中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第二名

050403

四方輻輳-探討正方形加權費馬點之位置變化

學校名稱： 臺中市立文華高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 謝多 高二 孫承玉 高二 蔡承育	盧宥任

關鍵詞： 加權費馬點、雙變數函數、平面幾何

摘要

本研究主要在探討費馬點在正方形四頂點具有加權的狀況時，尋找隨著加權情況變化而移動的費馬點位置。我們從原費馬點研究三角形一般加權情況開始發想，將費馬點研究推廣至由正方形加權情況下的特殊化結果，利用加權的對稱性，來解得不同加權情況下的費馬點位置，也利用偏微分和物理觀點證明了一般正加權情況下的唯一性。最後，我們將研究推廣至負加權的情況，並找出特定加權條件下，存在費馬點的條件。

壹、研究動機

在尋找題目的過程中，找到了一篇利用最小位能找尋三角形加權費馬點的研究，這引起了我們的好奇。而在後來查找資料時，我們找到了一份討論三角形加權費馬點的報告，其中給出了一般加權情況的解，我們想知道如果把加權費馬點延伸至多邊形的情況，又會有怎樣的結論，因此我們開始從最簡單的情況—「正方形」開始研究。

貳、文獻探討

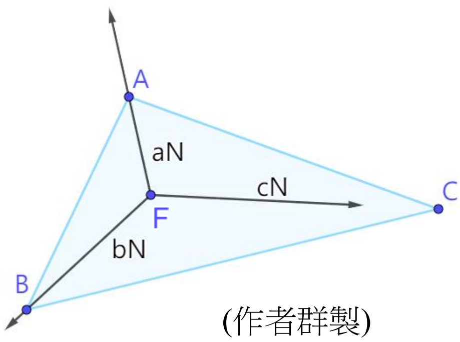
在研究過程中，我們找到了一些討論關於三角形加權費馬點的作品，其中有提到加權費馬點的一些性質，分述如下：

一、三角形加權狀況

目前三角形加權費馬點的一般情況已有解，且特定角度的 sin 值比將與線段長的加權係數有密切相關。

二、物理觀點

考慮平面上一點 F 受到往三角形 ABC 各頂點的守恆力分別為 aN, bN, cN 如右圖，則當該系統穩定平衡時，$a\overline{FA}+b\overline{FB}+c\overline{FC}$ 將會有最小值。

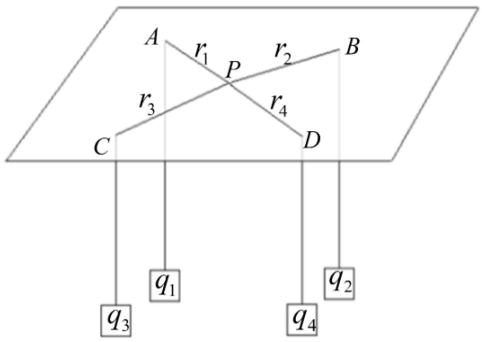


(作者群製)

我們參考「數學傳播 32 卷 3 期，pp.75-79」之 3 力平衡內容，並將該結論推廣至 4 力。

【證明】：物理觀點推廣至四點後仍然適用

如右圖，在 $ABCD$ 所在平面內的 A,B,C,D 四點各鑽一孔，將四繩繫在一起並設結點為 P，繩子分別穿過四孔，繩下所受重力分別為 q_1,q_2,q_3,q_4，當它們平衡時，它們離地高度分別為 h_1,h_2,h_3,h_4，則整個系統的位能 E 即為 $q_1h_1+q_2h_2+q_3h_3+q_4h_4$



(作者群製)

設結點 P 到 A,B,C,D 四點的距離為 r_1,r_2,r_3,r_4 且繫四重物的繩長分別為 l_1,l_2,l_3,l_4，又若平面離地面高度為 h，則有 $r_i+(h-h_i)=l_i,(i=1,2,3,4)$ 即 $h_i=r_i+h-l_i$，故前式可寫為

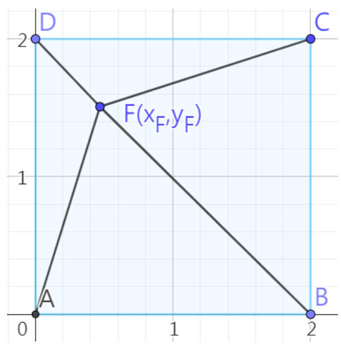
$E=q_1r_1+q_2r_2+q_3r_3+q_4r_4+c, c=(q_1+q_2+q_3+q_4)h-(q_1l_1+q_2l_2+q_3l_3+q_4l_4)$ 為常量。

顯然當位能 E 最小，即 $q_1r_1+q_2r_2+q_3r_3+q_4r_4=E-c$ 最小時，系統處於平衡。

在接下來的研究中將會使用到此物理觀點，因此先行證明。

參、符號定義

在報告中，會設加權費馬點為 $F(x_F,y_F)$，並在坐標平面上取一正方形 $ABCD$，坐標分別為 $A(0,0),B(2,0),C(2,2),D(0,2)$，如右圖。而我們將以 (a,b,c,d) 來表示 $a\overline{FA}+b\overline{FB}+c\overline{FC}+d\overline{FD}$ 的加權係數，其中 $a,b,c,d\neq 0$。



(作者群製)

肆、研究目的與研究架構

一、研究目的

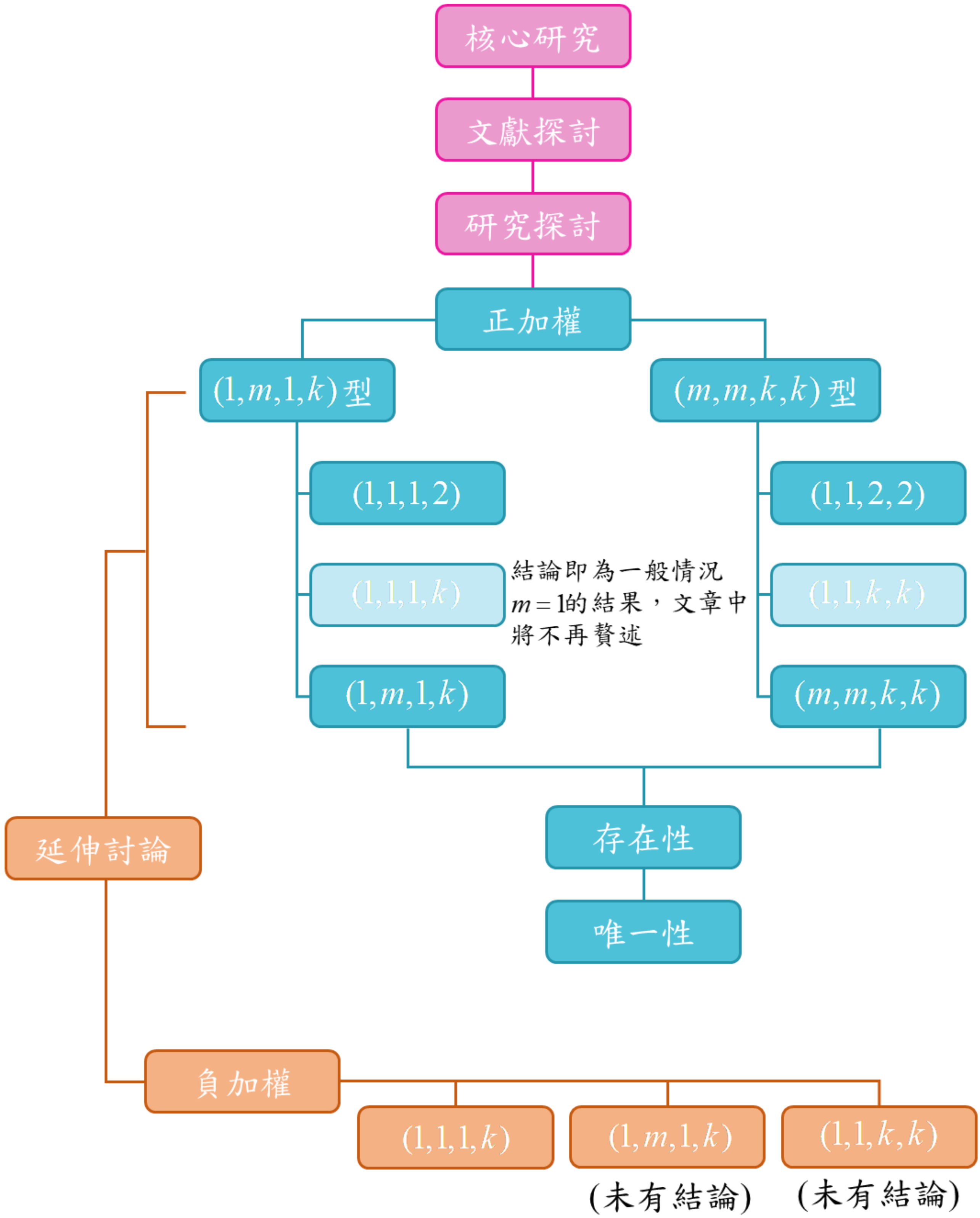
(一)加權 $(1,m,1,k)$，$k\geq m>0$ 時，求得 F 位置

(二)加權 (m,m,k,k)，$k\geq m>0$ 時，求得 F 位置

(三)一般正加權情況 (a,b,c,d)，$a,b,c,d>0$ 時，證明 F 存在且唯一

(四)加權 $(1,1,1,k)$，$k<0$ 時，求得 F 位置

二、研究架構流程圖



核心研究
文獻探討
研究探討
正加權
$(1,m,1,k)$ 型
(m,m,k,k) 型
$(1,1,1,2)$
$(1,1,1,k)$
$(1,m,1,k)$
$(1,1,2,2)$
$(1,1,k,k)$
(m,m,k,k)
結論即為一般情況 $m=1$ 的結果，文章中將不再贅述
存在性
唯一性
延伸討論
負加權
$(1,1,1,k)$
$(1,m,1,k)$
(未有結論)
$(1,1,k,k)$
(未有結論)

伍、研究過程與方法

(一) 問題：加權 $(1,m,1,k)$ ，$k \ge m > 0$ 時，F 位置為何?

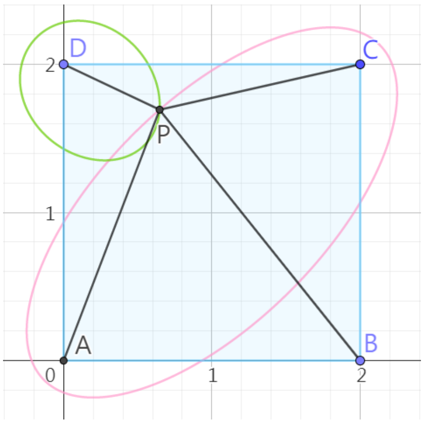
一、取 $m=1, k=2$

【步驟一】：證明當 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$ 有最小值時，F 落在 $x+y=2$ 上

考慮兩圖形 $\Gamma_s=\left\{P\middle|\overline{PA}+\overline{PC}=s, s\ge 2\sqrt{2}\right\}, \Gamma_t=\left\{P\middle|\overline{PB}+2\overline{PD}=t, t\ge 2\sqrt{2}\right\}$ 如圖 1，其中 Γ_s 是以 A 、 C 為焦點的橢圓(當 $s=2\sqrt{2}$ 時 Γ_s 即為 $\overline{AC}$)。

$s+t$ 最小值會發生在 Γ_s 和 Γ_t 相切時，此最小值即為 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$ 之最小值，說明如下：

【說明】：最小值會發生在 Γ_s 和 Γ_t 相切時



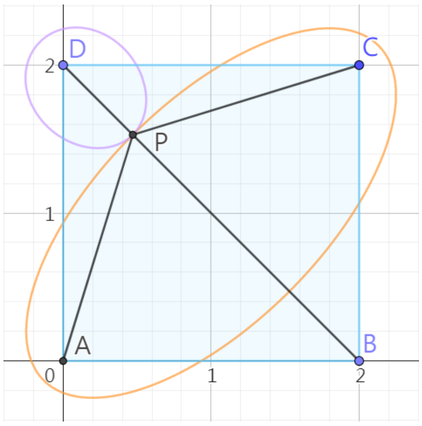


圖 1： $s=2.4, t=3.6$ (作者群製)　圖 2： $s=2.4, t=2.7...$(作者群製)

由圖 1 可知，Γ_s 及 Γ_t 交於兩點時，可求得其對應的 s,t 值，再將圖 1 和圖 2 進行比較，當固定 s 值 (即固定 Γ_s)時，可發現圖 1 的 t 值並非最小值。

因而推得：若要求 t 之最小值且 Γ_s 及 Γ_t 至少交於一點的情況，會發生在 Γ_s 和 Γ_t 的圖形相切時，如圖 2(但 Γ_s 和 Γ_t 相切時，不一定是 $s+t$ 的最小值)。

我們又發現Γ_s和Γ_t的圖形都對稱於$x+y=2$，對稱性證明如下：

【證明】：Γ_s和Γ_t的圖形都對稱於$x+y=2$

$\overline{PB}+2\overline{PD}=t$的方程式為$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+2\sqrt{x^2+(y-2)^2}=t$，取其上一點$P(x,y)$，將$P$對稱$x+y=2$後可得$P_0(x_0,y_0)=(2-y,2-x)$，代入$\Gamma_t$的方程式：

$$\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0)^2}+2\sqrt{(x_0)^2+(y_0-2)^2}=\sqrt{(-y)^2+(2-x)^2}+2\sqrt{(2-y)^2+(-x)^2}=t$$

$\Rightarrow P_0\in\Gamma_t\Rightarrow\Gamma_t$為線對稱圖形，其對稱軸為$x+y=2$。

$\because A$、C為Γ_s圖形(橢圓)的焦點，且$x+y=2$是$\overline{AC}$的中垂線

$\therefore x+y=2$也是Γ_s的對稱軸。

由上述證明可知：若Γ_s和Γ_t的圖形相切，切點會在$x+y=2$上

【步驟二】：求$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$有最小值時$F$點的坐標

由上敘述可知，可設$F(x_F,2-x_F),0\le x_F\le 2$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}\\&=\sqrt{2(x_F)^2-4x_F+4}+\sqrt{2(x_F)^2-8x_F+8}+\sqrt{2(x_F)^2-4x_F+4}+2\sqrt{2(x_F)^2}\\&=\sqrt{2}(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+x_F+2)\end{aligned}$$

我們希望求上式最小值。

取點$O(0,0),E(1,1),G(1,0),J(x_F,0)$，如圖 3

則$\sqrt{2}(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+x_F+2)=\sqrt{2}(2\overline{EJ}+\overline{OJ}+2)$

由圖可發現，上式有最小值時，$0\le x_F\le 1$。

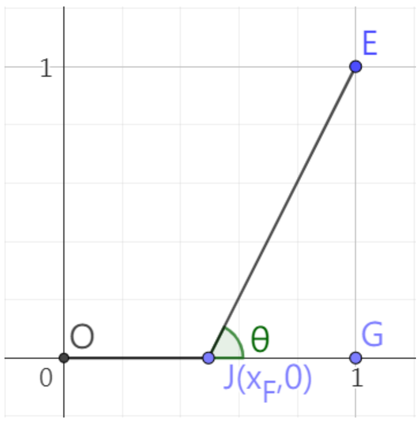


圖 3 (作者群製)

令θ為$\overrightarrow{JE}$的方向角

$\because 0\le x_F\le 1$

$\therefore 45^\circ\le\theta\le 90^\circ$

$$\Rightarrow \overline{EJ}=\frac{1}{\sin\theta},\overline{GJ}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\overline{OJ}=1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow 2\overline{EJ}+\overline{OJ}=\frac{2}{\sin\theta}+1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=1+\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}=1+\frac{2-\sin\left(90^\circ+\theta\right)}{-\cos\left(90^\circ+\theta\right)}$$

令O_1為以$O(0,0)$為圓心的單位圓，在其上取一點$Q\left(\cos\left(90^\circ+\theta\right),\sin\left(90^\circ+\theta\right)\right)$，

$135^\circ\le 90^\circ+\theta\le 180^\circ$

在平面上取一點$K(0,2)$，則$\frac{2-\sin\left(90^\circ+\theta\right)}{-\cos\left(90^\circ+\theta\right)}$即為$m_{\overline{QK}}$，

當$m_{\overline{QK}}>0$且有最小值時，$\overleftrightarrow{QK}$與O_1相切，如圖 4

$\Rightarrow \angle OQK=90^\circ$ 又 $\overline{OK}:\overline{OQ}=2:1$

$\Rightarrow \theta=60^\circ$

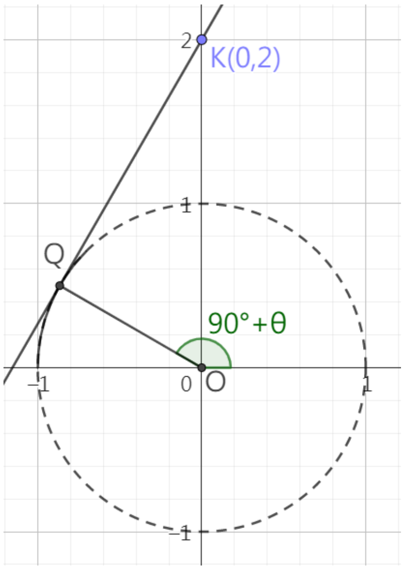


圖 4 (作者群製)

$$\Rightarrow \overline{OJ}=1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}=x_F$$

$\Rightarrow \overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$ 有最小值時，F 坐標為$(\frac{3-\sqrt{3}}{3},\frac{3+\sqrt{3}}{3})$

「物理觀點」：

考慮以下情況：在平面上取一正方形$A_0B_0C_0D_0$及內部一點F_0並施予F_0點 4 個指向正方形頂點的力$\overrightarrow{F_{A_0}},\overrightarrow{F_{B_0}},\overrightarrow{F_{C_0}},\overrightarrow{F_{D_0}}$，四力大小分別為$1\text{N},1\text{N},1\text{N},2\text{N}$，並設$\overrightarrow{F_{A_0}},\overrightarrow{F_{B_0}}$夾角為$\theta$，如圖 5。

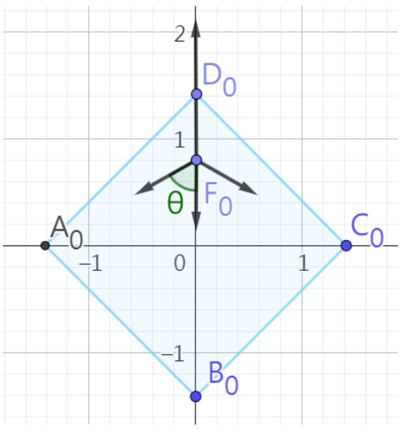


圖 5 (作者群製)

由物理觀點可知，4 力平衡時，$\overline{A_0F_0}+\overline{B_0F_0}+\overline{C_0F_0}+2\overline{D_0F_0}$ 會有最小值。

顯然此時水平和力為零，而由鉛直合力可得：

$$\cos\theta\left(\left|\overrightarrow{F_{A_0}}\right|+\left|\overrightarrow{F_{C_0}}\right|\right)+\left|\overrightarrow{F_{B_0}}\right|=\left|\overrightarrow{F_{D_0}}\right|$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

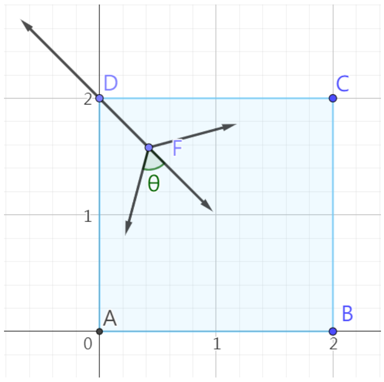


圖 6 (作者群製)

將圖形轉向並平移後，即可求得 F 坐標為 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3},\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$，如圖 6，**此結果與數學方法之結論完全相同**。

二、取 $m>0,k>0$，不失一般性假設 $k\geq m$

【步驟一】：證明當 $\overline{FA}+m\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$ 有最小值時，F 落在 $x+y=2$ 上

以上述想法可以知道，可取 F 在 $x+y=2$ 上，這裡用另一種方式說明 F 為何在 $x+y=2$ 上。

【證明】：F 落在 $x+y=2$ 上

取 $P\in\overline{BD}$ 且 $P\notin\overline{AC}$，並取 $P'\notin\overline{BD}$ 且 $\overline{PP'}\perp\overline{BD}$，如圖 7。

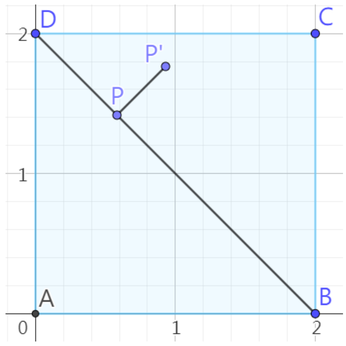


圖 7 (作者群製)

$PP'CA$ 為一梯形，將 C 以 $\overleftrightarrow{PP'}$ 為軸作對稱點 C'，如圖 8。

可得 $\overline{P'A}+\overline{P'C'}>\overline{PA}+\overline{PC'}$，又因 $\overline{P'C'}=\overline{P'C}$ 和 $\overline{PC'}=\overline{PC}$

可推得 $\overline{P'A}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PC}$ 且顯然 $\overline{P'B}>\overline{PB},\overline{P'D}>\overline{PD}$

$\therefore\overline{P'A}+m\overline{P'B}+\overline{P'C}+k\overline{P'D}>\overline{PA}+m\overline{PB}+\overline{PC}+k\overline{PD}$

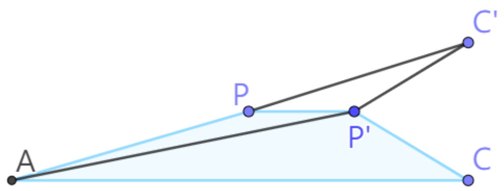


圖 8 (作者群製)

$\Rightarrow$ 當 $\overline{FA}+m\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$ 有最小值時，F 會在 $x+y=2$ 上。

【步驟二】：求 $\overline{FA}+m\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$ 有最小值時，F 點的坐標為何

設 $F(x_F,2-x_F),0\leq x_F\leq 2$

$$\Rightarrow \overline{FA}+m\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$$
$$=\sqrt{2(x_F)^2-4x_F+4}+m\sqrt{2(x_F)^2-8x_F+8}+\sqrt{2(x_F)^2-4x_F+4}+k\sqrt{2(x_F)^2}$$
$$=\sqrt{2}\left(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+2m+\left(k-m\right)x_F\right)$$

我們希望求上式最小值。

取點 $O(0,0),E(1,1),G(1,0),J(x_F,0)$ ，如圖 9。

則 $\sqrt{2}\left(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+2m+\left(k-m\right)x_F\right)=\sqrt{2}\left(2\overline{EJ}+(k-m)\overline{OJ}+2m\right)$

情況 1： $k>m$

由圖 9 可發現，上式有最小值時， $0\le x_F\le 1$ 。

令 θ 為 $\overrightarrow{JE}$ 的方向角

$\because 0\le x_F\le 1$
$\therefore 45^\circ\le\theta\le 90^\circ$

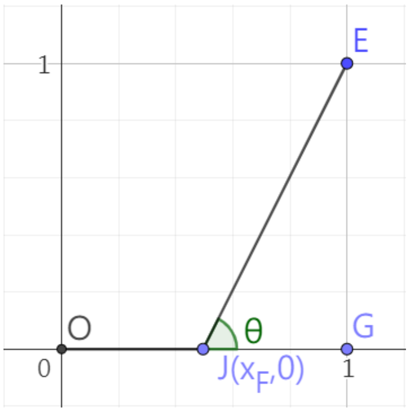


圖 9 (作者群製)

$$\Rightarrow \overline{EJ}=\frac{1}{\sin\theta},\overline{GJ}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta},\overline{OJ}=1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow 2\overline{EJ}+\left(k-m\right)\overline{OJ}$$
$$=2(\frac{1}{\sin\theta})+(k-m)(1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta})$$
$$=(k-m)(1+\frac{\frac{2}{k-m}-\sin\left(90^\circ+\theta\right)}{-\cos(90^\circ+\theta)})$$

令 O_1 為以 $O(0,0)$ 為圓心的單位圓，在其上取一點 $Q\left(\cos\left(90^\circ+\theta\right),\sin\left(90^\circ+\theta\right)\right)$ ，

$135^\circ\le 90^\circ+\theta\le 180^\circ$ ，並取一點 $K(0,\frac{2}{k-m})$ 。

則 $\dfrac{\frac{2}{k-m}-\sin\left(90^\circ+\theta\right)}{-\cos(90^\circ+\theta)}$ 即為 $m_{\overline{QK}}(m_{\overline{QK}}>0)$ ，以下利用 K 的位置討論 $m_{\overline{QK}}$ 之最小值：

(1)當 $\frac{2}{k-m} > \sqrt{2}$ (即 $0 < k-m < \sqrt{2}$)時，$\overline{QK}$ 與 O_1 相切，

如圖 10。

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{(\frac{2}{k-m})^2 - 1^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}}{k-m}$$

$$\Rightarrow \overline{OJ} = 1 - \frac{1}{\tan\theta} = 1 - \frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}} = x_F$$

$\Rightarrow$ 此時 F 坐標為

$$(1-\frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}}, 1+\frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}})$$

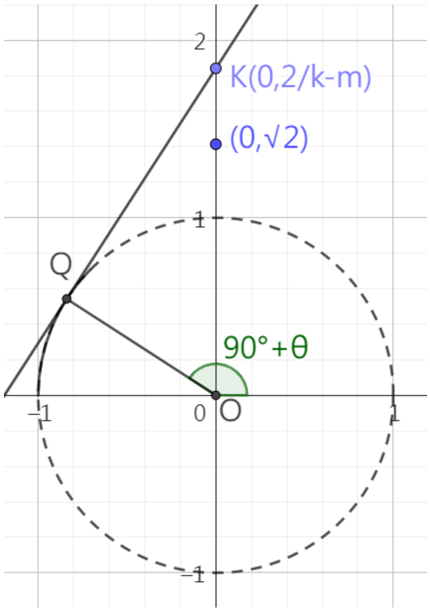


圖 10 (作者群製)

(2)當 $0 < \frac{2}{k-m} \le \sqrt{2}$ (即 $k-m \ge \sqrt{2}$)時，注意到

$135° \le 90° + \theta \le 180°$，則當 $m_{\overline{QK}}$ 有最小值時，

$\theta = 45°$，如圖 11。

$\Rightarrow$ 此時 F 坐標為 $(0,2)$

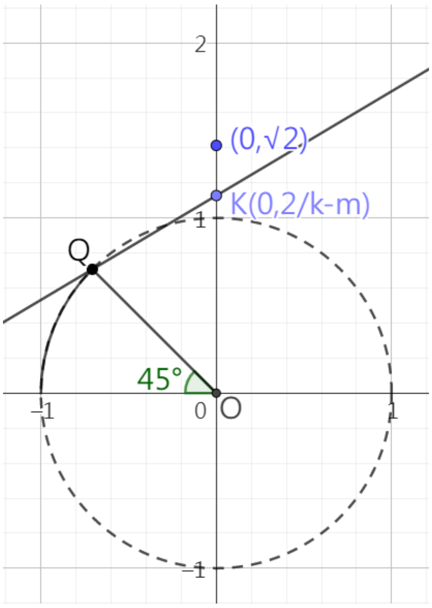


圖 11 (作者群製)

情況 2： $k = m$

此時即為求 $\sqrt{2}\left(2\overline{EJ}+2m\right)$ 的最小值，顯然當 $x_F = 1$ 時有最小 $\Rightarrow$ 此時 F 坐標為 $(1,1)$

結論：加權 $(1,m,1,k)$，取 $k \ge m > 0$

(1)當 $\frac{2}{k-m} > \sqrt{2}$ 時，F 坐標為 $(1-\frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}}, 1+\frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}})$

(2)當 $0 < \frac{2}{k-m} \le \sqrt{2}$ 時，F 坐標為 $(0,2)$

(3)當 $k-m=0$ 時，F 坐標為 $(1,1)$

(二) 問題：加權 (m,m,k,k)，$k \geq m > 0$，F 位置為何?

一、取 $m=1, k=2$

【步驟一】：證明當 $\overline{FA}+\overline{FB}+2\overline{FC}+2\overline{FD}$ 有最小值時，F 落在 $x=1$ 上

【證明】： F 落在 $x=1$ 上

在 $x=1$ 上取一點 P，另取一點 $P' \neq P$ 使 $\overline{P'P}$ 垂直 $x=1$，如圖 12。

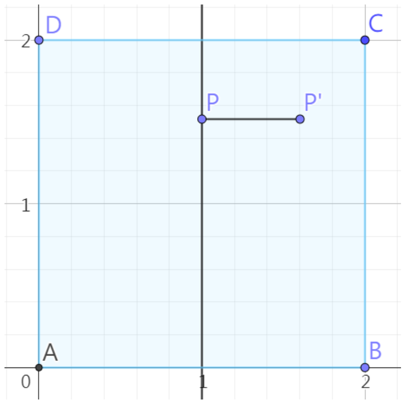


圖 12 (作者群製)

此時 $\overline{P'A}+\overline{P'B} \geq \overline{PA}+\overline{PB}$ 且 $2\overline{P'C}+2\overline{P'D} \geq 2\overline{PC}+2\overline{PD}$

等號成立時 P 在 $\overline{AB}$ 或 $\overline{CD}$ 上，而顯然無法同時成立

$\Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}+2\overline{PC}+2\overline{PD} < \overline{P'A}+\overline{P'B}+2\overline{P'C}+2\overline{P'D}$

$\Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}+2\overline{PC}+2\overline{PD}$ 之最小值會發生於 P 在 $x=1$ 上。

因此可設 $F(1, y_F)$，並將 $\overline{PA}+\overline{PB}+2\overline{PC}+2\overline{PD}$ 以 $f(y)=2(\sqrt{1+y^2}+2\sqrt{1+(2-y)^2})$ 表示。

$$f'(y)=2(\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}+2\frac{2(2-y)(-1)}{2\sqrt{1+(2-y)^2}})=2(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+2\frac{y-2}{\sqrt{1+(2-y)^2}})=2(\sin\varphi-2\sin\theta)$$

其中角度 φ、θ 如圖 13。

【步驟二】：證明當 $f'(y)=0$ 時 $f(y)$ 有最小值並求出兩角度關係

取一 $P(1,y)$ 使得 $f'(y)=0$，此時 $\sin\varphi-2\sin\theta=0$

並另取一點 $P_0(1,y_0)$，以下將利用 P 和 P_0 兩點位置做討論：

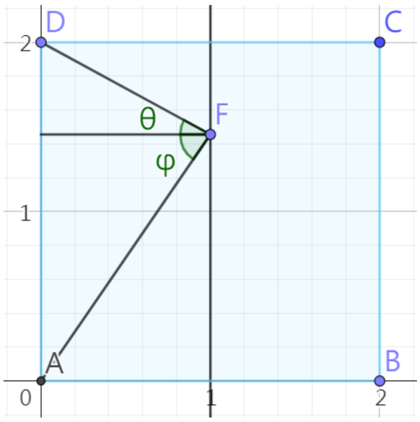


圖 13 (作者群製)

情況 1： $y_0 > y$

此時 $\theta_0 < \theta, \varphi_0 > \varphi$ (如下頁圖 14) $\Rightarrow \sin\varphi_0 - 2\sin\theta_0 > 0 \Rightarrow$ 該函數在此範圍遞增。

情況 2： $y_0 < y$

此時 $\theta_0 > \theta, \varphi_0 < \varphi$ (如下頁圖 15) $\Rightarrow \sin\varphi_0 - 2\sin\theta_0 < 0 \Rightarrow$ 該函數在此範圍遞減。

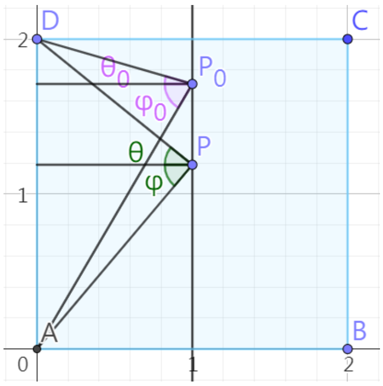


圖 14 (作者群製)

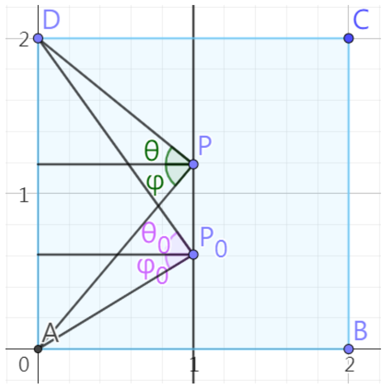


圖 15 (作者群製)

由上述推論可知當 $f'(y)=0$ 時 $f(y)$ 有最小值 $\Rightarrow f'(y_F)=0$ 且 $\sin\varphi=2\sin\theta \Rightarrow \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}=2$

「物理觀點」：

考慮以下情況：在平面上取一正方形 $ABCD$ 及內部一點 F 並施予 F 點 4 個指向正方形頂點的力 $\overrightarrow{F_A},\overrightarrow{F_B},\overrightarrow{F_C},\overrightarrow{F_D}$ ，四力大小分別為 $1\text{N},1\text{N},2\text{N},2\text{N}$ ，並設角度 φ 、 θ 如圖 16。

由物理觀點可知，4 力平衡時， $\overline{AF}+\overline{BF}+2\overline{CF}+2\overline{DF}$ 會有最小值。

顯然此時水平和力為零，而由鉛直合力可得：

$$\sin\varphi(\left|\overrightarrow{F_A}\right|+\left|\overrightarrow{F_B}\right|)=\sin\theta(\left|\overrightarrow{F_C}\right|+\left|\overrightarrow{F_D}\right|)$$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}=2$ ，**此結果與數學方法之結論完全相同**。

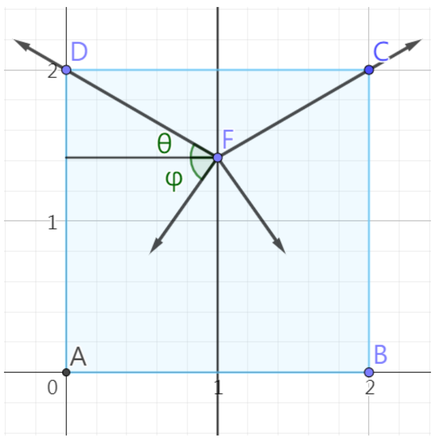


圖 16 (作者群製)

二、取 $m>0,k>0$ ，不失一般性假設 $k\ge m$

由前述【**步驟一**】和【**步驟二**】的論述可知， F 落在 $x=1$ 上且 $f'(y_F)=0 \Rightarrow \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\dfrac{k}{m}$

結論：加權 (m,m,k,k) ，取 $k\ge m>0$

此時 $F(1,y_F)$ 滿足 $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\dfrac{k}{m}$ ，其中角度 φ 、 θ 如圖 13。

(三) 問題：一般正加權情況 (a,b,c,d)，$a,b,c,d>0$ 時，F 是否唯一?

在經過上述的討論後，我們發現在正加權的況下時，好像都可以找到一個唯一的 F 。我們想知道是否在**任何**一般正加權情況下，費馬點都具有唯一性，於是我們開始以一般正加權情況 (a,b,c,d) 進行討論。

【步驟一】：說明費馬點必存在

顯然，在 $a,b,c,d>0$ 時，若存在費馬點，則必定落在正方形內(含邊和頂點)

考慮 $z=f(x,y)=a\overline{PA}+b\overline{PB}+c\overline{PC}+d\overline{PD}$ ，可知此函數為四個距離函數的相加

$\Rightarrow$ 該函數為平滑且連續的函數，如圖 17 (註：此圖為 $(a,b,c,d)=(1,2,3,3)$ 之圖形，且經過上下平移處理)

$\Rightarrow$ 必可在 $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$ 的範圍找到至少一個最小值。

$\Rightarrow$ 費馬點必存在

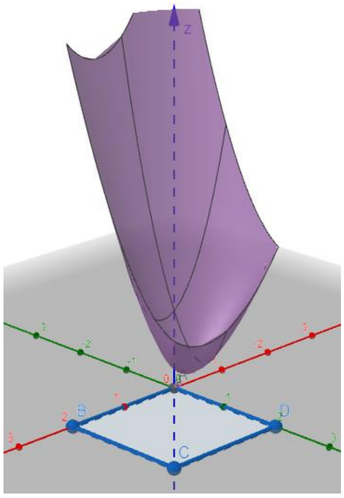


圖 17 (作者群製)

【步驟二】：證明費馬點唯一並找出位置或滿足的條件

接下來，我們將利用偏微分和物理觀點來證明一般情況的 F 點唯一。

情況 1：加權使費馬點落在正方形內部

令 $f(x,y)=a\overline{PA}+b\overline{PB}+c\overline{PC}+d\overline{PD}$

$$=a\sqrt{x^2+y^2}+b\sqrt{(x-2)^2+y^2}+c\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+d\sqrt{x^2+(y-2)^2}$$

則 $f_x=\dfrac{a\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{b\cdot(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}+\dfrac{c\cdot(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}+\dfrac{d\cdot x}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}$

$$=a\cdot\cos\theta_2-b\cdot\cos\theta_4-c\cdot\cos\theta_3+d\cdot\cos\theta_1$$

$f_y=\dfrac{a\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{b\cdot y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}+\dfrac{c\cdot(y-2)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}+\dfrac{d\cdot(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}$

$=a\cdot\sin\theta_2+b\cdot\sin\theta_4-c\cdot\sin\theta_3-d\cdot\sin\theta_1$ ，$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 如圖 18。

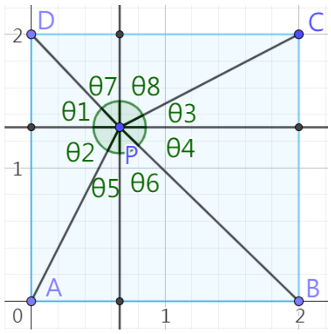


圖 18 (作者群製)

若可證明 $f_x=f_y=0$ 有唯一解，即可證明費馬點具有唯一性，而該解將對應到費馬點位置。

【證明】：$f_x = f_y = 0$ 有唯一解

設 P 滿足 $f_x = f_y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a\cdot\cos\theta_2 + d\cdot\cos\theta_1 = b\cdot\cos\theta_4 + c\cdot\cos\theta_3 \cdots(\alpha) \\ a\cdot\sin\theta_2 - d\cdot\sin\theta_1 = -b\cdot\sin\theta_4 + c\cdot\sin\theta_3 \cdots(\beta) \end{cases}$

〈步驟 1〉：

將 $(\alpha)(\beta)$ 兩式平方後相加

$\Rightarrow a^2 + d^2 + 2ad(\cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1) = b^2 + c^2 + 2bc(\cos\theta_3\cos\theta_4 - \sin\theta_3\sin\theta_4)$

$\Rightarrow 2ad\cdot\cos(\theta_2+\theta_1) - 2bc\cdot\cos(\theta_3+\theta_4) = b^2 + c^2 - a^2 - d^2 =$ 常數

〈步驟 2〉：

做□DAP 外接圓，如圖 19。

說明：若有一點 P' 在弧 DPA 上，則由對同弧的圓周角相等之性質可知 $\angle DP'A = \angle DPA$，即 $\theta_2+\theta_1$ 維持不變。

同理，做□BCP 的外接圓。

〈步驟 3〉：

在塗色範圍(含邊界)取一 P'

(1) P' 在左邊塗色範圍：此時 $\begin{cases} \cos(\theta_2+\theta_1) \ge \cos(\theta_2'+\theta_1') \\ \cos(\theta_3+\theta_4) \le \cos(\theta_3'+\theta_4') \end{cases}$

$\Rightarrow 2ad\cdot\cos(\theta_2'+\theta_1') - 2bc\cdot\cos(\theta_3'+\theta_4') \le b^2 + c^2 - a^2 - d^2$

(2) P' 在右邊塗色範圍：此時 $\begin{cases} \cos(\theta_2+\theta_1) \le \cos(\theta_2'+\theta_1') \\ \cos(\theta_3+\theta_4) \ge \cos(\theta_3'+\theta_4') \end{cases}$

$\Rightarrow 2ad\cdot\cos(\theta_2'+\theta_1') - 2bc\cdot\cos(\theta_3'+\theta_4') \ge b^2 + c^2 - a^2 - d^2$

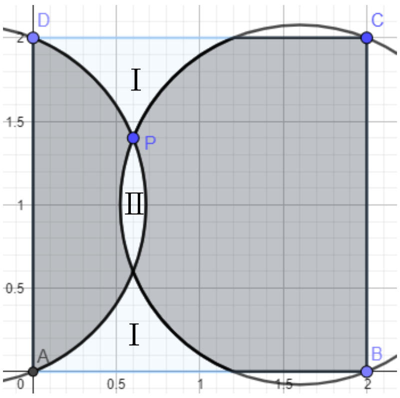


圖 19 (作者群製)

由上述討論可知除了兩圓交點，在塗色範圍內找不到一點 P' 滿足 $f_x = f_y = 0$。

〈步驟 4〉：

因為 $\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8$ 分別是 $\theta_2,\theta_4,\theta_1,\theta_3$ 的餘角 $\Rightarrow$ 由餘角關係和 $(\alpha)(\beta)$ 兩式可得

$\begin{cases} a\cdot\sin\theta_5 + d\cdot\sin\theta_7 = b\cdot\sin\theta_6 + c\cdot\sin\theta_8 \\ a\cdot\cos\theta_5 - d\cdot\cos\theta_7 = -b\cdot\cos\theta_6 + c\cdot\cos\theta_8 \end{cases}$，$\theta_5,\theta_6,\theta_7,\theta_8$ 如前頁圖 18。

移項整理後可得 $\begin{cases} a\cdot\cos\theta_5 + b\cdot\cos\theta_6 = c\cdot\cos\theta_8 + d\cdot\cos\theta_7 \cdots(\chi) \\ a\cdot\sin\theta_5 - b\cdot\sin\theta_6 = c\cdot\sin\theta_8 - d\cdot\sin\theta_7 \cdots(\delta) \end{cases}$

將 $(\chi)(\delta)$ 兩式平方後相加

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab(\cos\theta_5\cos\theta_6\text{-}\sin\theta_5\sin\theta_6)=c^2+d^2+2cd(\cos\theta_7\cos\theta_8\text{-}\sin\theta_7\sin\theta_8)$$

$$\Rightarrow 2ab\cdot\cos(\theta_5+\theta_6)-2cd\cdot\cos(\theta_7+\theta_8)=c^2+d^2-a^2-b^2=\text{常數}$$

〈步驟 5〉：

做□DCP 和□ABP 的外接圓，在塗色範圍(含邊界)取一 P' 並做以下討論，如圖 20。

(1) P' 在上方塗色範圍：此時 $\begin{cases}\cos(\theta_5+\theta_6)\le\cos(\theta_5'+\theta_6')\\ \cos(\theta_7+\theta_8)\ge\cos(\theta_7'+\theta_8')\end{cases}$

$$\Rightarrow 2ab\cdot\cos(\theta_5'+\theta_6')-2cd\cdot\cos(\theta_7'+\theta_8')\ge c^2+d^2-a^2-b^2$$

(2) P' 在下方塗色範圍：此時 $\begin{cases}\cos(\theta_5+\theta_6)\ge\cos(\theta_5'+\theta_6')\\ \cos(\theta_7+\theta_8)\le\cos(\theta_7'+\theta_8')\end{cases}$

$$\Rightarrow 2ab\cdot\cos(\theta_5'+\theta_6')-2cd\cdot\cos(\theta_7'+\theta_8')\le c^2+d^2-a^2-b^2$$

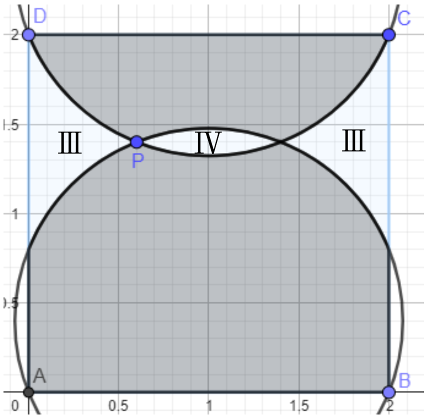


圖 20 (作者群製)

由上述討論可知除了兩圓交點，在塗色範圍內找不到一點 P' 滿足 $f_x=f_y=0$。

〈步驟 6〉：

將未被覆蓋處編號為Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ(不含邊界)，如圖 19、20、21，並做以下討論：

(1) Ⅰ,Ⅲ兩區重疊

在重疊處取一 P'，此時：

$$\begin{cases}\theta_1+\theta_2>\theta_1'+\theta_2'\\ \theta_3+\theta_4>\theta_3'+\theta_4'\\ \theta_5+\theta_6>\theta_5'+\theta_6'\\ \theta_7+\theta_8>\theta_7'+\theta_8'\end{cases}\Rightarrow \theta_1+\ldots+\theta_8=360^\circ>\theta_1'+\ldots+\theta_8'(\text{矛盾})$$

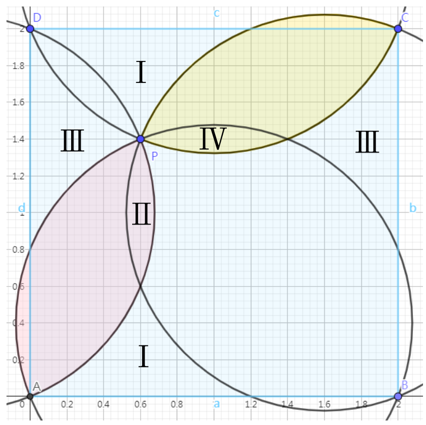


圖 21 (作者群製)

(2) Ⅰ,Ⅳ兩區重疊或Ⅱ,Ⅲ兩區重疊

由圖 20 可知：$\begin{cases}\text{Ⅰ}\cap\text{黃色區塊}=\varnothing\\ \text{Ⅳ}\subseteq\text{黃色區塊}\end{cases}\Rightarrow$ Ⅰ,Ⅳ兩區不重疊

同理可證Ⅱ,Ⅲ兩區不重疊。

(3) Ⅱ,Ⅳ兩區重疊

由圖 20 可知：$\begin{cases}\text{Ⅱ}\subseteq\text{粉色區塊}\\ \text{Ⅳ}\subseteq\text{黃色區塊}\\ \text{黃色區塊}\cap\text{粉色區塊}=\varnothing\end{cases}$

$\Rightarrow$ Ⅰ,Ⅳ兩區不重疊

由以上推論可知，圖 19 和圖 20 的陰影將完全覆蓋正方形

且找不到另一點使$\begin{cases} 2ad\cdot\cos(\theta_2+\theta_1)-2bc\cdot\cos(\theta_3+\theta_4)=b^2+c^2-a^2-d^2 \\ 2ab\cdot\cos(\theta_5+\theta_6)-2cd\cdot\cos(\theta_7+\theta_8)=c^2+d^2-a^2-b^2 \end{cases}$同時成立

$\Rightarrow$無法在正方形內部找到另一點P'滿足$f_x=f_y=0$

$\Rightarrow f_x=f_y=0$有唯一解

「物理觀點」：

考慮以下情況：在平面上取一正方形 $ABCD$ 及內部一點 F 並施予 F 點 4 個指向正方形頂點的力 $\overrightarrow{F_A},\overrightarrow{F_B},\overrightarrow{F_C},\overrightarrow{F_D}$ ，四力大小分別為 aN, bN, cN, dN ，如圖 22。

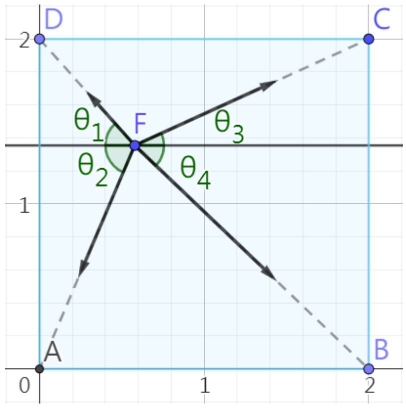


圖 22 (作者群製)

當四力平衡時的平衡點在正方形內部時

$\begin{cases} a\text{N和}d\text{N向左的水平分力的和的量值}=b\text{N和}c\text{N向右的水平分力的和的量值} \\ a\text{N和}b\text{N向下的鉛直分力的和的量值}=c\text{N和}d\text{N向上的鉛直分力的和的量值} \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} a\cdot\cos\theta_2+d\cdot\cos\theta_1=b\cdot\cos\theta_4+c\cdot\cos\theta_3 \\ a\cdot\sin\theta_2+b\cdot\sin\theta_4=c\cdot\sin\theta_3+d\cdot\sin\theta_1 \end{cases}$，**此結果與數學方法之結論完全相同**。

情況 2：加權使費馬點落在正方形頂點

以 D 點為例，即考慮 $F=D$，並考慮以下情況：

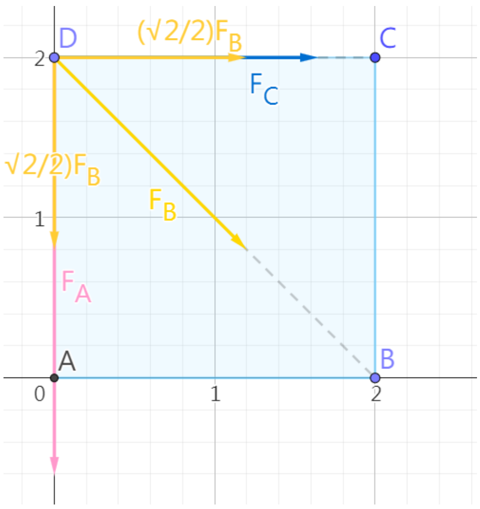


圖 23 (作者群製)

在平面上取一正方形 $ABCD$ 及內部一點 F，並施於 F 點 3 個指向正方形頂點 ABC 的力 $\overrightarrow{F_A},\overrightarrow{F_B},\overrightarrow{F_C}$，三個力的大小分別為 aN,bN,cN，並再施於點一力 $\overrightarrow{F_D}$ 大小為 dN 。

此時 $\overrightarrow{F_A},\overrightarrow{F_B},\overrightarrow{F_C}$ 的鉛直分力量值為 $\left|a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right|$，水平分力量值為 $\left|c+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right|$，如圖 23

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_A}+\overrightarrow{F_B}+\overrightarrow{F_C}\right|=\sqrt{\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2+\left(c+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}$$

$\Rightarrow$若 $d\ge\sqrt{\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2+\left(c+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}$，$F=D(0,2)$，其餘狀況以此類推。

結論：加權 (a,b,c,d)，$a,b,c,d>0$

(1) F 點唯一且該點滿足 $\begin{cases}a\cdot\cos\theta_2+d\cdot\cos\theta_1=b\cdot\cos\theta_4+c\cdot\cos\theta_3\\ a\cdot\sin\theta_2-d\cdot\sin\theta_1=-b\cdot\sin\theta_4+c\cdot\sin\theta_3\end{cases}$，$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 如圖 18

(2)若加權係數滿足 $d\ge\sqrt{\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2+\left(c+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}$，$F$ 為 $(0,2)$，其餘狀況可以此類推。

陸、延伸討論

(四) 問題：加權 $(1,1,1,k)$ ，$k<0$時，F 位置為何?

在上述的研究中，只針對了正加權的情況來討論，而在證明出正加權情況下的費馬點具有存在性和唯一性之後，我們開始好奇負加權的情況又會使費馬點有怎樣的改變。

【說明】： $x_F \geq 1$

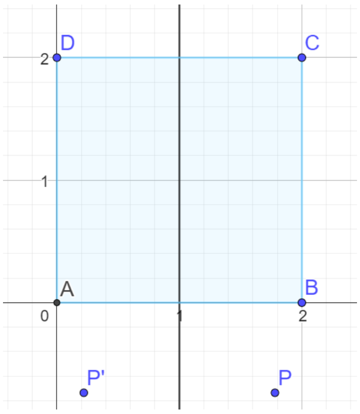


圖 24 (作者群製)

取一 P' 在 $x=1$ 的左側(含 $x=1$)，將其對稱 $x=1$ 得 P ，如圖 24

此時 $\overline{P'A}+\overline{P'B}=\overline{PA}+\overline{PB}$ ，$\overline{P'C}\geq\overline{PC}$ ，$\overline{P'D}\leq\overline{PD}$

$\Rightarrow \overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+k\overline{P'D}\geq\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+k\overline{PD}$

$\Rightarrow x_F \geq 1$

【步驟一】：證明當 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$ 有最小值且 $0>k\geq-1$ 時，F 落在 $x+y=2$ 上且在正方形內(可能在頂點)

〈步驟 1〉：說明 $0>k\geq-1$ 時，F 在 $x+y=2$ 上

取 $P\in\overline{BD}$ 且 $P\notin\overline{AC}$ ，並取 $P'\notin\overline{BD}$ 且 $\overline{PP'}\perp\overline{BD}$ 。

分別以 D,B 為圓心，$\overline{P'D},\overline{P'B}$ 為半徑做圓 C_1,C_2 ，並分別交 $\overline{BD}$ 於 N,M 兩點，可能情況如圖 25、26，不論圖 25 或是 26，皆可推論如下：

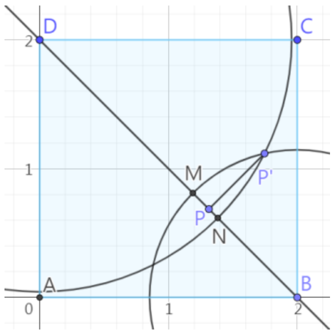


圖 25 (作者群製)

則 $\overline{P'B}+k\overline{P'D}=\overline{BM}+k\overline{DN}=\overline{PM}+k\overline{PN}+(\overline{PB}+k\overline{DP})$

又由圖可知，當 P 的 x 坐標≥1時，$\overline{PM}\geq\overline{PN}$

$\Rightarrow$ 在 $0>k\geq-1$ 時，$\overline{PM}+k\overline{PN}\geq 0$

$\Rightarrow$ 在 $0>k\geq-1$ 時，$\overline{P'B}+k\overline{P'D}\geq\overline{PB}+k\overline{PD}...(\alpha)$

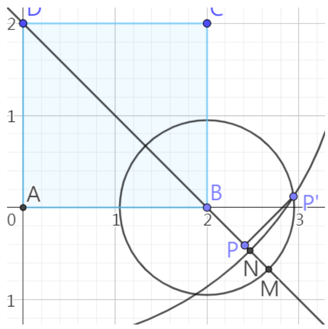


圖 26 (作者群製)

又可由前述想法(第 7 頁【**步驟一**】)知 $\overline{P'A}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PC}...(\beta)$

$\Rightarrow$ 由 $(\alpha)(\beta)$ 兩式可知，在 $0>k\geq-1$ 時，F 在 $x+y=2$ 上

〈步驟 2〉：說明$0>k\geq -1$時，F不在正方形外(可能在頂點)

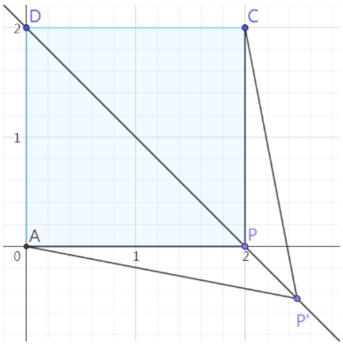


圖 27 (作者群製)

取$P(2,0)$，並在正方形外取一$P'\in\overleftrightarrow{BD}$，如圖 27。

則$\overline{P'B}+k\overline{P'D}=k\overline{PD}+(k\overline{PP'}+\overline{PP'})$，又此時$0>k\geq -1$

$\Rightarrow \overline{P'B}+k\overline{P'D}>k\overline{PD}...(\chi)$

且顯然$\overline{P'A}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PC}...(\delta)$

$\Rightarrow$由$(\chi)(\delta)$兩式可知，在$0>k\geq -1$時，F不在正方形外(可能在頂點)

【步驟二】：求在$0>k\geq -1$時，F點的坐標為何

由上敘述可知，可設$F(x_F,2-x_F),1<x_F\leq 2$

設$f(x)=2\sqrt{2x^2-4x+4}+\sqrt{2x^2-8x+8}+k\sqrt{2x^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}+\frac{-2(2-x)}{\sqrt{2(2-x)^2}}+\frac{2kx}{\sqrt{2x^2}}$$

情況 1：$1<x_F<2$

【證明】：當$1<x<2$時，$f'(x)=0$時$f(x)$有最小值

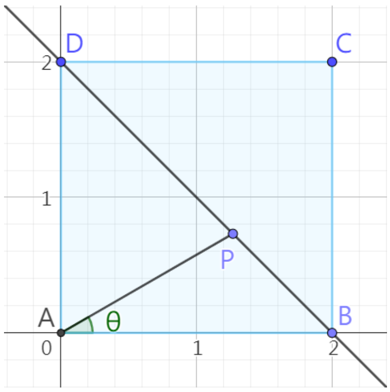


圖 28 (作者群製)

此時$f'(x)=\dfrac{4x-4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}-\sqrt{2}+\sqrt{2}k$

$$=\frac{4x}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}-\frac{4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}-\sqrt{2}+\sqrt{2}k$$

$$=4(\cos\theta-\frac{1}{\overline{PA}})-\sqrt{2}+\sqrt{2}k$$

其中角度θ、$\overline{PA}$如圖 28。

在$x+y=2$上取一$P(x,y)$滿足$f'(x)=0$，在$x+y=2$上另取一$P_0(x_0,y_0)$，以下將利用兩點位置討論。

(1) $x_0 < x$ (如圖 29)：

$\Rightarrow \cos\theta_0 < \cos\theta$ 且 $\overline{P_0A} < \overline{PA} \Rightarrow f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ 左側遞減

(2) $x_0 > x$ (如圖 30)：

$\Rightarrow \cos\theta_0 > \cos\theta$ 且 $\overline{P_0A} > \overline{PA} \Rightarrow f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ 右側遞增

$\Rightarrow$ 由(1) (2)得知，當 $1 < x < 2$ 時， $f'(x) = 0$ 時 $f(x)$ 有最小值。

$\Rightarrow f'(x_F) = 0$

$$\Rightarrow \frac{4x_F - 4}{\sqrt{{x_F}^2 + (2 - x_F)^2}} - \sqrt{2} + \sqrt{2}k = 0$$

$$\Rightarrow (4x_F - 4)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{2}k)^2 \cdot \left[{x_F}^2 + (2 - x_F)^2\right]$$

$\vdots$

$$\Rightarrow x_F = 1 + \frac{1-k}{\sqrt{(1+k)(3-k)}} = 1 + \frac{1-k}{\sqrt{-k^2 + 2k + 3}}$$

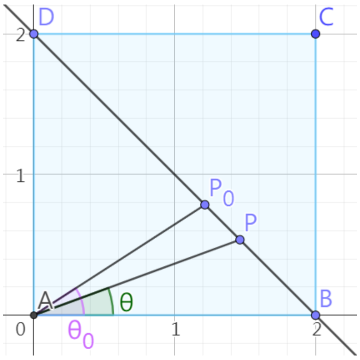


圖 29 (作者群製)

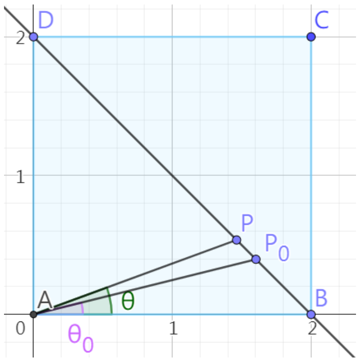


圖 30 (作者群製)

又因 $x_F < 2$

$$\Rightarrow \frac{1-k}{\sqrt{(1+k)(3-k)}} = \frac{1-k}{\sqrt{[2-(1-k)][2+(1-k)]}} < 1 \Rightarrow \frac{(1-k)^2}{4-(1-k)^2} < 1 \Rightarrow (1-k)^2 < 2 \Rightarrow k > 1 - \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ 在 $0 > k > 1 - \sqrt{2}$ 時， F 坐標為 $\left(1 + \frac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}}, 1 - \frac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}}\right)$

情況 2： $x_F = 2$

由【**步驟一**】之推論可知，當 F 不落在正方形內部(不含頂點)時， F 坐標為 $(2,0)$

$\Rightarrow$ 在 $-1 \le k \le 1 - \sqrt{2}$ 時， F 坐標為 $(2,0)$

【步驟三】：證明當 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$ 有最小值且 $k<-1$ 時，F 落在 $x+y=2$ 上且在以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外(可能在圓上)

〈步驟 1〉：說明 $k<-1$ 時，F 在圓外(可能在圓上)

做以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓，在圓內取一點 P'；取 P 為 $(1,1,1,1-\sqrt{2})$ 的費馬點(由【步驟二】情況 2 可知，此時 $P=(2,0)$)，如圖 31

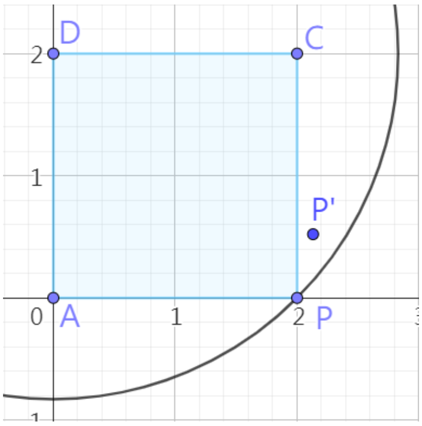


圖 31 (作者群製)

$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+k\overline{P'D}$

$=\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+(1-\sqrt{2})\overline{P'D}+[k-(1-\sqrt{2})]\overline{P'D}$

$>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+(1-\sqrt{2})\overline{PD}+[k-(1-\sqrt{2})]\overline{PD}=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+k\overline{PD}$

$\Rightarrow P'=(2,0)$ 時距離和會更小

$\Rightarrow k<-1$ 時，F 以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外

〈步驟 2〉：說明當 F 落在以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外時，F 在 $x+y=2$ 上

將正方形旋轉並縮小，得 $A_0(-1,0),B_0(0,-1),C_0(1,0),D_0(0,1)$，

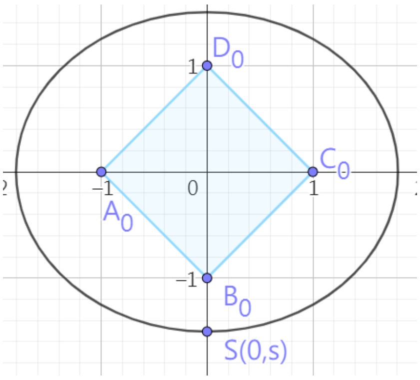


圖 32 (作者群製)

在 $y=s(s\le-1)$ 取一點 S，並做以 A_0,C_0 為焦點且過 S 的橢圓，如圖 32。

在橢圓上取一點 T，由 $\overline{A_0T}+\overline{C_0T}=\overline{A_0S}+\overline{C_0S}=2\sqrt{1+s^2}$ 可知，該橢圓與 x 軸交於 $(\pm\sqrt{1+s^2},0)$ 兩點

因此可設 $T(\sqrt{1+s^2}\cos\theta,-s\sin\theta)$

$$\begin{aligned}\left|\overline{D_0T}\right|^2&=[\sqrt{1+s^2}\cos\theta]^2+(1+s\sin\theta)^2\\&=\cos^2\theta+s^2\cos^2\theta+s^2\sin^2\theta+2s\sin\theta+1\\&\vdots\\&=(s-1)^2+(s+1)^2-(s-\sin\theta)^2\end{aligned}$$

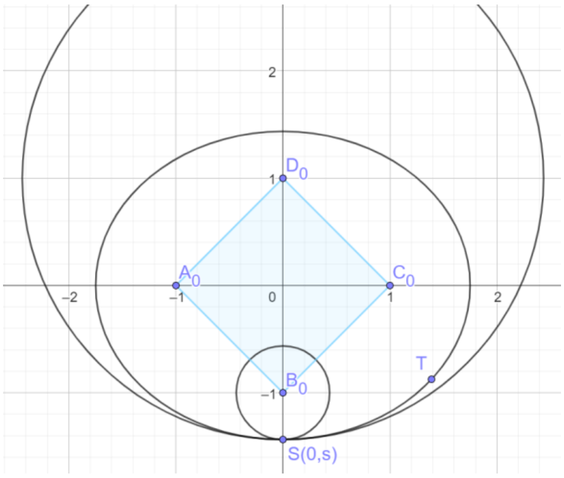


圖 33 (作者群製)

$\because (s+1)^2 \le (s-\sin\theta)^2\ (\because s\le -1, -1\le \sin\theta \le 1)$

$\Rightarrow (s-1)^2+(s+1)^2-(s-\sin\theta)^2 \le (s-1)^2 = \left|\overline{D_0S}\right|^2$

$\Rightarrow \left|\overline{D_0T}\right| \le \left|\overline{D_0S}\right|$

$\Rightarrow$ 橢圓在以為 D_0 圓心，$\overline{D_0S}$ 為半徑的圓內(相切於 S)，如圖 33

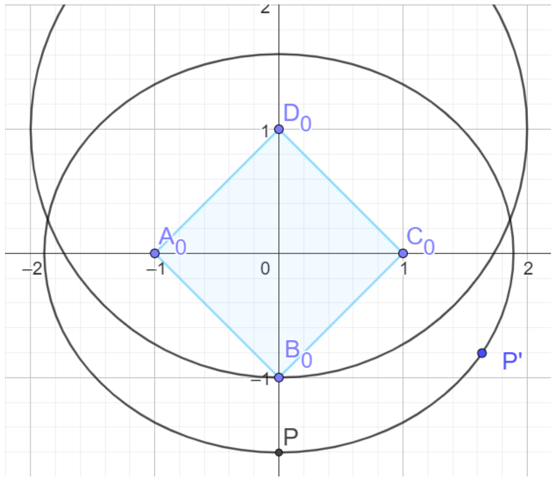


圖 34 (作者群製)

又顯然以為 B_0 圓心，$\overline{B_0S}$ 為半徑的圓在橢圓內(相切於 S)，如圖 33

$\Rightarrow$ 任取以 D_0 為圓心，$\overline{B_0D_0}$ 為半徑的圓外一點 P'，皆可找到一以 A_0, C_0 為焦點的橢圓，且與 y 軸的其中一個交點 P 在 B_0 下方，如圖 34

又因橢圓必在兩圓之間(如圖 35) $\Rightarrow \overline{P'B_0}+k\overline{P'D_0} \ge \overline{PB_0}+k\overline{PD_0}$

$\Rightarrow \overline{PA_0}+\overline{PB_0}+\overline{PC_0}+k\overline{PD_0}$ 有最小值且 P 點落在以 D_0 為圓心，$\overline{B_0D_0}$ 為半徑的圓外時，該點在 y 軸上

$\Rightarrow \overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}$ 有最小值且 F 點落在以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外時，該點在 $x+y=2$ 軸上

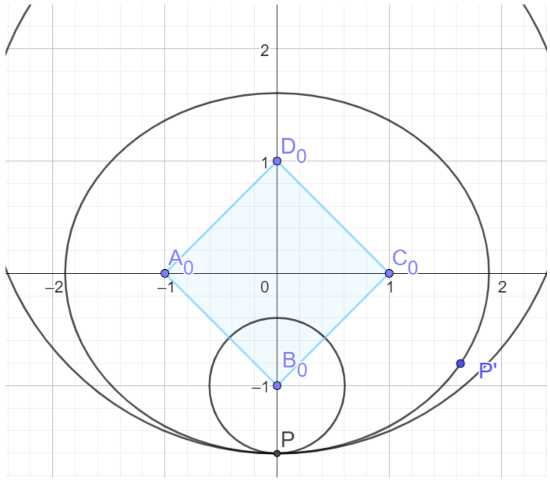


圖 35 (作者群製)

【步驟四】：求在 $k<-1$ 時，F 點的坐標為何

由上敘述可知，可設 $F(x_F, 2-x_F), x_F \ge 2$

設 $f(x)=2\sqrt{2x^2-4x+4}+\sqrt{2x^2-8x+8}+k\sqrt{2x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x-4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}+\dfrac{-2(2-x)}{\sqrt{2(2-x)^2}}+\dfrac{2kx}{\sqrt{2x^2}}$

情況 1： $x_F > 2$

【證明】：當 $x>2$ 時，$f'(x)=0$ 時 $f(x)$ 有最小值

此時 $f'(x)=\dfrac{4x-4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}+\sqrt{2}+\sqrt{2}k$

$$f''(x)=\frac{4}{\left[(x-1)^2+1\right]\sqrt{x^2+(2-x)^2}}>0$$

$\Rightarrow$ 當 $x>2$ 時，$f'(x)=0$ 時 $f(x)$ 有最小值。

$\Rightarrow f'(x_F)=0$

$$\Rightarrow \frac{4x_F-4}{\sqrt{{x_F}^2+(2-x_F)^2}}+\sqrt{2}+\sqrt{2}k=0$$

$\Rightarrow (4x_F-4)^2=(-\sqrt{2}-\sqrt{2}k)^2\cdot\left[{x_F}^2+(2-x_F)^2\right]$

$\vdots$

$$\Rightarrow x_F=1-\frac{1+k}{\sqrt{(1-k)(3+k)}}=1-\frac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}},-1>k>-3$$

$\Rightarrow$ 當 $k\le -3$ 時無解

又因 $x>2$

$$\Rightarrow \frac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}}=\frac{1+k}{\sqrt{[2-(1+k)][2+(1+k)]}}>1\Rightarrow \frac{(1+k)^2}{4-(1+k)^2}>1\Rightarrow (1+k)^2<2\Rightarrow k<-1-\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ 在 $-3<k<-1-\sqrt{2}$ 時，F 坐標為 $(1-\frac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}},1+\frac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}})$

情況 2： $x_F=2$

由**【步驟三】**之推論可知，當 F 不落在以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外(不含圓上)時，F 坐標為 $(2,0)$

$\Rightarrow$ 在 $-1-\sqrt{2}\ge k>-1$ 時，F 坐標為 $(2,0)$

結論：加權 $(1,1,1,k)$，取 $k<0$

(1)當 $0>k>1-\sqrt{2}$ 時，F 坐標為 $(1+\frac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}},1-\frac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}})$

(2)當 $1-\sqrt{2}\ge k\ge -1-\sqrt{2}$ 時，F 坐標為 $(2,0)$

(3)當 $-1-\sqrt{2}>k>-3$ 時，F 坐標為 $(1-\frac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}},1+\frac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}})$

(4)當 $k\le -3$ 時，F 無解

柒、研究結果

問題：加權(a,b,c,d)，$a,b,c,d\neq 0$時，F位置為何?

一、當$(a,b,c,d)=(1,m,1,k),k\geq m>0$時，得出以下結論

(一) 當$\dfrac{2}{k-m}>\sqrt{2}$時，F坐標為$(1-\dfrac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}},1+\dfrac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}})$。

(二) 當$0<\dfrac{2}{k-m}\leq\sqrt{2}$時，$F$坐標為$(0,2)$

二、當$(a,b,c,d)=(m,m,k,k)(m,k>0)$時，$F$滿足$\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\dfrac{k}{m}$，其中角度$\varphi$、$\theta$如下圖(左)。

三、當$a,b,c,d>0$時，得出以下結論

(一) F點唯一且該點滿足$\begin{cases}a\cdot\cos\theta_2+d\cdot\cos\theta_1=b\cdot\cos\theta_4+c\cdot\cos\theta_3\\ a\cdot\sin\theta_2-d\cdot\sin\theta_1=-b\cdot\sin\theta_4+c\cdot\sin\theta_3\end{cases}$，$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$如下圖(右)。

(二) 若加權係數滿足$d\geq\sqrt{\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2+\left(c+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2}$，$F$為$(0,2)$，其餘狀況可以此類推

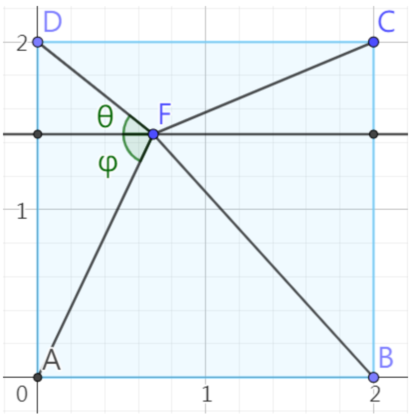
四、當$(a,b,c,d)=(1,1,1,k),k<0$時，得出以下結論

(一) 當$0>k>1-\sqrt{2}$時，F坐標為$(1+\dfrac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}},1-\dfrac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}})$。

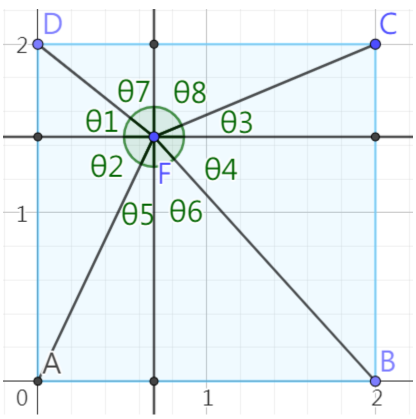
(二) 當$1-\sqrt{2}\geq k\geq -1-\sqrt{2}$時，$F$坐標為$(2,0)$

(三) 當$-1-\sqrt{2}>k>-3$時，F坐標為$(1+\dfrac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}},1-\dfrac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}})$。

(四) 當$k\leq -3$時，F無解



(作者群製)



(作者群製)

捌、未來展望

一、雖然已經有些許的討論，但還是被局限於正方形的狀況，希望未來可以找到方法推廣到一般四邊形。

二、目前在正方形內還有一些狀況經由討論後仍無法找出費馬點確切位置，希望未來能補齊並總結。

三、當加權出現負數的情況後，可能會出現兩個或以上的費馬點，甚至會有不存在的情況，而簡單情況像 $(1,1,k,k), k<0$ 、 $(1,m,1,k), k<0<m$ 也會因為負加權的出現而難以討論，希望之後能找到更有效率的討論方法並補齊未能討論出的結果。

玖、參考文獻資料

一、張雄 - 數學傳播。費馬一一斯坦勒爾問題與平衡態公理

二、三角形加權費馬點問題的通用解法 https://zhuanlan.zhihu.com/p/643753764?utm_id=0

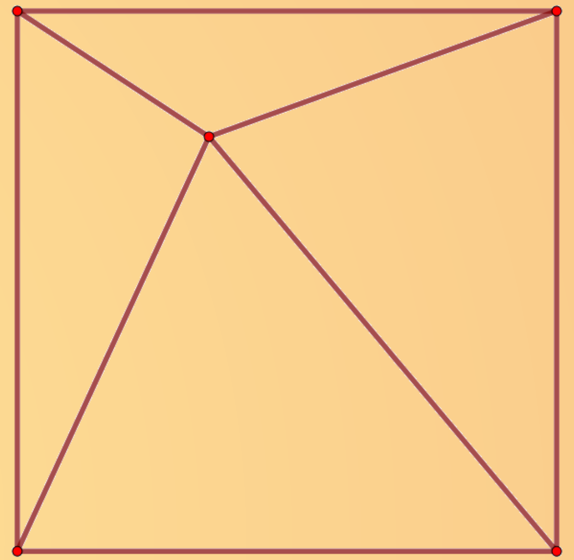
三、三角形費馬點及深入拓展 https://zhuanlan.zhihu.com/p/136600079

【評語】050403

在尋找加權費馬點的過程中，作者對不同型態的加權，以不同幾何圖形的相切或圖形的對稱性來做觀察，並佐以物理觀點。作者也以偏微分證明唯一性，過程中以圖示來呈現不等式組，頗具巧思。對特殊形態的負加權的情況，作者也獲致相應結果；證明中巧妙運用橢圓的焦點，並用兩個圓與橢圓相切，十分精彩。作品有獨到觀點，深具內涵。可嘗試拓展各個論證的適用範圍，獲致更一般性的結論。

作品簡報

四方輻輳

探討 **正方形** 

加權費馬點 之位置變化

摘要

本研究主要在探討費馬點在正方形四頂點具有加權的狀況時，尋找隨著加權情況變化而移動的費馬點位置。我們從原費馬點研究三角形一般加權情況開始發想，將費馬點研究推廣至由正方形加權情況下的特殊化結果，利用加權的對稱性，來解得不同加權情況下的費馬點位置，也利用偏微分和物理觀點證明了一般正加權情況下的唯一性。最後，我們將研究推廣至負加權的情況，並找出特定加權條件下，存在費馬點的條件。

研究動機

在尋找題目的過程中，找到了一篇利用最小位能找尋三角形加權費馬點的研究，這引起了我們的好奇。而在後來查找資料時，我們找到了一份討論三角形加權費馬點的報告，其中給出了一般加權情況的解，我們想知道如果把加權費馬點延伸至多邊形的情況，又會有怎樣的結論，因此我們開始從最簡單的情況—「正方形」開始研究。

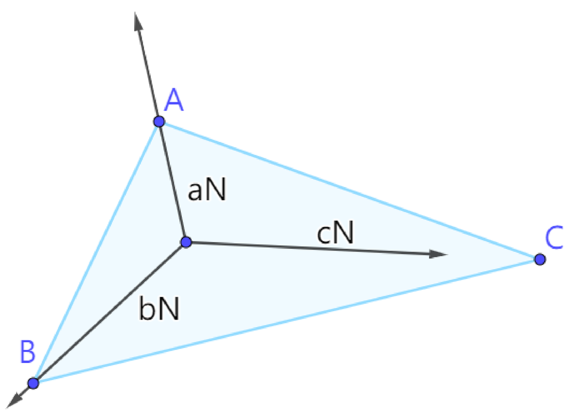
文獻探討

(一)三角形加權狀況

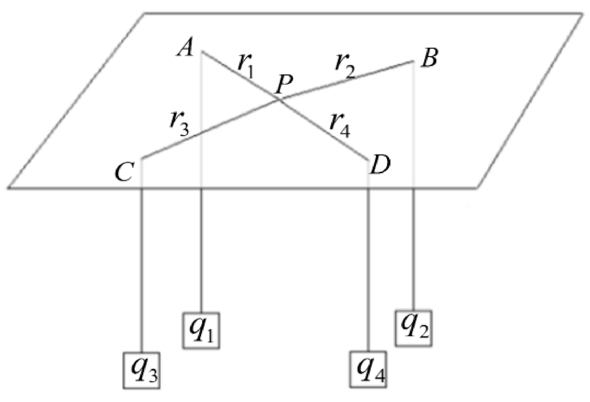
目前三角形加權費馬點的一般情況已有解，且特定角度的 sin 值比將與線段長的加權係數有密切相關。

(二)物理觀點

考慮平面上一 P 點受到往三角形 ABC 各頂點的守恆力分別為 $a\mathrm{N}, b\mathrm{N}, c\mathrm{N}$，則當該系統穩定平衡時，$aPA+bPB+cPC$ 將會有最小值。將其推廣至四力情況時仍完全適用。



(作者群製)



(作者群製)

研究目的

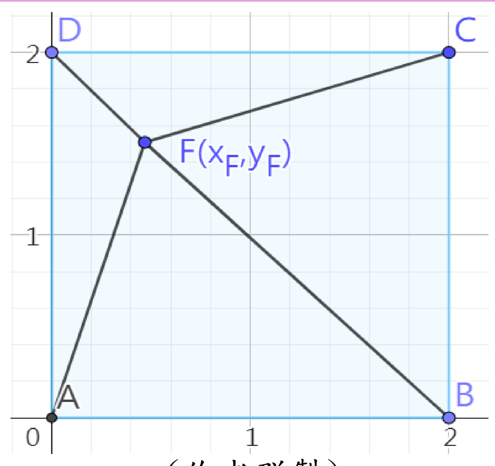
當加權費馬點 $F(x_F, y_F)$ 到正方形 $ABCD$ 四頂點 $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$ 距離 $\overline{FA}, \overline{FB}, \overline{FC}, \overline{FD}$ 的加權係數為 a,b,c,d，即求 $a\overline{FA}+b\overline{FB}+c\overline{FC}+d\overline{FD}$ 有最小值時，F 點坐標為何：

(一)在 $(a,b,c,d)=(1,m,1,k)$ 且 $k \ge m > 0$ 的條件下，求得 F 點的坐標。

(二)在 $(a,b,c,d)=(m,m,k,k)$ 且 $k \ge m > 0$ 的條件下，求得 F 點的坐標。

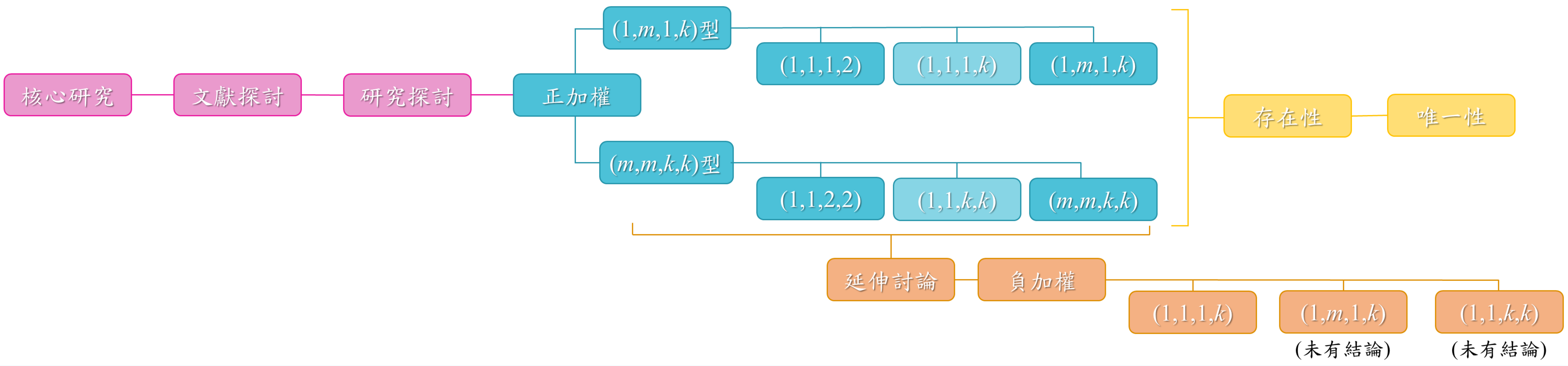
(三)在一般加權情況 (a,b,c,d) 且 $a,b,c,d>0$ 的條件下，證明 F 存在且唯一。

(四)在 $(a,b,c,d)=(1,1,1,k)$ 且 $k<0$ 的條件下，求得 F 點的坐標。



(作者群製)

研究架構與流程



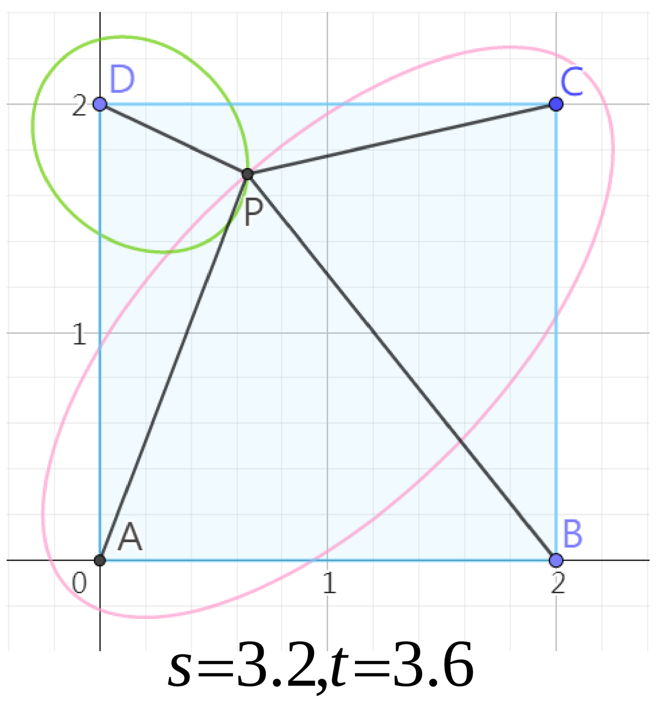
研究過程與方法

問題：加權 $(1,1,1,2)$，F 位置為何?

【步驟一】：當 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$ 有最小值時，F 點會在 $x+y=2$ 上

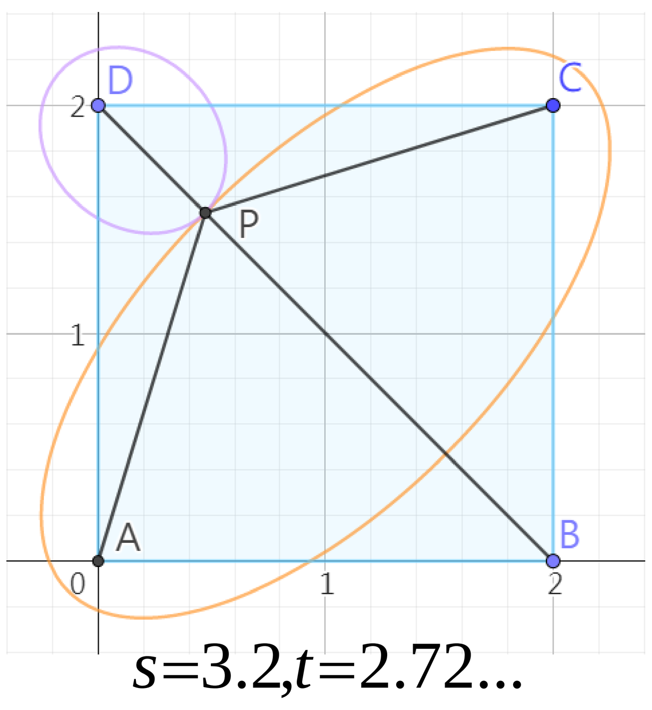
〔方法1〕：

考慮 $\begin{cases}\Gamma_s=\{P \mid \overline{PA}+\overline{PC}=s, s\ge 2\sqrt{2}\}\\ \Gamma_t=\{P \mid \overline{PB}+2\overline{PD}=t, t\ge 2\sqrt{2}\}\end{cases}$：當 $s=2\sqrt{2}$ 時 $\Gamma_s=\overline{AC}$



s=3.2,t=3.6

(作者群製)



s=3.2,t=2.72...

(作者群製)

比較左邊兩圖形，發現當 $s+t$ 有最小值時，Γ_s 和 Γ_t 會相切

我們又發現 Γ_s, Γ_t 都對稱 $x+y=2$，對稱性證明如下：

證明：

取 $P(x,y)$ 在 Γ_t 上，將其對稱後得到 $P'(x',y')=(2-y,2-x)$，並代回 Γ_t 的方程式：

$$\sqrt{(x'-2)^2+(y')^2}+2\sqrt{(x')^2+(y'-2)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+y^2}+2\sqrt{x^2+(y-2)^2}=t$$

$\Rightarrow P'\in\Gamma_t \Rightarrow \Gamma_t$ 為線對稱圖形，其對稱軸為 $x+y=2$

$\because$ A、C 為 Γ_s 圖形(橢圓)的焦點且 $x+y=2$ 是 $\overline{AC}$ 的中垂線

$\therefore$ $x+y=2$ 也是 Γ_s 的對稱軸

由上述證明可知：若 Γ_s 和 Γ_t 相切，切點會在 $x+y=2$ 上

〔方法2〕：

取 $P\in\overline{BD}$ 且 $P\notin\overline{AC}$，並取 $\overline{PP'}\perp\overline{BD}$ 且 $P'\notin\overline{BD}$

此時 $PP'CA$ 為一梯形，將 C 以 $\overline{PP'}$ 為軸作對稱點 C'

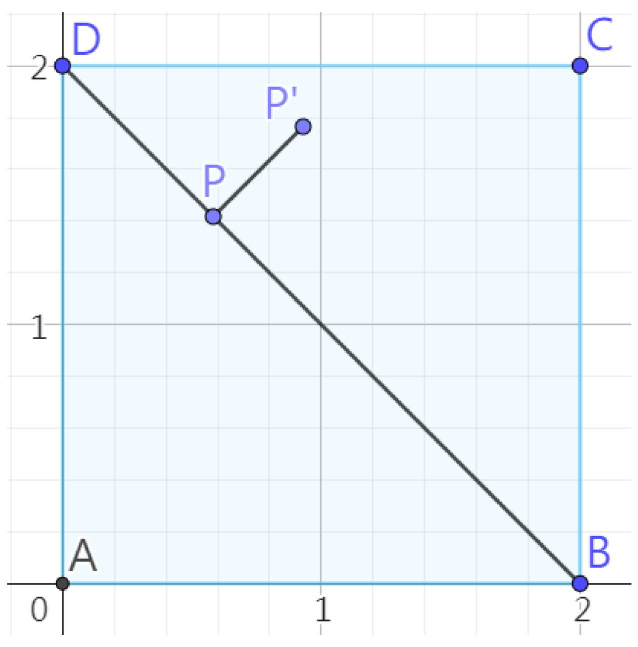
可得 $\overline{P'A}+\overline{P'C'}>\overline{PA}+\overline{PC'}$，又因 $\overline{P'C'}=\overline{P'C}$ 和 $\overline{PC'}=\overline{PC}$

可推得 $\overline{P'A}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PC}$

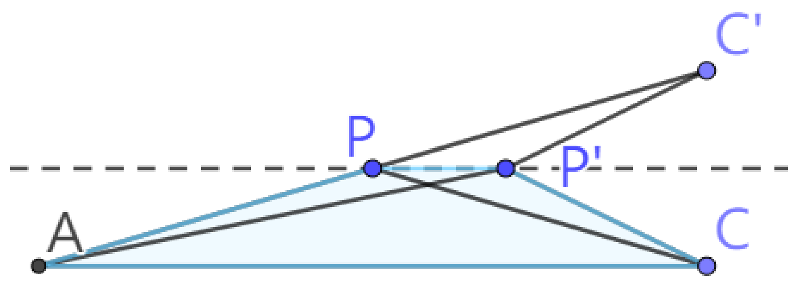
且顯然 $\overline{P'B}>\overline{PB}, \overline{P'D}>\overline{PD}$

$\therefore \overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+2\overline{P'D}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+2\overline{PD}$

$\Rightarrow$ 當 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$ 有最小值時，F 點會在 $x+y=2$ 上



(作者群製)



(作者群製)

【步驟二】：求 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}$ 的最小值，及此時 F 點坐標

由上敘述可知，可設 $F(x_F, 2-x_F), 0\le x_F\le 2$

則 $\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+2\overline{FD}=\sqrt{2x_F^{\ 2}-4x_F+4}+\sqrt{2x_F^{\ 2}-8x_F+8}+\sqrt{2x_F^{\ 2}-4x_F+4}+2\sqrt{2x_F^{\ 2}}=\sqrt{2}(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+x_F+2)$

我們希望求上式最小值

$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}+\overline{FD}$ → $\sqrt{2}(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+x_F+2)$ → $\sqrt{2}(2\overline{EJ}+\overline{OJ}+2)$ → $\sqrt{2}(1+m_{\overline{QK}}+2)$

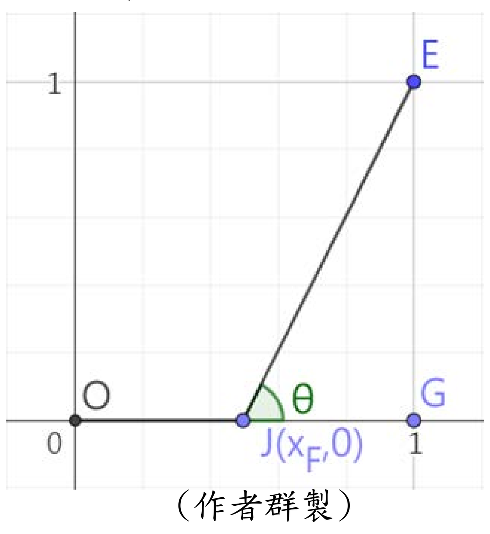
$\sqrt{2}(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+x_F+2)=\sqrt{2}(2\overline{EJ}+\overline{OJ}+2)$

$\because 0\le x_F\le 1 \therefore 45^\circ\le\theta\le 90^\circ$

$\Rightarrow \overline{EJ}=\frac{1}{\sin\theta},\overline{OJ}=1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\Rightarrow 2\overline{EJ}+\overline{OJ}$

$=1+\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}=1+\frac{2-\sin(90^\circ+\theta)}{0-\cos(90^\circ+\theta)}$



(作者群製)

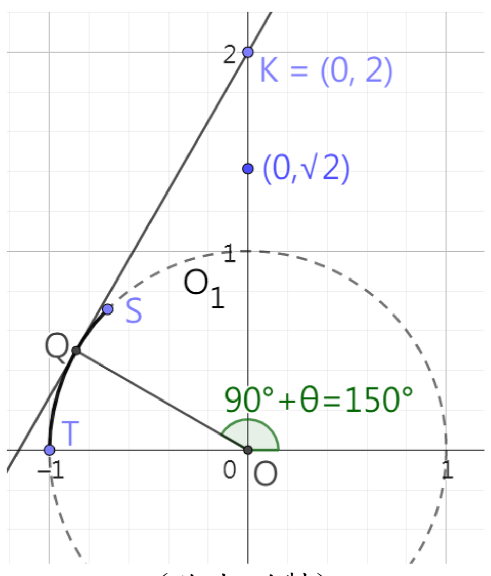
在TS上取一點$Q(\cos(90^\circ+\theta),\sin(90^\circ+\theta))$

在平面上取一點 $K(0,2)$，

則 $\frac{2-\sin(90^\circ+\theta)}{-\cos(90^\circ+\theta)}$ 即為 $m_{\overline{QK}}$

當 $m_{\overline{QK}}$有最小值時，$\overleftrightarrow{QK}$與 TS 相切

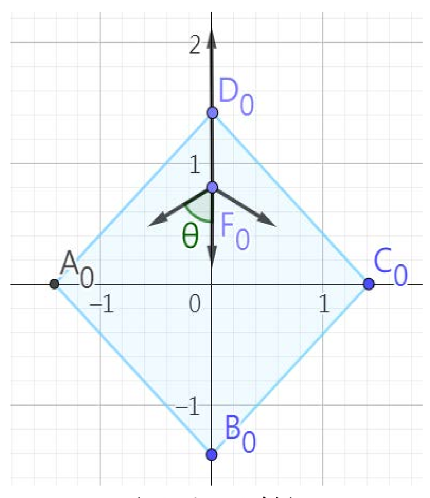
可解得 $x_F=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$



(作者群製)

物理觀點

考慮以下情況：在平面上取一正方形$A_0B_0C_0D_0$及內部一點F_0並施予F_0點4個指向正方形頂點的力 $\vec{F}_{A_0},\vec{F}_{B_0},\vec{F}_{C_0},\vec{F}_{D_0}$，四力大小分別為 1N,1N,1N,2N，並設$\vec{F}_{A_0},\vec{F}_{B_0}$夾角為$\theta$，如右圖。



(作者群製)

由物理觀點可知，四力平衡時，$\overline{A_0F_0}+\overline{B_0F_0}+\overline{C_0F_0}+2\overline{D_0F_0}$會有最小值。顯然此時水平和力為零，而由鉛直合力可

得：$\cos\theta(|\vec{F}_{A_0}|+|\vec{F}_{C_0}|)+|\vec{F}_{B_0}|=|\vec{F}_{D_0}|\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$

將圖形轉向並平移後，即可求得F坐標同上

問題：加權 $(1,m,1,k)$，$k\ge m>0$，F 位置為何?

設 $F(x_F,2-x_F),0\le x_F\le 2$

$\overline{FA}+m\overline{FB}+\overline{FC}+k\overline{FD}=\sqrt{2}(2\sqrt{(x_F-1)^2+1}+2m+(k-m)x_F)$

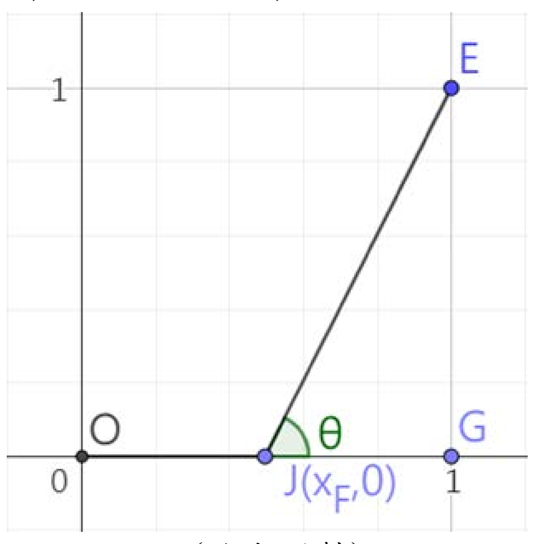
$=\sqrt{2}(2\overline{EJ}+(k-m)\overline{OJ}+2m)$

情況一：$k>m$

$0\le x_F\le 1$，則 $45^\circ\le\theta\le 90^\circ$

$\Rightarrow 2\overline{EJ}+(k-m)\overline{OJ}$

$=(k-m)(1+\frac{\frac{2}{k-m}-\sin(90^\circ+\theta)}{-\cos(90^\circ+\theta)})$



(作者群製)

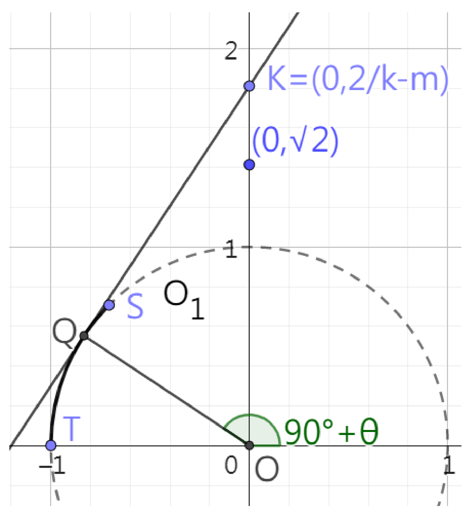
設 $Q(\cos(90^\circ+\theta),\sin(90^\circ+\theta)),K(0,\frac{2}{k-m})$

(1)當 $\frac{2}{k-m}>\sqrt{2}$ 時，$\overleftrightarrow{QK}$與 TS 相切

$\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}}{k-m}$

$\Rightarrow\overline{OJ}=1-\frac{1}{\tan\theta}=1-\frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}}$

$\Rightarrow x_F=1-\frac{k-m}{\sqrt{4-k^2+2km-m^2}}$



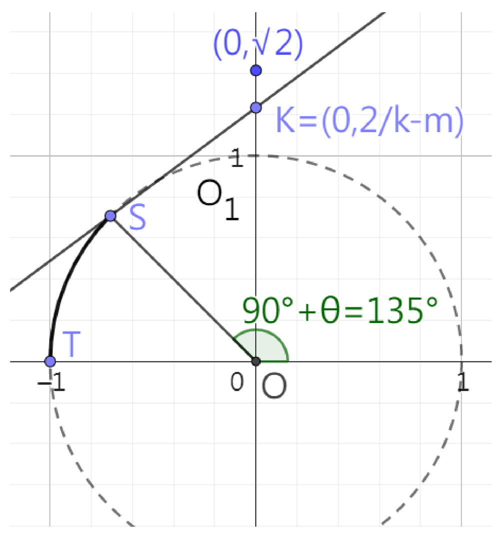
(作者群製)

(2)當 $0<\frac{2}{k-m}\le\sqrt{2}$ 時，注意到$135^\circ\le 90^\circ+\theta<180^\circ$，

$\overleftrightarrow{QK}$無法和 TS 相切

當$m_{\overline{QK}}$有最小值時，$\theta=45^\circ$

即$x_F=0(F(0,2))$



(作者群製)

情況二：$k=m$

此時即為求$\sqrt{2}(2\overline{EJ}+2m)$的最小值

顯然 J 為$(1,0)$時有最小值$\Rightarrow$ F 點即為$\overline{AC},\overline{BD}$交點

問題：加權 $(1,1,2,2)$，F 位置為何?

【步驟一】：當$\overline{FA}+\overline{FB}+2\overline{FC}+2\overline{FD}$有最小值時，$F$ 點會在 x=1 上

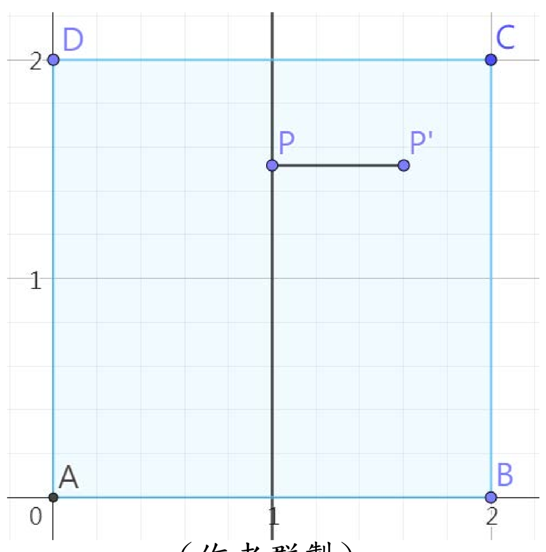
在 x=1 上取一點 P，另取一點 P'使$\overline{PP'}$垂直 $x=1$，

此時$\overline{P'A}+\overline{P'B}\ge\overline{PA}+\overline{PB}$ 且 $2\overline{P'C}+2\overline{P'D}\ge 2\overline{PC}+2\overline{PD}$

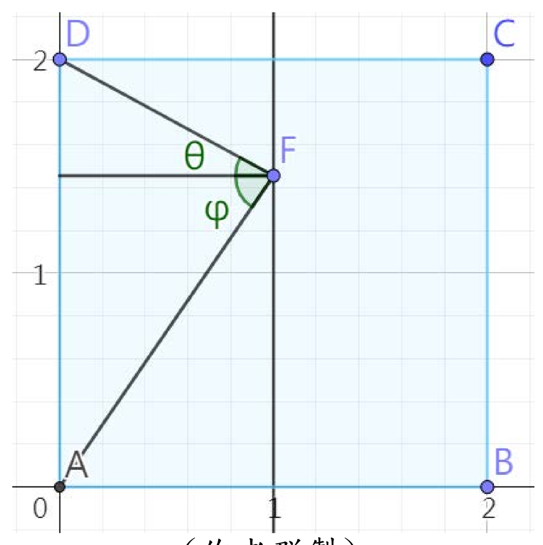
等號成立時 P 在$\overline{AB}$或$\overline{CD}$上，而顯然無法同時成立

$\Rightarrow\overline{P'A}+\overline{P'B}+2\overline{P'C}+2\overline{P'D}>\overline{PA}+\overline{PB}+2\overline{PC}+2\overline{PD}$

$\Rightarrow\overline{PA}+\overline{PB}+2\overline{PC}+2\overline{PD}$ 有最小值時，P 會在 $x=1$上



(作者群製)



(作者群製)

可設 $F(1,y_F)$

令 $f(y)=\overline{PA}+\overline{PB}+2\overline{PC}+2\overline{PD}$

則 $f(y)=2(\sqrt{1+y^2}+2\sqrt{1+(2-y)^2})$

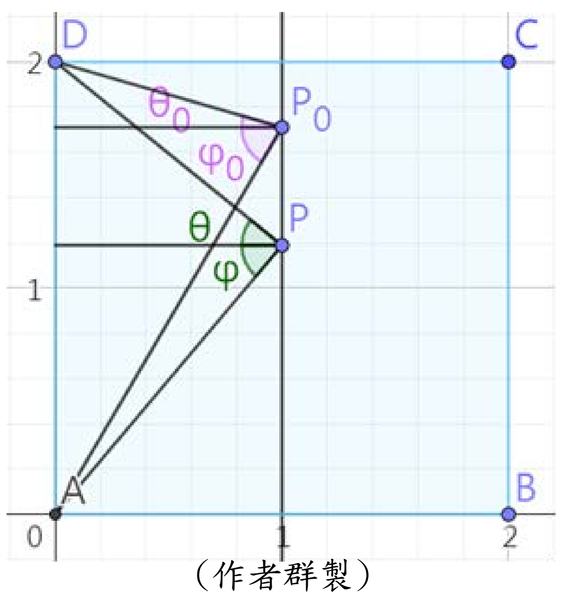
$f'(y)=2(\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}+2\frac{2(2-y)(-1)}{2\sqrt{1+(2-y)^2}})=2(\sin\varphi-2\sin\theta)$

【步驟二】：證明 $f'(y)$=0 時 $f(y)$會有最小值並求出兩角度關係

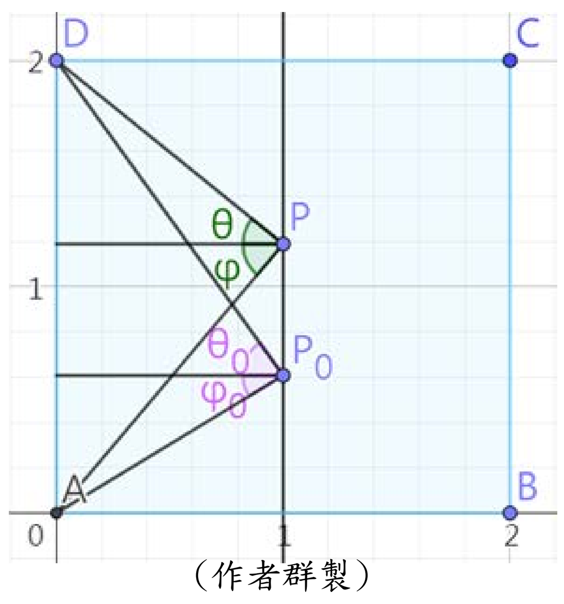
取一點 $P(1,y)$使得 $f'(y)$=0，此時 $\sin\varphi-2\sin\theta=0$，在 x=1 上取一點$P_0(1,y_0)$，並用P_0點位置做以下討論：

情況一：$y_0>y$
則$\theta_0<\theta,\varphi_0>\varphi$
$\Rightarrow\sin\varphi_0-2\sin\theta_0>0$
$\Rightarrow f$ 在此範圍遞增

情況二：$y_0<y$
則$\theta_0>\theta,\varphi_0<\varphi$
$\Rightarrow\sin\varphi_0-2\sin\theta_0<0$
$\Rightarrow f$ 在此範圍遞減



(作者群製)



(作者群製)

由上述討論可知，$f'(y)=0$ 時 $f(y)$會有最小值

此時 $\sin\varphi=2\sin\theta\Rightarrow\sin\theta:\sin\varphi=1:2$

問題：加權 (m,m,k,k)，$k>0,m>0$，F 位置為何?

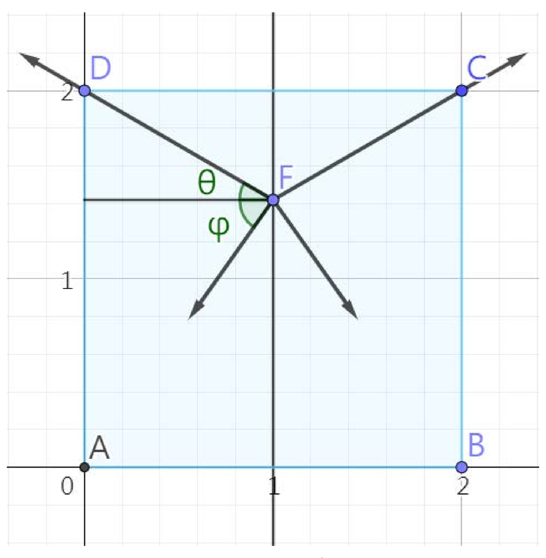
由上可知，F落在 $x=1$上，且$\sin\theta:\sin\varphi=m:k$

物理觀點

當位能 E 最小時，系統處於平衡。

$\vec{F}_A+\vec{F}_B$之鉛直分力量值為$\sin\varphi(|\vec{F}_A|+|\vec{F}_B|)$，$\vec{F}_C+\vec{F}_D$之鉛直分力量值為 $\sin\theta(|\vec{F}_C|+|\vec{F}_D|)$

又 $\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{F}_C+\vec{F}_D=\vec{0}\Rightarrow\sin\varphi(|\vec{F}_A|+|\vec{F}_B|)=\sin\theta(|\vec{F}_C|+|\vec{F}_D|)\Rightarrow\sin\theta:\sin\varphi=m:k$



(作者群製)

問題：一般正加權(a,b,c,d)，$a,b,c,d>0$，F 是否唯一?

令 $f(x,y)=a\overline{PA}+b\overline{PB}+c\overline{PC}+d\overline{PD}=a\sqrt{x^2+y^2}+b\sqrt{(x-2)^2+y^2}+c\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+d\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$$f_x=\frac{a\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{b\cdot(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}+\frac{c\cdot(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}+\frac{d\cdot x}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=a\cdot\cos\theta_2-b\cdot\cos\theta_4-c\cdot\cos\theta_3+d\cdot\cos\theta_1$$

$$f_y=\frac{a\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{b\cdot y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}+\frac{c\cdot(y-2)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}+\frac{d\cdot(y-2)}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}=a\cdot\sin\theta_2+b\cdot\sin\theta_4-c\cdot\sin\theta_3-d\cdot\sin\theta_1$$

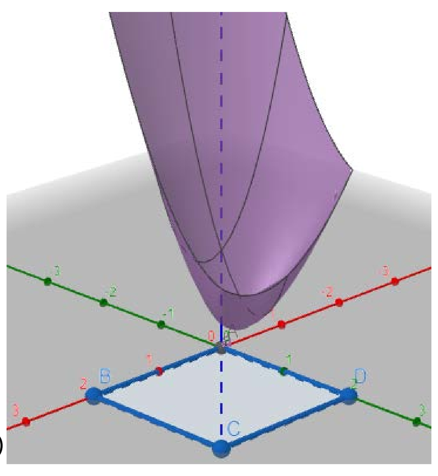
【步驟一】：說明費馬點必存在

考慮 $z=a\overline{PA}+b\overline{PB}+c\overline{PC}+d\overline{PD}$，可知此函數為四個距離函數的相加

⇒該函數為平滑且連續的函數

⇒必可找到至少一個最小值

⇒費馬點必存在



(作者群製)

【步驟二】：證明費馬點唯一並找出位置或滿足的條件

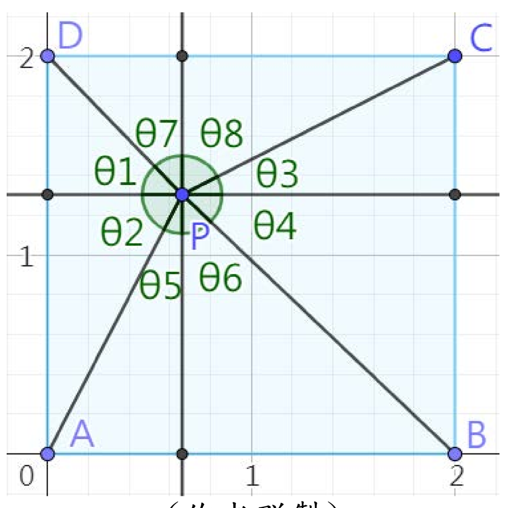
情況1：加權使費馬點落在正方形內部

若可證明 $f_x=f_y=0$ 有唯一解，即可證明費馬點具有唯一性，而該解將對應到費馬點位置

【證明】：$f_x=f_y=0$ 時有唯一解

設 $P(x,y)$ 滿足 $f_x=f_y=0$

$$\begin{cases} a\cdot\cos\theta_2+d\cdot\cos\theta_1=b\cdot\cos\theta_4+c\cdot\cos\theta_3 \\ a\cdot\sin\theta_2-d\cdot\sin\theta_1=-b\cdot\sin\theta_4+c\cdot\sin\theta_3 \end{cases}$$

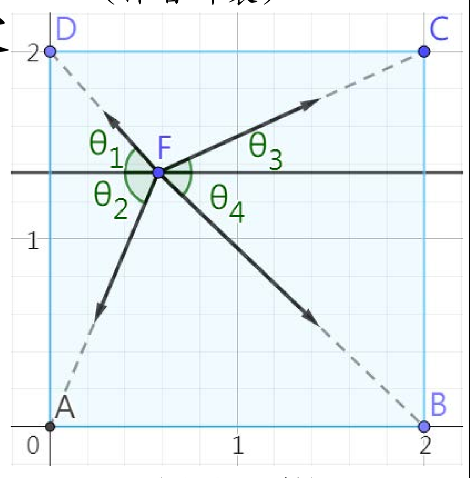


(作者群製)

物理觀點

由物理觀點可得鉛直合力與水平合力為零

$$\Rightarrow\begin{cases} a\cdot\cos\theta_2+d\cdot\cos\theta_1=b\cdot\cos\theta_4+c\cdot\cos\theta_3 \\ a\cdot\sin\theta_2-d\cdot\sin\theta_1=-b\cdot\sin\theta_4+c\cdot\sin\theta_3 \end{cases}$$



(作者群製)

由餘角關係轉換角度並整理可得：

$$\begin{cases} a\cdot\cos\theta_5+b\cdot\cos\theta_6=c\cdot\cos\theta_8+d\cdot\cos\theta_7 \\ a\cdot\sin\theta_5-b\cdot\sin\theta_6=c\cdot\sin\theta_8-d\cdot\sin\theta_7 \end{cases}$$

將上式簡化後可得：

$$\begin{cases} 2ad\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)-2bc\cdot\cos(\theta_3+\theta_4)=b^2+c^2-a^2-d^2=\text{常數} \\ 2ab\cdot\cos(\theta_5+\theta_6)-2cd\cdot\cos(\theta_7+\theta_8)=c^2+d^2-a^2-b^2=\text{常數} \end{cases}$$

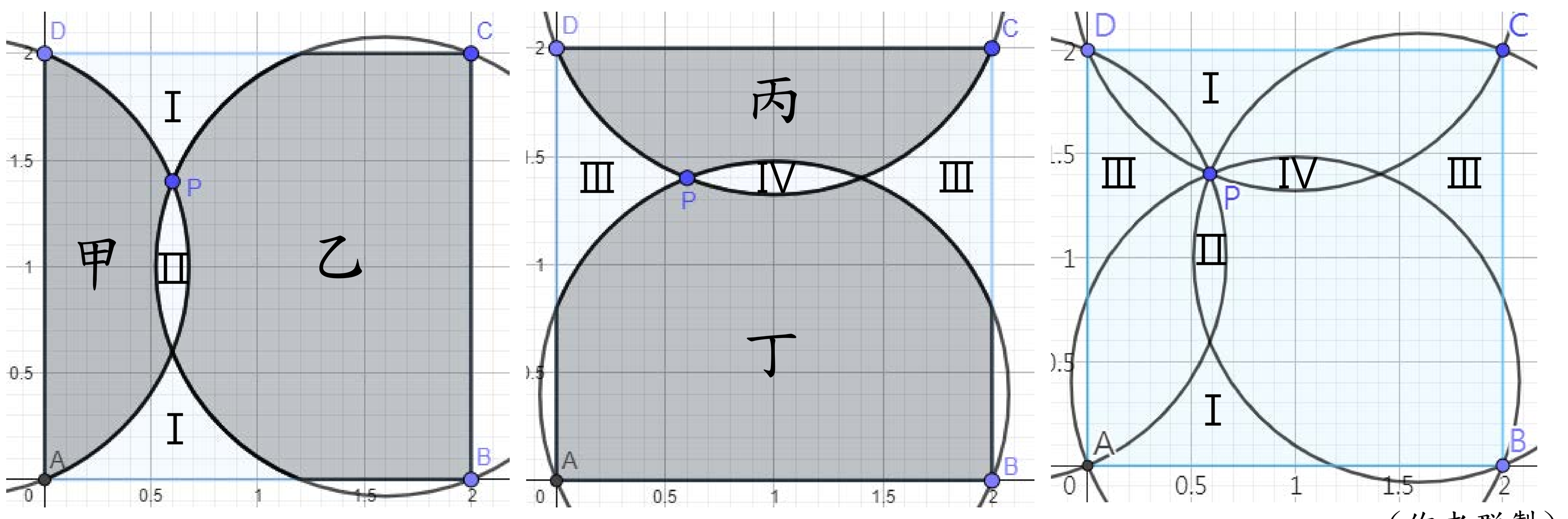
做 $\triangle DAP,\triangle BCP,\triangle ABP,\triangle CDP$ 外接圓並做以下討論：

甲區塊：$2ad\cdot\cos(\theta_1'+\theta_2')-2bc\cdot\cos(\theta_3'+\theta_4')\le b^2+c^2-a^2-d^2$

乙區塊：$2ad\cdot\cos(\theta_1'+\theta_2')-2bc\cdot\cos(\theta_3'+\theta_4')\ge b^2+c^2-a^2-d^2$

丙區塊：$2ab\cdot\cos(\theta_5'+\theta_6')-2cd\cdot\cos(\theta_7'+\theta_8')\ge c^2+d^2-a^2-b^2$

丁區塊：$2ab\cdot\cos(\theta_5'+\theta_6')-2cd\cdot\cos(\theta_7'+\theta_8')\le c^2+d^2-a^2-b^2$



(作者群製)

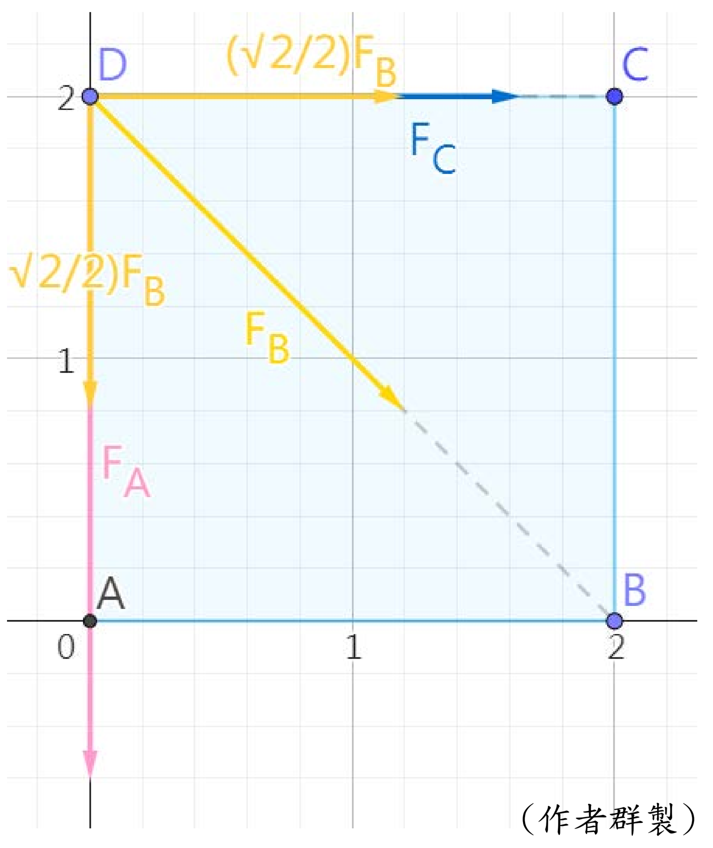
由圖可知，塗色範圍將完全覆蓋正方形內部

⇒無法在正方形內部找到另外一點滿足 $f_x=f_y=0$

情況2：加權使費馬點落在正方形頂點

以 D 點為例，即 $F=D$，並考慮以下情況：

在平面上取一正方形 $ABCD$ 和內部一點 F，並施於 F 三個分別指向 A,B,C 的力 $\vec{F_A},\vec{F_B},\vec{F_C}$，量值分別為 aN,bN,cN，並再施一力 $\vec{F_D}$ 量值為 dN



(作者群製)

由合力為零簡化後得到：

若 $d\ge\sqrt{\left(a+\frac{\sqrt2}{2}b\right)^2+\left(c+\frac{\sqrt2}{2}b\right)^2}$

$F=D(0,2)$ 剩餘狀況以此類推

延伸討論

問題：加權 $(1,1,1,k)$，$k<0$ 時，F 位置為何?

【證明一】：在 $-1\le k<0$ 時，F 在 $x+y=2$ 上

取 $P\in\overline{BD}$ 且 $P\notin\overline{AC}$，並取 $P'\notin\overline{BD}$ 且 $\overline{PP'}\perp\overline{BD}$

由前面證明可知此時 $\overline{P'A}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PC}$

以 B,D 為圓心，$\overline{P'B},\overline{P'D}$ 為半徑畫圓

則 $\overline{P'B}+k\overline{P'D}=\overline{BM}+k\overline{DN}=\overline{PM}+k\overline{PN}+(\overline{PB}+k\overline{DP})$

又由圖可知，當 P 的 x 坐標 ≥1 時，$\overline{PM}\ge\overline{PN}$

⇒在 $0>k\ge-1$ 時，$\overline{P'B}+k\overline{P'D}\ge\overline{PB}+k\overline{PD}$

在 $-1\le k<0$ 時，F 在 $x+y=2$ 上

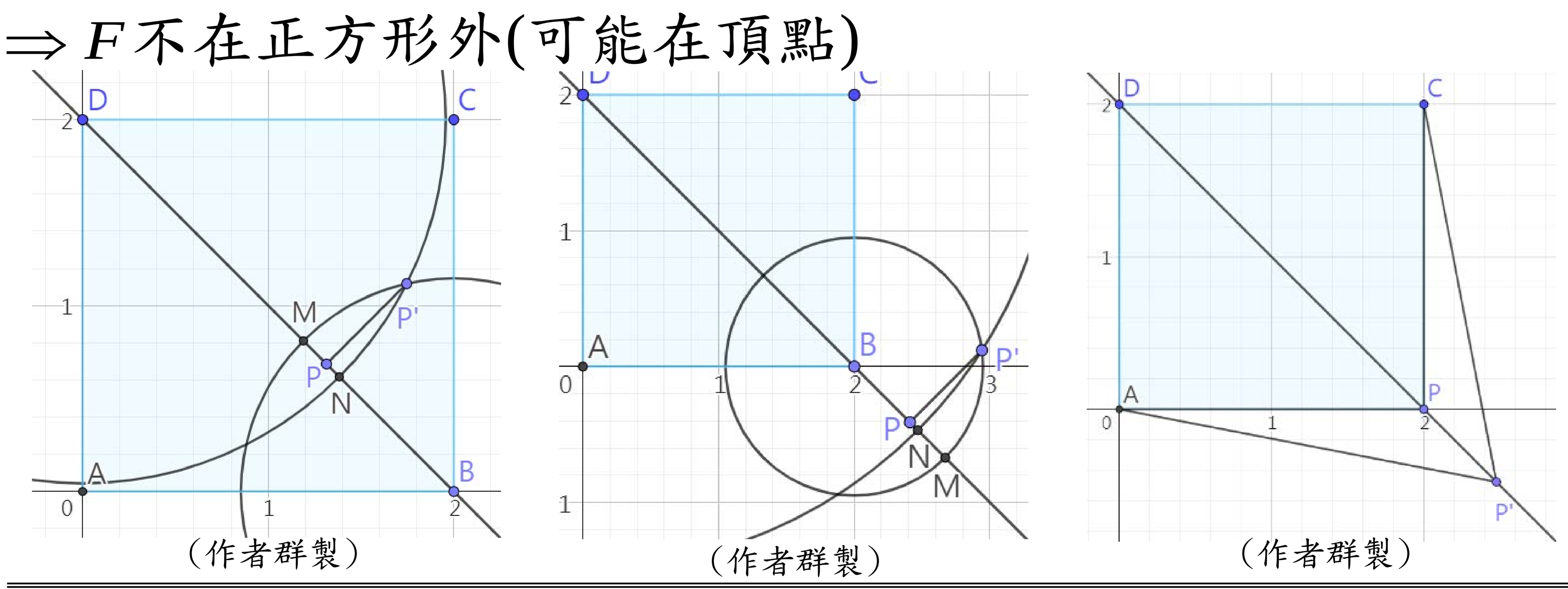
【證明二】：在 $-1\le k<0$ 時，F 不在正方形外

取 $P(2,0)$，並在正方形外取一 $P'\in\overleftrightarrow{BD}$

則 $\overline{P'B}+k\overline{P'D}=k\overline{PD}+(k\overline{PP'}+\overline{PP'})$，又此時 $-1\le k<0$

⇒ $\overline{P'B}+k\overline{P'D}>k\overline{PD}$ 且顯然 $\overline{P'A}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PC}$

⇒ F 不在正方形外(可能在頂點)



(作者群製) (作者群製) (作者群製)

【證明三】：在 $k\le-1$ 時，F 在以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外(含 $(2,0)$)

取一 P' 在圓內

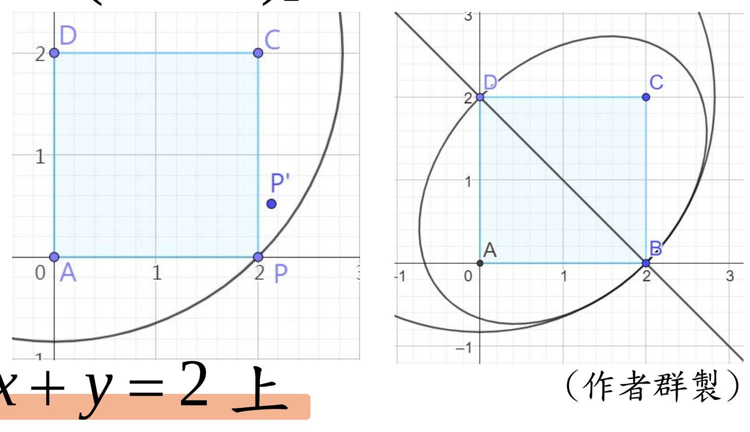
$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+k\overline{P'D}$

$=\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+(1-\sqrt2)\overline{P'D}+[k-(1-\sqrt2)]\overline{P'D}$

$>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+(1-\sqrt2)\overline{PD}+[k-(1-\sqrt2)]\overline{PD}$

$=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+k\overline{PD}$

⇒ F 落在以 D 為圓心 $\overline{BD}$ 為半徑的圓外



(作者群製)

【證明四】：在 $k\le-1$，F 在 $x+y=2$ 上

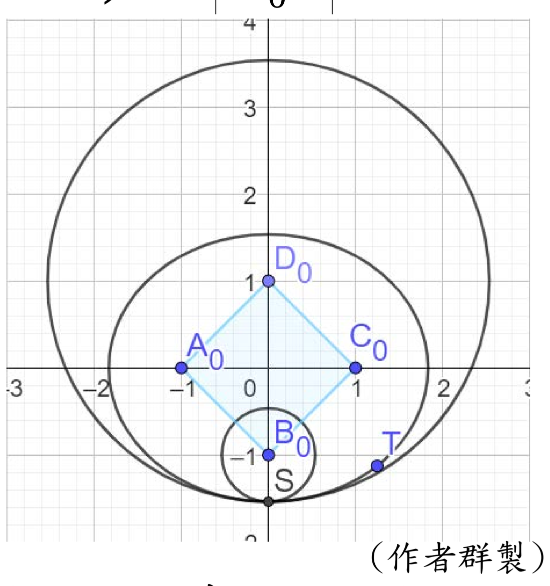
將正方形旋轉並縮小得 $A_0(-1,0),B_0(0,-1),C_0(1,0),D_0(0,1)$，取一點 $S(0,s)$，$s\le-1$，並做以 A_0,C_0 為焦點且過 S 的橢圓，在橢圓上取一 $T(\sqrt{1+s^2}\cos\theta,-s\sin\theta)$

$|\overline{D_0T}|^2=(s-1)^2+(s+1)^2-(s-\sin\theta)^2\le(s-1)^2=|\overline{D_0S}|^2$

⇒此時橢圓被以 D_0 為圓心且過 S 的圓包住，且此時橢圓會包住以 B_0 為圓心且過 S 的圓

⇒任何橢圓上的點 T，其加權距離和皆會大於 S 的加權距離和

又因為任取以 D_0 為圓心，$\overline{B_0D_0}$ 為半徑的圓外一點 P'，皆可找到一以 A_0,C_0 為焦點的橢圓，且與 y 軸的其中一個交點 P 在 B_0 下方



(作者群製)

⇒將圖形放大旋轉即可得 F 落在 $x+y=2$ 上

【求得 $-1\le k<0$ 時 F 位置】

設 $f(x)=2\sqrt{2x^2-4x+4}+\sqrt{2x^2-8x+8}+k\sqrt{2x^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x-4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}+\dfrac{-2(2-x)}{\sqrt{2(2-x)^2}}+\dfrac{2kx}{\sqrt{2x^2}}$

情況 1：$1<x_F<2$

此時 $f'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}-\dfrac{4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}-\sqrt2+\sqrt2k$

$=4(\cos\theta-\dfrac{1}{\overline{PA}})-\sqrt2+\sqrt2k$

(1) $x_0<x$

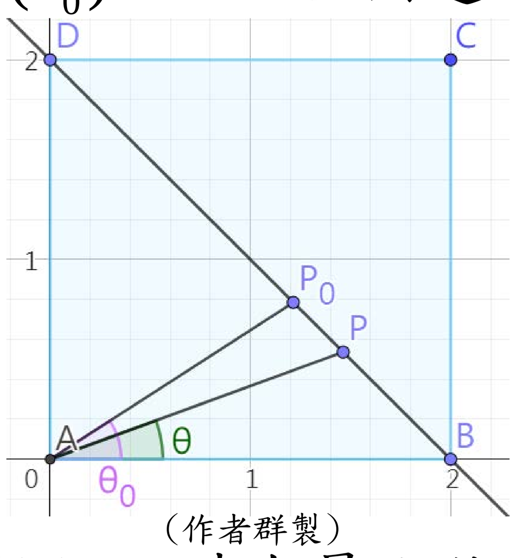
$\Rightarrow\cos\theta_0<\cos\theta$ 且 $\overline{P_0A}<\overline{PA}$

$\Rightarrow f'(x_0)<0\Rightarrow$ 左側遞減

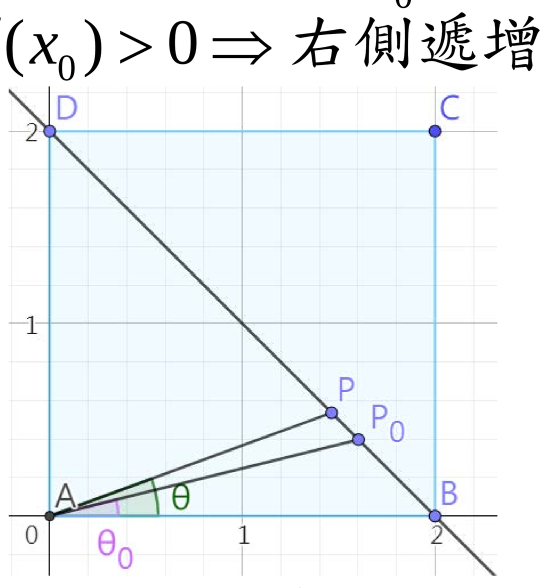
(2) $x_0>x$

$\Rightarrow\cos\theta_0>\cos\theta$ 且 $\overline{P_0A}>\overline{PA}$

$\Rightarrow f'(x_0)>0\Rightarrow$ 右側遞增



(作者群製)



(作者群製)

$\Rightarrow f'(x)=0$ 時有最小值

⇒在 $1-\sqrt2<k<0$ 的條件下，

$F=\left(1+\dfrac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}},1-\dfrac{1-k}{\sqrt{-k^2+2k+3}}\right)$

情況 2：$x_F=2$

由【證明二】之推論可知，當 F 不落在正方形內部(不含頂點)時，F 坐標為 $(2,0)\Rightarrow$ $-1\le k\le1-\sqrt2$ 的條件下，

$F=(2,0)$

【求得 $k<-1$ 時 F 位置】

設 $f(x)=2\sqrt{2x^2-4x+4}+\sqrt{2x^2-8x+8}+k\sqrt{2x^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x-4}{\sqrt{x^2+(2-x)^2}}+\dfrac{-2(2-x)}{\sqrt{2(2-x)^2}}+\dfrac{2kx}{\sqrt{2x^2}}$

$\Rightarrow f''(x)=\dfrac{4}{\left[(x-1)^2+1\right]\sqrt{x^2+(2-x)^2}}>0$

情況 1：$x_F>2$

$f'(x)=0$ 時有最小值

⇒當 $k\le-3$ 時無解且在 $-3<k<-1-\sqrt2$ 的條件下，

$F=\left(1-\dfrac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}},1+\dfrac{1+k}{\sqrt{-k^2-2k+3}}\right)$

情況 2：$x_F=2$

由【證明三】之推論可知，當 F 不落在以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 為半徑的圓外部(不含頂點)時，F 坐標為 $(2,0)$

⇒在 $-1-\sqrt2\le k\le1-\sqrt2$ 的條件下，$F=(2,0)$