中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050405

神秘的數字圓舞曲 - 探討質數環排列的存在性

學校名稱：國立臺南第一高級中學

作者：	指導老師：
高二 林家禾	林倉億

關鍵詞：圖標論、數字排列、質數環

摘要

如果正整數 $1 \sim n$ 存在環狀排列，使得相鄰的數字和皆為質數，則將其定義為質數環。

本文主要用不同方法探討質數環的存在性。在本文與文獻中，都沒有解出質數環通式的方法，因此我藉由孿生質數、類孿生質數、一般質數（相差不固定的質數組）等方法，證明對於特定值的質數環存在性，並使用程式驗證各定理在有限範圍能構造出質數環的整數個數、比例。

本文的貢獻之一在於發展出類孿生質數構造質數環的方法，我突破質數對相差變大會比較難找出數字間的關係的框架，延伸孿生質數的方法至類孿生質數，還結合一對孿生質數與一對相差四的質數以構造質數環。

更進一步地，本文提出不需要使用孿生質數的方法，擺脫孿生質數猜想，使這個問題更一般化。

壹、 前言

一、研究動機

我在高一時晉級中山大學數學人才培育計畫的高級班，並參與了專題研究課程。在課程中，我們可以選擇有興趣的題目進行專題研究，每次上課時向教授報告研究進度與討論研究方向；同時，我也配合學校的專題課進行此專題研究，結合兩方資源以達到比較好的成效。

我之所以選擇以證明質數環排列的存在性為我的主題，一方面是配合教授擅長的圖論領域，另一方面出自於我從小對質數的好奇心，因此我突發奇想構造出一種環狀排列，使每對相鄰點的和皆為質數。我一開始以為這件事情理所當然，但是在研究之後發現證明這個排列存在就困難重重，無法找出一個通解，甚至在某些情況無法有效地排列，教授還曾建議我更改題目，不過我沒有放棄，以不同方向切入，尋求質數環存在的條件與排列方法。

二、研究目的

- 利用孿生質數對進行組合構造質數環。
- 利用相差 t 的質數對 $p,\ p+t$（類孿生質數）構造質數環。
- 利用差不固定的質數組（一般質數）構造質數環。
- 目標：在正偶數集合中，證明或驗證 90% 以上的偶數 k 存在 $n=k$ 的質數環。

三、文獻回顧

質數環是 $1 \sim n$ ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$) 的一種環狀排列，使得相鄰兩數相加皆為質數，其中可由反證法得 n 不為奇數[1]，這個問題至今未找出通解（即證明對於哪些 n 存在質數環，除此之外皆不存在質數環），但已經有方法證明一些特殊的 n 存在質數環。

目前已有兩種排列質數環的數學方法，第一種是窮舉法[2]，第二種是孿生質數法[3]。窮舉法只能用來解決比較小的 n；而孿生質數法可以分成使用一對孿生質數或兩對孿生質數。

> 定理 0.1
> 若 $p,\ p+2$ 為一對孿生質數：
> (a) 存在 $n=p-1$ 的質數環。
> (b) 若 $2p+1$ 也是質數，存在 $n=p+1$ 的質數環。

一對孿生質數的方法透過構造數列使得首尾相加為 3，剩餘每相鄰兩項相加為 p 或 $p+2$，此時 $n=p-1$。

1, p-1, 3, p-3, 5, p-5, … , p-4, 4, p-2, 2

若 $2p+1$ 也是質數，則可以在首尾加上 $p+1,\ p$ 兩項，此時 $n=p+1$。

p+1, 1, p-1, 3, p-3, 5, p-5, … , p-4, 4, p-2, 2, p

> 定理 0.2
> 若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，且 $q>2p$ ，則存在 $n=q-p$ 的質數環。

兩對孿生質數的方法則是一對孿生質數方法的延伸，加入一條數列使得相鄰兩項和為 q 或 $q+2$，此時 $n=q-p$，且 $q>2p$。

p, q-p, p+2, q-p-2, … , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1

2, p-2, 4, p-4, 6, p-6, … , p-5, 5, p-3, 3, p-1, 1

若 n 很大時，可以猜測存在孿生質數對 $p,\ p+2$ 和 $q,\ q+2$ 使得 $n=q-p$ [4]。

除了數學方法外，也有人使用程式方法構造質數環[5,6]，計算固定 n 值時，質數環排列方法數。值得一提的是，有研究利用程式得出當 n 為 $14 \sim 50$ 的偶數時，都能夠造出相鄰兩項和與差皆為質數的特殊質數環[7]。

貳、 研究過程或方法

一、 孿生質數

(一) 青少年城市邀請賽例題

2001 青少年數學國際城市邀請賽曾經考過一題：

2. 能否將 1 到 20 這 20 個數，填在一個圓周上，使得任何相鄰二數之和均為質數？

其中一個解法先利用 29, 31 這一組孿生質數，將 9 ~ 20 的數列以下列順序排列

9, 20, 11, 18, 13, 16, 15, 14, 17, 12, 19, 10

不難發現，奇數由 9 遞增至 19，偶數由 20 遞減至 10 ，而此排列正好能使相鄰數之和皆為 29 或 31。

接下來利用相同的方法將 3～8 填入，先找出一對適合的質數 11, 13，再進行以下排列

3, 8, 5, 6, 7, 4

最後將 1, 2 填入 3, 10 之間，就可以造出一個 $n=20$ 的質數環。

此數列排序：

9, 20, 11, 18, 13, 16, 15, 14, 17, 12, 19, 10, 1, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 4

以上是詳解提供的一種解法。起初，我並未查詢到前面的文獻，這題是我開始從孿生質數方向切入解決問題的契機，雖然發展出如同文獻的結果，但後來發現已經被完成。

(二) 使用兩對孿生質數

我認為一對孿生質數的方法，除了文獻中提到的定理 0.1：

若 $p,\ p+2$ 為一對孿生質數，則存在 $n=p-1$ 的質數環。

若 $p,\ p+2$ 為一對孿生質數，且 $2p+1$ 為質數，則存在 $n=p+1$ 的質數環。

延伸空間不大，因為當存在 k 對孿生質數時，若使用上面的兩個定理，僅能得到小於 $2k$ 個 n 能構成質數環。

但是使用文獻中的定理 0.2：

若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，存在 $n=q-p$ 的質數環

則可以有不超過 $k(k-1)$ 個 n 能構成質數環（可能重複，只能說" $\le$ "），因此我認為使用兩對孿生質數的發展空間比較大。

因此，我希望將 $n=q-p$ 推廣到 $n=q-p+2t,\ (t\in\mathbb{N})$ 。

定理 1.1.1

若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，其中 $q>2p-4$，則存在 $n=q-p+2$ 的質數環。

【證明】

與定理 0.2 的方法相同，先利用 $q,\ q+2$ 列出一條數列，使相鄰兩項和皆為 q 或 $q+2$。

p-2, q-p+2, p, q-p, p+2, q-p-2, … , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1, q-p+1, p-1

此數列最少有 $p-2,\ q-p+2$ 兩項，而 $q-p+2$ 較大，因此 $q-p+2>p-2 \Rightarrow q>2p-4$。

接著串聯第二條相鄰兩項和為 p 或 $p+2$ 的數列：

3, p-3, 5, p-5, … , p-6, 6, p-4, 4

最後將未使用的 1, 2 夾在兩數列間，即左端 p-2, 2, 3、右端 p-1, 1, 4。

p-2, q-p+2, p, q-p, p+2, q-p-2, … , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1, q-p+1, p-1

2, 3, p-3, 5, p-5, … , p-6, 6, p-4, 4, 1

Q.E.D.

定理 1.1.2

若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，其中 $q>2p-4t$ ($t=2\sim 5$) 且 $p>4t+1$，則存在 $n=q-p+2t$ 的質數環。

【證明】

與定理 1.1.1 方法相同，先構建兩數列，再將剩下的數排序夾在兩數列間。其中每個數列一都至少有最前面兩項，因此能寫出條件 $q>2p-4t$；此外，數列一最小的奇數 $p-2t$ 需要大於數列二最大的奇數 $2t+1$，因此 $p>4t+1$。

$t=2$

數列一：p-4, q-p+4, p-2, q-p+2, … , q-p+1, p-1, q-p+3, p-3

數列二：6, p-6, 8, p-8, … , p-7, 7, p-5, 5

連接：左端 p-4, 4, 1, 6、右端 p-3, 3, 2, 5

p-4, q-p+4, p-2, q-p+2, … , q-p+1, p-1, q-p+3, p-3

4, 1, 6, p-6, 8, p-8, … , p-7, 7, p-5, 5, 2, 3

條件：$q-p+4>p-4 \Rightarrow q>2p-8$

$t=3$

數列一：p-6, q-p+6, p-4, q-p+4, … , q-p+3, p-3, q-p+5, p-5

數列二：7, p-7, 9, p-9, … , p-10, 10, p-8, 8

連接：左端 p-6, 6, 1, 4, 7、右端 p-5, 5, 2, 3, 8

p-6, q-p+6, p-4, q-p+4, … , q-p+3, p-3, q-p+5, p-5

6, 1, 4, 7, p-7, 9, p-9, … , p-10, 10, p-8, 8, 3, 2, 5

條件：$q-p+6>p-6 \Rightarrow q>2p-12$

$t=4$

數列一：p-8, q-p+8, p-6, q-p+6, … , q-p+5, p-5, q-p+7, p-7

數列二：10, p-10, 12, p-12, … , p-11, 11, p-9, 9

連接：左端 p-8, 8, 5, 2, 3, 10、右端 p-7, 7, 6, 1, 4, 9

p-8, q-p+8, p-6, q-p+6, … , q-p+5, p-5, q-p+7, p-7

8, 5, 2, 3, 10, p-10, 12, p-12, … , p-11, 11, p-9, 9, 4, 1, 6, 7

條件：$q-p+8>p-8 \Rightarrow q>2p-16$

$t=5$

數列一：p-10, q-p+10, p-8, q-p+8, … , q-p+7, p-7, q-p+9, p-9

數列二：11, p-11, 13, p-13, … , p-14, 14, p-12, 12

連接：左端 p-10, 10, 3, 2, 5, 8, 11 、右端 p-9, 9, 4, 1, 6, 7, 12

p-10, q-p+10, p-8, q-p+8, … , q-p+7, p-7, q-p+9, p-9

10, 3, 2, 5, 8, 11, p-11, 13, p-13, … , p-14, 14, p-12, 12, 7, 6, 1, 4, 9

條件：$q-p+10>p-10 \Rightarrow q>2p-20$

$Q.E.D.$

當 $t>5$ 時，尚未列出連接部份的排序，但推測都能成立。

以上是我將孿生質數方法延伸的結果，由於一對孿生質數 $n=p-1$ 延伸成 $n=p-1-2t$ 會有一部分跟定理 0.2 重疊，因此我在本文中主要是將兩對孿生質數 $n=q-p$ 定理延伸成 $n=q-p+2t$，效果很好，可以解決 $n=6\sim 60000$ 的所有偶數（請見結果）。

二、 類孿生質數

假設函數 g_n 為任意兩質數 p_i，p_j 的差，其中 p_n 為質數數列，如果 $g_n=2$，則 p_i，p_j 為一對孿生質數，而接下來我想驗證當 $g_n>2$ 時，是否能用類似的方法證明質數環的存在性。

(一) 使用一對相差為 k ($k \in \mathbb{N}$) 的質數

> 定理 2.1.1
> 當 $g_n = 4$ 時，即 $p,\ p+4$ 為一對質數 ($p > 4$) ，則存在 $n = p-1$ 的質數環。

【證明】

分成兩個情況討論，因為 $p-1$ 為偶數，所以 $p-1$ 除以 4 可能餘 0 或 2 。

Case A:

若 $p-1 \equiv 0\ (mod 4)$ ，可建立兩數列 1, p-1, 5, p-5, 9, p-9, … , p-4, 4 與 3, p-3, 7, p-7, … , p-2, 2，使得兩個數列任相鄰兩項和皆為 p 或 $p+4$，且第一個數列包含所有除以 4 餘 $1,\ 0$ 的數，第二個數列包含所有除以 4 餘 $3,\ 2$ 的數。

即 $$\{a_k\}_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} k\ is\ odd,\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 1 \\ k\ is\ even,\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 1 \end{cases} \quad and \quad \{a_k\}_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} k\ is\ odd,\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 3 \\ k\ is\ even,\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 3 \end{cases}$$

Case B:

若 $p-1 \equiv 2\ (mod 4)$ ，可建立兩數列：

1, p-1, 5, p-5, 9, p-9, …, p-2, 2 與 3, p-3, 7, p-7, …, p-4, 4

使得兩個數列任相鄰兩項和皆為 p 或 $p+4$，且第一個數列包含所有除以 4 餘 $1,\ 2$ 的數，第二個數列包含所有除以 4 餘 $3,\ 0$ 的數，因此第一個數列比第二個數列多兩項。

即 $$\{a_k\}_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} = \begin{cases} k\ is\ odd,\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 1 \\ k\ is\ even,\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 1 \end{cases} \quad and \quad \{a_k\}_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} k\ is\ odd,\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 3 \\ k\ is\ even,\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 3 \end{cases}$$

Case A 的兩數列首尾相接合併為 1, …, 4, 3, …, 2；Case B 的兩數列合併為 1, …, 2, 3, …, 4。無論是哪種情況，皆能形成 $n = p-1$ 的質數環，不過 p 需要大於 4，否則無法構造出上述的兩個數列。

1, p-1, 5, p-5, … , p-8, 8, p-4, 4
2, p-2, 6, p-6, … , p-7, 7, p-3, 3 $\qquad p-1 \equiv 0\ (mod 4)$

或

1, p-1, 5, p-5, … , p-6, 6, p-2, 2
4, p-4, 8, p-8, … , p-7, 7, p-3, 3 $\qquad p-1 \equiv 2\ (mod 4)$

$Q.E.D.$

定理 2.1.2
當 g_n=6 時，即 $p, p+6$ 為一對質數 ($p>6$) ，則存在 $n=p-1$ 的質數環。

【證明】

與定理 2.1.1 類似的，先將 $p-1$ 除以 6，將餘數分成 0, 4 兩類。

註： $(p, p+6)=(6k-1, 6k+5)$ *or* $(6k+1, 6k+7)$ ，因此 $p-1\not\equiv 2\ (mod\ 6)$ 。

Case A:

若 $p-1\equiv 0\ (mod 6)$ ，可建立三個數列

1, p-1, 7, p-7, ..., p-12, 12, p-6, 6 （包含所有除以 6 餘 1, 0 的數）

2, p-2, 8, p-8, ..., p-11, 11, p-5, 5 （包含所有除以 6 餘 2, 5 的數）

3, p-3, 9, p-9, ..., p-10, 10, p-4, 4（包含所有除以 6 餘 3, 4 的數）

只要能將每條數列首尾互相串連，即可形成質數環。可以觀察到，每條數列首項和尾項相加除以 6 皆餘 1，由此規律可以快速類推其他 Case。

Case B:

若 $p-1\equiv 4\ (mod 6)$ ，可以建立三個數列，分別包含所有除以 6 餘 1, 4 / 2, 3 / 5, 0 的數，每條數列首尾為 1, 4 / 2, 3 / 5, 6，每條數列首相和尾項相加除以 6 皆餘 5。

用圖形來將每條數列首位的規則列出（同一行的屬於同一數列）

Case A:
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ | & | & | \\ 6 & 5 & 4 \end{array}$$

Case B:
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ | & | & | \\ 4 & 3 & 6 \end{array}$$

Case A 的三條數列首尾排列成 <u>1, 6</u>, <u>5, 2</u>, <u>3, 4</u>；Case B 排列成 <u>1, 4</u>, <u>3, 2</u>, <u>5, 6</u> ，在此排列中，每一條數列的中間項皆被省略，只需考慮首尾兩項，因此這兩項必須相鄰，中間不能插入其他數字。(如數列 1, p-1, 7, p-7, ..., p-12, 12, p-6, 6 只需考慮 1, 6 兩項，剩餘的數皆不影響排列）

由以上分類討論可得知，當 $p, p+6$ 為一對質數時，存在 $n=p-1$ 的質數環。$Q.E.D.$

（補充）附錄_定理 2.1.3

利用定理 2.1 的歸納法，先將 $p-1$ 對 g_n 同餘，再分類逐一討論，可以證明當 g_n 為 8～20 的偶數，且 $p, p+g_n$ 為一對質數時，存在 $n=p-1$ 的質數環。(詳見「陸、附錄」)

在 $g_n>20$ 情況尚未證明，但推測可以使用相同的方法證明它們成立。

(二) 使用一對孿生質數與一對相差四的質數

定理 2.2
若 $p, p+2$ 與 $q, q+4$ 為兩對質數，且 $q>2p-4$，則存在 $n=q-p+2$ 的質數環。

【證明】

Case A: $q\equiv 1(\,mod\ 4)$

1° 先證明 $q\equiv 1(\,mod\ 4)\ \Rightarrow\ p\equiv q-p+1(\,mod\ 4)$ 。

Case 1: $p\equiv 1(\,mod\ 4)\Rightarrow q-p+1\equiv 1-1+1\equiv 1\equiv p(\,mod\ 4)$

Case 2: $p\equiv 3(\,mod\ 4)\Rightarrow q-p+1\equiv 1-3+1\equiv -1\equiv p(\,mod\ 4)$

2° 建立兩數列，其中紅色部份為奇數，且由 1° 得知 $q-p+1$ 與 p 會屬於同一個數列。

Seq1: p-2, q-p+2, p+2, q-p-2, p+6, q-p-6, ..., q-p-5, p+5, q-p-1, p+1

Seq2: p-1, q-p+1, p+3, q-p-3, p+7, q-p-7, ..., q-p-4, p+4, q-p ， p

Seq1 的紅色部份首項為 $p-2$、末項為 $q-p-1$、等差 4，黑色部份首項為 $q-p+2$、末項為 $p+1$、等差 -4；Seq2 的紅色部份首項為 $q-p+1$、末項為 p、等差 -4，黑色部份首項為 $p-1$、末項為 $q-p$、等差 4。

Seq1, Seq2 包含 $p-2\sim q-p+2$ 的所有數，因此 $p-2<q-p+2\Rightarrow q>2p-4$。

3° 在 Seq1, Seq2 後面加入 1, 2，從後面串連。

(p-2)-Seq1-(p+1) --- 1, 2 --- (p)-Seq2-(p-1)

就可以用類似文獻中定理 0.2 的方法，以 4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3 數列將其首尾串聯，形成 $n=q-p+2$ 的質數環。

(p-2)-Seq1-(p+1) --- 1, 2 --- (p)-Seq2-(p-1)

4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3

Case B: $q\equiv 3(\,mod\ 4)$

1° $q\equiv 3(\,mod\ 4)\ \Rightarrow p\not\equiv q-p+1(\,mod\ 4)\ \Leftrightarrow p\equiv q-p-1(\,mod\ 4)$

2° 如同 Case A 建立由 $q, q+4$ 構成的兩條數列與第三條利用 $p, p+2$ 構成的數列。

Seq1: p-2, q-p+2, p+2, q-p-2, ..., q-p-3, p+3, q-p-1, p-1

Seq2: p+1, q-p-1, p+5, q-p-5, ..., q-p-4, p+4, q-p, p

Seq3: 4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3

除了這三條數列以外，還剩下 1, 2 兩個數，接著可以使用以下方法，技巧性的將這些元素串起來，形成 $n=q-p+2$ 的質數環。

(p-2)-Seq1-(p-1) --- (3)-Seq3-(4) --- 1 --- (p+1)-Seq2-(p) --- 2

$Q.E.D.$

三、一般質數法（不限定差的質數對）

> 定理 3.1
>
> 若存在質數 $p, q\ (p<q)$ ，使得 $p+q-1$ 亦為質數，且 $gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right)=1$ ，則存在 $n=q-1$ 的質數環。

在證明之前，我想先用一個範例說明我想這個問題的思路。

例：(p, q) = (7, 17)，n=16

Step1：列出數條數列，使相鄰數字和依序為 q, p, q, p…

一、16, 1, 6, 11

二、15, 2, 5, 12

三、14, 3, 4, 13

四、10, 7

五、9, 8

Step2：串連數列

16, 1, 6, 11, 12, 5, 2, 15, 8, 9, 14, 3, 4, 13, 10, 7

Step3：討論偶數排列，發現對於任意相鄰兩項，後項皆為前項減 10 (q-p) 或加 6 (p-1)

16, 6, 12, 2, 8, 14, 4, 10

【證明】

Part1（概念）:

首先將所有數字分成若干條數列，從最大的數 $q-1$ 開始構造數列一，使得相鄰數和依序為 $q, p, q, p, \ldots$，當應填入的下一個數不在區間 $[1, q-1]$，則以剩下次大的數開始構造數列二，以此類推。(Step1)

接著將所有數列串聯，使得任兩條數列交接處形成的質數皆為 $p+q-1$。(Step2)

此時觀察內部的偶數排列，設為 $\{e_n\}, e_i \in \{2, 4, 6, \ldots, q-1\}, e_1=q-1$，發現對於任意相鄰兩數 e_i , $e_{i+1}\left(1 \le i < \frac{q-1}{2}\right)$，滿足 $e_{i+1} \equiv e_i - (q-p)\ (mod\ q-1)$ ，同時因為

$$e_2 \equiv e_1 - (q-p)\ (mod\ q-1)$$
$$e_3 \equiv e_2 - (q-p)\ (mod\ q-1)$$
$$\vdots$$
$$\frac{e_{(q-1)/2} \equiv e_{(q-3)/2} - (q-p)\ (mod\ q-1)}{e_{(q-1)/2} \equiv e_1 - (q-p) \times \frac{q-3}{2}\ (mod\ q-1)} \Rightarrow e_1 \equiv e_{(q-1)/2} - (q-p)\ (mod\ q-1)$$

可以得出 e_1，$e_{(q-1)/2}$ 也滿足上述規則，換句話說，這條數列是循環的。不過條件是 $gcd\left(\frac{q-p}{2},\ \frac{q-1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow gcd\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q-1}{2}\right)=1$，否則此數列不會涵蓋所有在範圍 $[1,\ q-1]$ 內的偶數。此時對於任意相鄰兩項偶數，後項皆為前項減 q-p 或加 p-1；同理，對於任意相鄰兩項奇數，後項皆為前項加 q-p 或減 p-1。(Step3)

Part2（符號化）：

已知偶數數列第一項為 $q-1$，奇數數列第一項為 1，因此可以對任一對相加為 q 偶數 m 與奇數 n 討論這兩個數操作後的偶數 r 與奇數 s，如下方說明。

$$m+n=q < \begin{cases} \begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n+(q-p) \end{cases} \\ \begin{cases} r=m+(p-1) \\ s=n-(p-1) \end{cases} \end{cases}$$

假設排列順序為 $m \to n \to r \to s$，若 $\begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n+(q-p) \end{cases}$，則 $n+r=p$；若 $\begin{cases} r=m+(p-1) \\ s=n-(p-1) \end{cases}$，則 $n+r=p+q-1$，兩者的 $n+r$ 皆為質數，且 $r+s=m+n=q$，由於 Part1 已經說明在 $gcd\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q-1}{2}\right)=1$ 的條件下可填入所有數字，因此可以重複相同的操作，將所有數字填入並使得任意相鄰數字和皆為質數。

經由以上推論，證明在 $gcd\left(\frac{p-1}{2},\ \frac{q-1}{2}\right)=1$ 的條件下，可以構造出 $n=q-1$ 的質數環。

$Q.E.D.$

定理 3.2

若存在質數 $p,\ q\ (p<q)$ 與一個奇質數 k，使得 $p+q-k\ (p>k,\ k<q-p)$ 亦為質數，且 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$，則存在 $n=q-k$ 的質數環。

【證明】

如定理 3.1 中 Part1 的說明，在 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$ 的條件下，可以用相同規則構造兩條覆蓋所有 $[1,\ q-k]$ 數字的奇數或偶數的數列。此時需討論的問題僅剩下任意相鄰數字和是否為質數。

如定理 3.1 中 Part2，設偶數數列第一項為 $q-k$，奇數數列第一項為 k，可以對任一對相加為 q 偶數 m 與奇數 n 討論對這兩個數操作後的偶數 r 與奇數 s。

$m+n=q$

$Case1$

$$\begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n+(q-p) \end{cases} \cdots\ n+r=p,\ r+s=q$$

$Case2$

$$\begin{cases} r=m+(p-k) \\ s=n-(p-k) \end{cases} \cdots\ n+r=p+q-k,\ r+s=q$$

$Case3$

$$\begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n-(p-k) \end{cases} \cdots\ n+r=p,\ r+s=k$$

$$(a)\begin{cases} r'=r-(q-p) \\ s'=s+(q-p) \end{cases} \cdots\ (X,\ r-(q-p)<k-(q-p)<0)$$

$$(b)\begin{cases} r'=r+(p-k) \\ s'=s-(p-k) \end{cases} \cdots\ s+r'=p,\ r'+s'=k \Rightarrow Case3$$

$$(c)\begin{cases} r'=r-(q-p) \\ s'=s-(p-k) \end{cases} \cdots\ (X,\ r-(q-p)<k-(q-p)<0)$$

$$(d)\begin{cases} r'=r+(p-k) \\ s'=s+(q-p) \end{cases} \cdots\ s+r'=p,\ r'+s'=q \Rightarrow Case1,\ Case2$$

$Case4$

$$\begin{cases} r=m+(p-k) \\ s=n+(q-p) \end{cases} \textit{the case is not exist}$$

$$\because \begin{cases} r=m+(p-k) \le q-k \\ s=n+(q-p) \le q-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le q-p \\ n \le p-k \end{cases} \Rightarrow q= m+n \le q-k\ (X)$$

經由討論可以發現無論是哪一種情況，操作後還會是一對相加為 q 的質數，而且對於任意相鄰數的和皆為質數，因此證明在 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$ 的條件下，可以構造 $n=q-k$ 的質數環。（註：定理 3.1 沒有 Case3，因為任意的 $m,\ n$ 的平均值皆為（相對 $\frac{q}{2}$ 對稱），因此操作一定使一個增加，另一個減少） $Q.E.D.$

（補充）

可以從另一個角度思考定理 3.2，對於任何一個偶數 t，如果存在質數 k 使得 $q=t+k$ 也是質數，再從 $(k,\ q)$ 區間找出 p，滿足 $p+q-k\in\mathbb{P}$ 與 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$，即可構造出 $n=q-k=t$ 的質數環。

參、 研究結果與討論

一、 方法統整

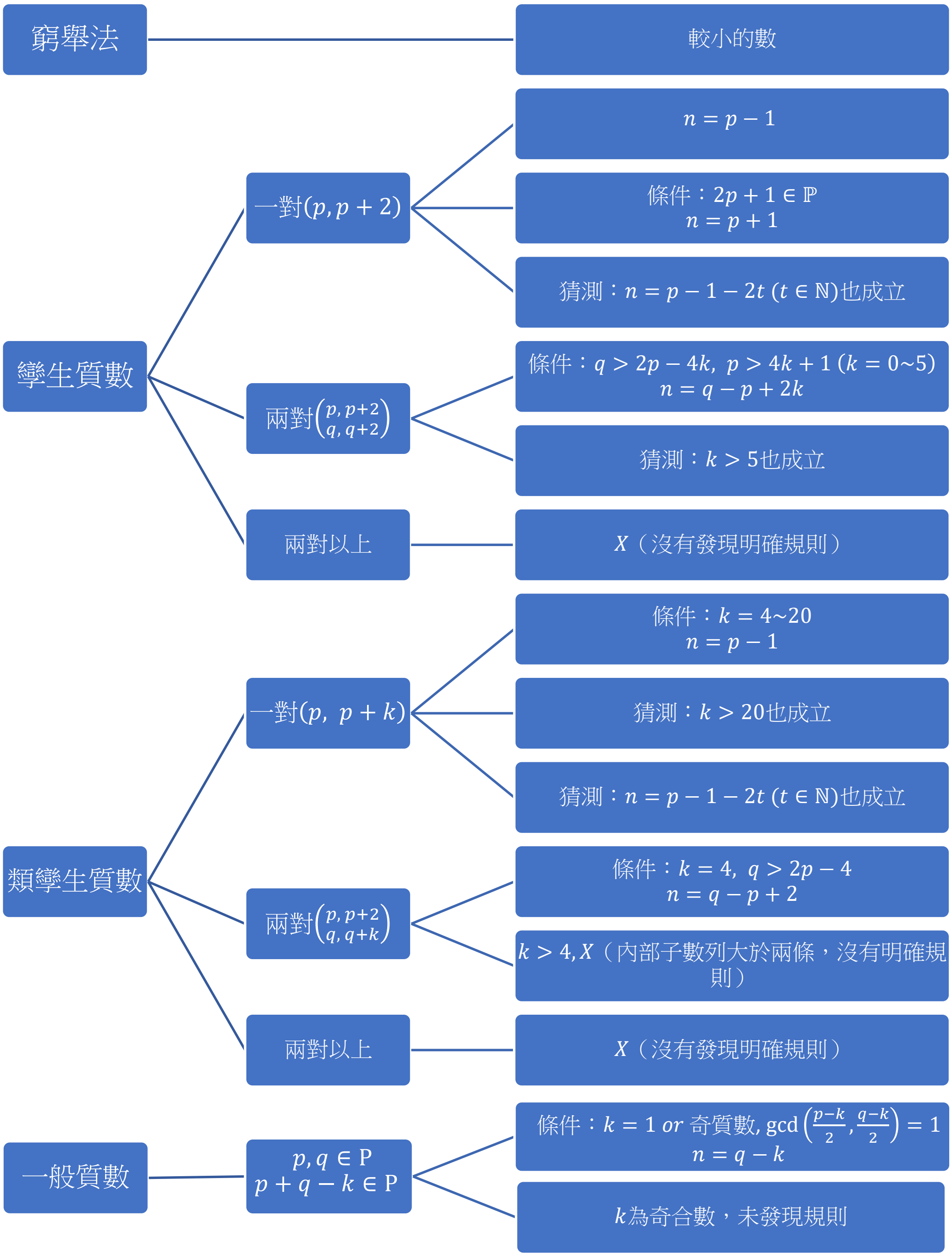


圖 1、構造質數環方法統整

我構建質數環的方法主要分成孿生質數、類孿生質數、一般質數法三種。在圖 1 中，我將這些方法所推得的定理分點列出，並寫出我對於這些方法延伸的猜測，作為未來展望。

二、 方法比較（定理 **0, 1, 2**，程式）

範圍	0.1	比例	0.2+1.1	比例	0+1	比例	2.1	比例	2.2	比例	2	比例	0+1+2	比例
50	8	0.348	23	1.000	23	1.000	12	0.522	11	0.478	13	0.565	23	1.000
100	11	0.229	48	1.000	48	1.000	22	0.458	23	0.479	27	0.563	48	1.000
200	19	0.194	98	1.000	98	1.000	43	0.439	44	0.449	53	0.541	98	1.000
500	32	0.129	248	1.000	248	1.000	92	0.371	107	0.431	127	0.512	248	1.000
1000	46	0.092	498	1.000	498	1.000	165	0.331	205	0.412	246	0.494	498	1.000
2000	80	0.080	998	1.000	998	1.000	294	0.295	395	0.396	476	0.477	998	1.000
5000	160	0.064	2498	1.000	2498	1.000	640	0.256	952	0.381	1144	0.458	2498	1.000
10000	256	0.051	4998	1.000	4998	1.000	1161	0.232	1867	0.374	2238	0.448	4998	1.000
15000	342	0.046	7498	1.000	7498	1.000	1632	0.218	2780	0.371	3293	0.439	7498	1.000
20000	421	0.042	9998	1.000	9998	1.000	2090	0.209	3674	0.367	4354	0.435	9998	1.000
25000	497	0.040	12498	1.000	12498	1.000	2546	0.204	4576	0.366	5412	0.433	12498	1.000
30000	568	0.038	14998	1.000	14998	1.000	2980	0.199	5465	0.364	6455	0.430	14998	1.000
35000	652	0.037	17498	1.000	17498	1.000	3406	0.195	6357	0.363	7495	0.428	17498	1.000
40000	711	0.036	19998	1.000	19998	1.000	3833	0.192	7245	0.362	8545	0.427	19998	1.000
45000	773	0.034	22498	1.000	22498	1.000	4246	0.189	8140	0.362	9590	0.426	22498	1.000
50000	843	0.034	24998	1.000	24998	1.000	4640	0.186	9023	0.361	10622	0.425	24998	1.000
55000	904	0.033	27498	1.000	27498	1.000	5037	0.183	9920	0.361	11645	0.423	27498	1.000
60000	973	0.032	29998	1.000	29998	1.000	5440	0.181	10805	0.360	12674	0.422	29998	1.000

表 1、文獻方法與定理 1, 2 在 6～60000 以下解決偶數累計個數、比例

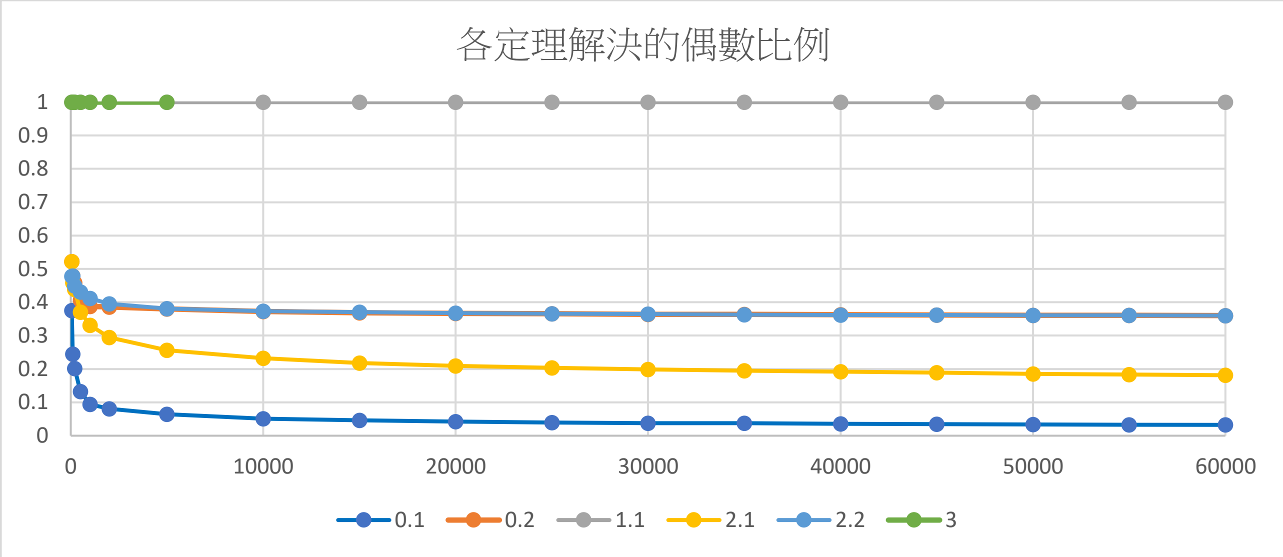


圖 2、各定理解決的偶數比例

因為與質數相關的題目不容易以數論、圖論方法直接解決所有的數，也無法明確估計能解決的數字對於所有數的占比，因此我利用程式輔助（程式碼請見「陸、附錄」)，驗證 6～60000，孿生質數、類孿生質數兩種方法所能解決的偶數個數及比例（表 1）；礙於硬體與演算法，僅驗證一般質數法在 6～5000 解決偶數的個數及比例，若要增加驗證範圍，則需改進程式的演算法，為未來展望。

由於 $n=4$ 的質數環很小，只有唯一的排列方法，而且無法運用多對孿生質數構造質數環，因此不列入程式驗證的偶數。

由表 1、圖 2 的數據可以得到以下資訊：

i. 定理 1.1 涵蓋 6～60000 所有偶數；定理 3 涵蓋 6～5000 所有偶數，其餘不確定。

ii. 對於任一個定理，在 $n<60000$ 時，所能解決的偶數比例皆遞減趨近於一個定值（定理 0.1 $\rightarrow 3\%$ 、定理 0.2+1.1 維持 100% 、定理 2.1 $\rightarrow 18\%$ 、定理 2.2 $\rightarrow 36\%$ ），顯而易見的，使用兩對質數的定理所趨近的定值比較大，符合前面比較使用一對、兩對孿生質數的猜測（$P.3$）。

iii. 比較定理 2.1, 2.2，發現範圍小時，定理 2.1 較為適用，但範圍增大後，不到 1000，定理 2.2 解決的偶數比例就會超越定理 2.1 的。

iv. 定理 0.1、定理 0.2+1.1 解決的偶數會完全重疊（因為定理 0.2+1.1 解決範圍涵蓋 60000 以下所有偶數），而定理 2.1, 2.2 在 60000 以內則約有 22.0% 的偶數重疊。

v. 定理 0.2 與 2.2 解決偶數比例相當，推測原因是構造方式類似。

以上是由程式輔助後所得數據的比較，目前只能說明 60000 以內的情形，未來展望能擴充到 10^6 甚至 10^7 以內的數。

三、 定理 1.1，$k=0\sim5$ 比較

k 範圍	0	比例	0~1	比例	0~2	比例	0~3	比例	0~4	比例	0~5	比例
50	12	0.522	16	0.696	22	0.957	22	0.957	22	0.957	23	1.000
100	23	0.479	32	0.667	47	0.979	47	0.979	47	0.979	48	0.980
200	45	0.459	64	0.653	92	0.939	93	0.949	94	0.959	98	0.990
500	101	0.407	158	0.637	232	0.935	236	0.952	240	0.968	248	0.996
1000	193	0.388	320	0.643	475	0.954	481	0.966	487	0.978	498	0.998
2000	385	0.386	652	0.653	972	0.974	979	0.981	986	0.988	998	0.999
5000	950	0.380	1652	0.661	2472	0.990	2479	0.992	2486	0.995	2498	1.000
10000	1862	0.373	3318	0.664	4972	0.995	4979	0.996	4986	0.998	4998	1.000
15000	2763	0.368	4985	0.665	7472	0.997	7479	0.997	7486	0.998	7498	1.000
20000	3666	0.367	6652	0.665	9972	0.997	9979	0.998	9986	0.999	9998	1.000
25000	4565	0.365	8318	0.666	12472	0.998	12479	0.998	12486	0.999	12498	1.000
30000	5458	0.364	9985	0.666	14972	0.998	14979	0.999	14986	0.999	14998	1.000
35000	6363	0.364	11652	0.666	17472	0.999	17479	0.999	17486	0.999	17498	1.000
40000	7248	0.362	13318	0.666	19972	0.999	19979	0.999	19986	0.999	19998	1.000
45000	8136	0.362	14985	0.666	22472	0.999	22479	0.999	22486	0.999	22498	1.000
50000	9029	0.361	16652	0.666	24972	0.999	24979	0.999	24986	1.000	24998	1.000
55000	9912	0.360	18318	0.666	27472	0.999	27479	0.999	27486	1.000	27498	1.000
60000	10802	0.360	19985	0.666	29972	0.999	29979	0.999	29986	1.000	29998	1.000

表 2、定理 1.1，k 增加後解決偶數的比例變化

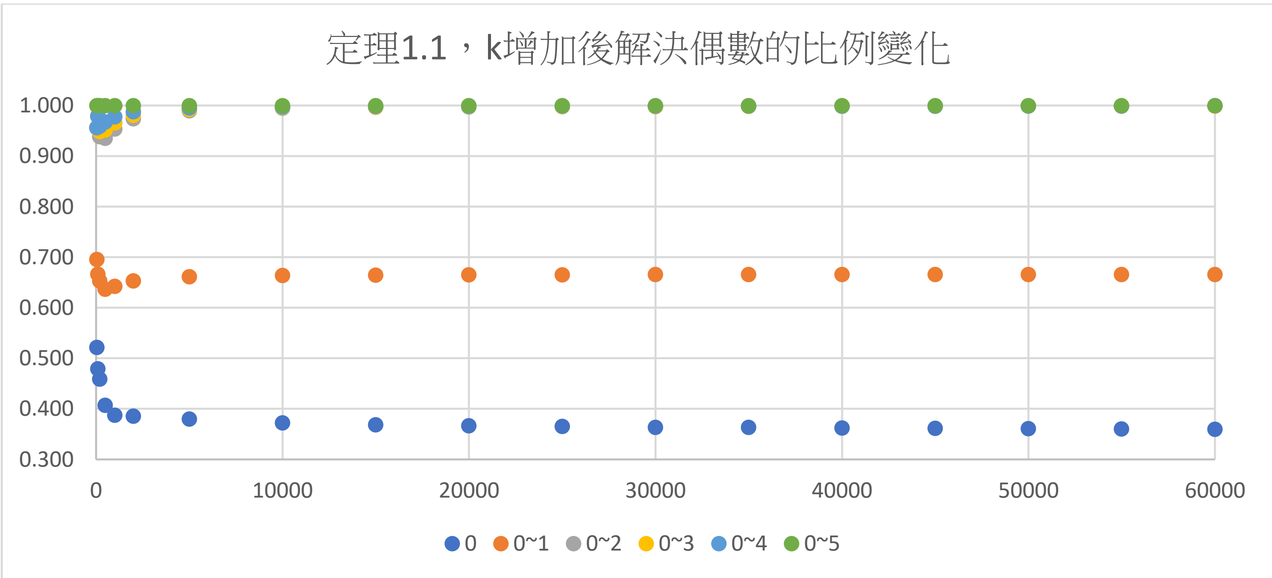


圖 3、定理 1.1，k 增加後解決偶數的比例變化

定理 1.1 證明 $k=0\sim5$ 這五種情況分別能構造 $n=q-p+2k$ 的質數環，我比較 k 增加後，所解決的偶數比例，並將其繪製成表 2、圖 3，發現 $k=0\sim2$ 就已經能解決大部分偶數，但是要到 $k=5$ 才能解決 $6\sim60000$ 的範圍內所有偶數。

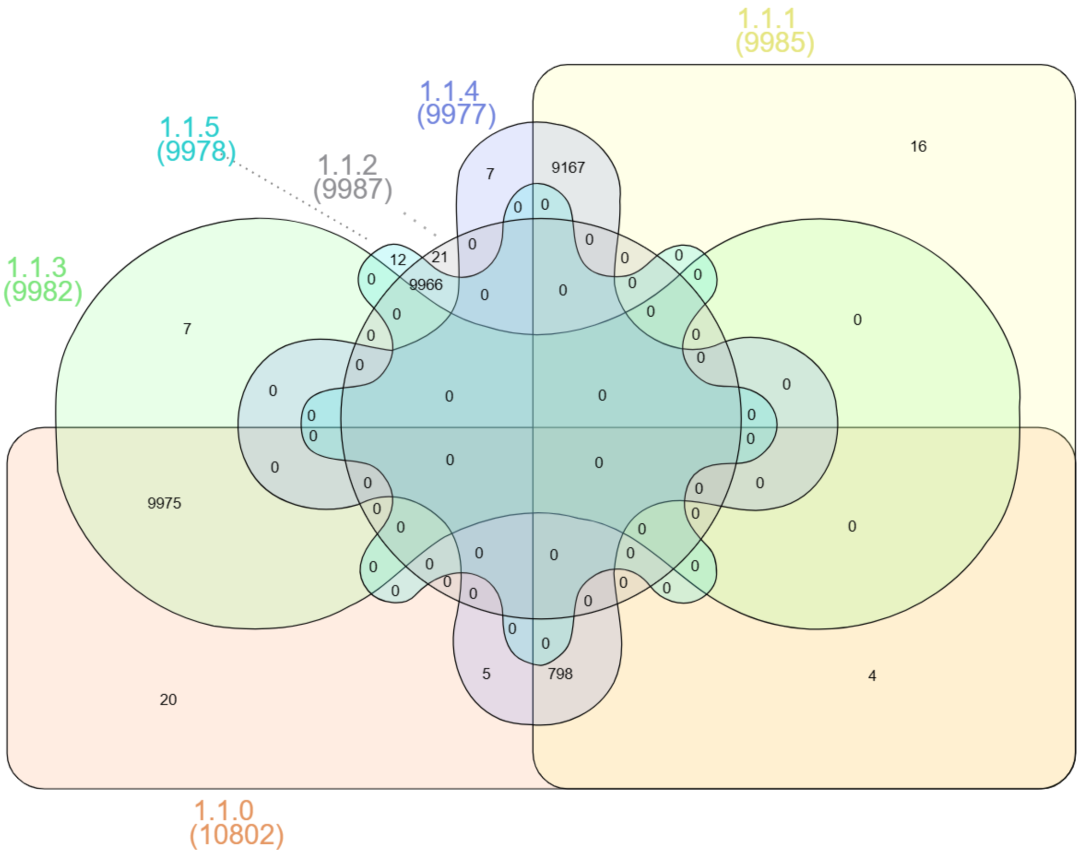


圖 4、定理 1.1，$k=0\sim 5$ 比較

	1.1.0	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5
1.1.0		802	0	9975	803	0
1.1.1	802		0	0	9965	0
1.1.2	0	0		0	0	9966
1.1.3	9975	0	0		0	0
1.1.4	803	9965	0	0		0
1.1.5	0	0	9966	0	0	

表 3、定理 1.1.0~1.1.5 兩兩交集元素個數

為瞭解此分布原因，我將定理 1.1 中，$k=0\sim 5$ 時能解決的偶數分別列出比較，繪製出圖 4 的文氏圖，圖中的定理 1.1.0~1.1.5 分別對應到 $k=0\sim 5$ 的情形，可以發現這些集合的交集少且集中，主要有 3 組僅兩個集合的交集（$n(1.1.0\cap 1.1.3)=9975$, $n(1.1.1\cap 1.1.4)=9167$, $n(1.1.2\cap 1.1.5)=9966$）、1 組三個集合交集（$n(1.1.0\cap 1.1.1\cap 1.1.4)=798$），剩餘的偶數皆零散分布在各定理中。若將 $k=0\sim 5$ 兩兩比較繪出表 3，可觀察到趨勢與文氏圖大致相同。

推測其原因在於孿生質數大部分皆須滿足 $(p,\ p+2)=(6k-1,\ 6k+1)$ （$(3,\ 5)$ 例外），因此 1.1.1, 1.1.4 所解決的偶數皆滿足 $n=q-p+2=(6t-1)-(6k-1)+2\equiv 2\ (mod\ 6)$ ，其餘兩組同理，因此造成交集少且集中的效果，而 1.1.0 之所以會與 1.1.1, 1.1.4 相交是因為 $(p,\ p+2)$ 可以取 $(3,\ 5)$ 這對質數。

肆、 結論

一、 結論

利用一對孿生質數 $p,\ p+2$，可以構造出 $n=p-1$ 的質數環；若 $2p+1$ 也是質數，則可以再構造出 $n=p+1$ 的質數環。使用一對孿生質數構造質數環效率不高，因為孿生質數分布越來越稀疏。

利用兩對孿生質數 $p,\ p+2$ 和 $q,\ q+2$ ，則可以構造出 $n=q-p+2k$ ($k=0\sim5$) 的質數環，能解決的偶數比例極高，但實際上如果分攤到 $k=0\sim5$ 六種情形，效果仍然有限，每一種情形大約能解決 $35\%\sim40\%$ 的偶數。

利用一組類孿生質數，對於任意 $p,\ p+g_n$ 質數對（g_n 為 $0\sim20$ 的偶數），則可以構造出 $n=p-1$ 的質數環。構造概念與一對孿生質數的方法類似，效率不高。

利用一對孿生質數 $p,\ p+2$ 與一對相差四的質數 $q,\ q+4$，可以構造出 $n=q-p+2$ 的質數環。構造概念與兩對孿生質數的方法類似，效率低於兩對孿生質數的方法，但高於一對孿生質數或類孿生質數的方法。

利用兩個不限定差的質數 $p,\ q$，找出滿足條件的 k（$k<p<q,\ k<q-p,\ k$ 為 1 或奇質數），使得$p+q-k$ 也是質數且 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$，可以構造出 $n=q-k$ 的質數環。此方法不受到孿生質數猜想等限制，能解決的偶數比例極高。

與文獻作比較，本文的主要貢獻之一在於提出使用類孿生質數的想法，過去可能認為當一對質數相差太大會變得不容易掌握數字之間的關聯性，但我突破這個框架，證明對於所有質數對 $p,\ p+k$ （k 為 $4\sim20$ 的偶數），皆能構造出 $n=p-1$ 的質數環；此外，我也延伸兩對孿生質數的方法，連結一對孿生質數 $p,\ p+2$ 與一對相差四的質數 $q,\ q+4$ 的關係，證明能構造出 $n=q-p+2$ 的質數環。

除此之外，本文也提出使用一般質數構造質數環，此方法更為一般化，不會受到孿生質數猜想等限制，而且從程式驗證結果可以發現，在 $6\sim5000$ 的有限範圍內，此方法可解決全部的偶數，效果很好；如果從另一個角度思考這個定理，可以想成對於任何一個偶數，只要能向上下各找到一個適當的質數 $q,\ p$，即可以構造質數環，雖然目前無法證明是否對於任意偶數皆有這個性質，但直觀來看可以猜測會成立。

二、　定理比較（表 4）

方法	使用質數個數	平均效果	使用技巧
孿生質數法	3 個以上	普通	接近的質數對
類孿生質數法	3 個以上	普通	接近的質數對、同餘、分類
一般質數法	3 或 4	佳	同餘、分類、互質

表 4、定理比較

三、　未來展望

i. 延伸定理 0.1，當 $p,\ p+2$ 為孿生質數，$n=p-1-2t\ (\ t>0)$ 質數環存在。

ii. 延伸定理 1.1，當 $p,\ p+2$、$q,\ q+2$ 為孿生質數，$n=q-p+2k\ (\ k>5,\ q>2p-4k)$ 質數環存在。

iii. 延伸定理 2.1，當 $p,\ p+k$ 為質數，$n=p-1\ (\ k>20)$ 質數環存在。

iv. 延伸定理 2.1，當 $p,\ p+k$ 為質數，$n=p-1-2t\ (\ t>0)$ 質數環存在。

v. 延伸定理 3，如果 $n=q-k$ 中的 k 為奇合數，是否能修改排列方式構造質數環？

vi. 找出除了窮舉、孿生質數、類孿生質數、一般質數法（定理 3）以外的第五種方法。

vii. 改進程式演算法，驗證 $10^6\sim 10^7$ 以內的偶數是否皆能用這些定理表示。

伍、 參考文獻資料

[1] MIT Mathematics PRIMES Math Problem Set (2020)

https://math.mit.edu/research/highschool/primes/materials/2020/entpro20sol.pdf

[2] Wolfram MathWorld Prime Circle

https://mathworld.wolfram.com/PrimeCircle.html

[3] OEIS A072618

https://oeis.org/A072618

[4] OEIS A072676

https://oeis.org/A072676

[5] OEIS A051252

https://oeis.org/A051252

[6] Macalester College Problem of the Week 1218 (2016)

https://stanwagon.com/potw/current_solutions/s1218.html?fbclid=IwAR2gKP6LvKOfdYvyBH
D0ciwvlBwOay55Opg-I9XvvFL-pITCzj_VqgAeT3U

[7] Wolfram Demonstrations Project Special Prime Circles

https://demonstrations.wolfram.com/SpecialPrimeCircles/

陸、附錄

> 定理 2.1.3
> 當 g_n 為 $8\sim 20$ 的偶數，即 $p,\ p+g_n$ 為一對質數 $(p>g_n)$，則存在 $n=p-1$ 的質數環。

【證明】

與定理 2.1.1, 2.1.2 類似的，先將 $p-1$ 對 g_n 同餘再分類，一共會分成 $g_n/2$ 類，且每一類可以構造出 $g_n/2$ 條數列，最後排列每條數列頭尾使得其相連接為質數。

對於以下的證明圖，第一列是 g_n；第二列是對 g_n 同餘後分成的 $g_n/2$ 類；第三列是每一類的 $g_n/2$ 條數列首尾值（直向排列）；第四列是對這 $g_n/2$ 條數列的其中一種排列（皆是以 1 開始，與 1 同一條數列的數結束），紅色的數字對為特殊連接點（兩數和非第五列的數）；第五列是此構造此數列<u>主要</u>利用的質數（若為 X 則是數列間的連接部分沒有發現明確規則；若為 *not exist* 則是由質數為 $6k-1,\ 6k+1$ 推得該 *case* 不存在，詳見 $P.7$ 定理 2.1.2）。

$$
g_n=8 \Rightarrow \begin{cases}
p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,7,4,5,6,3,8\ (11) \\[2ex]
p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 \end{matrix} \Rightarrow 1,4,7,6,5,8,3,2\ (13) \\[2ex]
p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 8 & 7 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,3,8,5,6,7,4\ (11) \\[2ex]
p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 8 \end{matrix} \Rightarrow 1,4,3,2,5,8,7,6\ (13)
\end{cases}
$$

$$
g_n=10 \Rightarrow \begin{cases}
p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,9,4,7,6,5,8,3,10\ (13) \\[2ex]
p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{matrix} \Rightarrow 1,10,3,8,5,6,7,4,9,2\ (11) \\[2ex]
p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 10 & 9 & 8 \end{matrix} \Rightarrow 1,10,5,6,9,2,3,8,7,4\ (11) \\[2ex]
p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 10 & 9 \end{matrix} \Rightarrow 1,10,7,4,3,8,9,2,5,6\ (11) \\[2ex]
p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 10 \end{matrix} \Rightarrow 1,10,9,2,7,4,5,6,3,8\ (11)
\end{cases}
$$

$$
g_n = 12 \Rightarrow \begin{cases}
p-1 \equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{matrix} \Rightarrow 1, 2, 11, 6, 7, 10, \mathit{3}, \mathit{4}, 9, 8, 5, 12 \ (17) \\
p-1 \equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{matrix} \Rightarrow 1, 12, 3, 10, 5, 8, 7, 6, 9, 4, 11, 2 \ (13, \ \textit{not exist}) \\
p-1 \equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{6}, 11, 8, 9, 10, 7, 12, \mathit{5}, \mathit{2}, \mathit{3}, \mathit{4} \ (19) \\
p-1 \equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 12 & 11 & 10 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{4}, \mathit{3}, \mathit{2}, 5, 12, 7, 10, 9, 8, 11, 6 \ (17) \\
p-1 \equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 12 & 11 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 7, 10, 11, 6, \mathit{3}, \mathit{4}, 5, 12, 9, 8 \ (17, \ \textit{not exist}) \\
p-1 \equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 12 \end{matrix} \Rightarrow 1, 12, 11, 2, 9, 4, 7, 6, 5, 8, 3, 10 \ (13)
\end{cases}
$$

$$
g_n = 14 \Rightarrow \begin{cases}
p-1 \equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 13, 4, 11, 6, 9, 8, 7, 10, 5, 12, 3, 14 \ (17) \\
p-1 \equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{4}, 13, 6, 11, 8, 9, 10, 7, 12, 5, 14, \mathit{3}, \mathit{2} \ (19) \\
p-1 \equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 3, 14, 5, 12, 7, 10, 9, 8, 11, 6, 13, 4 \ (17) \\
p-1 \equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 5, 12, 9, 8, 13, 4, 3, 14, 7, 10, 11, 6 \ (17) \\
p-1 \equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 14 & 13 & 12 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 7, 10, 13, 4, 5, 12, 11, 6, 3, 14, 9, 8 \ (17) \\
p-1 \equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 14 & 13 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 9, 8, 3, 14, 11, 6, 5, 12, 13, 4, 7, 10 \ (17) \\
p-1 \equiv 12 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 13 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 14 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 11, 6, 5, 10, 3, 14, 13, 4, 9, 8, 5, 12 \ (17)
\end{cases}
$$

$$
g_n = 16 \Rightarrow \begin{cases}
p-1 \equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{matrix} \Rightarrow 1, 2, 15, 4, 13, 6, 11, 8, 9, 10, 7, 12, 5, 14, 3, 16 \ (19) \\
p-1 \equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \end{matrix} \Rightarrow 1, 16, 3, 14, 5, 12, 7, 10, 9, 8, 11, 6, 13, 4, 15, 2 \ (17) \\
p-1 \equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 3, 16, 5, 14, 7, 12, 9, 10, 11, 8, 13, 6, 15, 4 \ (19) \\
p-1 \equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 5 & 4 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 \end{matrix} \Rightarrow 1, 16, 7, 10, 13, 4, 3, 14, 9, 8, 15, 2, 5, 12, 11, 6 \ (17) \\
p-1 \equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 7, 12, 13, 6, 3, 16, 9, 10, 15, 4, 5, 14, 11, 8 \ (19) \\
p-1 \equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 16 & 15 & 14 \end{matrix} \Rightarrow 1, 16, 11, 6, 5, 12, 15, 2, 9, 8, 3, 14, 13, 4, 7, 10 \ (17) \\
p-1 \equiv 12 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 16 & 15 \end{matrix} \Rightarrow \mathit{1}, \mathit{2}, 11, 8, 5, 14, 15, 4, 9, 10, 3, 16, 13, 6, 7, 12 \ (19) \\
p-1 \equiv 14 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 15 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 16 \end{matrix} \Rightarrow 1, 16, 15, 2, 13, 4, 11, 6, 9, 8, 7, 10, 5, 12, 3, 14 \ (17)
\end{cases}
$$

$$
g_n=18 \Rightarrow \begin{cases}
p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 \end{matrix} \Rightarrow 1,4,15,8,11,12,7,16,3,2,17,6,13,10,9,14,5,18\ (23) \\
p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{matrix} \Rightarrow 1,18,3,16,5,14,7,12,9,10,11,8,13,6,15,4,17,2\ (19,\ \mathit{not\ exist}) \\
p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 3 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 \end{matrix} \Rightarrow 1,18,5,14,9,10,13,6,17,2,3,16,7,12,11,8,15,4\ (19) \\
p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 5 & 4 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{matrix} \Rightarrow 1,4,3,2,5,18,7,16,9,14,11,12,13,10,15,8,17,6\ (23) \\
p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 \end{matrix} \Rightarrow 1,18,9,10,17,2,7,12,15,4,5,14,13,6,3,16,11,8\ (19,\ \mathit{not\ exist}) \\
p-1\equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 18 & 17 & 16 & 15 \end{matrix} \Rightarrow 1,18,11,8,3,16,13,6,5,14,15,4,7,12,17,2,9,10\ (19) \\
p-1\equiv 12 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 18 & 17 & 16 \end{matrix} \Rightarrow 1,4,9,14,17,6,7,16,15,8,5,18,13,10,3,2,11,12\ (23) \\
p-1\equiv 14 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 15 & 16 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 18 & 17 \end{matrix} \Rightarrow 1,18,15,4,11,8,7,12,3,16,17,2,13,6,9,10,5,14\ (19,\ \mathit{not\ exist}) \\
p-1\equiv 16 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 17 \\ 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 18 \end{matrix} \Rightarrow 1,18,17,2,15,4,13,6,11,8,9,10,7,12,5,14,3,16\ (19)
\end{cases}
$$

$$
g_n=20 \Rightarrow \begin{cases}
p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,19,4,17,6,15,8,13,10,11,12,9,14,7,16,5,18,3,20\ (23) \\
p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 \end{matrix} \Rightarrow 1,4,19,10,13,16,7,6,17,12,11,18,5,8,15,14,9,20,3,2\ (29) \\
p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,3,20,5,18,7,16,9,14,11,12,13,10,15,8,17,6,19,4\ (23) \\
p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 6 & 5 & 4 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 \end{matrix} \Rightarrow 1,12,15,8,19,4,3,20,7,16,11,2,5,18,9,14,13,10,17,6\ (23) \\
p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,7,16,13,10,19,4,5,18,11,12,17,6,3,20,9,14,15,8\ (23) \\
p-1\equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \end{matrix} \Rightarrow 1,12,19,4,7,16,15,8,3,20,11,2,9,14,17,6,5,18,13,10\ (23) \\
p-1\equiv 12 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 20 & 19 & 18 & 17 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,11,18,15,14,19,10,3,8,5,6,7,4,9,20,13,16,17,12\ (29) \\
p-1\equiv 14 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 15 & 16 & 17 \\ 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 20 & 19 & 18 \end{matrix} \Rightarrow 1,12,3,20,15,8,7,16,19,4,11,2,13,10,5,18,17,6,9,14\ (23) \\
p-1\equiv 16 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 17 & 18 \\ 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 20 & 19 \end{matrix} \Rightarrow 1,2,15,8,9,14,3,20,17,6,11,12,5,18,19,4,13,10,7,16\ (23) \\
p-1\equiv 18 \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 19 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 20 \end{matrix} \Rightarrow 1,12,7,16,3,20,19,4,15,8,11,2,17,6,13,10,9,14,5,18\ (23)
\end{cases}
$$

（補充）子題說明

其實定理 2.1 可以衍伸成一個子題，由於質數集合無限大，因此對於任一質數 p，可以假設存在偶數 g_n 使得 $p+g_n$ 也是質數，接著可將 $1\sim p-1$ 透過對 g_n 同餘分類，造出若干條數列，考慮是否存在配對方式使得每條數列首尾串接，其相鄰任兩數相加都是質數，若命題成立則對於所有質數 p $(p>3)$ 皆存在 $n=p-1$ 的質數環。

程式碼（C++）

1. 建立質數數列（埃拉托斯特尼篩法）（圖 5）

```cpp
    vector<bool> isprime(2*n + 20, true);
    vector<int> primes;

    isprime[1] = false;
    for (int p = 2; p * p <= 2*n+20; ++p) {
        if (isprime[p]) {
            for (int i = p * p; i <= 2*n+20; i += p) {
                isprime[i] = false;
            }
        }
    }

    for (int p = 2; p <= 2*n+20; ++p) {
        if (isprime[p]) {
            primes.push_back(p);
        }
    }
```

圖 5、建立質數數列

2. 尋找相差 2~20 的質數對（圖 6）

```cpp
    vector<int>twin_two;
    for (int i=1;i<2*n+2;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+2]==1){
            twin_two.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_four;
    for (int i=1;i<2*n+4;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+4]==1){
            twin_four.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_six;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+6]==1){
            twin_six.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_eight;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+8]==1){
            twin_eight.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_ten;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+10]==1){
            twin_ten.push_back(i);
        }
    }
```

```cpp
    vector<int>twin_twelve;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+12]==1){
            twin_twelve.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_fourteen;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+14]==1){
            twin_fourteen.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_sixteen;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+16]==1){
            twin_sixteen.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_eighteen;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+18]==1){
            twin_eighteen.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_twenty;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+20]==1){
            twin_twenty.push_back(i);
        }
    }
```

圖 6、尋找相差 2~20 的質數對

3. 找出符合定理的數（圖 7）

```cpp
//0.1
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    if (twin_two[i]-1<=n+1){
        fit[twin_two[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    bool a = isprime[2*twin_two[i]+1];
    if (a == true and twin_two[i]<=n){
        fit[twin_two[i]+1] = true;
    }
}
// 0.2+1.2
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    for (int j=i+1;j<twin_two.size();j++){
        int a = twin_two[i];
        int b = twin_two[j];
        if (b>2*a and b-a<=n+1){
            fit[b-a] = true;
        }
        if (b>2*a-4 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+2] = true;
        }
        if (b>2*a-8 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+4] = true;
        }
        if (b>2*a-12 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+6] = true;
        }
        if (b>2*a-16 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+8] = true;
        }
        if (b>2*a-20 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+10] = true;
        }
    }
}
```

```cpp
//2.1.1
for (int i=0;i<twin_four.size();i++){
    if (twin_four[i]-1<=n+1){
        fit[twin_four[i]-1] = true;
    }
}
//2.1.2
for (int i=0;i<twin_six.size();i++){
    if (twin_six[i]-1<=n+1){
        fit[twin_six[i]-1] = true;
    }
}
//2.1.3
for (int i=0;i<twin_eight.size();i++){
    if (twin_eight[i]-1<=n+1){
        fit[twin_eight[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_ten.size();i++){
    if (twin_ten[i]-1<=n+1){
        fit[twin_ten[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_twelve.size();i++){
    if (twin_twelve[i]-1<=n+1){
        fit[twin_twelve[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_fourteen.size();i++){
    if (twin_fourteen[i]-1<=n+1){
        fit[twin_fourteen[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_sixteen.size();i++){
    if (twin_sixteen[i]-1<=n+1){
        fit[twin_sixteen[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_eighteen.size();i++){
    if (twin_eighteen[i]-1<=n+1){
        fit[twin_eighteen[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_twenty.size();i++){
    if (twin_twenty[i]-1<=n+1){
        fit[twin_twenty[i]-1] = true;
    }
}
```

```cpp
//2.2
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    for (int j=i+1;j<twin_four.size();j++){
        int a = twin_two[i];
        int b = twin_four[j];
        if (b>2*a-4 and b%4==1 and b-a+2<=n+1){
            fit[b-a+2] = true;
        }
    }
}
```

```cpp
//3.1
for (int i=1;primes[i]<n;i++){
    int q=primes[i];
    for (int j=1;primes[j]<q;j++){
        int p=primes[j];
        if (isprime[p+q-1]==1 and gcd((p-1)/2,(q-1)/2)==1){
            fit[q-1] = true;
        }
    }
}
```

```cpp
//3.2
for (int i=1;primes[i]<n;i++){
    int q=primes[i];
    for (int j=1;primes[j]<q;j++){
        int p=primes[j];
        for (int l=1;primes[l]<q-p and primes[l]<p;l++){
            int k=primes[l];
            if(isprime[p+q-k]==1 and gcd(p-k,q-k)==2){
                fit[q-k] = true;
            }
        }
    }
}
```

圖 7、定理（0.1, 0.2+1.1, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2）

4. 輸出符合定理的 n 個數（圖 8）

```cpp
    for (int i=3;i<fit.size();i++){
        if (fit[i] == true){
            amount++;
        }
    }
    cout<<amount<<endl;
```

圖 8、輸出符合定理的 n 個數

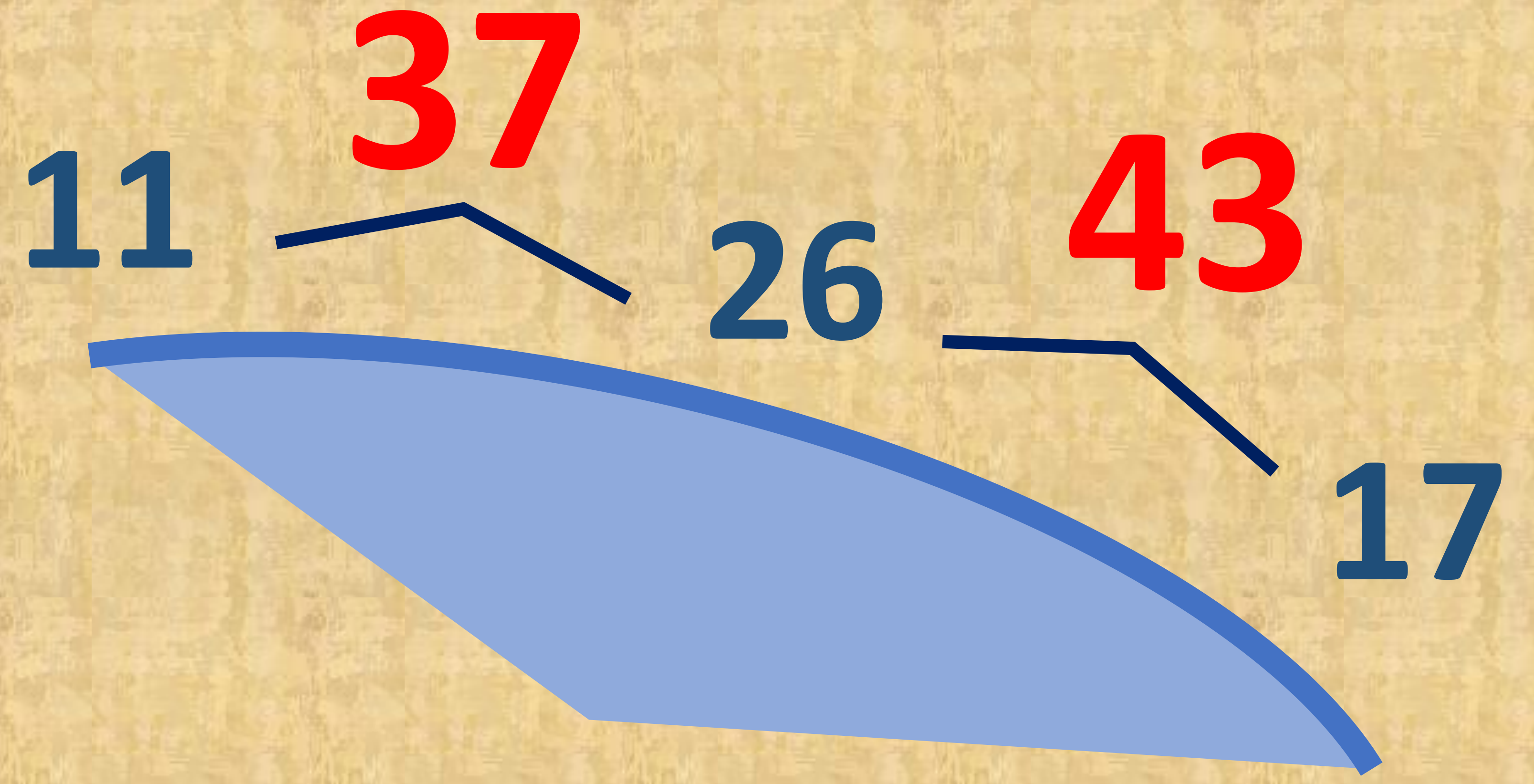
【評語】050405

本作品定義質數環如下，將 1 到 n 環狀排列，使得相鄰兩數之和都是質數。可以直觀的知道，n 必定為偶數。在文獻中已發展出給定一組或兩組學生質數對去構造質數環的方法。作者參考上述手法之後，模仿而構造出一系列特例，舉例如下：定理 2.1.3 給定一組相差為 20 以內的類學生質數對、定理 2.2 要求給定一組學生質數對及一組相差為 4 的類學生質數對、定理 3.1 質數需滿足一些特定的條件。其構造手法都和參考文獻相似，只是題目複雜化使得討論的情況數增加。由於類學生質數相關的性質蘊含困難的解析數論知識，是否存在無限組也仍待數學界研究，使得本作品的假設條件偏強而難以驗證，對於高中科展而言，質數環的研究實屬過於困難。在此之下，作者只能以程式計算他們的結果在有限的區間內涵蓋的偶數比例。本作品對於質數環的研究做出一些推廣，但是給出的進展比較有限。質數環研究的重要性和相關文獻的探討可再改善。

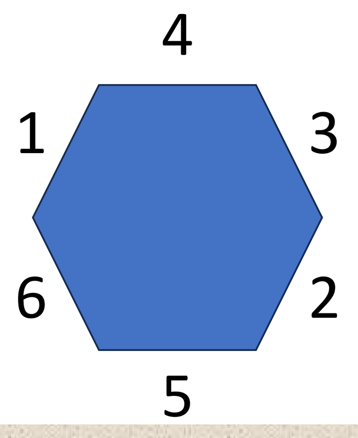
作品簡報

神秘的數字圓舞曲

- 探討質數環排列的存在性



問題說明



如果正整數 1~k 存在一個環狀排列，使得相鄰數字相加皆為質數，則將其定義為 n=k 的質數環，以下會以數列形式表達。

右圖為一個 n=6 的質數環，其中一種表達的數列為：

1, 4, 3, 2, 5, 6

研究動機

我在高一時晉級中山大學數學人才培育計畫的高級班，並參與專題研究課程。在課程中，我們可以選擇有興趣的題目進行專題研究，每次上課時向教授報告研究進度與討論研究方向；同時，我也配合學校的專題課進行此研究，結合兩方資源以達到更好的成效。

我的主題「質數環」是自己突發奇想構造出來的，一方面是配合教授擅長的圖論領域，另一方面出自於我從小對質數的好奇心。我原本以為質數環的排列存在理所當然，但是在研究之後發現並非如此，教授還曾建議我更改題目，不過我沒有放棄，試圖以不同方向切入，尋求質數環存在的條件與排列方法。

研究目的

- 利用孿生質數對進行組合構造質數環。
- 利用相差 t 的質數對 p, p+t（類孿生質數）構造質數環。
- 利用不限定差的質數組（一般質數）構造質數環。
- 目標：在正偶數集合中，證明或驗證 90% 以上的偶數 k 存在 n=k 的質數環。

文獻回顧

首先，可由反證法將邊數 n 為奇數的情況排除[1]，這個問題至今未找出通解（即證明對於哪些 n 存在質數環，除此之外皆不存在質數環），但已經有方法證明一些特殊的 n 存在質數環。

目前已有兩種排列質數環的數學方法，第一種是窮舉法[2]，第二種是孿生質數法[3]。窮舉法只能用來構造比較小的質數環；而孿生質數法可以分成使用一對孿生質數或兩對孿生質數。

定理0.1

若 p, p+2 為一對孿生質數：

(a) 存在 n=p-1 的質數環。

1, p-1, 3, p-3, 5, p-5, ... , p-4, 4, p-2, 2

(b) 若 2p+1 也是質數，則存在 n=p+1 的質數環。

p+1, 1, p-1, 3, p-3, 5, p-5, ... , p-4, 4, p-2, 2, p

定理0.2

若 p, p+2 與 q, q+2 為兩對孿生質數，且 q>2p，則存在 n=q-p 的質數環。

p, q-p, p+2, q-p-2, ... , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1
2, p-2, 4, p-4, 6, p-6, ... , p-5, 5, p-3, 3, p-1, 1

在定理0.2中，若 n 很大時，可以猜測存在孿生質數對 p, p+2 和 q, q+2 使得 n=q-p [4]。

除了數學方法，也有人使用程式方法構造質數環與計算排列方法數[5,6] 。值得一提的是，有研究利用程式得出當 n 為 14~50 的偶數時，都能構造出相鄰兩項和與差皆為質數的特殊質數環[7]。

研究過程

- 假設函數 P_n 為質數數列，g 為任意兩質數 p_i, p_j 的差，$\begin{cases} g=2 \text{ 時，} p_i, p_j \text{ 為一對孿生質數} \\ g>2 \text{ 時，} p_i, p_j \text{ 為一對類孿生質數} \end{cases}$

1. 孿生質數 $g=2$（定理0.1、定理0.2也屬於孿生質數法）

定理1.1（定理0.2 的延伸）

若 p, p+2 與 q, q+2 為兩對孿生質數，且 q>2p-4k, p>4k+1 (k=0~5)，則存在 n=q-p+2k 的質數環

範例1：k=0，即為定理0.2

範例2：k=1，在數列一首尾加上 q-p+2, q-p+1，數列二的 p-2, p-1 移到數列一，剩餘的夾在中間

p-2, q-p+2, p, q-p, p+2, q-p-2, ... , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1, q-p+1, p-1
2, 3, p-3, 5, p-5, ... , p-6, 6, p-4, 4, 1

範例3：k=5，構造原理與範例2相同

p-10, q-p+10, p-8, q-p+8, ... , q-p+7, p-7, q-p+9, p-9
10, 3, 2, 5, 8, 11, p-11, 13, p-13, ... , p-14, 14, p-12, 12, 7, 6, 1, 4, 9

我認為一對孿生質數的定理0.1延伸空間不大，因為當存在 k 對孿生質數時，使用定理0.1僅能得到小於 2k 個 n 能構成質數環；相反的，如果使用定理0.2，則可以有不超過 k(k-1) 個 n 能構成質數環（可能重複，只能說“≤”）。

除此之外，由於一對孿生質數 n=p-1 延伸成 n=p-1-2t 會有一部分跟定理0.2重疊，因此我在本文中主要是將兩對孿生質數方法的 n=q-p 延伸成 n=q-p+2t。

2. 類孿生質數 $g > 2$

定理2.1

若 p, p+g (g =4~20) 為一對質數，則存在 n=p-1 的質數環。

範例：g=6

先將 p-1 對 6 同餘，將分成 p-1 ≡ 0、p-1 ≡ 2、p-1 ≡ 4 三類

若 p-1 ≡ 0，首先建立三條數列：

1, p-1, 7, p-7, ..., p-12, 12, p-6, 6（包含所有除以6餘1, 0的數）
2, p-2, 8, p-8, ..., p-11, 11, p-5, 5（包含所有除以6餘2, 5的數）
3, p-3, 9, p-9, ..., p-10, 10, p-4, 4（包含所有除以6餘3, 4的數）

再將三條數列首尾以 1, 6, 5, 2, 3, 4 的方式串聯，其餘兩種情況同理。

定理2.2

若 p, p+2 與 q, q+4 為兩對質數，且 q>2p-4 ，則存在 n=q-p+2 的質數環。

CaseA：若 $q \equiv 1 \Rightarrow p \equiv q-p+1 \ (mod\ 4)$，先分成三條數列（剩下 1, 2）

Seq1: p-2, q-p+2, p+2, q-p-2, p+6, q-p-6, ..., q-p-5, p+5, q-p-1, p+1
Seq2: p-1, q-p+1, p+3, q-p-3, p+7, q-p-7, ..., q-p-4, p+4, q-p , p
Seq3: 4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3

再使用以下方法串聯

(p-2)-Seq1-(p+1) --- 1, 2 --- (p)-Seq2-(p-1) --- (3)-Seq3-(4)

CaseB：若 $q \equiv 3 \Rightarrow p \equiv q-p-1 \ (mod\ 4)$，先分成三條數列（剩下 1, 2）

Seq1: p-2, q-p+2, p+2, q-p-2, ..., q-p-3, p+3, q-p-1, p-1
Seq2: p+1, q-p-1, p+5, q-p-5, ..., q-p-4, p+4, q-p, p
Seq3: 4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3

再使用以下方法串聯

(p-2)-Seq1-(p-1) --- (3)-Seq3-(4) --- 1 --- (p+1)-Seq2-(p) --- 2

3. 一般質數（不限定差的質數對）

定理3.1

若 p, q, p+q-1 皆為奇質數，且滿足 $\mathrm{p} < \mathrm{q}, \gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right) = 1$，則存在 n=q-1 的質數環。

【概念】

Step1：先利用 p, q 將 1~q-1 分成若干條數列，使每條數列中相鄰數字和為 p, q 交錯排列

Step2：將數列串連，使任兩數列交接處為 p+q-1，此時有些數字可能因同餘被獨立分成一類，導致產生一至數個環

Step3：證明只有一個環的充要條件是 $\gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right) = 1$

【符號化】

由於前面的概念比較抽象，因此我試圖用具體的符號表達

單獨討論數列中的偶數，會發現後一項皆為前一項「減去 q-p」或「加上 p-1」，這可以說明為何 $\gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right) = 1$，接著使用數學歸納法，假設連續四項偶數、奇數、偶數、奇數為 m, n, r, s，已知 m+n=q，討論 n+r, r+s 的值。

$Case1: \begin{cases} r = m-(q-p) \\ s = n+(q-p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+r = p \\ r+s = q \end{cases}$ $Case2: \begin{cases} r = m+(p-1) \\ s = n-(p-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+r = p+q-1 \\ r+s = q \end{cases}$

定理3.2

若 p, q, k, p+q-k 皆為奇質數，且滿足 $\mathrm{k} < \mathrm{p} < \mathrm{q}, \mathrm{k} < \mathrm{q}-\mathrm{p}, \gcd\left(\frac{p-k}{2}, \frac{q-k}{2}\right) = 1$，則存在 n=q-k 的質數環。

概念同定理3.1，此時偶數數列後一項為前一項「減去 q-p」或「加上 p-k」，相較於定理3.1需要討論另外兩種情形

$Case1: \begin{cases} r = m-(q-p) \\ s = n+(q-p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+r = p \\ r+s = q \end{cases}$ | $Case2: \begin{cases} r = m+(p-k) \\ s = n-(p-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+r = p+q-k \\ r+s = q \end{cases}$

$Case3: \begin{cases} r = m-(q-p) \\ s = n-(p-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+r = p+q-k \\ r+s = k \end{cases}$ | $Case4: \begin{cases} r = m+(p-k) \\ s = n+(q-p) \end{cases}$ 此情形不存在

$Case3.1: \begin{cases} r' = r+(p-k) \\ s' = s+(q-p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s+r' = p \\ r'+s' = q \end{cases} \Rightarrow$ 回到 $Case1,2$ | $Case3.2: \begin{cases} r' = r+(p-k) \\ s' = s-(p-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s+r' = p \\ r'+s' = k \end{cases} \Rightarrow$ 繼續 $Case3$

研究結果

程式驗證

範圍	0.1	比例	0.2+1.1	比例	0+1	比例	2.1	比例	2.2	比例	2	比例	3	比例	All	比例
50	9	0.375	24	1.000	24	1.000	13	0.542	11	0.458	14	0.583	24	1.000	24	1.000
100	12	0.245	49	1.000	49	1.000	23	0.469	23	0.469	26	0.531	49	1.000	49	1.000
200	20	0.202	99	1.000	99	1.000	44	0.444	44	0.444	51	0.515	99	1.000	99	1.000
500	33	0.133	249	1.000	249	1.000	93	0.373	107	0.430	124	0.498	249	1.000	249	1.000
1000	47	0.094	499	1.000	499	1.000	166	0.333	205	0.411	240	0.481	499	1.000	499	1.000
2000	81	0.081	999	1.000	999	1.000	295	0.295	395	0.395	470	0.470	999	1.000	999	1.000
5000	161	0.064	2499	1.000	2499	1.000	641	0.257	952	0.381	1136	0.455	2499	1.000	2499	1.000
10000	257	0.051	4999	1.000	4999	1.000	1162	0.232	1867	0.373	2229	0.446	-	-	4999	1.000
15000	343	0.046	7499	1.000	7499	1.000	1633	0.218	2780	0.371	3284	0.438	-	-	7499	1.000
20000	422	0.042	9999	1.000	9999	1.000	2091	0.209	3674	0.367	4345	0.435	-	-	9999	1.000
25000	498	0.040	12499	1.000	12499	1.000	2547	0.204	4576	0.366	5403	0.432	-	-	12499	1.000
30000	569	0.038	14999	1.000	14999	1.000	2981	0.199	5465	0.364	6446	0.430	-	-	14999	1.000
35000	653	0.037	17499	1.000	17499	1.000	3407	0.195	6357	0.363	7486	0.428	-	-	17499	1.000
40000	712	0.036	19999	1.000	19999	1.000	3834	0.192	7245	0.362	8536	0.427	-	-	19999	1.000
45000	774	0.034	22499	1.000	22499	1.000	4247	0.189	8140	0.362	9581	0.426	-	-	22499	1.000
50000	844	0.034	24999	1.000	24999	1.000	4641	0.186	9023	0.361	10613	0.425	-	-	24999	1.000
55000	905	0.033	27499	1.000	27499	1.000	5038	0.183	9920	0.361	11636	0.423	-	-	27499	1.000
60000	974	0.032	29999	1.000	29999	1.000	5441	0.181	10805	0.360	12665	0.422	-	-	29999	1.000

表1、各定理在 60000 以下能造出質數環的偶數累計個數、比例

i. **定理1.1**涵蓋 4~60000 的所有偶數；**定理3**涵蓋 4~5000 的所有偶數。

ii. 在 n<60000 時，各個定理所能造出質數環的偶數比例皆遞減趨近於一個定值，可以觀察到使用兩對質數的定理所趨近的定值比較大，符合前面比較使用一對、兩對孿生質數的猜測。

iii. 比較**定理2.1, 2.2**，發現範圍小時，**定理2.1**較為適用，但範圍增大後，不到 1000，**定理2.2**能造出質數環的偶數比例就會超越**定理2.1**的。

iv. **定理2.1, 2.2**在 60000 以內約有 10.4% 的偶數重疊。

v. **定理0.2**與**定理2.2**能造出質數環的偶數比例相當，推測原因是構造方式類似。

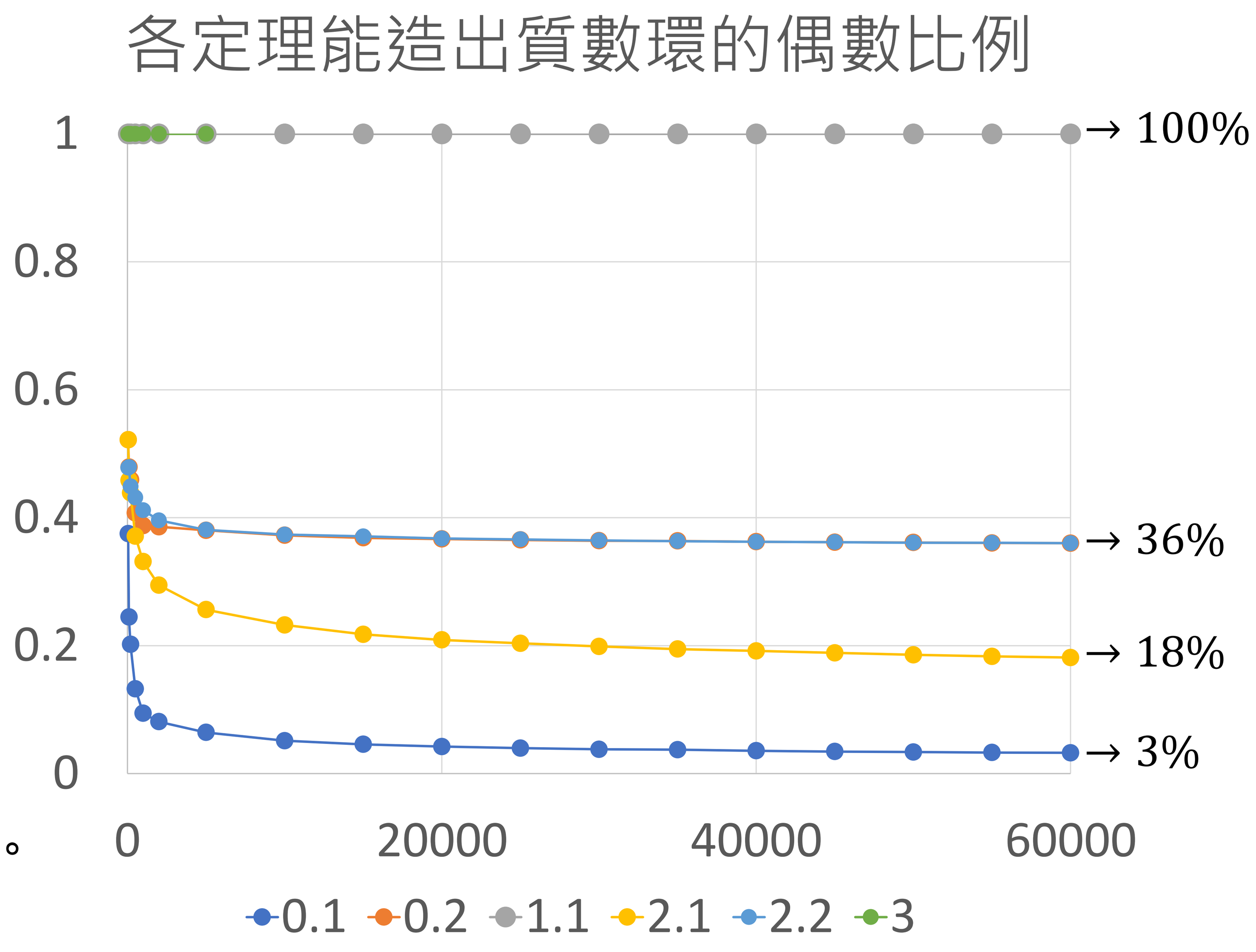


圖1、各定理能造出質數環的偶數比例

定理1，k=0~5 比較

	1.1.0	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5
1.1.0		802	0	9975	803	0
1.1.1	802		0	0	9965	0
1.1.2	0	0		0	0	9966
1.1.3	9975	0	0		0	0
1.1.4	803	9965	0	0		0
1.1.5	0	0	9966	0	0	

表3、**定理1.1.0~1.1.5**兩兩交集元素個數

由表3觀察到這些集合的交集少且集中，推測原因在於孿生質數對除了 3, 5 之外，都是 6k-1, 6k+1，因此 **1.1.1, 1.1.4** 能造出質數環的偶數除以 6 皆餘 2，其餘兩組同理，而 **1.1.0** 會與 **1.1.1, 1.1.4** 相交是因為 (p, p+2) 可以取 (3, 5) 這對質數。

結論

與文獻作比較，本文的主要貢獻之一在於提出使用類孿生質數的想法，過去可能認為當一對質數相差變大會不容易掌握數字之間的關聯性，但我突破這個框架，更進一步連結一對孿生質數與一對相差四的質數以構造質數環。

除此之外，本文的另一個重大貢獻在於提出使用一般質數構造質數環，此方法更為一般化，不會受到孿生質數猜想等限制，而且從程式驗證結果可以發現，此方法構造質數環的效果很好；如果從另一個角度思考這個定理，可以想成對於任何一個偶數，只要能向上下各找到一個適當的質數，即可以構造質數環。

未來展望

i. 延伸**定理0.1**，當 p, p+2 為孿生質數，n=p-1-2t (t>0) 的質數環存在。

ii. 延伸**定理1.1**，當 p, p+2、q, q+2 為孿生質數，n=q-p+2k (k>5) 的質數環存在。

iii. 延伸**定理2.1**，當 p, p+k 為質數，n=p-1 (k>20) 的質數環存在。

iv. 延伸**定理2.1**，當 p, p+k 為質數，n=p-1-2t (t>0) 的質數環存在。

v. 延伸**定理3.2**，如果 n=q-k 中的 k 為奇合數，是否能修改排列方式構造質數環？

vi. 找出除了窮舉、孿生質數、類孿生質數、一般質數法（**定理3**）以外的第五種方法。

vii. 改進程式演算法，驗證 10^6~10^7 以內的偶數是否皆能用這些定理表示。

參考資料

[1] MIT Mathematics PRIMES Math Problem Set https://math.mit.edu/research/highschool/primes/materials/2020/entpro20sol.pdf
[2] Wolfram MathWorld Prime Circle https://mathworld.wolfram.com/PrimeCircle.html
[3] OEIS A072618 https://oeis.org/A072618
[4] OEIS A072676 https://oeis.org/A072676
[5] OEIS A051252 https://oeis.org/A051252
[6] Macalester College Problem of the Week 1218 https://stanwagon.com/potw/current_solutions/s1218.html?fbclid=IwAR2gKP6LvKOfdYvyBHD0ciwvlBwOay55Opg-I9XvvFL-pITCzj_VqgAeT3U
[7] Wolfram Demonstrations Project Special Prime Circles https://demonstrations.wolfram.com/SpecialPrimeCircles/