

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

050404

大衍萬象之謎—正多邊形頂點交換圖形關係

學校名稱： 國立花蓮高級中學

作者： 高二 吳睿哲 高二 張育浩 高二 郭庭佑	指導老師： 林哲宇 徐念祖
---	-----------------------------

關鍵詞： 換點、正多邊形、同構圖形

摘要

本研究主要探討正多邊形的換點問題。

在平面上給定一正 n 邊形，在不重複經過任意點的情況下，一筆畫經過所有點並回到起始點形成圖 A 。透過相同做法得到圖 B ，最後將圖 A 透過有限次的換點得到圖 B ，找出換點次數最少的路徑。

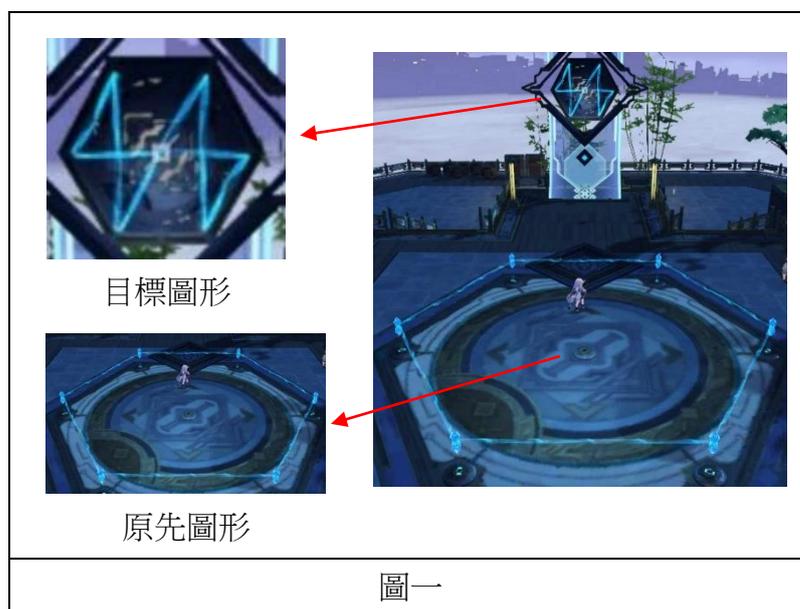
本研究中證明了所有符合規則的圖形都能透過有限次換點得到，也探討了換點在鄰接矩陣上的意義，並透過排列矩陣定義出換點運算以及圖形的旋轉及翻轉運算矩陣，接著找出了圖 A 換點到圖 B 有捷徑步數的充要條件，並解決過程中使用到的基本運算。然後得出從正 n 邊形換點路徑的唯一性以及尋找方法求出圖形的層數，並得出圖 A 到圖 B 最短路徑步數 $\leq i_{max}(n)$ ，最後求出了正 n 邊形中不同構的 n 點圖形個數。

壹、前言

一、研究動機

我們在遊玩遊戲《崩壞：星穹鐵道》時，有一名為「大衍萬象」的謎題引起了我們的興趣。謎題內容是將一個六點或八點的連線圖形，藉由點的移動將原先的圖形變換為目標圖形，如圖一。

遊玩時我們花了許多步驟才完成目標。事實上，點的移動可以看成兩點的交換，因此我們產生



「究竟由原先圖形變換為目標圖形，至少需要換點幾次？」的疑問。於是我們開始了這次的研究。並且，我們想將問題推廣至正 n 邊形，探討由原先圖形變換為目標圖形所需的最少換點次數。

二、研究目的

- (一) 證明任意兩個符合規則的圖 A 和圖 B ，圖 A 可以透過有限次換點得到圖 B 。
- (二) 找出將圖 A 透過有限次的換點得到圖 B 的最少換點次數以及路徑。
- (三) 嘗試尋求正 n 邊形中第 i 層圖形之 i 的最大值。
- (四) 求出在正 n 邊形中所有不同構的 n 點圖形個數。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Geogebra。

參、 研究過程及方法

一、 遊戲規則

平面上給定一正 n 邊形，只保留圖形的 n 個頂點並選定其中一點作為起始點，接著在每個點都不重覆經過的情況下，從起始點一筆劃經過所有點並在最後回到起始點形成圖 A ，利用相同規則得到另一圖 B ，最後將圖 A 透過有限次的換點得到圖 B ，試找出換點次數最少路徑的換點次數。

二、 名詞定義

(一) 圖中頂點的總數以正整數 n 表示，以下研究皆以此定義。

(二) 為了方便研究，將 a_1 點置於12點鐘方向，並且從 a_1 開始以逆時針定義正 n 邊形的點標籤為 a_1, a_2, \dots, a_n 點，如圖二為在此定義下的正九邊形，以下研究皆以此定義。

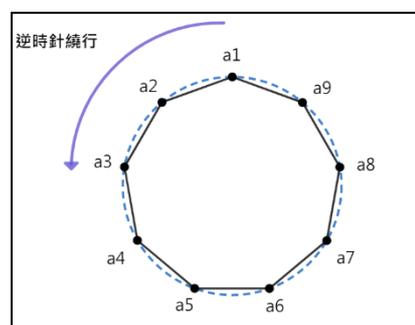


圖 (二)

(三) 圖中 a_i 點和 a_{i+1} 點正中間的點以 a_{i^*} 表示。例如： $\overline{a_1 a_2}$ 的中點以 a_{1^*} 表示。

(四) **同構圖形**：若圖 A 可以透過有限次的順、逆時針旋轉或是翻轉的方式得到圖 B ，則將圖 A 和圖 B 視為同構圖形，可記成 $A \simeq B$ 。如下圖三及圖四。

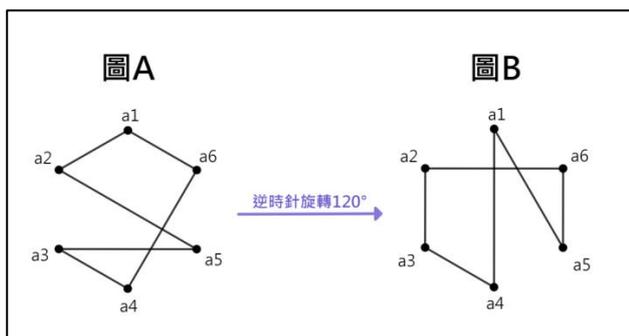


圖 (三)

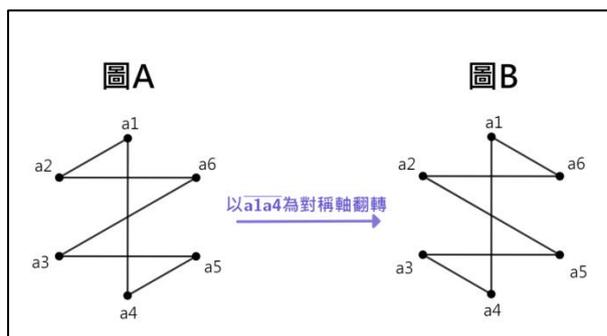
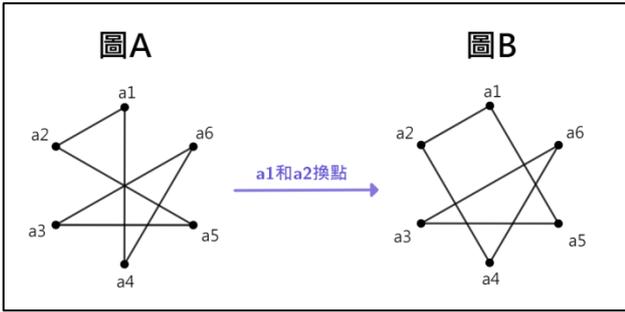
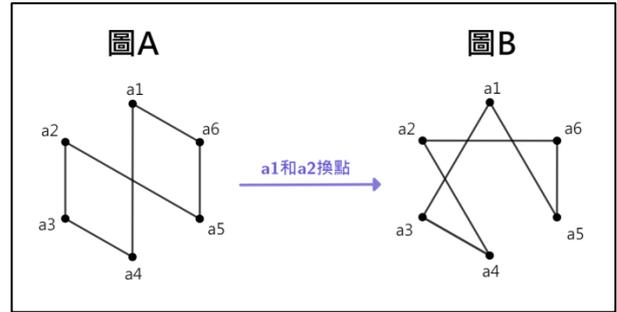


圖 (四)

(五) **換點**：若正 n 邊形的頂點為 a_1, a_2, \dots, a_n 。若將 a_i 和 a_j 兩點所連接的頂點對調，其中 $1 \leq i, j \leq n$ ，且 $i \neq j$ ，則稱為換點。如下圖，圖五及圖六是将六邊形的 a_1 及 a_2 換點。

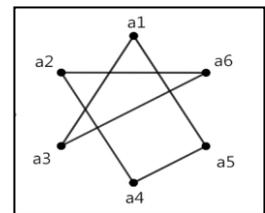


圖（五）



圖（六）

(六) **鄰接矩陣**：有一 n 個點的圖 G 和 $n \times n$ 的矩陣 M ，且圖 G 的頂點標籤分別為 a_1, a_2, \dots, a_n 。若 $(a_i, a_j) \in E(G)$ ，其中 $E(G)$ 是邊集，即 a_i, a_j 兩點有連線，定義 M 的元素 $m_{(i,j)} = 1$ ，否則 $m_{(i,j)} = 0$ ，那麼 M 就是圖 G 的鄰接矩陣。特別地，無向簡單圖的鄰接矩陣為對稱矩陣且主對角線的元素皆為 0 ，如右方矩陣就是圖七的鄰接矩陣。首先我們將 a_1 設為起始點，接著將圖形轉換為 $\langle a_1, a_3, a_6, a_2, a_4, a_5, a_1 \rangle$ 的數列形式，可以得出矩陣第一列第三及第五個元素為 1 ，以此類推。



圖（七）

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

事實上，鄰接矩陣是圖形的一種表示法，所以後面研究中運算式的圖形代號皆代表該圖形的鄰接矩陣，例如圖 A 之鄰接矩陣為矩陣 A 。

(七) **排列矩陣**：有一個 $n \times n$ 的方陣 P ，若 P 的每一行和每一列皆恰有一個元素為 1 ，其餘元素為 0 ，則稱 P 為排列矩陣。若排列矩陣 P 滿足只有兩個元素 1 不在主對角線上或 P 為單位矩陣，則稱 P 為基本排列矩陣。如下，左側的矩陣是一個 5×5 的排列矩陣，而右側是一個 5×5 的基本排列矩陣。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下為排列矩陣常用的性質：

1. 任意的排列矩陣皆可表示為數個基本排列矩陣相乘，且數個基本排列矩陣相乘也能以一個排列矩陣表示。
2. 若 P 為基本排列矩陣，則 $P = P^{-1} = P^T$ 。其中 P^{-1} 是 P 的反矩陣， P^T 是 P 的轉置矩陣。
3. 若 P 為排列矩陣，則 $P^{-1} = P^T$ 。

另外，排列矩陣也能以陣列形式表示。設 π 是一種1至 n 的排列，也就是說， π 是由集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 對於自身的一對一映射。即 $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 能以下方陣列的形式表達：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

由於 π 是一對一映射，所以對於任意 $j = 1, 2, \dots, n$ 必定可以找到唯一的 i ，使得 $\pi(i) = j$ 。

且其對應的排列矩陣 $P = \begin{bmatrix} e_{\pi(1)} \\ e_{\pi(2)} \\ \vdots \\ e_{\pi(n)} \end{bmatrix}$ ，且 $P^{-1} = P^T = [e_{\pi(1)} \quad e_{\pi(2)} \quad \cdots \quad e_{\pi(n)}]$ ，其中 $e_{\pi(i)}$ 代

表此列或行的第 $\pi(i)$ 個元素為1，其餘為0。例如：若 π 對應的陣列為 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ，

$$\begin{aligned} \text{則 } P &= \begin{bmatrix} e_{\pi(1)} \\ e_{\pi(2)} \\ e_{\pi(3)} \\ e_{\pi(4)} \\ e_{\pi(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_4 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 以及 } P^T = [e_{\pi(1)} \quad e_{\pi(2)} \quad e_{\pi(3)} \quad e_{\pi(4)} \quad e_{\pi(5)}] \\ &= [e_2 \quad e_4 \quad e_1 \quad e_3 \quad e_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(八) **第 i 層圖形及 $i_{max}(n)$** ：若有一圖 A 最少需要通過 i 次換點才可以得到正 n 邊形，則稱圖 A 為在正 n 邊形中的第 i 層圖形。其中正 n 邊形中 i 的最大值為 $i_{max}(n)$ ，即為最高層圖形的層數。

三、 研究方法

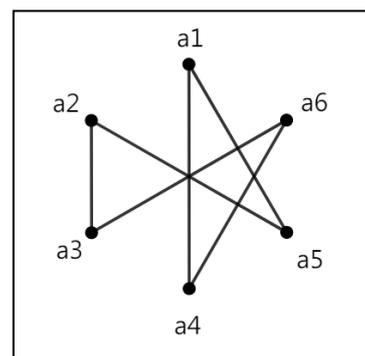
目的一：證明任意兩個符合規則的圖A和圖B，圖A可以透過有限次換點得到圖B。

我們可以將這個問題簡化為下列敘述：

首先取一個點標籤符合定義的正 n 邊形。在不考慮旋轉及翻轉為同一種圖形的狀況下，從 a_1 開始，將圖中的連線依序轉換為數列形式，則得到正 n 邊形的數列形式為 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 。接著將此數列打亂，探討是否可透過有限次地交換此數列的兩項，將圖形的數列透過交換的方式得到數列 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 。

首先我們將數列中 a_1 點換回數列的第一項，再依次將 a_i 點換回第 i 項，因此最多在 $n - 1$ 次的換點後，能將數列換回 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ ，以下圖八為正六邊形的例子：

首先我們從 a_1 開始，將圖形依序連線轉換為數列形式，可以得到此圖形的數列為 $\langle a_1, a_4, a_6, a_3, a_2, a_5, a_1 \rangle$ ，接著我們將 a_4 和 a_2 換點，得到數列 $\langle a_1, a_2, a_6, a_3, a_4, a_5, a_1 \rangle$ ，然後將 a_6 和 a_3 換點，就能得到數列 $\langle a_1, a_2, a_3, a_6, a_4, a_5, a_1 \rangle$ ，再來將 a_6 和 a_4 換點，得到數列 $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_5, a_1 \rangle$ ，最後再將 a_6 和 a_5 換點，就能夠得到數列 $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1 \rangle$ 。



圖（八）

所以只要將圖A透過換點得到正 n 邊形，再將正 n 邊形透過換點得到圖B。因此對任意的圖A一定存在一條路徑是將圖A透過換點得到正 n 邊形，再將正 n 邊形透過換點得到圖B。

雖然我們證明了所有圖形一定可以通過有限次的換點得到，不過這種方法所需的步數不一定是最低的，並且在考慮旋轉及翻轉為同一種圖形的狀況下，所需的最少換點次數有可能會更少，因此我們想到透過將圖形表示成鄰接矩陣，再另尋他法。

目的二：找出將圖A透過有限次的換點得到圖B的最少換點次數以及路徑。

我們透過將兩個可由 a_1 、 a_2 換點得到的圖形轉換成鄰接矩陣，發現兩個鄰接矩陣就是同時將矩陣的第一、二列和第一、二行互換，於是我們猜測並想證明交換圖形的 a_i 、 a_j 點，圖

形的鄰接矩陣是同時將第 i 、 j 列和第 i 、 j 行互換。如下方矩陣就是圖九兩個圖形鄰接矩陣的變化，可以看到圖A的鄰接矩陣同時將第3、6列和第3、6行互換後，即可得到圖B的鄰接矩陣。

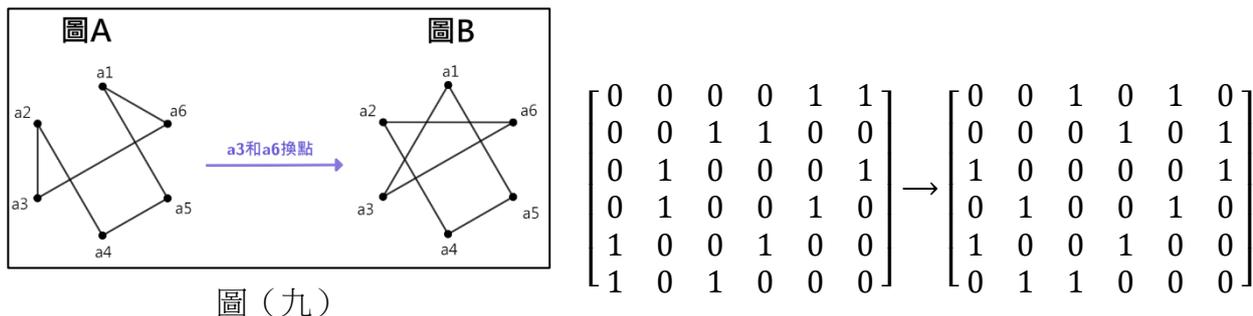


圖 (九)

Lemma 2-1：交換符合規則圖形的 a_i 、 a_j 點一次，則圖形鄰接矩陣的變化是同時將矩陣的第 i 、 j 列和第 i 、 j 行互換。

證明：

圖 G 為符合遊戲規則的圖形，且圖 G 的鄰接矩陣為 M ， $m_{(\alpha,\beta)}$ 為矩陣 M 的元素， $1 \leq \alpha, \beta \leq n$

令 a_i 、 a_j 、 x_1 、 x_2 、 x_3 、 $x_4 \in V(G)$ 且 (a_i, x_1) 、 (a_i, x_2) 、 (a_j, x_3) 、 $(a_j, x_4) \in E(G)$ ， $a_i \neq a_j$

其中 $V(G)$ 是點集、 $E(G)$ 是邊集

換點前 $m_{(a_i, x_1)} = m_{(a_i, x_2)} = m_{(a_j, x_3)} = m_{(a_j, x_4)} = 1$

則 a_i 、 a_j 經由換點一次之後可得 $m_{(a_i, x_3)} = m_{(a_i, x_4)} = m_{(a_j, x_1)} = m_{(a_j, x_2)} = 1$

即為 M 中的 a_i 、 a_j 兩列互換。

同理換點前 $m_{(x_1, a_i)} = m_{(x_2, a_i)} = m_{(x_3, a_j)} = m_{(x_4, a_j)} = 1$

則 a_i 、 a_j 經由換點一次之後可得 $m_{(x_3, a_i)} = m_{(x_4, a_i)} = m_{(x_1, a_j)} = m_{(x_2, a_j)} = 1$

即為 M 中的 a_i 、 a_j 兩行互換

所以 a_i 、 a_j 經由一次換點在鄰接矩陣上的意義等同於同時將 M 的第 i 、 j 列和第 i 、 j 行互換。

在證明換點等同於將鄰接矩陣的行列同時交換之後，我們就想到了排列矩陣可以達到行列互換效果，而且換點一次就可以用到基本排列矩陣，於是我們可以寫出下列的式子：

$$P_{(x,y)} A (P_{(x,y)})^T = P_{(x,y)} A P_{(x,y)} = B$$

其中 $P_{(x,y)}$ 是將 A 的第 x 、 y 列（行）交換的基本排列矩陣， A 、 B 是兩個圖形的鄰接矩陣。

如下方算式就是將圖形 a_1 、 a_2 換點得到新的圖形 ($P_{(1,2)} A (P_{(1,2)})^T = P_{(1,2)} A P_{(1,2)} = B$)。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

接著我們在觀察正六邊形的換點之後，我們發現若已知圖A可以通過換點一次得到圖B，圖B可以通過換點一次得到圖C。則有時候圖A可以通過換點一次後，利用旋轉或翻轉得到圖C。如圖十就是其中一個例子。所以我們想要知道甚麼情況之下圖A可以通過換點一次得到圖C。

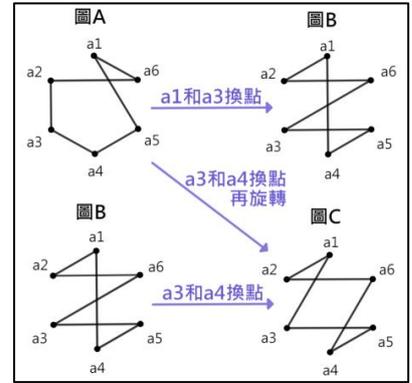


圖 (十)

而要解決這個問題又會延伸出多次換點以及旋轉、翻轉的問題，所以我們需要先解決多次換點的意義以及旋轉、翻轉在鄰接矩陣上的意義。

Lemma 2-2: 若圖 A_1 可以通過換點一次得到圖 A_2 ，且圖 A_2 可以通過換點一次得到圖 A_3 ，以此類推，圖 A_k 可以通過換點一次得到圖 A_{k+1} ，則 $\exists P'$ 為排列矩陣，使得 $A_{k+1} = P' A_1 (P')^T$ 。

證明：

首先，因為圖 A_1 可以透過基本排列矩陣 P_1 換點一次得到圖 A_2 ，圖 A_2 可以透過基本排列矩陣 P_2 換點一次得到圖 A_3 ，以此類推，圖 A_k 可以通過換點一次得到圖 A_{k+1} ，即 $P_1 A_1 P_1 = A_2$ 、 $P_2 A_2 P_2 = A_3$ 、 \dots 、 $P_k A_k P_k = A_{k+1}$ ，其中 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_{k+1} 是圖形的鄰接矩陣。

因此可以得出： $(P_k P_{k-1} \dots P_1) A_1 (P_1 P_2 \dots P_k) = A_{k+1}$

透過基本排列矩陣的性質可得出： $(P_1 P_2 \dots P_k) = (P_1^T P_2^T \dots P_k^T) = (P_k P_{k-1} \dots P_1)^T$

所以 $A_{k+1} = (P_k P_{k-1} \dots P_1) A_1 (P_k P_{k-1} \dots P_1)^T$ 。而因為多個基本排列矩陣相乘也是排列矩陣，

所以令 $(P_k P_{k-1} \dots P_1) = P'$ ，其中 P' 為排列矩陣，則可以得出： $A_{k+1} = P' A_1 (P')^T$

在解決多次換點的問題之後，我們還有旋轉及翻轉的問題需要解決，而且在我們的定義中，若圖形A可以透過旋轉或翻轉得到圖B，則將圖A和圖B定義為同構圖形，於是我們想去觀察圖形旋轉或翻轉前後的鄰接矩陣的關係。

我們定義若圖 B 逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖 A ，則 $B = (A)_{Ri}$ ；若圖 B 能透過翻轉後逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖 A ，則 $B = (A)_{Fi}$ ，為了降低複雜度，我們只取過 a_1 的翻轉軸。此外，我們還想要找出圖形旋轉及翻轉的運算矩陣，因此我們定義若圖 A 及 B 為兩個符合遊戲規則的圖形，且 $B = (A)_{Ri}$ ，則 $R^i A (R^i)^T = B$ ，其中 R 是圖形旋轉的運算矩陣；若 $B = (A)_{Fi}$ ，則 $R^i F A (R^i F)^T = B$ ，其中 F 是圖形翻轉的運算矩陣。

Lemma 2-3: 若將圖 A 逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈可得到圖 B ，則 $R^i A (R^i)^T = B$ ，其中 R 為旋轉運算矩陣。

證明：

取一個符合遊戲規則的圖 A ，接著將圖 A 逆時針旋轉 $\frac{1}{n}$ 圈，則我們可以看成將這些點依序換點，依序換點是指將 a_1 、 a_n 換點， a_n 、 a_{n-1} 換點，...， a_3 、 a_2 換點，總共進行 $(n-1)$ 次換點。而從前面的多次換點的研究中，我們知道可以將多次換點寫成一種排列矩陣，而依序換點是多次換點的其中一種形式，所以旋轉的運算矩陣也可以寫成一種排列矩陣。

我們先建構逆時針旋轉 $\frac{1}{n}$ 圈的旋轉運算矩陣 R ，而逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈的運算矩陣，即是乘上 i 次旋轉運算矩陣 R ，因此我們只要求出旋轉運算矩陣 R 即可。

若 $B = (A)_{Ri}$ ，依序換點可以寫成 $(P_{(1,n)} P_{(n,n-1)} \cdots P_{(2,3)}) A (P_{(1,n)} P_{(n,n-1)} \cdots P_{(2,3)})^T = B$ 。因為 $P_{(1,n)}$ 、 $P_{(n,n-1)}$ 、...、 $P_{(2,3)}$ 都是基本排列矩陣，所以 $(P_{(1,n)} P_{(n,n-1)} \cdots P_{(2,3)})$ 會是排列矩陣，因此令 $(P_{(1,n)} P_{(n,n-1)} \cdots P_{(2,3)}) = R$ ，透過計算可以得出：

$$R = \begin{bmatrix} e_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}, \text{ 其中 } R \text{ 是旋轉運算矩陣。}$$

Lemma 2-4: 若圖 A 可以通過翻轉後逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖 B ，則 $R^i F A (R^i F)^T = B$ ，其中 F 為翻轉運算矩陣。

證明：

當 n 為奇數時，翻轉圖形可視為 a_2 和 a_n 換點， a_3 和 a_{n-1} 換點，以此類推， $a_{(\frac{n+1}{2})}$ 和 $a_{(\frac{n+3}{2})}$ 換點，如圖十一。當 n 為偶數時，翻轉圖形可視為 a_2 和 a_n 換點， a_3 和 a_{n-1} 換點，以此類推， $a_{(\frac{n}{2})}$ 和 $a_{(\frac{n}{2}+2)}$ 換點，如圖十二。

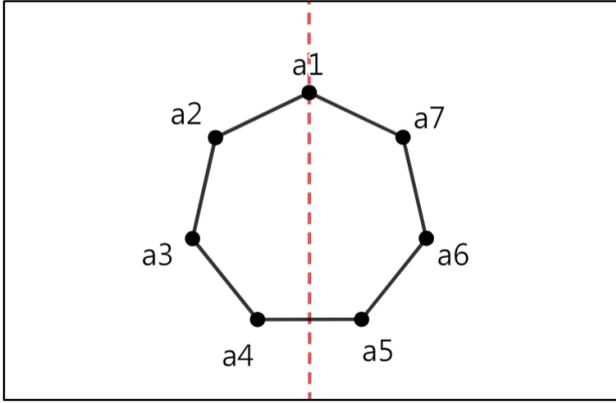


圖 (十一)

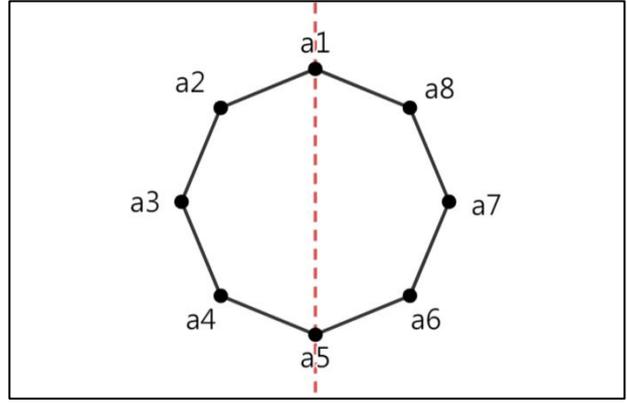


圖 (十二)

當 n 為奇數，且 $B = (A)_{Fi}$ ，以過 a_1 點的翻轉軸翻轉可以寫成：

$$\left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)} \right) A \left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)} \right)^T = B$$

因為 $P_{(2,n)}$ 、 $P_{(3,n-1)}$ 、 \cdots 、 $P_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)}$ 都是基本排列矩陣，所以 $\left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)} \right)$ 會是排列矩陣，令 $\left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)} \right) = F_{2k+1}$ ， $k \in \mathbb{N}$

當 n 為偶數，且 $B = (A)_{Fi}$ ，以過 a_1 點的翻轉軸翻轉可以寫成：

$$\left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2\right)} \right) A \left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2\right)} \right)^T = B$$

因為 $P_{(2,n)}$ 、 $P_{(3,n-1)}$ 、 \cdots 、 $P_{\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2\right)}$ 都是基本排列矩陣，所以 $\left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2\right)} \right)$ 會是排列矩陣，令 $\left(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2\right)} \right) = F_{2k}$ ， $k \in \mathbb{N}$

通過計算後可以得到：

$$F_{2k+1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{2k+1} \\ e_{2k} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix}_{(2k+1) \times (2k+1)} \cdot F_{2k} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{2k} \\ e_{2k-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix}_{(2k) \times (2k)} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

解決**Lemma 2-2~Lemma 2-4**的問題後，我們嘗試解決圖 A_1 是否可通過一次換點得到圖 A_3 。我們發現若圖 A_1 可以通過換點一次得到圖 A_3 ，那麼存在基本排列矩陣 P' ，使得 $P'A_1(P')^T = A_3$ 。即 $P_2(P_1A_1P_1)P_2 = A_3 = P'A_1P'$ 。如果將 P' 乘入算式中，可以得出： $(P'P_2P_1)A_1(P_1P_2P') = (P'P_2P_1)A_1(P'P_2P_1)^T = (P'P')A_1(P'P') = A_1$ 。所以 $(P'P_2P_1)$ 可能是旋轉、翻轉運算矩陣或單位矩陣。發現這個結果後，我們想要推到多次換點並證明以下命題。

Lemma 2-5：已知 $P_1A_1P_1 = A_2, P_2A_2P_2 = A_3, \dots, P_xA_xP_x = \psi$ ，其中 P_1, P_2, \dots, P_x 是基本排列矩陣。若圖 A_1 可以通過 k 次換點得到圖 ψ ，若且唯若存在 k 個基本排列矩陣 P'_1, P'_2, \dots, P'_k 及 $i \in \mathbb{N}$ ，使得： $(P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)(P_xP_{x-1} \dots P_1) = R^i$ or R^iF or I 。

證明：

\Rightarrow

$$\text{令 } P = P_xP_{x-1} \dots P_1, \text{ 則 } P_xP_{x-1} \dots P_1A_1P_1P_2 \dots P_x = \psi = PA_1P^T$$

$\because A_1$ 可透過 k 次換點得到 ψ

$$\therefore \exists k \text{ 個基本排列矩陣 } P'_1, P'_2, \dots, P'_k \text{ 使得 } (P'_1P'_2 \dots P'_k)(A_1)_{Ri}(P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)$$

$$\text{or } (P'_1P'_2 \dots P'_k)(A_1)_{Fi}(P'_kP'_{k-1} \dots P'_1) \text{ or } (P'_1P'_2 \dots P'_k)A_1(P'_kP'_{k-1} \dots P'_1) = \psi$$

$$\text{我們令 } P' = (P'_1P'_2 \dots P'_k) \Rightarrow P'(A_1)_{Ri}(P')^T \text{ or } P'(A_1)_{Fi}(P')^T \text{ or } P'A_1(P')^T = \psi = PA_1P^T$$

$$\Rightarrow (A_1)_{Ri} \text{ or } (A_1)_{Fi} \text{ or } A_1 = (P')^{-1}PA_1P^T P' = (P')^{-1}PA_1P^T[(P')^T]^T$$

$$= (P')^{-1}PA_1[(P')^T P]^T = (P'_1P'_2 \dots P'_k)^{-1}PA_1[(P'_1P'_2 \dots P'_k)^T P]^T$$

$$= (P'_k)^{-1}(P'_{k-1})^{-1} \dots (P'_1)^{-1}PA_1[(P'_k)^T(P'_{k-1})^T \dots (P'_1)^T P]^T$$

$$\therefore P'_m = (P'_m)^{-1} = (P'_m)^T, m = 1, 2, \dots, k$$

$$\therefore (A_1)_{Ri} \text{ or } (A_1)_{Fi} \text{ or } A_1 = (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1P)A_1(P'_kP'_{k-1} \dots P'_1P)^T$$

$$\therefore (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1P) = (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)(P_xP_{x-1} \dots P_1) \text{ 會是 } R^i \text{ or } R^iF \text{ or } I$$

\Leftrightarrow

$$\therefore (P_xP_{x-1} \dots P_1)A_1(P_1P_2 \dots P_x) = \psi \quad \therefore (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)(P_xP_{x-1} \dots P_1)A_1(P_1P_2 \dots P_x)(P'_1P'_2 \dots P'_k)$$

$$= (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)\psi(P'_1P'_2 \dots P'_k) = (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)(P_xP_{x-1} \dots P_1)A_1[(P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)(P_xP_{x-1} \dots P_1)]^T$$

$$= R^i A_1 (R^i)^T \text{ or } R^i F A_1 (R^i F)^T \text{ or } A_1 \Rightarrow (P'_kP'_{k-1} \dots P'_1)\psi(P'_1P'_2 \dots P'_k) = (A_1)_{Ri} \text{ or } (A_1)_{Fi} \text{ or } A_1$$

$$\Rightarrow \psi = (P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1)^{-1} (A_1)_{Ri} (P'_1 P'_2 \cdots P'_k)^{-1}$$

$$\text{or } (P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1)^{-1} (A_1)_{Fi} (P'_1 P'_2 \cdots P'_k)^{-1} \text{ or } (P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1)^{-1} A_1 (P'_1 P'_2 \cdots P'_k)^{-1}$$

$$\Rightarrow \psi = (P'_1)^{-1} (P'_2)^{-1} \cdots (P'_k)^{-1} (A_1)_{Ri} (P'_k)^{-1} (P'_{k-1})^{-1} \cdots (P'_1)^{-1}$$

$$\text{or } (P'_1)^{-1} (P'_2)^{-1} \cdots (P'_k)^{-1} (A_1)_{Fi} (P'_k)^{-1} (P'_{k-1})^{-1} \cdots (P'_1)^{-1}$$

$$\text{or } (P'_1)^{-1} (P'_2)^{-1} \cdots (P'_k)^{-1} A_1 (P'_k)^{-1} (P'_{k-1})^{-1} \cdots (P'_1)^{-1}$$

$$\because P'_m = (P'_m)^{-1} = (P'_m)^T, m = 1, 2, \dots, k \Rightarrow \psi = (P'_1 P'_2 \cdots P'_k) (A_1)_{Ri} (P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1) \text{ or}$$

$$(P'_1 P'_2 \cdots P'_k) (A_1)_{Fi} (P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1) \text{ or } (P'_1 P'_2 \cdots P'_k) A_1 (P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1)$$

\therefore 圖形 ψ 可透過圖形 A_1 換點 k 次得到

通過**Lemma 2-5**可知，我們可以透過添加數個特定的基本排列矩陣，使得原式中的排列矩陣轉換成旋轉或翻轉運算矩陣。例如在圖十三中，我們可以列出式子：

$$P_{(3,6)} P_{(1,2)} A P_{(1,2)} P_{(3,6)} = C$$

$\Rightarrow P_{(4,5)} P_{(3,6)} P_{(1,2)} A P_{(1,2)} P_{(3,6)} P_{(4,5)} = P_{(4,5)} C P_{(4,5)}$ 後，發現

$P_{(4,5)} P_{(3,6)} P_{(1,2)} = RF$ ，經過化簡後得到 $P_{(4,5)} RF A RF P_{(4,5)} = C$ 。

需要注意的是，我們限制路徑中不能出現同構的圖形。為了使

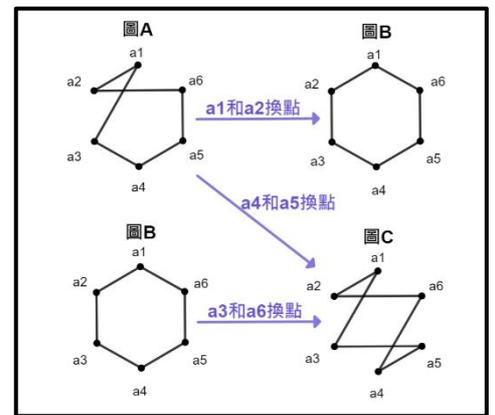
用這種化簡方式，我們將六邊形所有的 $R^i F$ 展開得到： $F = P_{(2,6)} P_{(3,5)}$ 、 $RF = P_{(1,2)} P_{(4,5)} P_{(3,6)}$ 、

$R^2 F = P_{(1,3)} P_{(4,6)}$ 、 $R^3 F = P_{(1,4)} P_{(2,3)} P_{(5,6)}$ 、 $R^4 F = P_{(1,5)} P_{(2,4)}$ 、 $R^5 F = P_{(1,6)} P_{(2,5)} P_{(3,4)}$ ，我們

發現這些構成 $R^i F$ 的 6×6 基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都不重複，而且 (x,y) 的十五種組合都恰出現一次，

因此我們也要證明這些基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都不會重複，也延伸出了 $P_{(a,b)} P_{(c,d)} = P_{(c,d)} P_{(a,b)}$

的基本運算需要證明，讓這些基本排列矩陣可以對調。



圖（十三）

Lemma 2-6：將 F 、 RF 、 \dots 、 $R^{n-1}F$ 拆分為個數最少的基本排列矩陣相乘後，所有可能的基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都恰只出現一次，且所有基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都能夠在 F 、 RF 、 \dots 、 $R^{n-1}F$ 拆解成個數最少的基本排列矩陣相乘中找到。

證明：

令 L 為通過圖形 a_1 點的翻轉軸， L' 為 L 逆時針旋轉 $\frac{i}{2n}$ 圈所形成的翻轉軸。當 i 為奇數時， L' 為通過圖形 $a_{\frac{i+1}{2}}$ 點的翻轉軸；當 i 為偶數時， L' 為通過圖形 $a_{\frac{i+2}{2}}$ 點的翻轉軸。

∴圖形的翻轉軸總共有 n 條，且相鄰的翻轉軸夾角都相等，又當 $i = n$ 時， $L' = L$

∴ $R^i F$ 等同於將原圖形透過 L' 翻轉的運算矩陣

$$\text{令 } \begin{cases} x_m \equiv 1 + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - m \pmod{n} \\ y_m \equiv 1 + \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + m \pmod{n} \end{cases}, m = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, 1 \leq x_m, y_m \leq n$$

$$\Rightarrow R^i F = \prod_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} P_{(x_k, y_k)}, i = 0, 1, \dots, (n-1), \text{ 而其中的 } P_{(x_k, y_k)} \text{ 皆不相同}$$

並且當 $x_k = y_k$ ，則 $P_{(x_k, y_k)} = I$

∴當 n 為奇數時，一組 $R^i F$ 可以寫成 $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ 個基本排列矩陣相乘

∴此時所有 $R^i F$ 構成的基本排列矩陣共有 $n \times \left(\frac{n-1}{2}\right) = C_2^n$ 個

∴當 n 為偶數時，共有 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 組 $R^i F$ ，各組 $R^i F$ 都可以寫成 $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ 或 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 個基本排列矩陣相乘。

當 L' 過兩頂點時由於有一組頂點不需換點，故各組翻轉運算矩陣可分解成 $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ 個基本排列

矩陣相乘；當 L' 過兩中點時，翻轉運算矩陣可分解成 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 個基本排列矩陣相乘

∴此時所有 $R^i F$ 構成的基本排列矩陣共有 $\left(\frac{n}{2} - 1\right) \times \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2n^2 - 2n}{4} = C_2^n$ 個

結合 n 為奇、偶數的結論，可知這些基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 皆可以在 $F, RF, \dots, R^{n-1}F$ 拆分成個數最少的基本排列矩陣相乘中找到，而且每一種都恰出現一次。

Lemma 2-7 : $P_{(a,b)}P_{(c,d)} = P_{(c,d)}P_{(a,b)}$ ，其中 a, b, c, d 四者相異。

證明：

令 $P_{(a,b)}$ 的元素為 $p_{\alpha\beta}$ 、 $P_{(c,d)}$ 的元素為 $q_{\alpha\beta}$ ，其中 $1 \leq \alpha, \beta \leq n$

則 $p_{ab} = p_{ba} = q_{cd} = q_{dc} = 1$

而 $P_{(a,b)}P_{(c,d)}$ 等同於將 $P_{(a,b)}$ 的 c, d 行互換

所以 $p_{ba} = p_{ab} = p_{dc} = p_{cd} = 1$ ， $p_{aa} = p_{bb} = p_{cc} = p_{dd} = 0$

而 $P_{(c,d)}P_{(a,b)}$ 等同於將 $P_{(a,b)}$ 的 c 、 d 列互換

所以 $p_{ab} = p_{ba} = p_{cd} = p_{dc} = 1$ ， $p_{aa} = p_{bb} = p_{cc} = p_{dd} = 0$

又 $P_{(a,b)}P_{(c,d)}$ 、 $P_{(c,d)}P_{(a,b)}$ 中的其餘元素皆相同，故 $P_{(a,b)}P_{(c,d)} = P_{(c,d)}P_{(a,b)}$

然而，在尋找例子時，我們發現有兩個在化簡時需要使用的運算（**Lemma 2-8**~**Lemma 2-10**）需要另外證明，證明完這些基本運算後，我們才可以進行化簡運算。

Lemma 2-8: $R^i P_{(x,y)} = P_{(x',y')} R^i$ 。其中 $x < y$ ，且 $1 \leq x', y' \leq n$ ， $x' \equiv x + i \pmod{n}$ ， $y' \equiv y + i \pmod{n}$ 。

證明：

$$\text{設 } R^i \text{ 中的元素為 } r_{(\alpha,\beta)} \text{，並且 } \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad \therefore R^i = \begin{bmatrix} e_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}^i = \begin{bmatrix} e_{n-i+1} \\ e_{n-i+2} \\ \vdots \\ e_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-i} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$\therefore r_{(1,n-i+1)} = r_{(2,n-i+2)} = \dots = r_{(i,n)} = r_{(i+1,1)} = r_{(i+2,2)} = \dots = r_{(n,n-i)} = 1$ ，其餘元素為 0

Case1: $1 \leq x, y \leq (n - i)$

$R^i P_{(x,y)}$ 等同於將 R^i 的 x 、 y 行互換，因此得到換點後：

$$r_{(i+x,x)} = r_{(i+y,y)} = 0, r_{(i+x,y)} = r_{(i+y,x)} = 1$$

$P_{(x',y')} R^i$ 等同於將 R^i 的 $(x + i)$ 、 $(y + i)$ 列互換，因此得到換點後：

$$r_{(i+x,x)} = r_{(i+y,y)} = 0, r_{(i+x,y)} = r_{(i+y,x)} = 1$$

又 $R^i P_{(x,y)}$ 、 $P_{(x',y')} R^i$ 中的其餘元素相同，故 $R^i P_{(x,y)} = P_{(x',y')} R^i$

Case2: $1 \leq x \leq (n - i)$ 、 $(n - i + 1) \leq y \leq n$

$R^i P_{(x,y)}$ 等同於將 R^i 的 x 、 y 行互換，因此得到換點後：

$$r_{(i+x,x)} = r_{(i+y-n,y)} = 0, r_{(i+x,y)} = r_{(i+y-n,x)} = 1$$

$P_{(x',y')}R^i$ 等同於將 R^i 的 $(x+i)$ 、 $(y+i-n)$ 列互換，因此得到換點後：

$$r_{(i+x,x)} = r_{(i+y-n,y)} = 0, \quad r_{(i+x,y)} = r_{(i+y-n,x)} = 1$$

又 $R^i P_{(x,y)}$ 、 $P_{(x',y')}R^i$ 中的其餘元素相同，故 $R^i P_{(x,y)} = P_{(x',y')}R^i$

Case3 : $(n-i+1) \leq x, y \leq n$

$R^i P_{(x,y)}$ 等同於將 R^i 的 x 、 y 行互換，因此得到換點後：

$$r_{(i+x-n,x)} = r_{(i+y-n,y)} = 0, \quad r_{(i+x-n,y)} = r_{(i+y-n,x)} = 1$$

$P_{(x',y')}R^i$ 等同於將 R^i 的 $(x+i-n)$ 、 $(y+i-n)$ 列互換，因此得到換點後：

$$r_{(i+x-n,x)} = r_{(i+y-n,y)} = 0, \quad r_{(i+x-n,y)} = r_{(i+y-n,x)} = 1$$

又 $R^i P_{(x,y)}$ 、 $P_{(x',y')}R^i$ 中的其餘元素相同，故 $R^i P_{(x,y)} = P_{(x',y')}R^i$

結合這三個 Case 可得 $R^i P_{(x,y)} = P_{(x',y')}R^i$

Lemma 2-9 : $F(R^i)^T = R^i F = (R^i F)^T$ 。

證明：

$$R = \begin{bmatrix} e_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}, \quad R^T = [e_n \quad e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_{n-1}], \quad F = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix} = F^T = [e_1 \quad e_n \quad e_{n-1} \quad \cdots \quad e_2]$$

$$\text{當 } i = 1 \text{ 時, } \therefore FR^T = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix} [e_n \quad e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_{n-1}] = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } \therefore RF = \begin{bmatrix} e_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix} [e_1 \quad e_n \quad e_{n-1} \quad \cdots \quad e_2] = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_3 \end{bmatrix}$$

$\therefore FR^T = RF = (RF)^T$ ，原式成立。設 $i = k$ 時成立，即 $F(R^k)^T = R^k F$

則 $i = k + 1$ 時， $F(R^{k+1})^T = F(R^k)^T R^T = R^k F(R)^T = R^k RF = R^{k+1} F$

由數學歸納法得證。

Lemma 2-10 : $FP_{(x,y)} = P_{(x',y')}F$ 。其中 $x < y$, 且 $1 \leq x', y' \leq n$, $x' \equiv n - x + 2 \pmod{n}$
, $y' \equiv n - y + 2 \pmod{n}$ 。

證明 :

設 F 中的元素為 $f_{(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$

$$\therefore F = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$\therefore f_{(1,1)} = f_{(2,n)} = f_{(3,n-1)} = \dots = f_{(n,2)} = 1$, 其餘元素為 0

Case1 : $x = 1$

$FP_{(x,y)}$ 等同於將 F 的 1、 y 行互換 , 因此得到換點後 :

$$f_{(1,1)} = f_{(n-y+2,y)} = 0 , f_{(n-y+2,1)} = f_{(1,y)} = 1$$

$P_{(x',y')}F$ 等同於將 F 的 1、 $(n - y + 2)$ 列互換 , 因此得到換點後 :

$$f_{(1,1)} = f_{(n-y+2,y)} = 0 , f_{(n-y+2,1)} = f_{(1,y)} = 1$$

又 $FP_{(x,y)}$ 、 $P_{(x',y')}F$ 中的其餘元素相同 , 故 $FP_{(x,y)} = P_{(x',y')}F$

Case2 : $x \neq 1$

$FP_{(x,y)}$ 等同於將 F 的 x 、 y 行互換 , 因此得到換點後 :

$$f_{(n-x+2,x)} = f_{(n-y+2,y)} = 0 , f_{(n-y+2,x)} = f_{(n-x+2,y)} = 1$$

$P_{(x',y')}F$ 等同於將 F 的 $(n - x + 2)$ 、 $(n - y + 2)$ 列互換 , 因此得到換點後 :

$$f_{(n-x+2,x)} = f_{(n-y+2,y)} = 0 , f_{(n-y+2,x)} = f_{(n-x+2,y)} = 1$$

又 $FP_{(x,y)}$ 、 $P_{(x',y')}F$ 中的其餘元素相同 , 故 $FP_{(x,y)} = P_{(x',y')}F$

結合這兩個 Case 可得 $FP_{(x,y)} = P_{(x',y')}F$

所以我們透過 **Lemma 2-6** 得到有一套化簡的流程 , 而 **Lemma 2-7~Lemma 2-10** 則為過程中會使用到的基本運算 , 因此我們就可以使用添加對應排列矩陣的方式化簡路徑。

目的三：嘗試尋找符合規則的 n 點圖形之最高層圖形。

我們透過觀察及實際換點的方式發現六邊形在圖 A 換到圖 B 的過程中，最少的換點次數都 ≤ 3 ，而我們可利用窮舉法驗證六邊形的最高層圖形為第三層圖形，於是我們想要透過研究最高層圖形的方式，探討最少的換點次數。然而在研究的過程中，若將 P 、 PR^i 、 PR^iF 視為等價之排列矩陣，我們發現先證明正 n 邊形在換到的 i 層圖形時，由最短路徑所構成的排列矩陣是唯一的。為了證明排列矩陣 P 是唯一的，設圖形 N 為正 n 邊形，我們過程中還需要先證明若 $PNP^T \simeq N$ ，則 P 要是單位矩陣或是旋轉、翻轉組合之運算矩陣。

Lemma 3-1：設圖 N 為正 n 邊形，若 $PNP^T \simeq N$ ，則 $P = I$ or R^i or R^iF 。

證明：

已知圖形 N 的數列形式為 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$

將所有圖形 N 可能的數列形式展開之後可以得到以下 $2n$ 個不相同的數列：

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 、 $\langle a_2, a_3, \dots, a_n, a_1, a_2 \rangle$ 、 \dots 、 $\langle a_n, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ 、 $\langle a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 \rangle$ 、
 $\langle a_2, a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2 \rangle$ 、 \dots 、 $\langle a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_n \rangle$

令這 $2n$ 個數列形成的集合為 S_1 ，即 $S_1 = \{ \text{圖形}N\text{所有不同的數列形式} \}$

設 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 做 I 、 R^1 、 \dots 、 R^{n-1} 以及 F 、 R^1F 、 \dots 、 $R^{n-1}F$ 排列後，收集所有數列形成的集合為 S_2 ，即 $S_2 = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle \text{做} I、R^1、\dots、R^{n-1} \text{以及} F、R^1F、\dots、R^{n-1}F \text{排列} \}$

$\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 做 I 、 R^1 、 \dots 、 R^{n-1} 的排列後，由於首項不同，所以數列兩兩互不相同

同理 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 做 F 、 R^1F 、 \dots 、 $R^{n-1}F$ 排列後，數列兩兩互不相同

同理 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 做 R^i 、 R^jF 排列後，兩數列第一項不相同，其中 $i \neq j$ 、 $0 \leq i, j \leq n-1$

而 $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle$ 做 R^i 、 R^iF 排列後，由於當 $n \geq 3$ 時，兩數列第二項就不相同

結合以上可得 S_2 中的元素兩兩互不相同，元素個數也是 $2n$ 個

又 S_2 中所有數列的圖形與 N 相同，並且 S_1 、 S_2 的元素個數相同

故 S_2 與 S_1 中的元素是一對一對應，由此可知 $N \simeq N$ or $R^iN(R^i)^T$ or $R^iFN(R^iF)^T$

又 $\because PNP^T \simeq N \quad \therefore P = I$ or R^i or R^iF

Lemma 3-2：設圖 N 為正 n 邊形、圖 A 為符合遊戲規則之 n 點圖形，若 P 、 PR^i 、 PR^iF 視為等價排列矩陣，且 $\exists P_1 \neq P_2$ ，使得 $P_1NP_1^T \simeq A$ 、 $P_2NP_2^T \simeq A$ ，則 P_2 、 P_1 為等價排列矩陣。

證明：

假設 $\exists P_1 \neq P_2$ ，使得 $P_1N(P_1)^T \simeq A$ 、 $P_2N(P_2)^T \simeq A \Rightarrow (P_1)^{-1}P_2N[(P_1)^{-1}P_2]^T \simeq N$

透過 **Lemma 3-1** 可知： $(P_1)^{-1}P_2 = I$ or R^i or R^iF ，又 $P_1 \neq P_2$

$\therefore P_2 = P_1R^i$ or P_1R^iF 。故得證 P_2 、 P_1 為等價排列矩陣

在研究過程中，我們發現將圖形 A 從正 n 邊形的換點路徑 $PNP^T \simeq A$ 以及圖形 A 的數列形式寫出來之後，觀察排列矩陣 P 和數列形式之間的關係，我們便可以將 P 寫出來，如下方這個例子：已知圖 A 為五點圖形，並且數列形式為 $\langle a_1, a_3, a_4, a_2, a_5, a_1 \rangle$ ，我們可以得出：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

接著觀察矩陣 P 的主對角線可以發現 a_1 、 a_5 位置是不改變的，而 a_3 對到原本 a_2 的位置， a_2 對到原本 a_4 的位置， a_4 對到原本 a_3 的位置，所以這是一個 $(2,4,3)$ 循環，推得 $P = P_{(2,3)}P_{(2,4)}$ 。不過這個路徑是 $PNP^T = A$ ，所以除了 $PNP^T = A$ 之外，我們還要考量旋轉以及翻轉的問題，也就是 $PNP^T \simeq A$ 。若 $RPN(RP)^T = A$ ，則我們可以得到：

$$RP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以發現 RP 就是將 P 的第 x 列變成第 $x + 1$ 列，其中 $1 \leq x < n$ ，而第 n 列則變成第1列。同理，若 $1 \leq (x + i) \leq n$ ， R^iP 就是將 P 的第 x 列變成第 $(x + i)$ 列；若 $(x + i) > n$ ， R^iP 就是將 P 的第 x 列變成第 $(x + i - n)$ 列。

所以考量旋轉就要觀察排列矩陣 P 所有斜率為 -1 的斜線，例如同樣的例子中，如果要觀察 R^2P ，我們令 $p_{(\alpha,\beta)}$ 是矩陣 P 的元素，就要觀察包含元素 $p_{(3,1)}$ 、 $p_{(4,2)}$ 、 $p_{(5,3)}$ 的斜線以及包含元素 $p_{(1,4)}$ 、 $p_{(2,5)}$ 的斜線。若 $FPN(FP)^T = A$ ，則我們可以得到：

$$FP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以要觀察 FP 就要觀察排列矩陣 P 包含元素 $p_{(1,5)}$ 、 $p_{(2,4)}$ 、 $p_{(3,3)}$ 、 $p_{(4,2)}$ 、 $p_{(5,1)}$ 的斜線；而再加上旋轉可以得知要觀察排列矩陣 P 所有斜率為1的斜線。

因此要使用這種方法，我們就需要觀察排列矩陣 P 所有包含斜率為 ± 1 的斜線。在有了這個想法之後，若我們有一個圖形 A 的數列形式，我們便可以得到 $PNP^T \simeq A$ ，接著觀察這個 P 所有包含斜率為 ± 1 的斜線，再將這些結果拆解成數個基本排列矩陣相乘，接著找到基本排列矩陣最少的結果，我們便可以得到該圖形的層數。

雖然我們有了這個方法，但是當 n 變大時，尋找的過程會變得很繁瑣，因為需要檢驗 $2n$ 條斜線，而且這個方法只可以判定該圖形是第幾層，我們用了這個方法檢驗了當 $n = 7$ 時，最高的層數為第4層，不過我們透過窮舉法得到七點圖形就有39個不同構的圖形，所以總共就需要檢驗不同構的圖形個數乘上 $2n$ 這麼多條對角線才可以得出 n 點圖形的最高層數。

我們雖然還無法直接求出最高層圖形的層數，不過透過觀察的方式，我們發現圖 A 到圖 B 最短路徑的步數不會超過最高層圖形的層數，因此我們想要先證明這個命題。

從定義中可知，若將 n 階排列矩陣 P 拆分成 m 個基本排列矩陣，並且為最小拆分的方法之一。因為要滿足 $PNP^T \simeq A$ ，所以一定會滿足 $m \leq i_{max}(n)$ ，那麼我們接著就可以來證明圖 A 到圖 B 最短路徑的步數不會超過 $i_{max}(n)$ 。

Lemma 3-3：圖 A 到圖 B 最短路徑的步數 $\leq i_{max}(n)$ 。

證明：

令 $S = \{\text{所有可能的}n\text{階排列矩陣}\}$ ，則 $\forall P \in S$ ， P 使圖形變化的層數 $\leq i_{max}$

設 $P_1NP_1^T \simeq A$ 、 $P_2NP_2^T \simeq B \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1^{-1}P_2 \simeq B$

令 $P_3 = P_2P_1^{-1} \Rightarrow P_3AP_3^T \simeq B$ 且 $P_3 \in S$

則 P_3 使圖形變化的層數 $= m \leq i_{max}(n)$

\Rightarrow 圖 A 可透過 m 步換到圖 $B \Rightarrow$ 圖 A 到圖 B 最短路徑的步數 $\leq i_{max}(n)$

目的四：求出在正 n 邊形中所有不同構的 n 點圖形個數。

在閱讀歷屆科展作品時，我們發現在第六十三屆科展作品中，有一份名為《回首向來蕭瑟處——筆畫迴圈圖形》的作品，作品中研究了在雷同條件之下不同構的圖形個數，而該研究所得出的一般式有些複雜，因此我們參考該作品的評審建議，使用*Burnside's lemma*來解決這個問題，並簡化其一般式。

首先我們令 n 為質數、 $D_n = \left\{ \text{將正}n\text{邊形旋轉}\frac{i}{n}\text{圈和翻轉後旋轉}\frac{i}{n}\text{圈的變換} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \{g_1, g_2, \dots, g_{2n}\}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 時， g_i 為旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈的變換； $i = (n+1), (n+2), \dots, 2n$ 時， g_i 為翻轉後旋轉 $\frac{i-n}{n}$ 圈的變換、 $X = \{ \text{正}n\text{邊形中符合規則且不相同的}n\text{點圖形} \} \Rightarrow D_n$ 為乘法群，且可作用在 X 上。設 $x \in X$ ，則 x 的軌道 $G_x = \{g \cdot x \mid g \in D_n\}$ ， $\forall g \in D_n$ ，

令 $X^g = \{x \mid g \cdot x = x, \forall x \in X\}$ ，透過*Burnside's lemma*可知 D_n 作用在 X 上的軌道數
 $= \frac{1}{|D_n|} \times \sum_{g \in D_n} |X^g| = \text{正}n\text{邊形不同構的}n\text{點圖形個數}$ ，並且透過定義可知 $|D_n| = 2n$

由上述的結果，我們需要求出 $\sum_{g \in D_n} |X^g|$ 之值，以下研究我們分成三個部分計算，分別是：
 $|X^{g_n}|$ 、旋轉不變元素 $|X^{g_i}| (1 \leq i \leq n-1)$ 以及翻轉後旋轉不變元素 $|X^{g_i}| (n+1 \leq i \leq 2n)$ 。

Lemma 4-1： $|X^{g_n}| = \frac{(n-1)!}{2}$

證明：

$|X^{g_n}|$ 為旋轉 $\frac{n}{n}$ 圈的不變圖形個數，即為 $|X|$

∵所有的圖形可由數列形式得出為 $n!$ 個，並且相同圖形的數列形式共有 $2n$ 種表示法

∴ $|X^{g_n}| = |X| = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$

Lemma 4-2：當 n 為質數時， $|X^{g_i}| = \frac{n-1}{2}$ ，其中 $1 \leq i \leq n-1$

證明：

$|X^{g_i}|$ 為旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈的不變圖形個數 ($i = 1, 2, \dots, n-1$)，設 a_1, a_k 兩點相連

$$\text{令 } \begin{cases} x_m \equiv 1 + mi \pmod{n}, 1 \leq x_m \leq n \\ y_m \equiv k + mi \pmod{n}, 1 \leq y_m \leq n \end{cases}, m = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \Rightarrow a_{x_m}, a_{y_m} \text{ 兩點相連}$$

$\because n$ 為質數 $\therefore \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ 為模 n 的完全剩餘系

$\Rightarrow x_1, x_2, \dots, x_m$ 皆不相同； y_1, y_2, \dots, y_m 皆不相同

並且 $y_m - x_m \equiv k - 1 \pmod{n}, \forall m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

故當 k 被選定後，即可確定圖形，又根據對稱性可知 $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$

$\Rightarrow k$ 會有 $\frac{n-1}{2}$ 個選擇，故 $|X^{g_i}| = \frac{n-1}{2}$ ，其中 $1 \leq i \leq n-1$

接著我們要來計算 $\sum_{i=n+1}^{2n} |X^{g_i}|$ 。考慮圖形中的翻轉軸個數，當 n 為奇數時，每一個翻轉軸皆恰通過一個頂點，共有 n 條不同的翻轉軸；當 n 為偶數時，翻轉軸分為過兩點及無過點的情形，這兩種情形翻轉軸各佔 $\frac{n}{2}$ 條。透過翻轉的定義可知翻轉後旋轉 $\frac{i-n}{n}$ 圈等同於先將圖形旋轉 $\frac{2n-i}{n}$ 圈再翻轉。以 n 為奇數時為例，翻轉軸過 a_1 點，當圖形翻轉後旋轉 $\frac{2}{n}$ 圈，等同於先將圖形旋轉 $\frac{n-2}{n}$ 圈再翻轉，此時翻轉軸會過 a_{n-1} 點。故以過 a_1 點的翻轉軸進行翻轉後旋轉 $\frac{2}{n}$ 圈的圖形可視為以過 a_{n-1} 點翻轉軸直接翻轉。因此翻轉後旋轉的問題只需要選擇一條適當的翻轉軸，就可將不變圖形個數計算出來，當 n 為偶數時亦然。故翻轉後旋轉的問題我們只要計算個別翻轉軸的不變圖形個數，再將結果乘上翻轉軸的個數，即可得出 $\sum_{i=n+1}^{2n} |X^{g_i}|$ 。

Lemma 4-3： 當 n 為奇數時， $|X^{g_i}| = 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!$ ，其中 $n+1 \leq i \leq 2n$

證明：

此時 $|X^{g_i}|$ 為翻轉後旋轉 $\frac{i-n}{n}$ 圈的不變圖形個數

$\because n$ 為奇數 \therefore 每一個翻轉軸皆恰通過一個頂點，考慮以翻轉軸所過的頂點作為起始點

令圖形的數列形式為 $\langle b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_1 \rangle$ ，也就是圖形連接之順序

∵ 線對稱對稱性 ∴ 當 $\overline{b_1 b_2}$ 連接後， $\overline{b_n b_1}$ 也會被連接， $\overline{b_2 b_3}$ 連接後， $\overline{b_{n-1} b_n}$ 也會被連接，以此類推， $\overline{b_{n-1} b_{n+1}}$ 連接後， $\overline{b_{n+3} b_{n+5}}$ 也會被連接，而最後一條為只可為 $\overline{b_{\frac{n+1}{2}} b_{\frac{n+3}{2}}}$ 連接

因此可得 b_2 會有 $(n-1)$ 個選擇，又 b_3 不可選擇已有連線之點，所以會有 $(n-3)$ 個選擇，以此類推， b_k 會有 $(n+3-2k)$ 個選擇 ($2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$)， $b_{\frac{n+1}{2}}$ 會有 2 個選擇

(當 $n=3$ 時，僅有第 2 個點的一種可能)。又圖形選點可將順序顛倒，因此需將結果除以 2

$$\text{故 } |X^{g_i}| = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2k) = 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!, \text{ 其中 } n+1 \leq i \leq 2n$$

結合 **Lemma 4-1**~**Lemma 4-3** 可得：

$$\begin{aligned} \text{當 } n \text{ 為質數時, } \sum_{g \in D_n} |X^g| &= \sum_{i=1}^{n-1} |X^{g_i}| + |X^{g_n}| + \sum_{i=n+1}^{2n} |X^{g_i}| \\ &= \frac{(n-1)!}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} + n \times 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)! \Rightarrow \text{正 } n \text{ 邊形不同構的 } n \text{ 點圖形個數} = \frac{1}{|D_n|} \times \sum_{g \in D_n} |X^g| \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{(n-1)!}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} + n \times 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)! \right] = \frac{(n-1)! + (n-1)^2 + n \times 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{4n} \end{aligned}$$

因此我們得出了當 n 為質數時，正 n 邊形不同構的 n 點圖形個數的一般式，帶入 $n=5$ 可得不同構的圖形個數為 4 個；帶入 $n=7$ 可得不同構的圖形個數為 39 個，和我們窮舉的結果是一致的。為了把 n 推廣至正整數，我們決定先研究當 n 為奇數時， $|X^{g_i}|$ ($1 \leq i \leq n$) 的個數。當 n 為奇數時，若旋轉的圈數 i 為 n 的因數，其中 $1 < i < n$ ，使用 n 為質數的做法計算，則會有部分的不變圖形不符合規則。例如： a_1 和 a_{1+i} 連接後形成的不變圖形，會只經過 $\frac{n}{i}$ 個點，不符合規則。因此相較於 n 為質數，過程中取點選擇會受到 i 的影響，所以我們以此為出發點並分組計算取點選擇的個數，在證明過程中會使用到 $\phi(n)$ ，也就是歐拉 ϕ 函數，其中 $\phi(n)$ 是小於等於 n 的正整數中與 n 互質的數個數。

Lemma 4-4：當 n 為奇數時， $\sum_{i=1}^n |X^{g_i}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\}$

證明：

考慮旋轉的圈數為 $\frac{i}{n}$ ($1 \leq i \leq n$)，令 $\gcd(n, i) = d$

不失一般性設起始點為 a_1

令 $a_1 = b_{(1,1)}$ 、 $a_2 = b_{(1,2)}$ 、 \dots 、 $a_d = b_{(1,d)}$ 、 $a_{d+1} = b_{(2,1)}$ 、 $a_{d+2} = b_{(2,2)}$ 、 \dots 、 $a_n = b_{(\frac{n}{d},d)}$

其中 $b_{(x,y)}$ 中的 x 代表組數， y 編號代表同組內第 y 個點，並且 $x \leq \frac{n}{d}$ 、 $y \leq d$ 。若 $x > \frac{n}{d}$ ，則 $x \equiv x' \pmod{\frac{n}{d}}$ ，其中 $1 \leq x' \leq \frac{n}{d}$ ；若 $y > d$ ，則 $y \equiv y' \pmod{d}$ ，其中 $1 \leq y' \leq d$ ，並且點標籤變為 $b_{(x',y')}$ 。會這樣分組編號是為了避免出現子圖迴圈的情形，令 d 個點為一組，若選到編號相同的點，則會形成子圖迴圈，因此連接點必須選擇編號不同的點

透過圖形旋轉後不變可知：若 $b_{(x,y)}$ 和 $b_{(z,w)}$ 相連，則 $b_{(x+1,y)}$ 和 $b_{(z+1,w)}$ 相連（by Claim 1）

不過 d 的值會影響推導的過程，因此針對 $1 < d < n$ 、 $d = 1$ 、 $d = n$ 三種情況討論

Case 1 : $1 < d < n$

從 $b_{(1,1)}$ 點開始，若下一點連接 $b_{(\alpha,1)}$ （ $2 \leq \alpha \leq \frac{n}{d}$ ），則通過圖形旋轉後不變的性質可知，最後圖形會連接至 $b_{(1,1)}$ ，並且只經過 q 個點，其中 $q \mid \frac{n}{d}$ 且 $q > 1$ 、 $n - 1 \geq \frac{n}{d} \geq 3$ 。因為 $d \neq 1$ ，故 $b_{(1,1)}$ 只能連接 $b_{(\alpha,\beta)}$ （ $2 \leq \beta \leq d$ ），原因會在 Case 2 中分析

設 $b_{(1,1)} = b_{(u_1,v_1)}$ ， $b_{(u_1,v_1)}$ 和 $b_{(u_2,v_2)}$ 相連，其中 $v_2 \neq 1$ ，則 $b_{(u_2,v_2)}$ 會有 $\frac{n}{d} \times (d - 1)$ 個選擇，並且 $b_{(2,1)}$ 和 $b_{(u_2+1,v_2)}$ 相連，以此類推， $b_{(\frac{n}{d},1)}$ 和 $b_{(u_2+\frac{n}{d}-1,v_2)}$ 相連，此時共連了 $\frac{n}{d}$ 條線

接著設 $b_{(u_2,v_2)}$ 和 $b_{(u_3,v_3)}$ 相連，可得共連了 $\frac{2n}{d}$ 條線，若此時已有子圖形成迴圈，

則圖形線數 $< n$ ，故 $b_{(u_3,v_3)}$ 不可為已有連線的點，會有 $\frac{n}{d} \times (d - 2)$ 個選擇

以此類推，當 $k \leq d$ ， $b_{(u_{k-1},v_{k-1})}$ 和 $b_{(u_k,v_k)}$ 相連，共連了 $\frac{(k-1)n}{d}$ 條線，若此時已有子圖形成迴圈，則圖形線數 $< n$ ，故 $b_{(u_k,v_k)}$ 不可為已有連線的點，會有 $\frac{n}{d} \times (d - k + 1)$ 個選擇

設 $b_{(u_d,v_d)}$ 和 $b_{(u_{d+1},v_{d+1})}$ 相連， $b_{(u_{d+1},v_{d+1})}$ 不可為已和兩點連線的點，也不可連回和自己編號相同的點，令 $u_{x+1} - u_x \equiv D \pmod{\frac{n}{d}}$ ，並且 $1 \leq D \leq \frac{n}{d} - 1$ 。若 $\gcd(D, \frac{n}{d}) \neq 1$ ，會形成不經過 n 個點的迴圈圖形，因此 $b_{(u_{d+1},v_{d+1})}$ 共有 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個選擇（by Claim 2）

而滿足 $\gcd(n, i) = d$ 的正整數 i 共有 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個 (by Claim 2)

又圖形的選點可以將順序顛倒，因此需要將上述結果除以2

$$\Rightarrow \text{此時圖形個數為 } \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\}$$

Case 2 : $d = 1$

此時 $\gcd(n, i) = 1$ 。當 $\gcd(n, \alpha) \neq 1$ 時， $q < n$ ，則此圖形不符合規則

當 $\gcd(n, \alpha) = 1$ 時， $n = q$ ，則此圖形符合規則

此時 α 共 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個選擇 (by Claim 2)。又圖形選點可將順序顛倒，因此結果為 $\frac{\phi\left(\frac{n}{d}\right)}{2}$ 個圖形

而滿足 $\gcd(n, i) = d$ 的正整數 i 共有 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個 (by Claim 2)，因此此時圖形會有 $\frac{1}{2} \times \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2$ 個

Case 3 : $d = n$

此時為 $i = n$ 的情形，圖形旋轉後不變

由 Lemma 4-1 可知此時個數為 $\frac{(n-1)!}{2}$ 個

最後結合以上三個 Case 並將三個情況加總並統合後得出：

$$\text{當 } n \text{ 為奇數時， } \sum_{i=1}^n |X^{gi}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\}$$

Claim 1 : 若 $b_{(x,y)}$ 和 $b_{(z,w)}$ 相連，則 $b_{(x+1,y)}$ 和 $b_{(z+1,w)}$ 相連

證明：

當 $b_{(x,y)}$ 和 $b_{(z,w)}$ 相連，根據旋轉後圖形不變可得： $b_{(x+\frac{i}{d}, y)}$ 和 $b_{(z+\frac{i}{d}, w)}$ 相連、 $b_{(x+\frac{2i}{d}, y)}$ 和 $b_{(z+\frac{2i}{d}, w)}$

相連，以此類推。由於 $\gcd\left(\frac{i}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1 \Rightarrow \left\{ c \times \frac{i}{d} \pmod{\frac{n}{d}} \mid 1 \leq c \leq \frac{n}{d} \right\}$ 構成模 $\frac{n}{d}$ 的完全剩餘系

故 $b_{(x+1,y)}$ 和 $b_{(z+1,w)}$ 相連

Claim 2 : 若 $\gcd(n, i) = d$ ，並且 $i \leq n - 1$ ，則滿足此條件的 i 共有 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個

證明：

$$\because \gcd(n, i) = d \quad \therefore \text{可令 } n = qd, i = rd \Rightarrow \gcd(q, r) = 1$$

∴ 滿足 $\gcd(q, r) = 1$ 的 r 共有 $\phi(q)$ 個，又 $q = \frac{n}{d}$ ∴ 滿足 $\gcd(q, r) = 1$ 的 r 共有 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個

⇒ 滿足 $\gcd(n, i) = d$ 的 i 共有 $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$ 個

結合 **Lemma 4-3**、**Lemma 4-4** 可得：

當 n 為奇數時， $\sum_{g \in D_n} |X^g| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + n \times 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!$

⇒ 正 n 邊形不同構 n 點圖形個數 $= \frac{1}{|D_n|} \times \sum_{g \in D_n} |X^g| = \frac{\sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + n \times 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{4n}$

在解決完 n 為奇數的情況後，我們想更進一步將 n 推廣到正整數，因此我們先解決當 n 為偶數時 $|X^{g_i}|$ 之值。當 n 為偶數時，發現若 $d = \frac{n}{2}$ 時，則 $b_{(1,1)}$ 可和 $b_{(2,1)}$ 連線，且僅有 $d = \frac{n}{2}$ 時會產生此情況。因此我們需先證明只有 $d = \frac{n}{2}$ 時， $b_{(1,1)}$ 可和 $b_{(2,1)}$ 連線，才能夠計算 $|X^{g_i}|$ 之值。

Lemma 4-5：當 n 為偶數且僅滿足 $d = \frac{n}{2}$ 時， $b_{(1,1)}$ 可和 $b_{(2,1)}$ 連線，且此時旋轉不變圖形個數為 $2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ 個，若 $d \neq \frac{n}{2}$ ，則 $b_{(1,1)}$ 不可和 $b_{(\alpha,1)}$ 連線。

證明：

Case 1： $\frac{n}{d}$ 為偶數且 $\frac{n}{d} \neq 2$ 、 $\frac{n}{d} \neq n$

從 $b_{(1,1)}$ 點開始，若下一點連接 $b_{(\alpha,1)}$ ($2 \leq \alpha \leq \frac{n}{d}$)

此時若 $\alpha \neq \frac{n}{d} + 1$ ，則 $n > q \geq 4$ ，此圖形不符合規則。

若 $\alpha = \frac{n}{d} + 1$ ，由 **Claim 1** 可得 $b_{(\gamma,1)}$ 和 $b_{\left(\frac{n}{d}+\gamma,1\right)}$ 相連， $\forall 1 \leq \gamma \leq \frac{n}{d}$

設 $b_{(1,1)} = b_{(u_1,v_1)}$ 和 $b_{(u_2,v_2)}$ 相連， $b_{(u_2,v_2)}$ 和 $b_{(u_3,v_3)}$ 相連，依此類推， $b_{(u_{d-1},v_{d-1})}$ 和 $b_{(u_d,v_d)}$ 相連

且過程中無子圖形成迴圈。此時 $b_{(x,y)}$ 已有和兩點連線， $\forall x \leq \frac{n}{d}$ 、 $y \leq d \wedge y \neq v_d$

設 $b_{(u_d,v_d)}$ 和 $b_{(u_{d+1},v_{d+1})}$ 相連，∵ $b_{(u_{d+1},v_{d+1})}$ 不可為已有和兩點連線的點，也不可連回和自己編號相同的點 ∴ $b_{(u_{d+1},v_{d+1})}$ 沒有點可選擇，故此時無法形成符合規則圖形。

Case 2 : $\frac{n}{d} = 2$

$\because 2 \leq \alpha \leq \frac{n}{d} = 2 \quad \therefore \alpha = 2$ ，此時 $b_{(1,1)}$ 和 $b_{(2,1)}$ 連接，而此圖形未完成，進一步分析這種情形

$b_{(1,1)}$ 和 $b_{(2,1)}$ 連線後，第3個點會有 $\frac{n}{d} \times (d - 1) = 2 \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ 個選擇

又第4個點不可連接至已有連線的點，因此會有 $2 \times \left(\frac{n}{2} - 2\right)$ 個選擇

以此類推，當 $3 \leq k \leq \frac{n}{2} + 1$ ，第 k 個點也不可連接至已有連線的點，因此會有 $2 \times \left(\frac{n}{2} - k + 2\right)$ 個

故此時共有 $\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k) = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ 個圖形，所以此時 $b_{(1,1)}$ 可和 $b_{(2,1)}$ 連線

在得出 $\frac{n}{d} = 2$ 時， $b_{(1,1)}$ 和 $b_{(2,1)}$ 連接的圖形個數之後，發現若 $b_{(1,1)}$ 和 $b_{(u_2, v_2)}$ 連接且 $v_2 \neq 1$ ，則 $b_{(u_3, v_3)}$ 的選擇會產生相同的情形，也就是 $b_{(u_2, v_2)}$ 可以連到 $b_{(u_3, v_2)}$ 且 $u_2 \neq u_3$ 。所以我們想將結果透過樹狀圖展開，我們便可將之前奇數得出的結果減去 $\frac{n}{d} = 2$ 時的情況，加上樹狀圖展開的結果後，便可得到旋轉不變的圖形個數。

Lemma 4-6 : 當 n 為偶數時， $\sum_{i=1}^n |X^{g_i}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi \left(\frac{n}{d} \right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d} \right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} \right)!$

證明 :

從 **Lemma 4-5** 中可知：當 n 為偶數且 $d = \frac{n}{2}$ 時，則 $b_{(1,1)}$ 可和 $b_{(2,1)}$ 連線，並且 $b_{(1,1)}$ 和 $b_{(2,1)}$ 連線

有 $2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ 個圖形。若此時 $b_{(1,1)}$ 不是和 $b_{(2,1)}$ 連線，則第2個點會有 $\frac{n}{d} \times (d - 1) =$

$2 \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ 個選擇，設第二個點為 $b_{(u_2, v_2)}$ ，第3個點又可分成 $b_{(u_2, v_2)}$ 和 $b_{(u_3, v_2)}$ 或 $b_{(u_3, v_3)}$ 相連，

其中 $v_2 \neq v_3$ ，若 $b_{(u_2, v_2)}$ 和 $b_{(u_3, v_2)}$ 相連，則此時會產生無法繼續從 $b_{(u_3, v_2)}$ 往下選擇的情況，不

過可以從 $b_{(1,1)}$ 選擇第4個點繼續連線，此時會有 $\frac{n}{d} \times (d - 2) = 2 \times \left(\frac{n}{2} - 2\right)$ 個選擇，以此類推，

此時若 $4 \leq k \leq \frac{n}{2} + 1$ ，則第 k 個點共有 $2 \times \left(\frac{n}{2} - k + 2\right)$ 個選擇；若 $b_{(u_2, v_2)}$ 和 $b_{(u_3, v_3)}$ 相連，則會

有 $\frac{n}{d} \times (d - 2) = 2 \times \left(\frac{n}{2} - 2\right)$ 個選擇，不過此時第4個點又可分成 $b_{(u_3, v_3)}$ 和 $b_{(u_4, v_3)}$ 或 $b_{(u_4, v_4)}$ 相連，

其中 $v_3 \neq v_4$ ，以此類推，透過樹狀圖展開，可以得到若過程中有 $b_{(u_k, v_k)}$ 和 $b_{(u_{k+1}, v_k)}$

相連，則共有 $\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k) = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ ，又 $b_{(u_k, v_k)}$ 和 $b_{(u_{k+1}, v_k)}$ 相連共會有 $\frac{n}{2}$ 組，因此共

有 $\frac{n}{2} \times 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ ，加上無 $b_{(u_k, v_k)}$ 和 $b_{(u_{k+1}, v_k)}$ 相連為 $\frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k) = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ 個

故當 n 為偶數且 $d = \frac{n}{2}$ 時，圖形共有共有 $\left(\frac{n}{2} + 1\right) \times 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$... ①

當 n 為奇數時， $|X^{g_i}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\}$

因此將這串式子減去當 $d = \frac{n}{2}$ 的情況，再加上①式，即是當 n 為偶數時的 $|X^{g_i}|$ 之值

\therefore 此時 $\sum_{i=1}^n |X^{g_i}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} - \left[\phi(2) \right]^2 \times 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$

$+ \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)! = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)!$

在解決旋轉不變圖形之後，我們還有當 n 為偶數時的翻轉不變圖形個數需要解決，此時會分成兩種情況，分別是翻轉軸過兩點及翻轉軸無過點的情況，因此我們將這兩個情況分開討論，並計算兩者之合。

Lemma 4-7：當 n 為偶數時， $\sum_{i=n+1}^{2n} |X^{g_i}| = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2} + 2\right)$

證明：

Case 1：翻轉軸通過兩點

考慮起始點為翻轉軸上其中一點，令圖形的數列形式為 $\langle b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_1 \rangle$

\therefore 線對稱對稱性 \therefore 當 $\overline{b_1 b_2}$ 連接後， $\overline{b_n b_1}$ 也會被連接， $\overline{b_2 b_3}$ 連接後， $\overline{b_{n-1} b_n}$ 也會被連接，以此

類推， $\overline{b_{\frac{n}{2}} b_{\frac{n}{2}+1}}$ 連接後， $\overline{b_{\frac{n}{2}+1} b_{\frac{n}{2}+2}}$ 也會被連接

因此可得 b_2 不可是另一個翻轉軸上的點，會有 $(n-2)$ 個選擇， b_3 不可選擇已有連線的點、在翻轉軸上的點及 b_2 和翻轉軸對稱點，會有 $(n-4)$ 個選擇，以此類推，當 $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$ 時， b_k 共有 $(n-2k+2)$ 個選擇。而最後一個點只可選在翻轉軸上與起始點不同的另一點

又滿足軸過兩點的翻轉軸共有 $\frac{n}{2}$ 條，並且圖形選點可將順序顛倒，因此需將上述結果除以2

故此時共有 $\frac{n}{2} \times \frac{1}{2} \times \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k) = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)!$ 個圖形

Case 2：翻轉軸無過點

考慮起始點為 a_1 ，若第2個點連接 a_1 以翻轉軸的對稱點，則可以將這兩點視為在翻轉軸上的1點，可以得出此時等同於 $(n-1)$ 個點的不變圖形個數，不過會有2種不相同的原始圖形可以通過此操作得到相同的結果，因此透過此方法計算出的個數需要乘以2，又 $(n-1)$ 為奇數，可以

使用前面奇數連線的作法得出此時的不變圖形個數為 $2 \times \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k) = 2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}-1\right)!$

然而若第2個點連接的是其他點，則有 $(n-2)$ 個選擇，若第3個點連接的是第2個點對於翻轉軸的對稱點，則可使用上述的方法將兩點視為在翻轉軸上的1點，同樣得出結果為

$2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}-1\right)!$ 個。因此過程中發生第 k 個點連接第 $k-1$ 個點的對稱點的情況，則圖形個

數為 $2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}-1\right)!$ 個，又 $2 \leq k \leq \frac{n}{2} + 1$ ，故此情況共有 $\frac{n}{2} \times \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k) = 2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}\right)!$ 個

過程中若無發生第 k 個點連接第 $k-1$ 個點的對稱點，則圖形共有 $\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (2k)$

$= 2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}-1\right)!$ 個。因此兩情況總合為 $2^{\frac{n}{2}-1} \times \left[\left(\frac{n}{2}\right)! + \left(\frac{n}{2}-1\right)!\right]$ 個

又滿足軸過兩點的翻轉軸共有 $\frac{n}{2}$ 條，並且圖形選點可將順序顛倒，因此需將上述結果除以2

故此時共有 $\frac{n}{2} \times \frac{1}{2} \times 2^{\frac{n}{2}-1} \times \left[\left(\frac{n}{2}\right)! + \left(\frac{n}{2}-1\right)!\right] = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}+1\right)!$ 個圖形

結合 **Case 1**、**Case 2** 可得當 n 為偶數時， $\sum_{i=n+1}^{2n} |X^{gi}| = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}+2\right)$

結合 **Lemma 4-6**、**Lemma 4-7** 可得：當 n 為偶數時， $\sum_{g \in D_n} |X^g| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times \right.$

$(d-1)!\} + 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! + 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}+2\right) = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)!\} \right.$

$+ 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2}+3\right) \Rightarrow$ 正 n 邊形不同構的 n 點圖形個數 $= \frac{1}{|D_n|} \times \sum_{g \in D_n} |X^g|$

$= \frac{\sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)!\} + \left(\frac{n}{2}+3\right) \times 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)!}{4n}$

肆、研究結果

一、研究一：證明任意兩個符合規則的圖A和圖B，圖A可以透過有限次換點得到圖B。

(一) 任意兩個符合規則的圖A和圖B，圖A皆可透過有限次的換點得到圖B。

二、研究二：找出將圖A透過有限次的換點得到圖B的最少換點次數以及路徑。

(一) 交換圖形中的 a_i 、 a_j 點，則圖形鄰接矩陣的變化是同時將矩陣的第 i 、 j 列和第 i 、 j 行互換，因此若圖A可以通過換點得到圖B，則可以寫成 $PAP = B$ 。

(二) 若 A_1 可以通過換點一次得到 A_2 ， A_2 可以通過換點一次得到 $A_3 \cdots A_{k-1}$ 可以通過換點一次得到 A_k ，則換點過程可表示成 $A_k = P'A_1(P')^T$ ，其中 $P' = (P_k P_{k-1} \cdots P_1)$ 。

(三) 若圖A可以透過逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖B，則 $R^i A (R^i)^T = B$ ；若圖A可以透過翻轉後逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖B，則 $R^i F A (R^i F)^T = B$ 。

(四) 已知 $P_1 A_1 P_1 = A_2$ ， $P_2 A_2 P_2 = A_3$ ， \cdots ， $P_x A_x P_x = \psi$ 。若 A_1 可通過 k 次換點得到 ψ ，若且唯若存在 k 個基本排列矩陣，使得 $(P'_k P'_{k-1} \cdots P'_1)(P_x P_{x-1} \cdots P_1) = R^i$ or $R^i F$ or I 。

(五) 將 F 、 RF 、 \cdots 、 $R^{n-1}F$ 拆分為個數最少的數個基本排列矩陣相乘，所有可能的基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都恰出現一次，且所有基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都能夠在拆解後的基本排列矩陣中找到。

(六) 為了簡化換點的過程，我們證明了 $P_{(x,y)}$ 、 R^i 、 F 之間交互的運算規則。

三、研究三：嘗試尋找符合規則的 n 點圖形之最高層圖形。

(一) 設圖 N 為正 n 邊形、圖 A 為符合遊戲規則之 n 點圖形，若 P 、 PR^i 、 $PR^i F$ 視為等價排列矩陣，且 $\exists P_1 \neq P_2$ ，使得 $P_1 N P_1^T \simeq A$ 、 $P_2 N P_2^T \simeq A$ ，則 P_2 、 P_1 為等價排列矩陣。

(二) 若 $P N P^T \simeq A$ ，觀察矩陣 P 中每一組斜率為 ± 1 的斜線，再將不在斜線上的元素1利用基本排列矩陣換回斜線上後，找到基本排列矩陣最少的結果，便可得到圖形的層數。

(三) 圖A到圖B最短路徑的步數 $\leq i_{max}(n)$ 。

四、研究四：求出在正 n 邊形中所有不同構的 n 點圖形個數。

一、當 n 為奇數時，正 n 邊形不同構的 n 點圖形個數為：

$$\frac{\sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + n \times 2^{\frac{(n-1)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{4n}$$

二、當 n 為偶數時，正 n 邊形不同構的 n 點圖形個數為：

$$\frac{\sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + \left(\frac{n}{2}+3\right) \times 2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}\right)!}{4n}$$

伍、 未來展望

一、找出更有效率得到最高層圖形的方法，並求出目的三中 $i_{max}(n)$ 和 n 的關係式。

二、求出圖 A 換到圖 B 所需的最少換點次數並找出其路徑。

三、若變更規則只經過小於 n 個點，則相同研究中換點次數與其路徑之變化。

陸、 參考文獻

一、線性代數在圖論的應用 (一)：鄰接矩陣 (2010 年 1 月 8 日)。線代啟示錄。

取自：<https://reurl.cc/L4kVy4>。

二、矩陣視覺化 (2009 年 8 月 4 日)。線代啟示錄。

取自：<https://reurl.cc/6769rb>。

三、特殊矩陣 (16)：排列矩陣 (2012 年 3 月 23 日)。線代啟示錄。

取自：<https://reurl.cc/37z24V>。

四、蔡怡真、王之好、林乙岑。中華民國第63屆中小學科學展覽會作品說明書—回首向來蕭瑟處—一筆畫迴圈圖形。國立科學教育館。

取自：<https://reurl.cc/OGyng3>。

五、Joseph J. Rotman.(1995). *An Introduction to the Theory of Groups (fourth edition)*. Counting Orbits(pp.58-59).NY: Springer-Verlag.

六、Burton, M. Burton. (2002). *Elementary Number Theory (fifth edition)*. 7.2 Euler's Phi-Function(pp.127~129).NY: McGraw-Hill.

【評語】 050404

本作品在其研究目的中提出想要解以下問題：在一個完全圖中給定兩個的哈密頓圈，問最少要對其中一個哈密頓圈進行幾次的兩點交換，才能是兩個哈密頓圈完全相等。作者的研究手法將原問題轉換成代數圖論的語言表達出來，但這個轉換是相當典型的。然而受限於代數圖論相關結果的局限性，本問題在特例處理上甚至都沒有顯著進展。在作品的最後，作者又轉而用 Burnside 引理計算所有的哈密頓圈的個數，將旋轉和鏡像對稱的哈密頓圈視為相同，而這樣的做法也相當典型，沒有取得太多的進展。

作品簡報

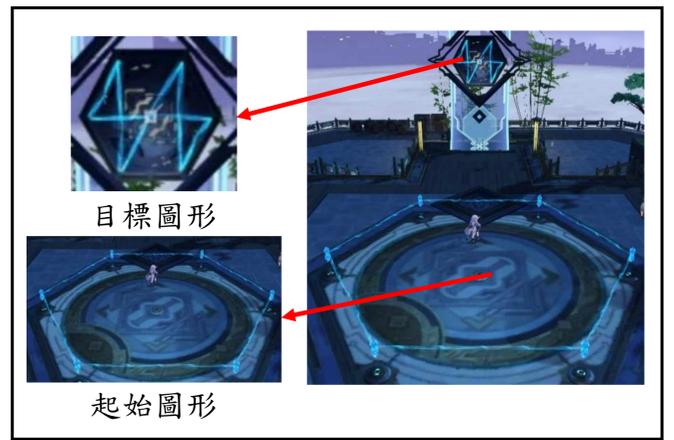
大衍萬象之謎—

正多邊形頂點交換圖形關係

壹、研究動機

我們在遊玩遊戲《崩壞：星穹鐵道》時，有一名為「大衍萬象」的謎題引起了我們的興趣。謎題內容是將一個六點或八點的連線圖形，藉由點的移動將起始圖形變換為目標圖形，如圖一。

因此我們產生「究竟由起始圖形變換為目標圖形，至少需要換點幾次？」的疑問。於是我們開始了這次的研究。並且，我們想將問題推廣至正 n 邊形，探討由起始圖形變換為目標圖形所需的最少換點次數。



圖(一)

貳、研究目的

- 一、證明任意兩個符合規則的圖 A 和圖 B ，圖 A 可以透過有限次換點得到圖 B 。
- 二、找出將圖 A 透過有限次的換點得到圖 B 的最少換點次數以及路徑。
- 三、嘗試尋求正 n 邊形中第 i 層圖形之 i 的最大值。
- 四、求出在正 n 邊形中所有不同構的 n 點圖形個數。

參、研究過程及方法

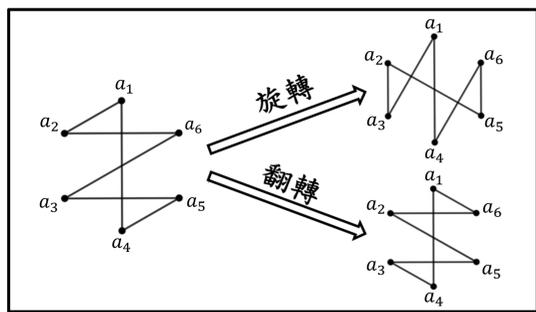
一、遊戲規則

平面上給定一正 n 邊形，只保留圖形的 n 個頂點並選定其中一點作為起始點，接著在每個點都不重覆經過的情況下，從起始點一筆劃經過所有點並在最後回到起始點形成圖 A ，利用相同規則得到另一圖 B ，最後找出將圖 A 透過換點得到圖 B 的最少換點次數以及路徑。

二、名詞定義

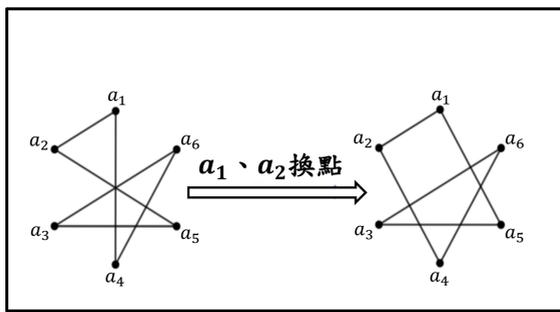
(一) 為了方便研究，將 a_1 點置於12點鐘方向，並以逆時針方向定義正 n 邊形的點標籤依序為 a_1, a_2, \dots, a_n 。

(二) 同構圖形 ($A \simeq B$)



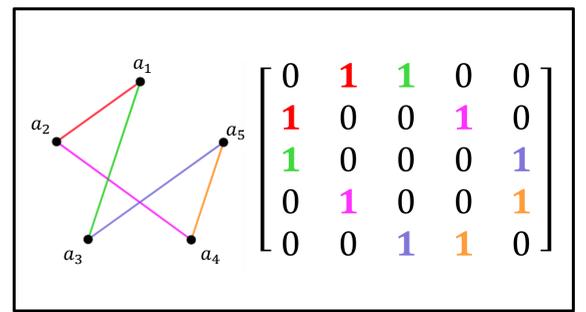
圖(二)

(三) 換點



圖(三)

(四) 鄰接矩陣



圖(四)

(五) 排列矩陣 (P):

給定 n 階方陣 P ，若 P 的每一行和每一列皆恰有一個元素為1，其餘元素為0，則稱 P 為排列矩陣。若排列矩陣 P 滿足**只有兩個元素1不在主對角線上或 P 為單位矩陣**，則稱 P 為基本排列矩陣。

例如：

排列矩陣	基本排列矩陣
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

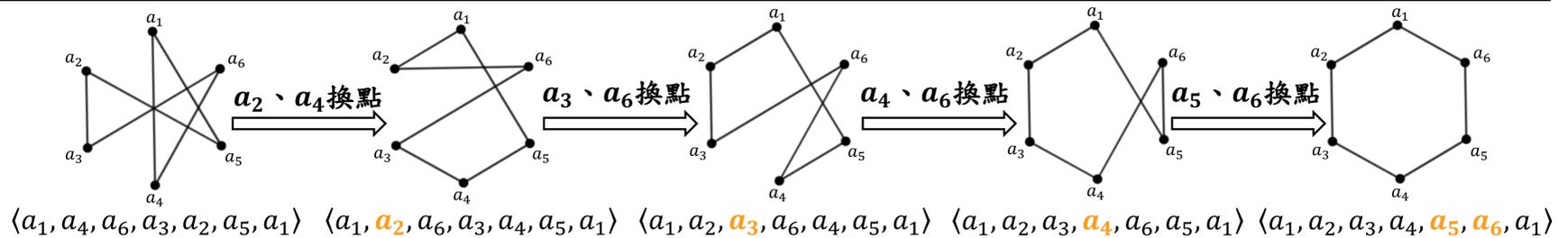
排列矩陣常用的性質：

1. 任意排列矩陣可表示為數個基本排列矩陣相乘，反之亦然。
2. 若 P 為基本排列矩陣，則 $P = P^{-1} = P^T$ 。
3. 若 P 為排列矩陣，則 $P^{-1} = P^T$ 。

(六) 第 i 層圖形：

若有一圖 A 最少需要通過 i 次換點才可以得到正 n 邊形，則稱圖 A 為在正 n 邊形中的第 i 層圖形。令 $L(n) = \{i | i \text{ 為所有正 } n \text{ 邊形中符合規則的 } n \text{ 點圖形之層數}\}$ ，且 $L(n)$ 之元素最大值記為 $i_{max}(n)$ ，而 $i_{max}(n)$ 所對應的圖形稱為正 n 邊形中的最高層圖形。

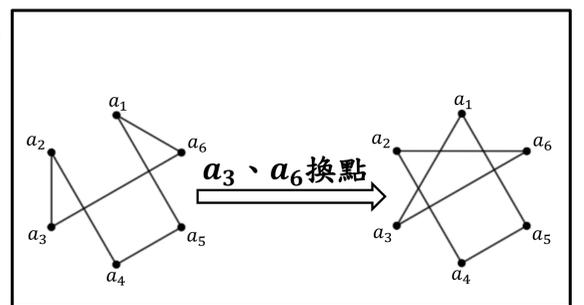
研究一：證明任意兩個符合規則的圖 A 和圖 B ，圖 A 可以透過有限次換點得到圖 B 。



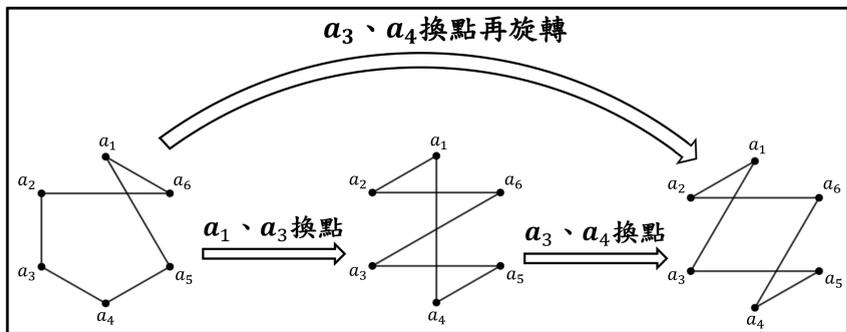
研究二：找出將圖 A 透過有限次的換點得到圖 B 的最少換點次數以及路徑。

Lemma 2-1：交換符合規則圖形的 a_i 、 a_j 點一次，則圖形鄰接矩陣的變化是將矩陣的第 i 、 j 列互換和第 i 、 j 行互換。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



圖(五)



圖(六)

Lemma 2-3: 若將圖A逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈可得到圖B, 則

$R^i A (R^i)^T = B$, 其中R為逆時針旋轉 $\frac{1}{n}$ 圈的運算矩陣。

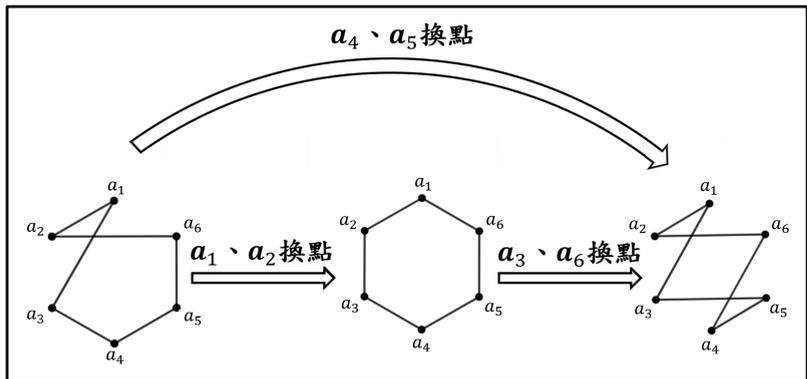
e_i 代表該列有 n 個元素, 且第 i 個元素是1, 其餘為0。

$$(P_{(1,n)} P_{(n,n-1)} \cdots P_{(3,2)}) = R$$

$$R = \begin{bmatrix} e_n \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \end{bmatrix}$$

Lemma 2-5: 已知 $P_1 A_1 P_1 = A_2, P_2 A_2 P_2 = A_3, \dots, P_x A_x P_x = \psi$, 其中 P_1, P_2, \dots, P_x 是基本排列矩陣。則圖 A_1 可以通過 k 次換點得到圖 ψ 若且唯若存在 k 個基本排列矩陣 P'_1, P'_2, \dots, P'_k 及 $i \in \mathbb{N}$, 使得:

$$(P'_1 P'_2 \cdots P'_k) (P_x P_{x-1} \cdots P_1) = R^i \text{ or } R^i F \text{ or } I。$$



圖(七)

$P_{(x,y)}, R^i, F$ 之間交互的運算規則:

一、 $P_{(a,b)} P_{(c,d)} = P_{(c,d)} P_{(a,b)}$, 其中 a, b, c, d 四者相異。(報告書 Lemma 2-7)

二、 $R^i P_{(x,y)} = P_{(x',y')} R^i$, 其中 $x < y$, 且 $1 \leq x', y' \leq n, x' \equiv x + i \pmod{n}, y' \equiv y + i \pmod{n}$ 。(報告書 Lemma 2-8)

三、 $F (R^i)^T = F R^{n-i} = R^i F = (R^i F)^T$ 。(報告書 Lemma 2-9)

四、 $F P_{(x,y)} = P_{(x',y')} F$, 其中 $x < y$, 且 $1 \leq x', y' \leq n, x' \equiv n - x + 2 \pmod{n}, y' \equiv n - y + 2 \pmod{n}$ 。(報告書 Lemma 2-10)

研究三: 嘗試尋求正 n 邊形中第 i 層圖形之 i 的最大值。

Lemma 3-1: 設圖 N 為正 n 邊形, 若 $PNP^T \simeq N$, 則 $P = I \text{ or } R^i \text{ or } R^i F$ 。

正 n 邊形的數列形式:

$$\begin{array}{cc} R^i & R^i F \\ \langle a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \rangle & \langle a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 \rangle \\ \langle a_n, a_1, a_2, \dots, a_n \rangle & \langle a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots \\ \langle a_2, a_3, \dots, a_n, a_1, a_2 \rangle & \langle a_2, a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_2 \rangle \end{array}$$

Lemma 3-3: 圖A到圖B最少的換點次數 $\leq i_{\max}(n)$ 。

令 $S = \{\text{所有可能的 } n \text{ 階排列矩陣}\}$

則 $\forall P \in S, P$ 使圖形變化的層數 $\leq i_{\max}(n)$

設 $P_1 N P_1^T \simeq A, P_2 N P_2^T \simeq B \Rightarrow P_2 P_1^{-1} A P_1^{-1} P_2 \simeq B$

令 $P_3 = P_2 P_1^{-1} \Rightarrow P_3 A P_3^T \simeq B$ 且 $P_3 \in S$

則 P_3 使圖形變化的層數 $= m \leq i_{\max}(n)$

\Rightarrow 圖A可透過 m 步換到圖B

\Rightarrow 圖A到圖B最少的換點次數 $\leq i_{\max}(n)$

Lemma 2-2: 若圖 A_1 可以通過換點一次得到圖 A_2 , 且圖 A_2 可以通過換點一次得到圖 A_3 , 以此類推, 圖 A_k 可以通過換點一次得到圖 A_{k+1} , 則 $\exists P'$ 為排列矩陣, 使得 $A_{k+1} = P' A_1 (P')^T$ 。

$$\text{令 } P_1 A_1 P_1 = A_2, P_2 A_2 P_2 = A_3, \dots, P_k A_k P_k = A_{k+1}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} = (P_k P_{k-1} \cdots P_1) A_1 (P_k P_{k-1} \cdots P_1)^T = P' A_1 (P')^T$$

Lemma 2-4: 若圖A可以通過翻轉後逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖B,

則 $R^i F A (R^i F)^T = B$, 其中 F 為以過 a_1 為翻轉軸的翻轉運算矩陣。

$$(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2})}) = F_{2k+1}, k \in \mathbb{N}$$

$$(P_{(2,n)} P_{(3,n-1)} \cdots P_{(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+2)}) = F_{2k+2}, k \in \mathbb{N}$$

$$F_{2k+1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{2k+1} \\ e_{2k} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix}, F_{2k} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{2k} \\ e_{2k-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_n \\ e_{n-1} \\ \vdots \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Lemma 2-6: 將 $F, RF, \dots, R^{n-1}F$ 拆分為個數最少的基本排列矩陣相乘後, 所有可能的基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都恰出現一次, 且所有基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都能夠在 $F, RF, \dots, R^{n-1}F$ 拆分成個數最少的基本排列矩陣相乘中找到。

$$R^i F = \prod_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P_{(x_k, y_k)}, i = 0, 1, \dots, (n-1)$$

其中的 $P_{(x_k, y_k)}$ 皆不相同

當 $n = 6$ 時, $R^i F$ 的展開如下:

$$F = P_{(2,6)} P_{(3,5)}, RF = P_{(1,2)} P_{(4,5)} P_{(3,6)},$$

$$R^2 F = P_{(1,3)} P_{(4,6)}, R^3 F = P_{(1,4)} P_{(2,3)} P_{(5,6)},$$

$$R^4 F = P_{(1,5)} P_{(2,4)}, R^5 F = P_{(1,6)} P_{(2,5)} P_{(3,4)}$$

Lemma 3-2: 設圖 N 為正 n 邊形、圖 A 為符合遊戲規則之 n 點圖形, 若 $P, PR^i, PR^i F$ 視為等價排列矩陣, 且 $\exists P_1 \neq P_2$, 使得 $P_1 N P_1^T \simeq A, P_2 N P_2^T \simeq A$, 則 P_2, P_1 為等價排列矩陣。

假設 $\exists P_1 \neq P_2$, 使得 $P_1 N (P_1)^T \simeq A, P_2 N (P_2)^T \simeq A$

$\Rightarrow (P_1)^{-1} P_2 N [(P_1)^{-1} P_2]^T \simeq N$ 。透過 Lemma 3-1 可知:

$$(P_1)^{-1} P_2 = I \text{ or } R^i \text{ or } R^i F, \text{ 又 } P_1 \neq P_2 \therefore P_2 = P_1 R^i \text{ or } P_1 R^i F$$

故得證 P_2, P_1 為等價排列矩陣

透過找斜線找出正 n 邊形中 n 點圖形的層數 i

$$\begin{array}{cc} \langle a_1, a_6, a_4, a_2, a_3, a_5, a_1 \rangle & \langle a_4, a_2, a_3, a_5, a_1, a_6, a_4 \rangle \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{R^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(需四個基本排列矩陣) (只需兩個基本排列矩陣)

研究四：求出在正 n 邊形中所有不同構的 n 點圖形個數。

令 $D_n = \left\{ \text{將正}n\text{邊形旋轉}\frac{i}{n}\text{圈和翻轉後旋轉}\frac{i}{n}\text{圈的變換} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \{g_1, g_2, \dots, g_{2n}\}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 時， g_i 為旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈的變換； $i = (n+1), (n+2), \dots, 2n$ 時， g_i 為翻轉後旋轉 $\frac{i-n}{n}$ 圈的變換、 $X = \{\text{符合規則且不相同的}n\text{點圖形}\}$ （可以同構） $\Rightarrow D_n$ 是一個乘法群，並且可作用在 X 上。設 $x \in X$ ，則 x 的軌道 $G_x = \{g \cdot x \mid g \in D_n\}$ ； $\forall g \in D_n$ ，令 $X^g = \{x \mid g \cdot x = x, \forall x \in X\}$ 。透過Burnside's lemma可知 D_n 作用在 X 上的軌道數 $= \frac{1}{|D_n|} \sum_{g \in D_n} |X^g| =$ 正 n 邊形中不同構的 n 點圖形個數。（以下Lemma的符號皆為報告書之定義）

Lemma 4-1： $|X^{g_n}| = \frac{(n-1)!}{2}$ 。

Lemma 4-2：當 n 為質數時， $\sum_{i=1}^{n-1} |X^{g_i}| = \frac{(n-1)^2}{2}$ 。

Lemma 4-3：當 n 為奇數時， $\sum_{i=n+1}^{2n} |X^{g_i}| = n \times 2^{\frac{(n-3)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!$ 。

Lemma 4-4：當 n 為奇數時， $\sum_{i=1}^n |X^{g_i}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\}$ 。

Lemma 4-5：當 n 為偶數且 $d = \frac{n}{2}$ 時， $b_{(1,1)}$ 可和 $b_{(2,1)}$ 連線，且此時旋轉不變圖形個數為 $2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$ 個。

Lemma 4-6：當 n 為偶數時， $\sum_{i=1}^n |X^{g_i}| = \frac{1}{2} \sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)!$ 。

Lemma 4-7：當 n 為偶數時， $\sum_{i=n+1}^{2n} |X^{g_i}| = 2^{\frac{n}{2}-2} \times \left(\frac{n}{2}\right)! \times \left(\frac{n}{2} + 2\right)$ 。

綜上所述 $\left\{ \begin{array}{l} \text{當}n\text{為奇數時，正}n\text{邊形不同構的}n\text{點圖形個數為：} \frac{\sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + n \times 2^{\frac{(n-1)}{2}} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{4n} \\ \text{當}n\text{為偶數時，正}n\text{邊形不同構的}n\text{點圖形個數為：} \frac{\sum_{d|n} \left\{ \left[\phi\left(\frac{n}{d}\right) \right]^2 \times \left(\frac{n}{d}\right)^{d-1} \times (d-1)! \right\} + \left(\frac{n}{2}+3\right) \times 2^{\frac{n}{2}-1} \times \left(\frac{n}{2}\right)!}{4n} \end{array} \right.$

肆、研究結果（以下結果皆在正 n 邊形下討論）

- 一、任意兩個符合規則的圖 A 和圖 B ，圖 A 皆可透過有限次的換點得到圖 B 。
- 二、若圖 A_1 可以通過換點一次得到圖 A_2 ，且圖 A_2 可以通過換點一次得到圖 A_3 ，以此類推，圖 A_k 可以通過換點一次得到圖 A_{k+1} ，則 $\exists P'$ 為排列矩陣，使得 $A_{k+1} = P' A_1 (P')^T$ 。
- 三、若圖 A 可以通過逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖 B ，則 $R^i A (R^i)^T = B$ 。
- 四、若圖 A 可以通過翻轉後逆時針旋轉 $\frac{i}{n}$ 圈得到圖 B ，則 $R^i F A (R^i F)^T = B$ 。
- 五、已知 $P_1 A_1 P_1 = A_2$ ， $P_2 A_2 P_2 = A_3$ ， \dots ， $P_x A_x P_x = \psi$ 。則圖 A_1 可通過 k 次換點得到圖 ψ 若且唯若存在 k 個基本排列矩陣，使得 $(P'_1 P'_2 \dots P'_k) (P_x P_{x-1} \dots P_1) = R^i$ or $R^i F$ or I 。
- 六、將 F 、 RF 、 \dots 、 $R^{n-1}F$ 拆分為個數最少的數個基本排列矩陣相乘後，所有可能的的基本排列矩陣 $P_{(x,y)}$ 都恰出現一次，且 $P_{(x,y)}$ 都能夠在 F 、 RF 、 \dots 、 $R^{n-1}F$ 拆分成個數最少的基本排列矩陣相乘中找到。
- 七、設圖 N 為正 n 邊形、圖 A 為符合規則的 n 點圖形，若 P 、 PR^i 、 $PR^i F$ 視為等價排列矩陣，且 $\exists P_1 \neq P_2$ ，使得 $P_1 N P_1^T \simeq A$ 、 $P_2 N P_2^T \simeq A$ ，則 P_2 、 P_1 為等價排列矩陣。
- 八、圖 A 到圖 B 最少的換點次數 $\leq i_{\max}(n)$ 。
- 九、若 $PNP^T \simeq A$ ，觀察矩陣 P 中每一組斜率為 ± 1 的斜線，再將不在斜線上的元素1利用基本排列矩陣換回斜線上後，找到基本排列矩陣最少的結果，便可得到圖形的層數。
- 十、求出正 n 邊形中所有不同構的 n 點圖形個數的一般式。

伍、未來展望

- 一、找出更有效率得到最高層圖形的方法，並求出目的三中 $i_{\max}(n)$ 和 n 的關係式。
- 二、求出圖 A 換到圖 B 所需的最少換點次數並找出其路徑。
- 三、若變更規則只經過小於 n 個點，則相同研究中換點次數與其路徑之變化。

陸、參考文獻

- 一、線性代數在圖論中的應用（一）：鄰接矩陣（2010年1月8日）。線代啟示錄。取自<https://reurl.cc/L4kVy4>。
- 二、矩陣視覺化（2009年8月4日）。線代啟示錄。取自：<https://reurl.cc/6769rb>。
- 三、特殊矩陣（16）：排列矩陣（2012年3月23日）。線代啟示錄。取自：<https://reurl.cc/37z24V>。
- 四、蔡怡真、王之好、林乙岑。中華民國第63屆中小學科學展覽會作品說明書—回首向來蕭瑟處—一筆畫迴圈圖形。國立科學教育館。取自：<https://reurl.cc/OGyng3>。
- 五、Joseph J. Rotman.(1995). An Introduction to the Theory of Groups (fourth edition). Counting Orbits(pp.58-59).NY: Springer-Verlag.
- 六、Burton, M. Burton. (2002). Elementary Number Theory (fifth edition). 7.2 Euler's Phi-Function(pp.127~129).NY:McGraw-Hill.