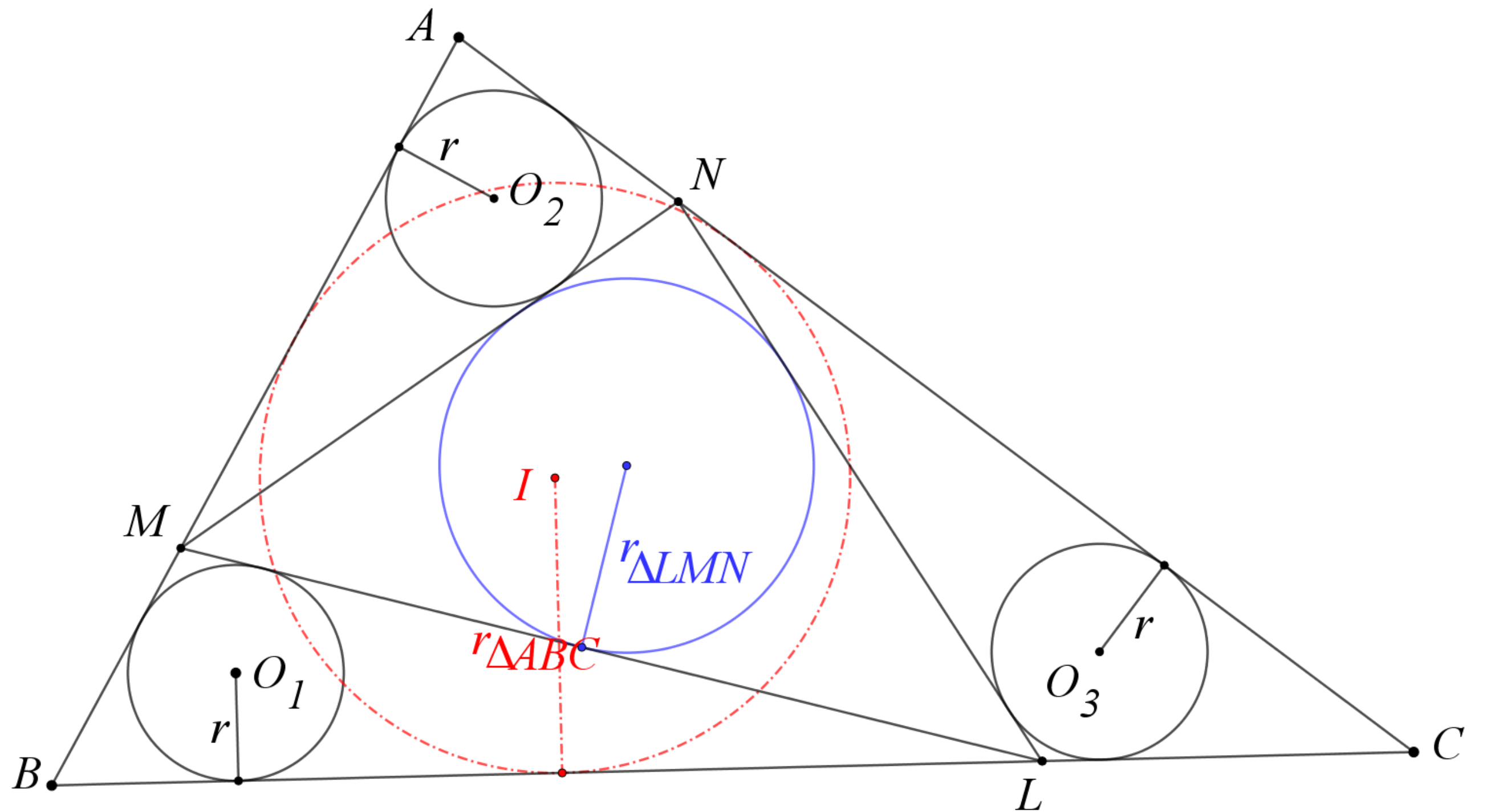


研究動機

Sangaku (算額問題) 起源自日本和西方文化，是被刻在木板上一種特殊的幾何問題，在日本的神社或寺廟屋頂下的木製平板上較為常見。這些幾何問題被世人通稱為 Japanese Problem，本研究题目的三角形切割方式改編自其中一篇的算額問題，並恰巧在網路上看到一篇相關的文章，基於好奇心開啟了本研究。

問題說明

如圖一，本研究在任意 $\triangle ABC$ 內，分別作三個與兩個邊相切的等圓 O_1 、 O_2 與 O_3 ，其中三等圓的半徑為 r 。在 $\triangle ABC$ 三邊上各找到一點 L 、 M 、 N ，使得 $\triangle LMN$ 的三邊皆為三等圓的切線。在 $\triangle LMN$ 存在的前提下，找尋 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑 $r_{\triangle ABC}$ 、 $\triangle LMN$ 之內切圓半徑 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 三者之間的關係。



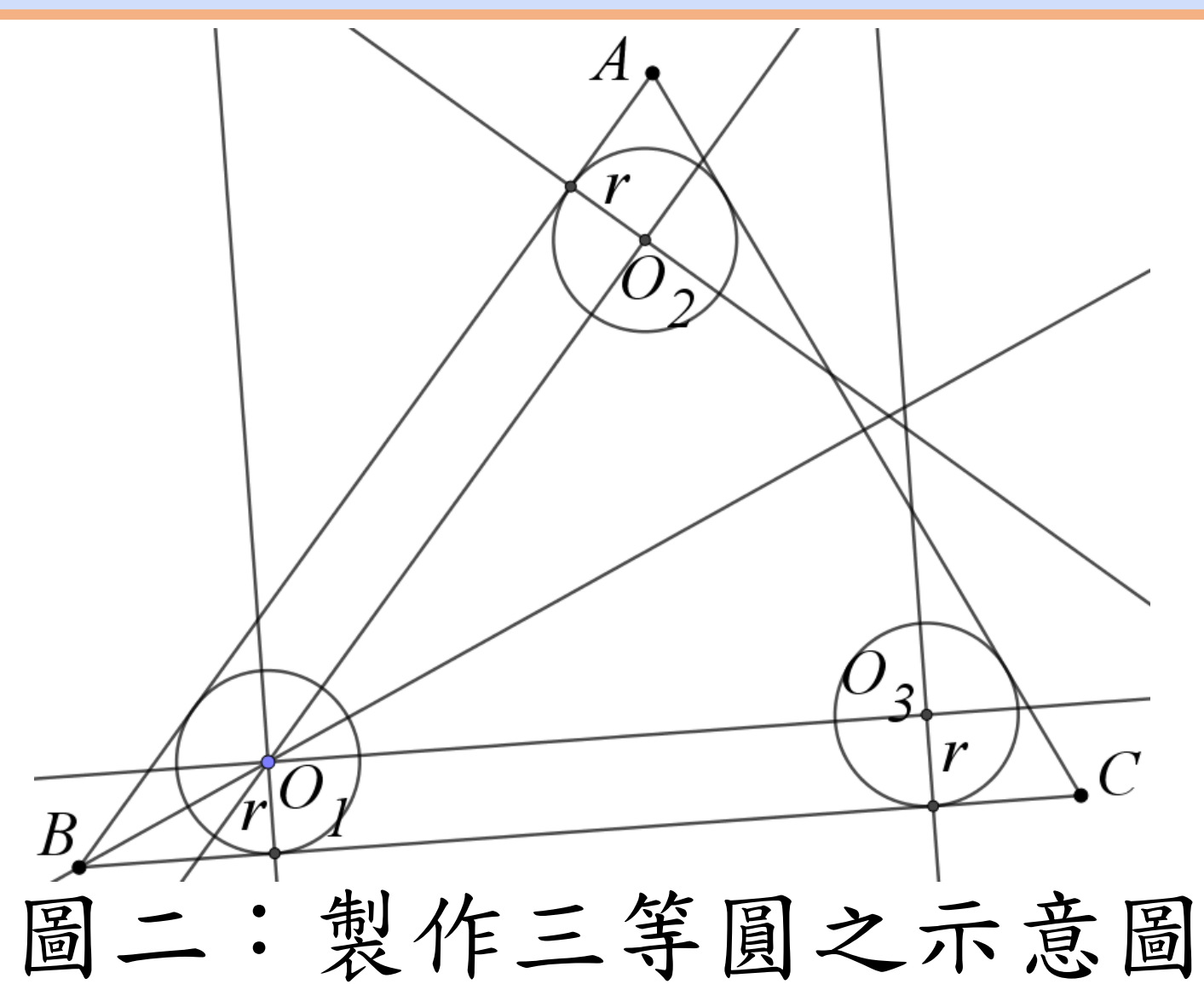
圖一：討論 $\triangle ABC$ 、 $\triangle LMN$ 、 r 之示意圖

研究目的

- 一、證明 $\triangle ABC$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$) 等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。
- 二、(一) 承一，已知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。給定正 $\triangle ABC$ 邊長與指定三等圓半徑 (r) 時，畫出 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。
(二) 討論任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。
- 三、證明正 n 邊形 ($\{A_n\}$) 內切圓半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 等於其內接正 n 邊形 ($\{B_n\}$) 內切圓半徑 ($r_{\{B_n\}}$) 加「與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 同時相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$)」的半徑，即 $r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 。若 $\{B_n\}$ 內接正 n 邊形 $\{C_n\}$ ，則可推廣為 $r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}}$ 。
- 四、在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，將三圓 O_1 、 O_2 與 O_3 的半徑比從 1:1:1 改為 1:g:1，求出 r 的上界並探討 $r_{\triangle ABC}$ 、 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 三個變量之間的關係。
- 五、探討將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體時，正四面體 $\{A_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4\}$) 的內切球半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 與其內接的正八面體 $\{B_n\}$ ($n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) 的內切球半徑 ($r_{\{B_n\}}$) 和 4 個小正四面體內切球 (r) 之關係。

研究結果

預備知識及定理



圖二：製作三等圓之示意圖

名詞解釋

$a_{\text{多邊形}}$ 為該多邊形的面積； $s_{\text{多邊形}}$ 為該多邊形的半周長。
 $r_{\text{多邊形}}$ 為該多邊形的內切圓半徑； $\{A_n\}$ 是正 n 邊形。
 $\{B_n\}$ 為 $\{A_n\}$ 的內接正 n 邊形； $\{C_n\}$ 為 $\{B_n\}$ 的內接正 n 邊形。
 $\{O_n\}$ 是與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 相切的 n 個等圓圓心連線之正多邊形。
 $\{O'_n\}$ 是與 $\{B_n\}$ 和 $\{C_n\}$ 相切的 n 個等圓圓心連線之正多邊形。
 同時與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 相切的 n 個等圓的半徑表示為 $r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 。

主定理證明

- 一、證明 $\triangle ABC$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$) 等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。

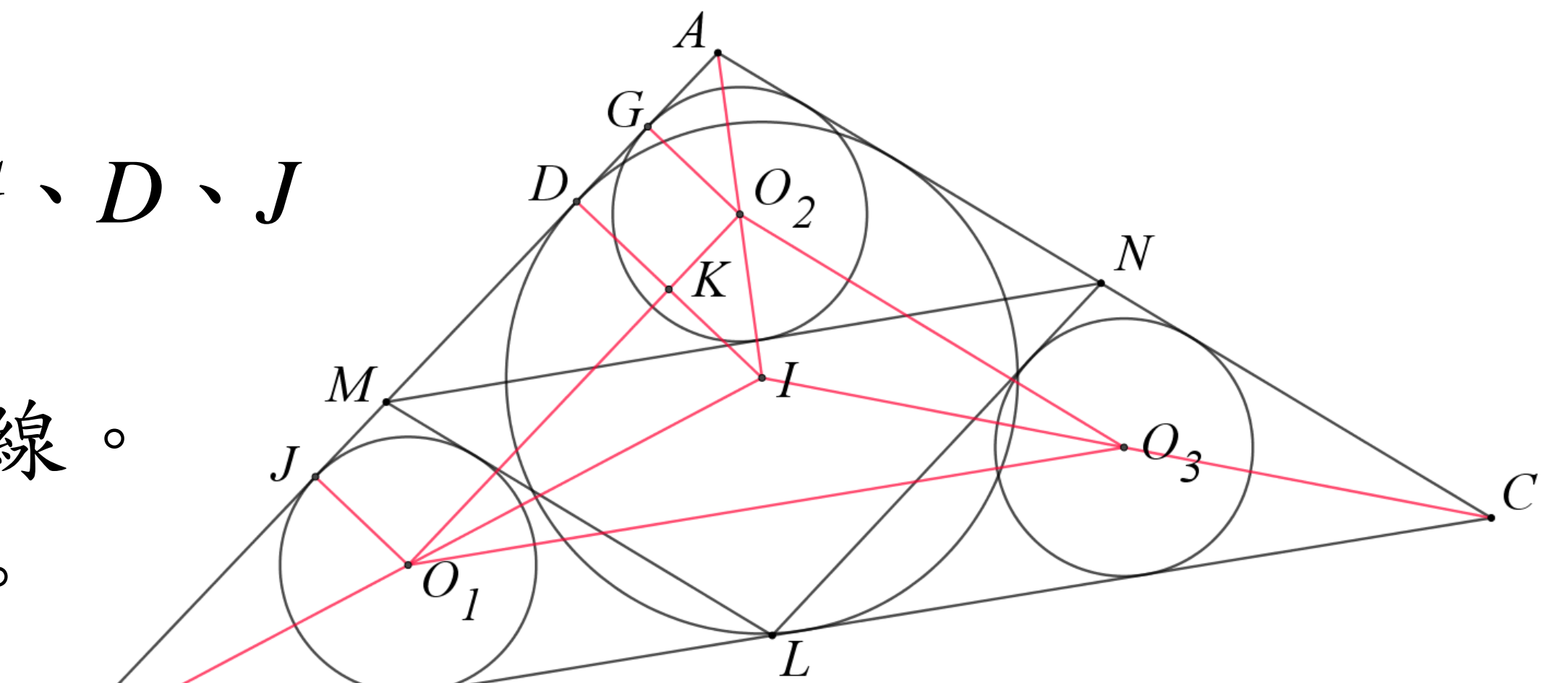
證明： 如圖三，圓 O_2 、 I 、 O_1 與 \overline{AB} 切點為 G 、 D 、 J

→ $\overline{O_2O_1} \parallel \overline{AB}$

→ A 、 O_2 、 I ； B 、 O_1 、 I ； C 、 O_3 、 I 皆三點共線。

→ I 是 $\triangle ABC$ 的內心，亦是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的內心。

→ \overline{KI} 是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的內切圓半徑。



圖三：主定理之示意圖

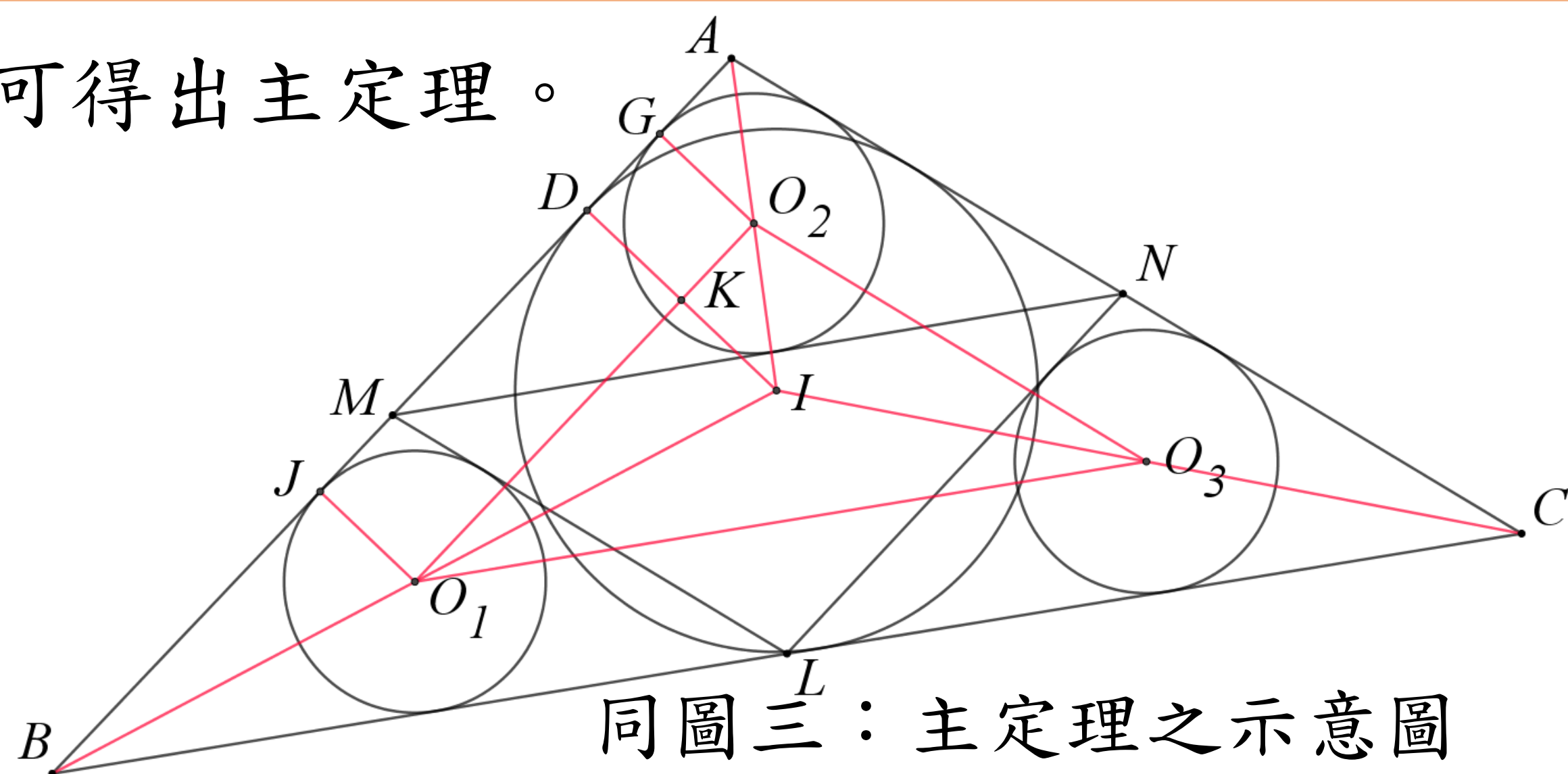
研究結果

後續僅須證明 $\Delta O_1O_2O_3$ 與 ΔLMN 的內切圓半徑相等即可得出主定理。

計算 $S_{\Delta LMN}$ 和 $a_{\Delta LMN}$ ，計算 $S_{\Delta O_1O_2O_3}$ 和 $a_{\Delta O_1O_2O_3}$

$$S_{\Delta LMN} = S_{\Delta O_1O_2O_3}, a_{\Delta LMN} = a_{\Delta O_1O_2O_3}$$

$$\rightarrow r_{\Delta LMN} = r_{\Delta O_1O_2O_3} = r_{\Delta ABC} - r \rightarrow r_{\Delta ABC} = r_{\Delta LMN} + r$$



同圖三：主定理之示意圖

二、(一) 在 ΔABC 為正三角形 (其邊長為 a) 的前提下，三等圓半徑 r 的上界為 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 。

證明： 假設 $\overline{LM} = t$, $\overline{BL} = \overline{AM} = \overline{CN} = x$ 。

$$\rightarrow r_{\Delta LMN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}t^2}{\frac{3t}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}t$$

主定理 $\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}a - r = \frac{\sqrt{3}}{6}t \Rightarrow t = a - 2\sqrt{3}r > 0$

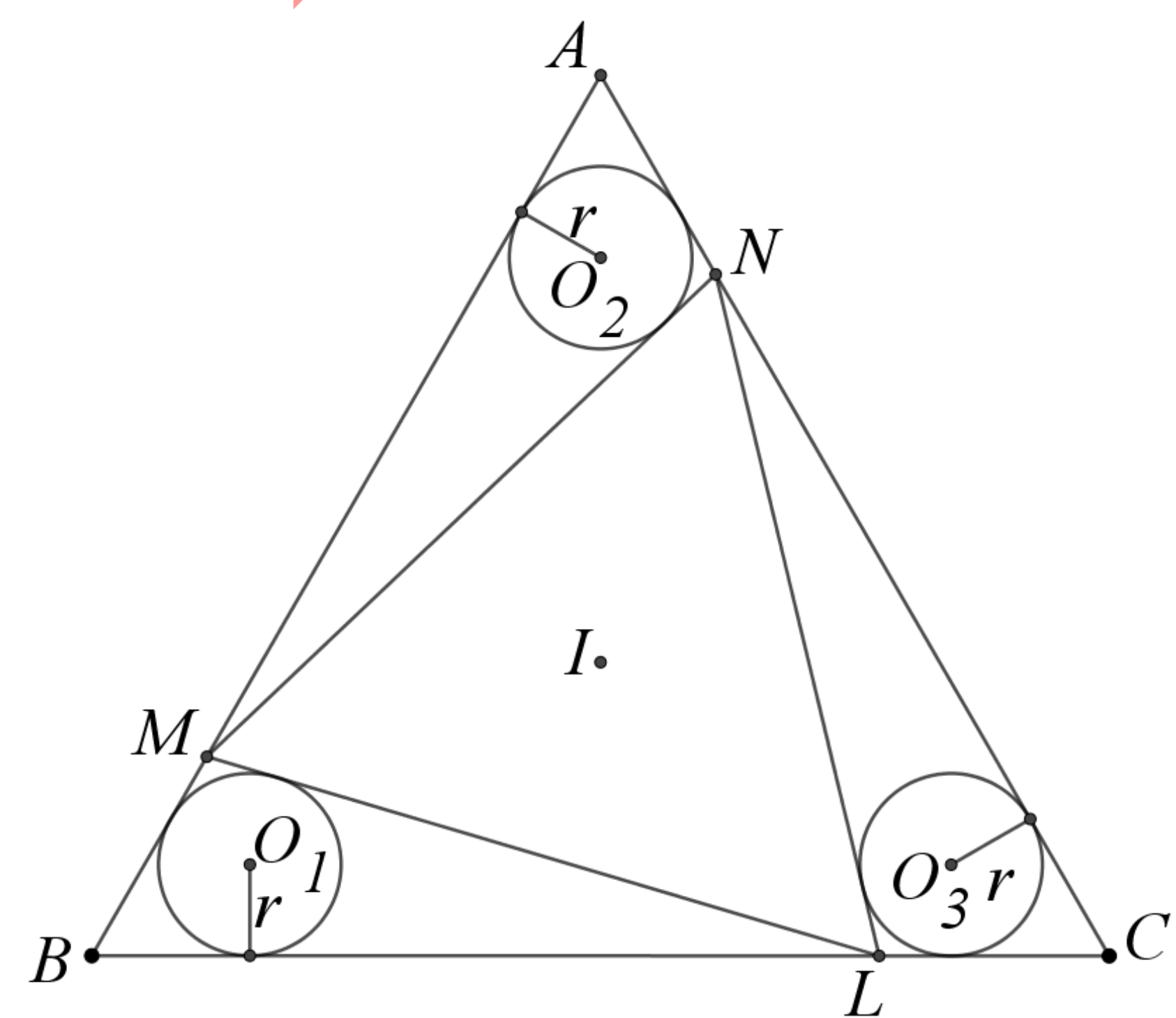
餘弦定理 $\rightarrow x = \frac{3a \pm \sqrt{144r^2 - 48\sqrt{3}ar + 9a^2}}{6}$

討論 $144r^2 - 48\sqrt{3}ar + 9a^2$ 。

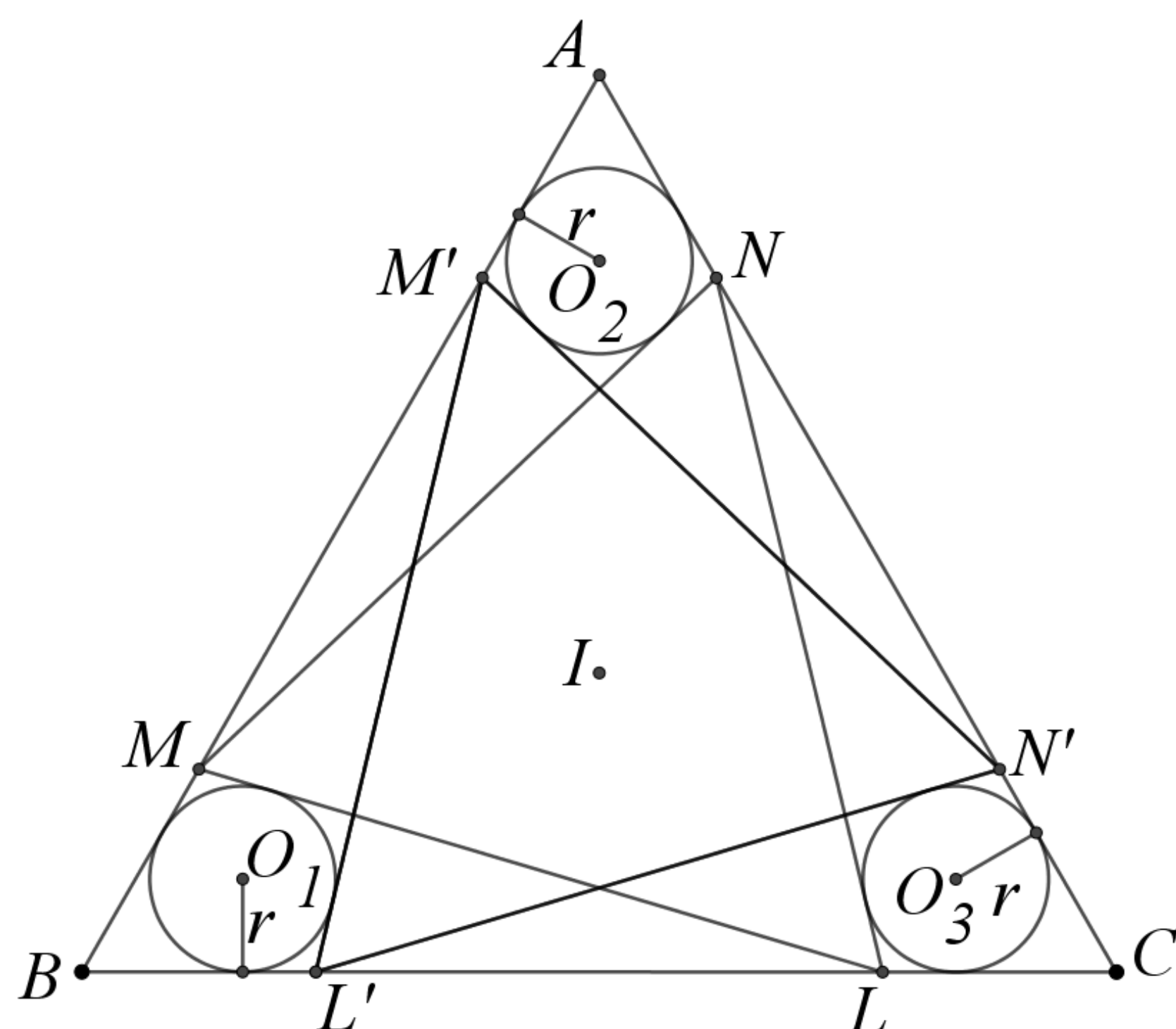
情況 1：如果 $144r^2 - 48\sqrt{3}ar + 9a^2 > 0 \rightarrow r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$

情況 2：如果 $144r^2 - 48\sqrt{3}ar + 9a^2 = 0 \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$

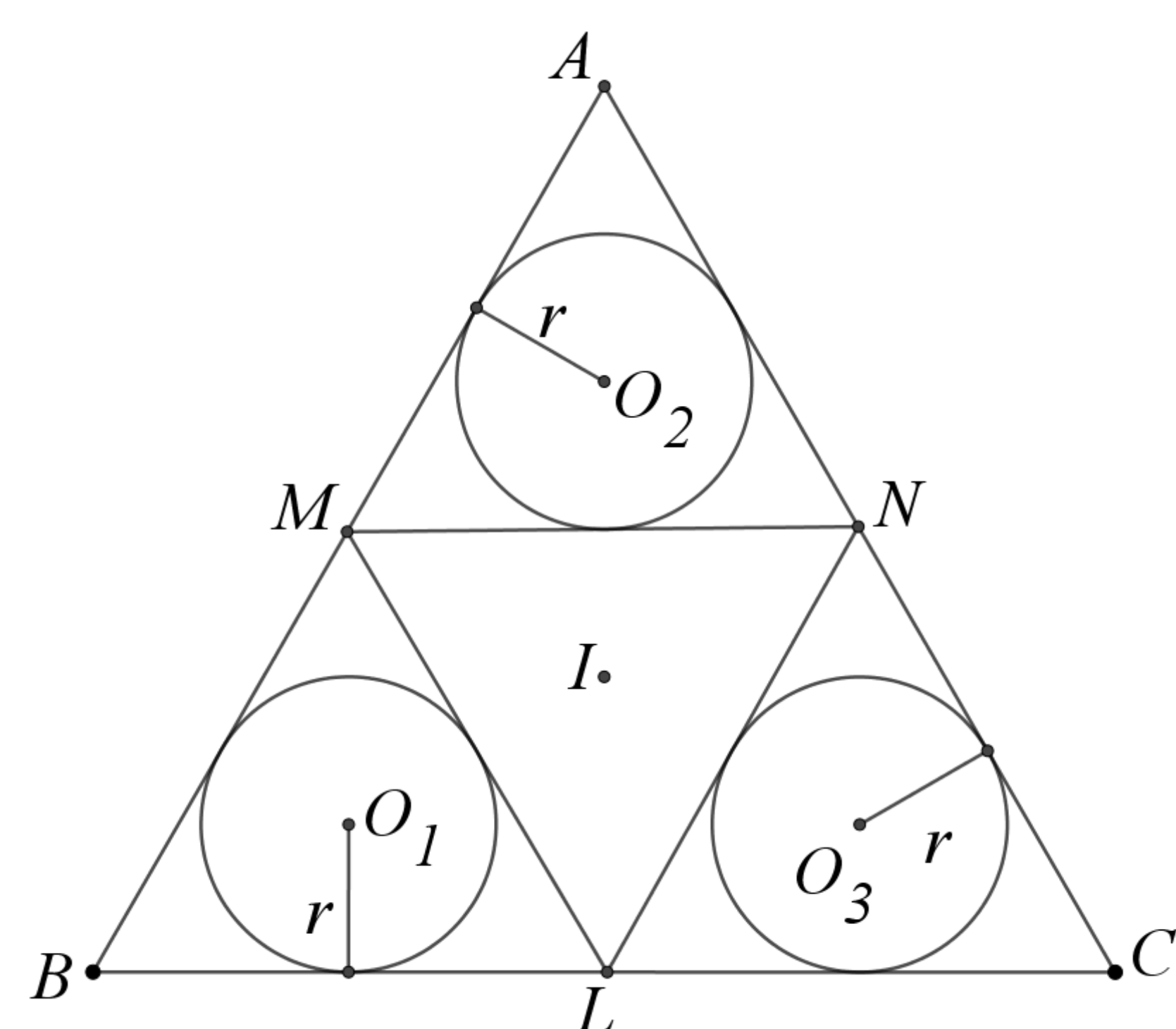
綜合以上所述 $\rightarrow r \leq \frac{\sqrt{3}}{12}a$



圖四：研究結果二、(一)之圖形



圖五：當 r 並非最大值時



圖六：當 r 為最大值

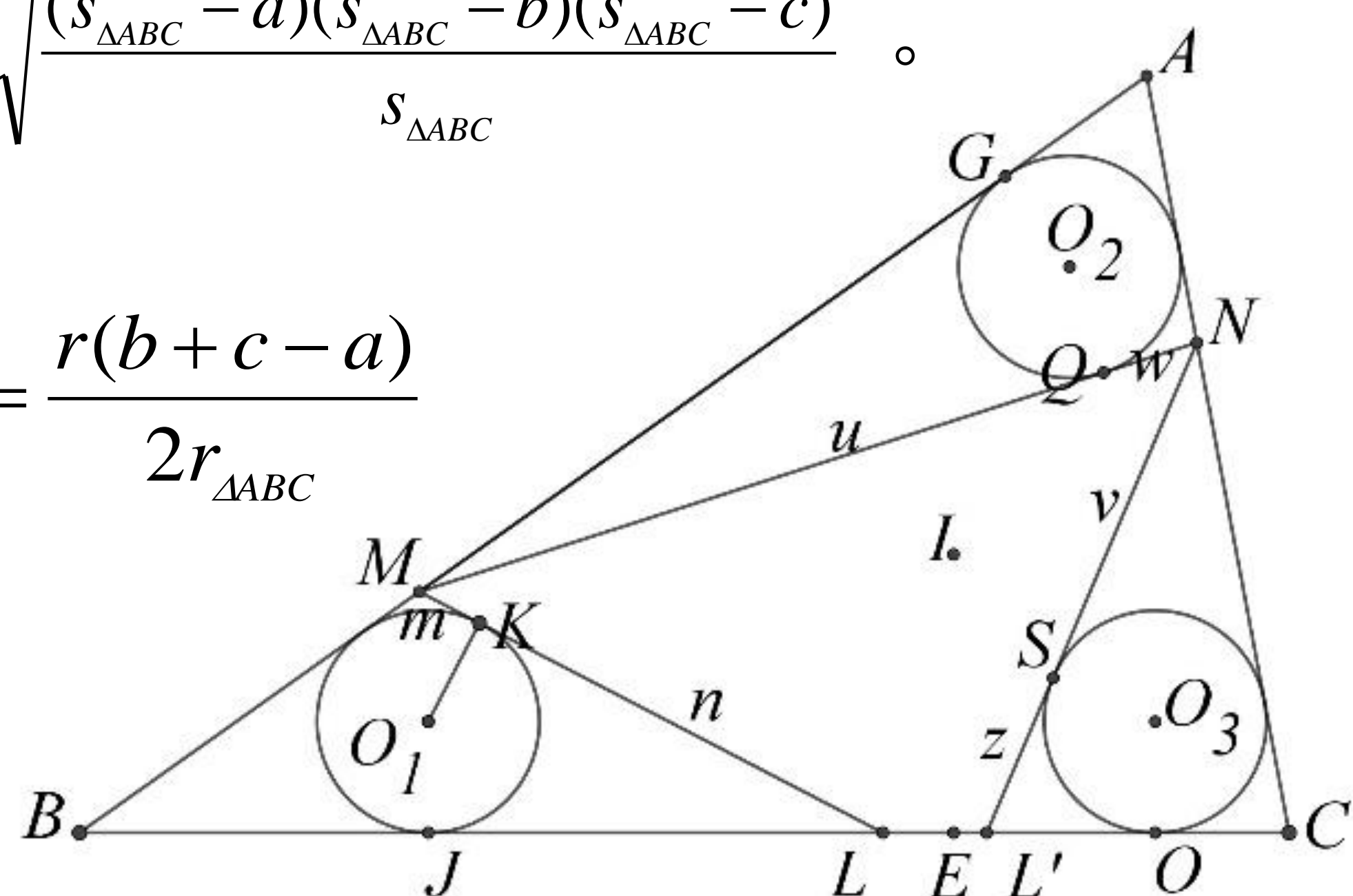
二、(二) 若 ΔLMN 存在以及當 $\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$ 成立時，本研究計算出任意 ΔABC 三邊上 L 、 M 、 N 的位置以及三等圓半徑 (r) 之最大值，即 $r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(s_{\Delta ABC} - a)(s_{\Delta ABC} - b)(s_{\Delta ABC} - c)}{s_{\Delta ABC}}}$ 。

證明： 假設 ΔABC 三邊長為 a 、 b 、 c 。

相似關係 $\rightarrow \overline{BJ} = \frac{r(a+c-b)}{2r_{\Delta ABC}}$ ，同理 $\overline{CO} = \frac{r(a+b-c)}{2r_{\Delta ABC}}$ ， $\overline{AG} = \frac{r(b+c-a)}{2r_{\Delta ABC}}$

假設點 B 為原點， \overrightarrow{BC} 為 x 軸正向。

海龍公式、三角形面積公式 $\rightarrow m = \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}$



圖七：研究結果二、(二)之圖形

$$u = c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}, w = \frac{r^2(b+c-a) + 2ur \cdot r_{\Delta ABC}}{u(b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}, v = b - \frac{br}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2ur \cdot r_{\Delta ABC}}{u(b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}, z = \frac{r(a+b-c) + v}{a+b-c - 2r_{\Delta ABC}}$$

假設 $L = L'$ ，即可得出 $\left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\Delta ABC}} + n, 0\right) = \left(a - \frac{r(a+b-c)}{2r_{\Delta ABC}} - z, 0\right)$ 解方程式 $\rightarrow \frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$

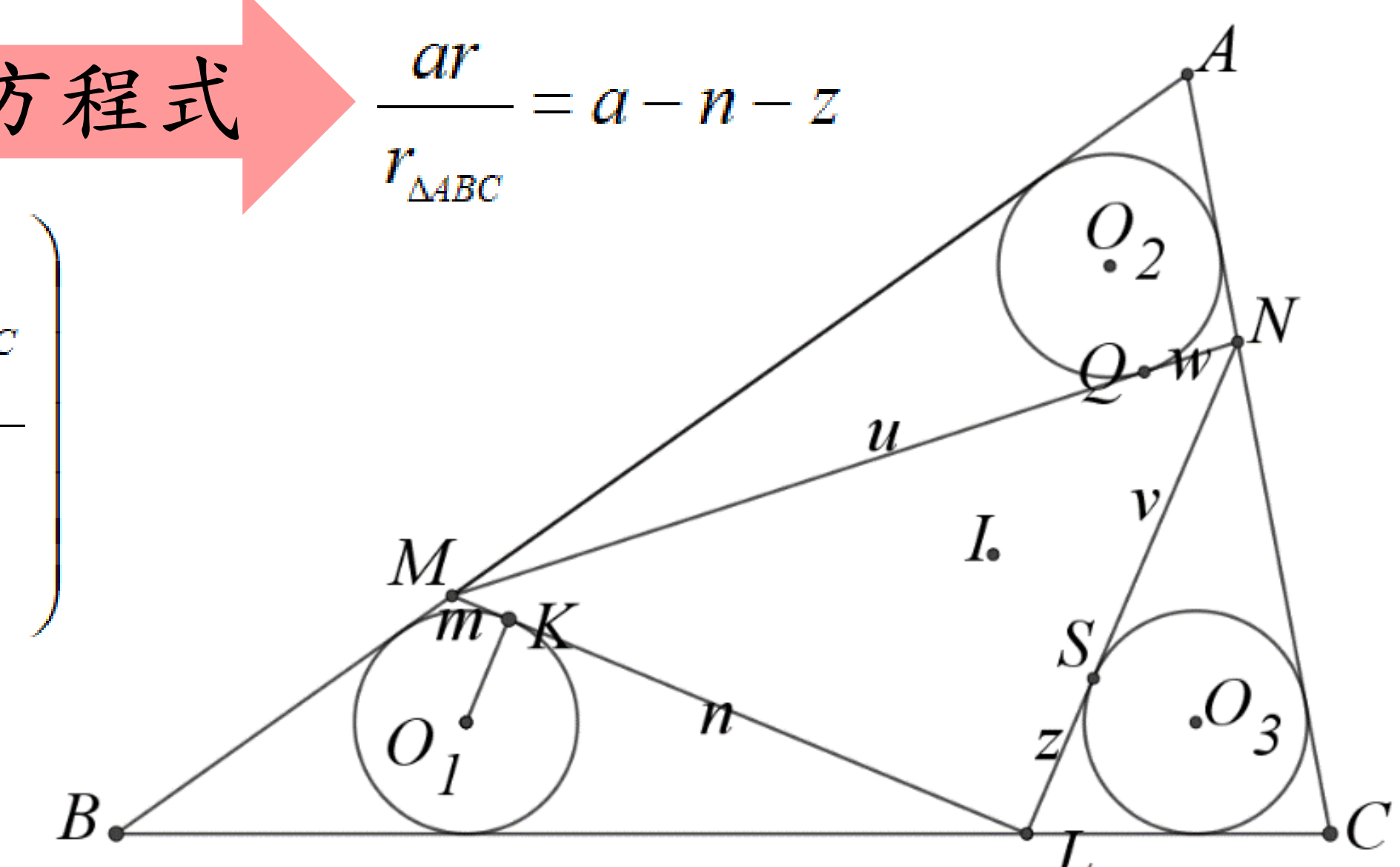
$$\rightarrow \frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - \left[b - \frac{br}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2\left(c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}\right) r \cdot r_{\Delta ABC}}{\left(c - \frac{cr}{r_{\Delta ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\Delta ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}}\right) (b+c-a) - 2r \cdot r_{\Delta ABC}} \right]$$

利用 MAGMA 程式協助本研究計算上述的式子

針對 n 的多項式中的二次項係數輸出後，將 $r_{\Delta ABC}$ 提出，

再減 $4rr_{\Delta ABC}^2(2abc(r_{\Delta ABC} - r) - rr_{\Delta ABC}^2(a+b+c))$ 就可以再提出 $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ ，

其結果為 $r^2(r_{\Delta ABC}^2 - bc) + 2bcrr_{\Delta ABC} - bcr_{\Delta ABC}^2$ 。也就是說當給定 a 、 b 、 c 、 r 時， $r_{\Delta ABC}$ 也會是定值，也能發現 n 次多項式的次數不大於 2 次，若此多項式有實數解，則 n 必可以透過計算方程式的解的方法將其數值計算出來，因此必然可以透過尺規將 \overline{BL} 進行作圖，也就可以找出 L 、 M 、 N 的相對位置。



圖八：當 $\frac{ar}{r_{\Delta ABC}} = a - n - z$ 成立時之圖形

研究結果

r 之上界 當 $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 的中點三角形時， r 會有最大值。

海龍公式 $\rightarrow a_{\triangle LMN} = \frac{1}{4} \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}$

$\rightarrow r = \frac{2 \times \frac{1}{4} \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}}{s_{\triangle ABC}} \rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}{s_{\triangle ABC}}}$

三、證明正 n 邊形 ($\{A_n\}$) 內切圓半徑 ($r_{\{A_n\}}$) 等於其內接正 n 邊形 ($\{B_n\}$) 內切圓半徑 ($r_{\{B_n\}}$) 加「與 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 同時相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$)」的半徑，即 $r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 。若 $\{B_n\}$ 內接正 n 邊形 $\{C_n\}$ ，可推廣為 $r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}} \dots$ 。

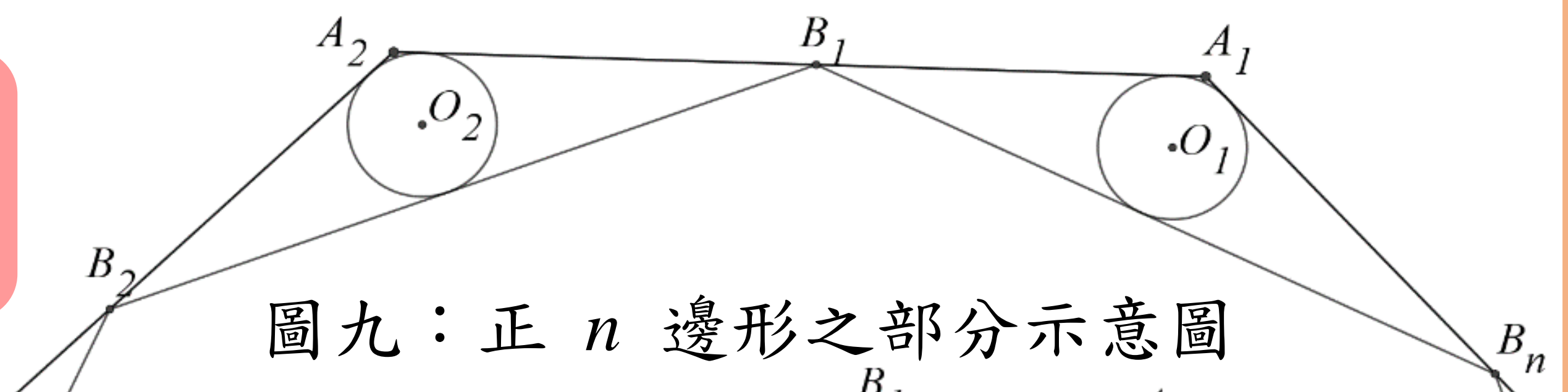
計算 $S_{\{B_n\}}$ 和 $S_{\{O_n\}}$ ，計算 $a_{\{B_n\}}$ 和 $a_{\{O_n\}}$

$S_{\{B_n\}} = S_{\{O_n\}}$ 、 $a_{\{B_n\}} = a_{\{O_n\}}$

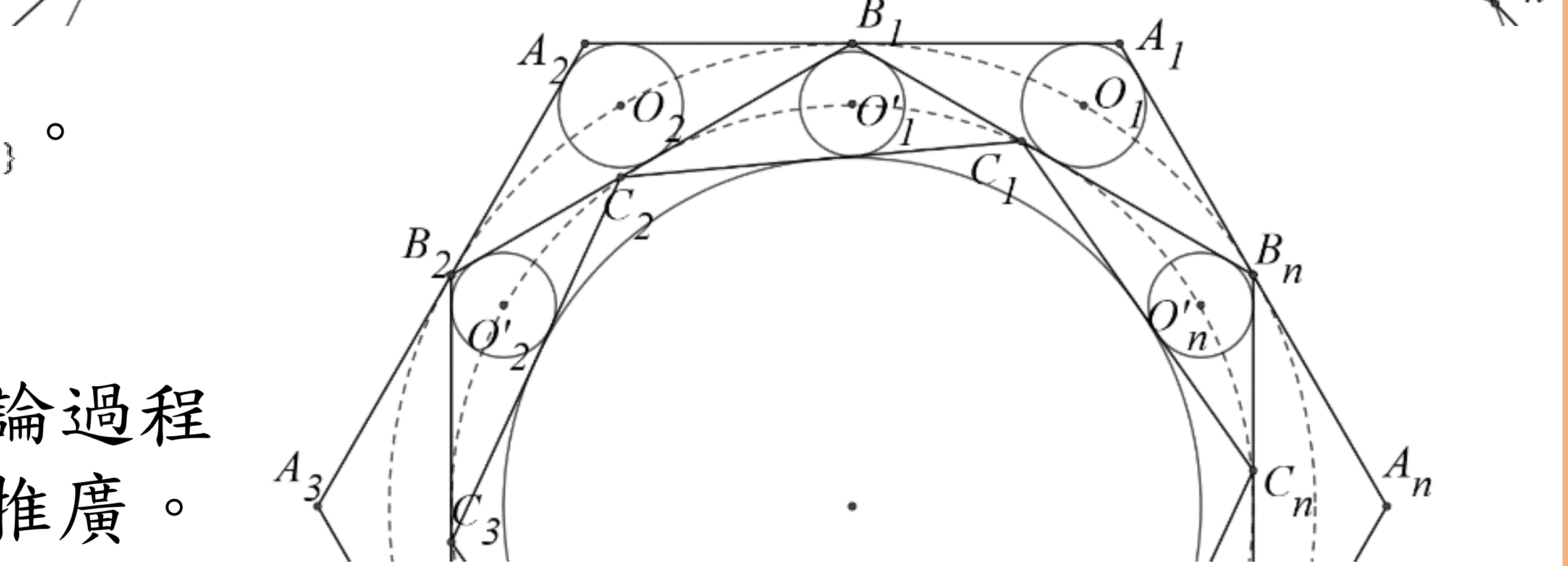
若是在 $\{B_n\}$ 再內接一正 n 邊形 $\{C_n\}$ ，因為 $r_{\{B_n\}} = r_{\{C_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}}$ ，又 $r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\}-\{B_n\}}$ 。

$\rightarrow r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\}-\{B_n\}} + r_{\{B_n\}-\{C_n\}} + r_{\{C_n\}}$

透過上述的說明可知，形如這樣的推論過程可以透過一層層的內接正 n 邊形繼續推廣。



圖九：正 n 邊形之部分示意圖



圖十：正 n 邊形之部分圖

四、在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，將三圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑比從 $1:1:1$ 改為 $1:g:1$ ，求出其 r 的上界並探討 $r_{\triangle ABC}$ 、 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 之間的關係。

r 之上界 當 L 為 \overline{BC} 之中點時， r 會有最大值。

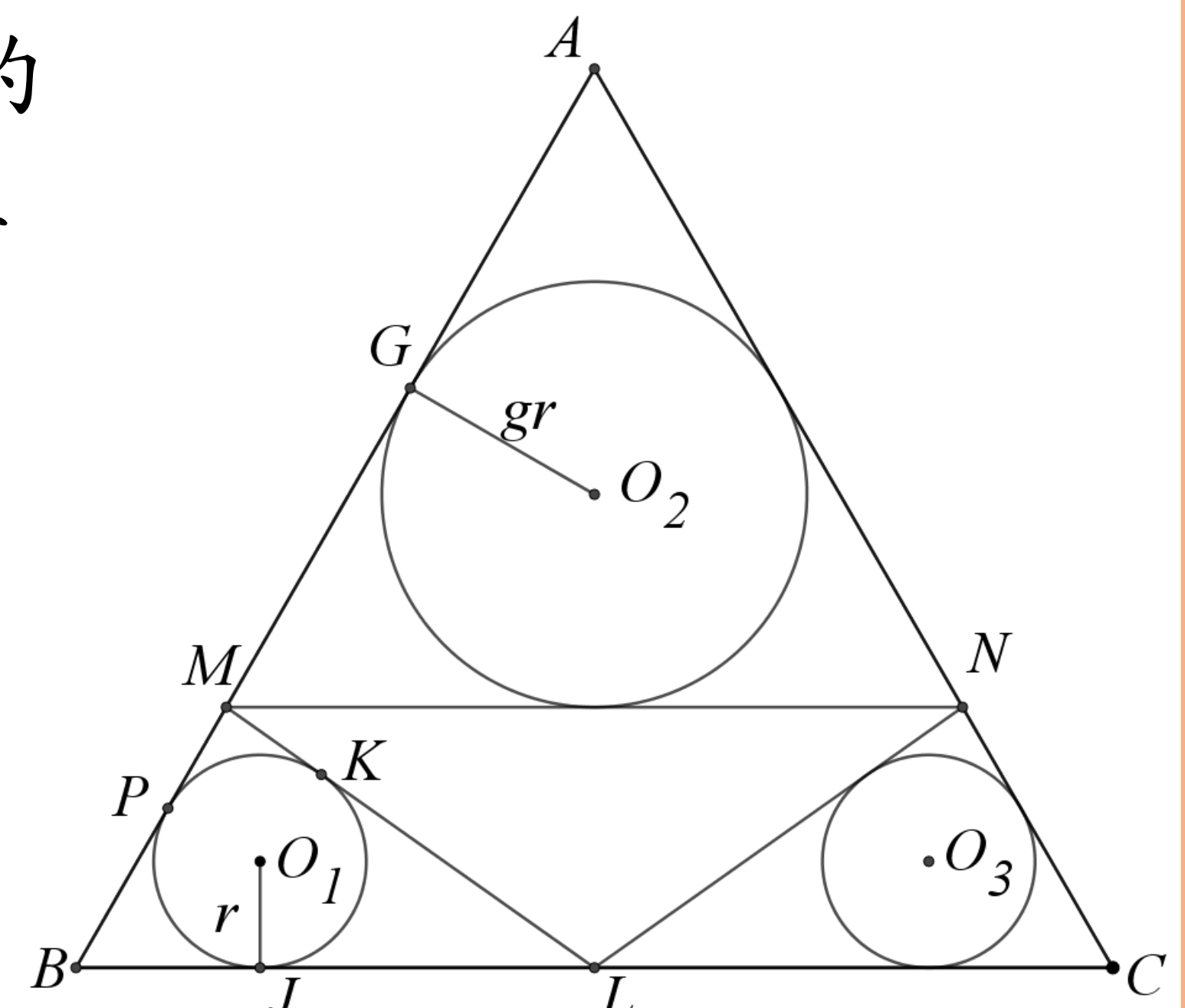
假設正 $\triangle ABC$ 邊長為 a ， $\overline{AM} = 2\sqrt{3}gr$ 。

$\rightarrow \overline{LM} = \overline{MK} + \overline{KL} = (a - (2g+1)\sqrt{3}r) + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{3}r\right) = \frac{3a}{2} - (2g+2)\sqrt{3}r$

餘弦定理 $\rightarrow \cos 60^\circ = \frac{(a - 2\sqrt{3}gr)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2} - (2g+2)\sqrt{3}r\right)^2}{2 \times (a - 2\sqrt{3}gr) \times \frac{a}{2}}$

$\rightarrow (16g+8)r^2 - (2g+4)\sqrt{3}ar + a^2 = 0 \rightarrow r = \frac{(\sqrt{3}(g+2) \pm \sqrt{3g^2 - 4g + 4})a}{16g+8}$

因為 $\overline{PM} = a - (2g+1)\sqrt{3}r > 0 \rightarrow r < \frac{a}{(2g+1)\sqrt{3}} \rightarrow r = \frac{\max\left(\sqrt{3}(g+2) - \sqrt{3g^2 - 4g + 4}\right)a}{16g+8}$



圖十一： r 的半徑比為 $1:g:1$ 之示意圖

討論

一、在研究目的 (五) 中，將正 $\triangle ABC$ 延伸至三維空間後，中間的圖形為正八面體，並且這個正八面體的內切球和外面的大正四面體的內切球會是同一顆球，所以就不會有類似於平面的 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 等式產生。

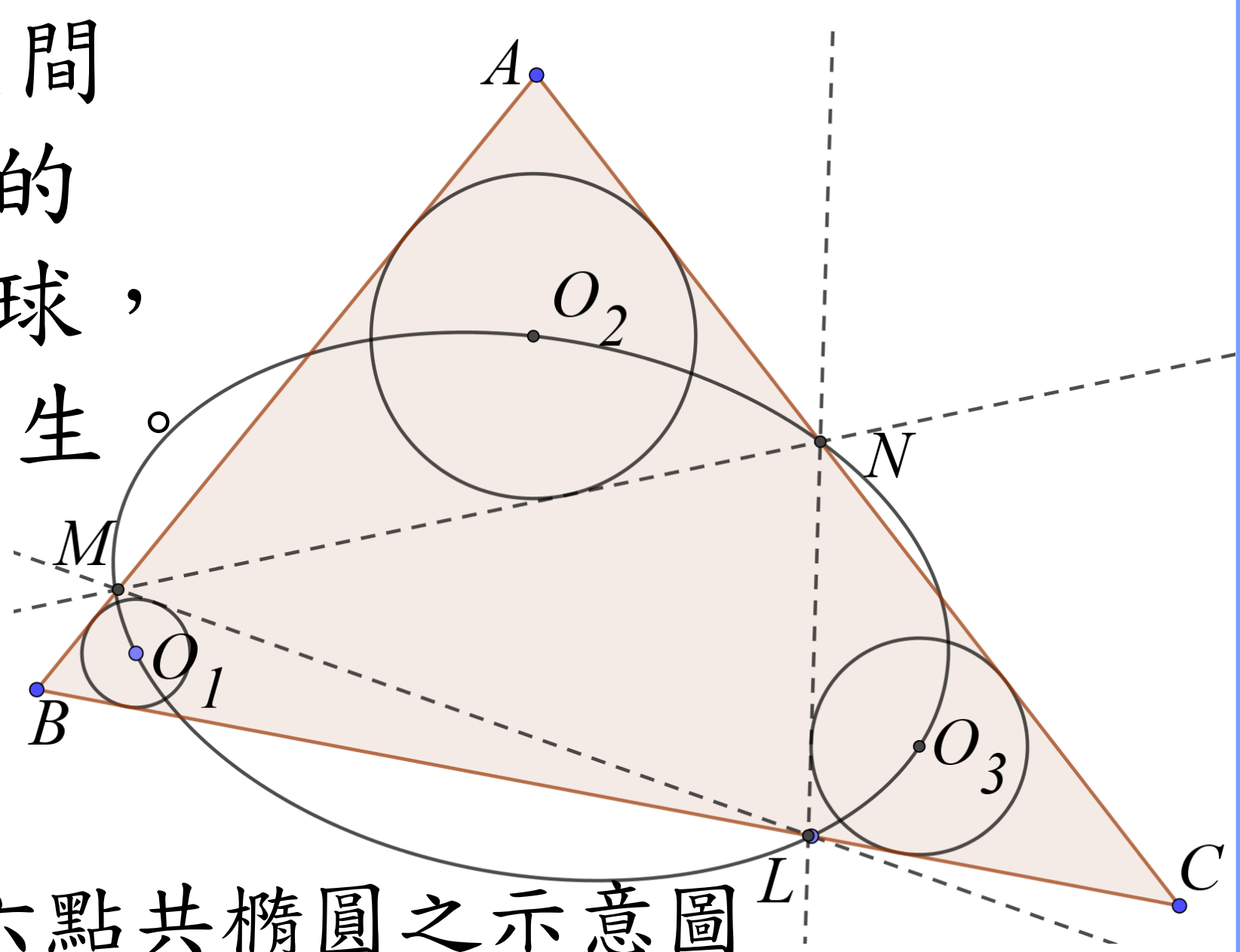
二、在經過數學實驗後，偶然發現即使 $\triangle ABC$

為任意三角形，且三圓半徑比為 $1:g:$

h ， O_1 、 O_2 和 O_3 與 L 、 M 、 N 六點會共橢圓，

如圖十二，未來將會嘗試證明之。

圖十二：六點共橢圓之示意圖



未來展望

在研究目的 (四) 中，僅計算出將正 $\triangle ABC$ 三等圓半徑從 $1:1:1$ 改為 $1:g:1$ 時，其 r 的上界，並未完成將其一般化的結果。未來將著手研究在任意 $\triangle ABC$ 中，三圓半徑比為 $1:g:1$ 、以及 $1:g:h$ 時，其 r 的上界為何。

參考文獻

[1] 史丹福 (民 107)，日本寺廟的幾何難題，取自 <https://reurl.cc/m0XY6l>
 [2] 姜很犛 (民 110)，與切圓有關的幾何趣題，取自 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/341824742>
 [3] 燈火闌珊 (民 97)。日本的寺廟幾何：天算不如人算。Udn 網路城邦。本海報之圖片皆由作者自行繪製 <https://blog.udn.com/dk1858camry/2354566>