中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050402

Wi-Fi 收訊範圍—三角形覆蓋圓面積之探討

學校名稱：國立彰化高級中學

作者：	指導老師：
高二 陳偉群	龔詩尹

關鍵詞：覆蓋、最小面積和

摘要

本研究在探討「利用數個半徑不相等的圓，去完全覆蓋三角形所需的圓面積總和之最小值」，其最小值以三角形的邊長、角度及外接圓半徑去作表示。

首先，我們討論了利用 *1*、*2*、*3* 個圓去覆蓋的情形，並分銳角、直角、鈍角三角形去做分類，有完整的結果。並在銳角及直角三角形中，發現有相似的結論。

再者，用多個圓覆蓋時，我們以特殊樣式去作排列，歸納出最小值的規律。

壹、研究動機

「欲在一個三角形的城鎮中放入數個 *Wi-Fi* 分享器，分享器的分享範圍是以本身為中心的圓，並且費用與圓面積成正比，那麼要如何放置分享器和利用多大的分享範圍才能使費用最低呢？」為了解決這個問題，我們開始了我們的研究。

貳、研究目的

一、對銳角和直角三角形，利用 *1* 個圓覆蓋，求出圓面積的最小值。

二、對銳角和直角三角形，利用 *2* 個圓覆蓋，求出兩圓面積和的最小值。

三、對銳角和直角三角形，利用 *3* 個圓覆蓋，求出三圓面積和的最小值。

四、對鈍角三角形，利用 *1* 個圓覆蓋，求出圓面積的最小值。

五、對鈍角三角形，利用 *2* 個圓覆蓋，求出兩圓面積和的最小值。

六、對鈍角三角形，利用 *3* 個圓覆蓋，求出三圓面積和的最小值。

七、利用 *N* 個圓上下型排列覆蓋任意三角形，求出總面積和的最小值。

參、研究設備及器材

紙、筆、平板、*GeoGebra*。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討

林宜樺、李佳駿、唐婉馨與張博盛（*2004*）在【鋪天蓋地】中，有一部分討論到「利用數個半徑相等的圓覆蓋正多邊形」，其中大多是討論特殊情況並且以對稱的方式排列。劉宇

昕與陳正昕（*2022*）在【「點」移默化—探討不同個數的圓覆蓋正方形所需最小半徑】中，討論了「利用數個半徑相等的圓覆蓋正方形」。這讓我們思考，若要利用「半徑相等的圓」去覆蓋三角形或多邊形，這樣的條件很難有良好的性質去限制圓的位置，對於多個圓的討論，半徑的大小是牽一髮而動全身，並且整體的討論更接近多變數的極值問題，所以我們決定轉而只研究「利用數個半徑不相等的圓去覆蓋三角形」。

何詩涵、董家瑋與楊沛錡（*2018*）在【蓋世”五”功】中，討論了「一個圓覆蓋三角形、四邊形、五邊形的半徑最小值」，與本研究中，$N = 1$ 的最小覆蓋圓組重疊，但文獻中沒有對於更多圓的情況作討論。

結合以上的文獻，我們決定對於「利用數個半徑不相等的圓完全覆蓋三角形」作討論。

二、名詞釋義

1. 覆蓋圓：在研究中的圓皆為覆蓋圓，即為覆蓋三角形的圓。
2. （最小）覆蓋圓組：在一個三角形中，如果若干個覆蓋圓可以完全覆蓋這個三角形，我們稱這些覆蓋圓為覆蓋圓組，特別的，若覆蓋圓組的面積總和最小，則稱此覆蓋圓組為最小覆蓋圓組，其中的覆蓋圓稱為最小覆蓋圓。
3. 圓數 N、n：覆蓋圓組中圓的個數，其中 N、n 為正整數。
4. $\sum^{n} r^2$：對於 N 個圓的覆蓋圓組中，各個覆蓋圓的半徑平方和。$min\sum^{n} r^2$表示 N 個圓的最小覆蓋圓組的半徑平方和。
5. R：三角形的外接圓半徑。
6. L：三角形的最長邊長。
7. $O_1, O_2, O_3 \ldots$：在覆蓋圓組中的覆蓋圓，其半徑分別為 $r_1, r_2, r_3 \ldots$。
8. α, β, γ：分別為三角形的三個對應內角角度（$\angle A = \alpha$、…）。
9. a, b, c：分別為三角形的三個對應邊長（頂點 A 對邊為 a、…）。

三、研究過程

要討論「利用數個半徑不相等的圓完全覆蓋三角形」，自然聯想到讓面積或最大半徑越小越好，而要讓最大圓的半徑最小其實就是等圓覆蓋三角形的討論，於是我們要研究的就是圓面積和的最小值，也就是半徑平方和的最小值。

首先我們說明存在性和唯一性，對於覆蓋圓組，顯然具有存在性（只要半徑足夠大），而最小覆蓋圓組因為有三角形面積的下界，所以也是存在的，雖然不一定具有唯一性，但也不影響總面積最小值是唯一的。接下來，我們先處理最基礎的情況：

1. $N = 1$，對於銳角三角形，利用 1 個圓覆蓋

<u>定理 *1.*</u> $\min \sum^{1} r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角或直角三角形} \\ \dfrac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}$。

<u>*Proof.*</u> 對於銳角和直角三角形，其外接圓可以覆蓋三角形。令銳角或直角三角形外接圓為 O，最小覆蓋圓為 O_1，如圖 *1-1*，假設 $r_1 < R$，則圓 O 與圓 O_1 的交點的連線長 $\leq 2r_1 < 2R$，

$\Rightarrow$ 圓 O 被圓 O_1 覆蓋的弧的角度$< \pi$（右圖紅色弧），但三角形為銳角或直角三角形，其三頂點不同時落在同一半圓中（不含端點），矛盾。故三頂點不可能同時落在圓 O_1 內或圓 O_1 上，故 $r_1 \geq R$。

對於鈍角三角形，令最長邊為 L，以最長邊為直徑作一圓 C（此時圓即為最小），因圓 C 可以覆蓋整個三角形，故 $O_1 = C$。

所以，$\min \sum^{1} r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角或直角三角形} \\ \dfrac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}$。 □

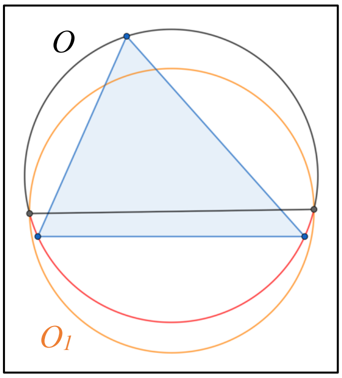


圖 *1-1*　來源：*GeoGebra*
作者自行繪製

2. 最小覆蓋圓組的必要條件

當 $N > 1$，我們不再能輕易看出覆蓋圓的位置和大小，所以我們想找出滿足圓為最小覆蓋圓的必要條件。首先我們發現最小覆蓋圓組中，覆蓋圓與頂點和邊的交點有以下關係：

<u>引理*1.*</u> 在最小覆蓋圓組中，若$\angle A$為銳角或直角，則A在最小覆蓋圓組的某一個覆蓋圓上。

<u>*Proof.*</u> 我們先說明下面這個命題：對相交於兩點的兩圓，若交點連線的一側，圓 O_1 覆蓋另一圓 O_1'，則在連線另一側，圓 O_1' 覆蓋圓 O_1。從右圖 *2-1* 中可以清楚地看出來。

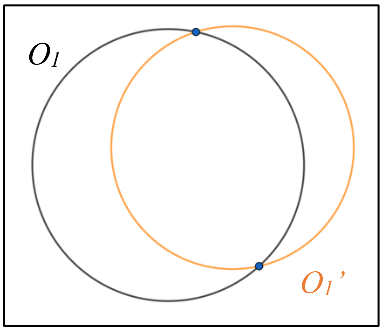


圖 *2-1*　來源：*GeoGebra*
作者自行繪製

接下來我們開始證明引理。首先說明存在性：

假設存在一個最小覆蓋圓組，其 A 點不在任一覆蓋圓上，因爲此覆蓋圓組覆蓋整個三角形，故存在一個最小覆蓋圓 O_1 覆蓋 A 點。接下來有兩種情況：

(1) 圓 O_1 與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 有交點（包含頂點 B 在圓 O_1 上）

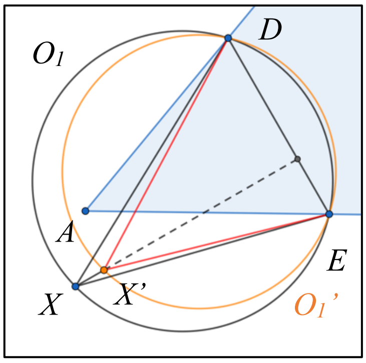


圖 2-2　來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

符號如圖 2-2 所示。在弧 DE 上與 A 同側找一點 X，因為 $\angle A$ 為銳角或直角，故 $\angle DXE$ 為銳角。將點 X 向 $\overline{DE}$ 靠近適當距離形成點 X'，使得 $\Delta X'DE$ 的外接圓 O_1' 仍覆蓋 ΔADE，因為點 X' 在圓 O_1 內，由上頁說明，圓 O_1' 覆蓋了圓 O_1 覆蓋 ΔABC 的區域。

又 $\angle DXE < \angle DX'E < \angle DAE \leq 90°$

$\Rightarrow R_{O_1} = \dfrac{\overline{DE}}{2\sin\angle DXE} > \dfrac{\overline{DE}}{2\sin\angle DX'E} = R_{O_1'}$，故圓 O_1 不為最小覆蓋圓。

(2) 圓 O_1 與 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 有交點

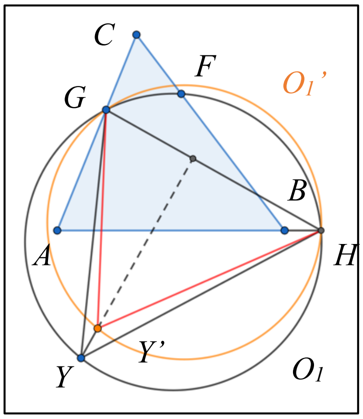


圖 2-3　來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

符號如圖 2-3 所示。作 $\overline{AB}$ 的延長線交圓 O_1 於 H，在弧 GH 上與 A 同側找一點 Y，因為 $\angle GAH$ 為銳角或直角，故 $\angle GYH$ 為銳角。將點 Y 向 $\overline{GH}$ 靠近適當距離形成點 Y'，使得 $\Delta Y'GH$ 的外接圓 O_1' 仍覆蓋四邊形 $AGFC$，因為點 Y' 在圓 O_1 內，由上頁說明，圓 O_1' 覆蓋了圓 O_1 覆蓋 ΔABC 的區域。又 $\angle GYH < \angle GY'H \leq \angle GAH \leq 90°$

$\Rightarrow R_{O_1} = \dfrac{\overline{GH}}{2\sin\angle GYH} > \dfrac{\overline{GH}}{2\sin\angle GY'H} = R_{O_1'}$，故圓 O_1 不為最小覆蓋圓。

由 *(1)*、*(2)*，我們證明了對於任一頂點，存在覆蓋圓使得三角形的頂點在此圓上。

接下來證明唯一性：

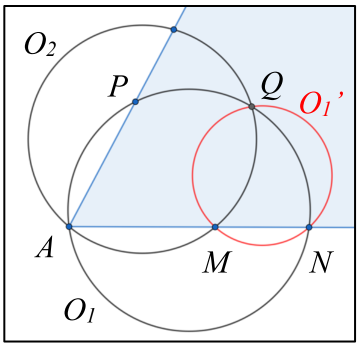


圖 2-4　來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

若有兩圓同時覆蓋 A 點，令為 O_1、O_2，其符號如圖 2-4 所示。作 ΔMNQ 的 $N = 1$ 最小覆蓋圓 O_1'，因為圓 O_1' 覆蓋了圓 O_1 實際覆蓋三角形的區域，所以我們只要說明 $R_{O_1} > R_{O_1'}$。

因為弧 $PQN \geq$ 弧 QN，故 $\overline{PN} \geq \overline{QN}$。若 $\angle QMN$ 為銳角，則 $\angle A < \angle QMN$，$R_{O_1} = \dfrac{\overline{PN}}{2\sin\angle A} > \dfrac{\overline{QN}}{2\sin\angle QMN} \geq R_{O_1'}$。

若 $\angle QMN$ 為鈍角或直角，則 $R_{O_1} = \dfrac{\overline{PN}}{2\sin\angle A} > \dfrac{\overline{QN}}{2} = R_{O_1'}$，故圓 O_1 不為最小覆蓋圓。

由此，我們證明了對於銳角或直角三角形的最小覆蓋圓組中，都存在唯一的覆蓋圓，使得三角形的一個頂點在此圓上。 □

引理2. 若圓O為最小覆蓋圓組中的某個覆蓋圓，則圓O與邊的交點，必有覆蓋圓通過。

Proof. 利用反證法，假設有一最小覆蓋圓組，其中兩圓 O_1、O_2 及三角形一邊相交情形如下圖 2-5，圓 O_1、O_2 交點不在邊$\overline{EH}$上，不失一般性，令$\angle PFG \geq \angle PGF$，作一圓 O_2'通過點 P、H，交邊$\overline{EH}$於$\overline{FG}$中，令交點為 X。因為圓 O_1 和圓 O_2'覆蓋了圓 O_1、O_2 覆蓋的區域，所以接下來我們只要說明 $r_2' < r_2$。 $r_2' = \dfrac{\overline{PH}}{2\sin\angle PXH}$，$r_2 = \dfrac{\overline{PH}}{2\sin\angle PGH}$，

由$\angle PFG \geq \angle PGF \Rightarrow \angle PGF$ 為銳角 $\Rightarrow \angle PGH$ 為鈍角，取適當的 X 使$\angle PXH$ 也為鈍角或直角。

$\because\ \angle PGH > \angle PXG \geq 90°$

$\therefore\ r_2' = \dfrac{\overline{PH}}{\sin\angle PXH} < \dfrac{\overline{PH}}{\sin\angle PGH} = r_2$

故圓 O_2 不為最小覆蓋圓 $\Rightarrow$ 圓 O_1、O_2 交於$\overline{EH}$上。 □

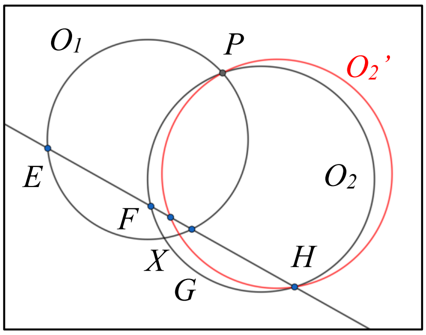


圖 2-5 來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

由引理 *1* 和定理 *1*，我們發現銳角三角形與直角及鈍角三角形有不同的性質。

但是對於「直角三角形」，因為直角三角形為「銳角三角形及鈍角三角形的交界」，某種意義上，可說是兩者取極限；若是三者獨立證明，結果可以用來驗證其性質及結論的正確性。接下來的研究內容，直角三角形的處理手法與銳角三角形的方法相似，並可得到相同的結論，於是在下面的研究中，我們分開討論（一）銳角和直角三角形和（二）鈍角三角形：

（一）對於銳角和直角三角形，利用 N 個不等圓覆蓋

在研究目的中，我們想要求出 $N = 2$、3 的最小覆蓋圓組。由引理 *1*、*2*，我們將 $N = 2$、3 可能的最小覆蓋圓組分成下面幾類：

1. $N = 2$

此時有一圓覆蓋兩個頂點，不失一般性令覆蓋 B、C 兩點的圓為 O_2，覆蓋 A 點的圓為 O_1。由引理 *1*，B、C 在圓 O_2 上，A 在圓 O_1 上，且由引理 *2*，O_1 與 O_2 的交點在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，令其分別為點 E、D，如下頁圖 *3-1*。

2. $N = 3$

可以分成兩種情況：(*1*) 三個覆蓋圓各蓋住一個頂點 (*2*) 有一圓蓋住兩個頂點。

在情況 *1* 中，令覆蓋 A 點的圓為 O_1、覆蓋 B 點的圓為 O_2，覆蓋 C 點的圓為 O_3，由引理 *2*，

(i) 若 O_2、O_3 有交點，則 O_2、O_3 與邊 $\overline{BC}$ 交於一點。（重心型，如左一圖 *4-1*，）

(ii) 若 O_2、O_3 無交點，則 O_1、O_2 與邊 $\overline{BC}$ 交於一點，

O_1、O_3 與邊 $\overline{BC}$ 交於一點。（四點型，如左二圖 *4-2*）。

在情況 *2* 中，令覆蓋 B、C 兩點的圓為 O_3，由引理 *1*，B、C 在圓 O_3 上。令圓 O_3 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 E、D，由引理 *1, 2*，A、D、E 皆在某個覆蓋圓上，此時同樣有兩種情況：

(iii) 不失一般性，A、E 在 O_2 上。（兩點型，如左三圖 *4-3*），

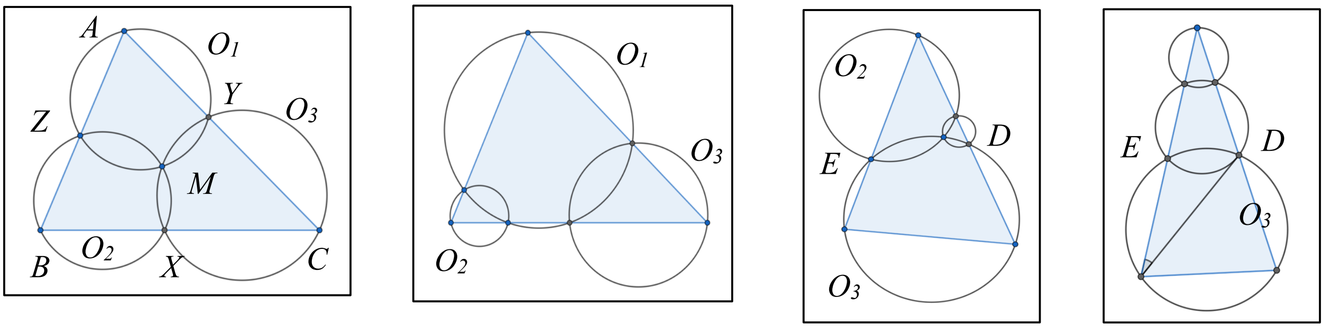
(iv) D、E 在 O_2 上。（上下型，如左四圖 *4-4*）。

而我們如何確定只有上述幾種情況呢？我們考慮覆蓋圓之間的相交情形作分類。以 $N=3$ 情況 *1* 的 i 為例，我們先作 O_2 交 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$ 於 X、Z 上，若 O_2、O_3 有交點，由引理 *2*，有一交點會在 $\overline{BC}$ 上，即為 X。令 O_3 交 $\overline{AC}$ 於 Y，交 O_2 於 M。由密克定理和引理 *2*，O_1 會通過 A、Z、M、Y，即為圖 *4-1*。

由此，經過幾次「二分法」，我們便從眾多覆蓋圓組中，找出了可能的「候選人」，並且因為引理 *1, 2* 為必要條件，所以最小覆蓋圓組必在這些「候選人」中。

圖 *4-1~4-4*

來源：*GeoGebra* 作者自行繪製



3. N = 2，對於銳角和直角三角形，利用 2 個不等圓覆蓋

<u>定理 *2.*</u> 銳角和直角三角形 ABC 的 $\min \sum^{2} r^2 = R^2 \cdot \dfrac{1+\sin^2\alpha}{2}$。

<u>*Proof.*</u> 符號如圖 *3-1* 所示。令 $\angle ABD = x$、$\angle A = \alpha$，

$$\sum^{2} r^2 = r_1^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x} \times r_1^2 \qquad (\overline{DE} = 2r_1\cdot\sin\alpha = 2r_2\cdot\sin x)$$

$$=\left(R\cdot\frac{\sin x}{\sin(\pi-\alpha-x)}\right)^2\cdot\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x}\right)$$

（由 ΔAEC 的正弦定理及 $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ 可知 $\dfrac{r_1}{R} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin x}{\sin(\pi-\alpha-x)}$）

$=R^2\cdot\dfrac{\sin^2x}{\sin^2(\alpha+x)}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2x}{\sin^2x}=R^2\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2x}{\sin^2(\alpha+x)}$，令 $f(x)=\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2x}{\sin^2(\alpha+x)}$，

$f'(x)=0\Rightarrow 2\sin x\cdot\cos x\cdot\sin^2(\alpha+x)-(\sin^2\alpha+\sin^2x)\cdot 2\sin(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha+x)=0$

$\Rightarrow \sin x\cdot\cos x\cdot\sin(\alpha+x)=(\sin^2\alpha+\sin^2x)\cdot\cos(\alpha+x)$

$\Rightarrow \sin x\cdot\cos x\cdot(\sin\alpha\cdot\cos x+\cos\alpha\cdot\sin x)=(\sin^2\alpha+\sin^2x)(\cos\alpha\cdot\cos x-\sin\alpha\cdot\sin x)$

$\Rightarrow \sin x\cdot\cos^2x\cdot\sin\alpha+\sin^2x\cdot\cos x\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos x-\sin^3\alpha\cdot\sin x+\cos\alpha\cdot\sin^2x\cdot\cos x-\sin\alpha\cdot\sin^3x$

$\Rightarrow \sin x\cdot\sin\alpha(\cos^2x+\sin^2x)=\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos x-\sin^3\alpha\cdot\sin x$

$\Rightarrow \sin x\cdot\sin\alpha(1+\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}\Rightarrow \sin x=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$、$\cos x=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$

將上式代入 $f''(x)$，檢驗得到此時 $f''(x)=2+2\sin^2\alpha+\dfrac{\cos^4\alpha}{4\sin^2\alpha}>0$，

$f(x)$有最小值。代入 $\sum^{2} r^2=R^2\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2x}{(\sin\alpha\cdot\cos x+\cos\alpha\cdot\sin x)^2}$

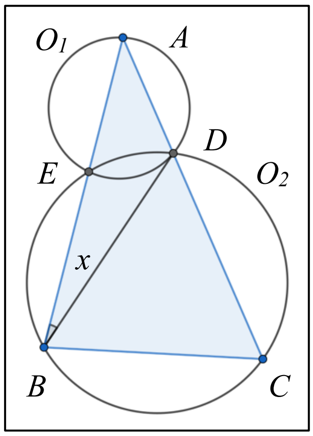


圖 3-1　來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

$$\ge R^2\cdot\frac{\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha\cdot\dfrac{(1+\sin^2\alpha)^2}{1+3\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\dfrac{(1+\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}}$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\,(1+3\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot(1+\sin^2\alpha)^2+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot(1+\sin^2\alpha)\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot[\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+1+2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha+\cos^2\alpha]}{\sin^2\alpha\cdot[1+2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2(1+\sin^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha]}$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+1+\sin^2\alpha+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{1+2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}$$

$$=R^2\cdot\frac{\sin^2\alpha+1+\sin^2\alpha+1}{1+2+1^2}=R^2\cdot\frac{1+\sin^2\alpha}{2}$$

所以$\sum^{2} r^2\ge R^2\cdot\dfrac{1+\sin^2\alpha}{2}$。不失一般性，令$\angle A$ 為最小角，此時 $\min\sum^{2} r^2=R^2\cdot\dfrac{1+\sin^2\alpha}{2}$。□

4. N = 3，對於銳角和直角三角形，利用 3 個不等圓覆蓋

<u>討論 1.</u>　銳角和直角三角形ABC的$\min\sum^{3} r^2$。

情況 *1.(i)*（重心型）

符號如下圖 *4-1* 所示。由引理 *2*，O_1 與 O_2、O_3 分別交於 Z、Y，由密克定理，A、Z、M、Y 四點共圓 O_1。在ΔABC 中，對於任意的 M 點，

$$4\sum^{3} r^2 = \frac{\overline{AM}^2}{\sin^2\angle AYM} + \frac{\overline{BM}^2}{\sin^2\angle BZM} + \frac{\overline{CM}^2}{\sin^2\angle CXM} = \frac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2}{\sin^2\angle AYM} \ge \overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2$$

（由共圓，$\angle AYM = \angle BZM = \angle CXM$）

等號成立在 $\sin\angle AYM = \sin\angle BZM = \sin\angle CXM = 1$ 時

$\Rightarrow \angle AYM = \angle BZM = \angle CXM = 90°$。

又 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2$ 的最小值發生在 M 為重心時（參考文獻一）

，故 $\sum^{3} r^2 \ge \frac{\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+\overline{CM}^2}{4} \ge \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\times$（三中線平方和）

$$= \frac{1}{18}\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{2}+b^2+c^2-\frac{a^2}{2}+c^2+a^2-\frac{b^2}{2}\right) = \frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2)$$

$$= \frac{R^2}{3}\cdot(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)。$$

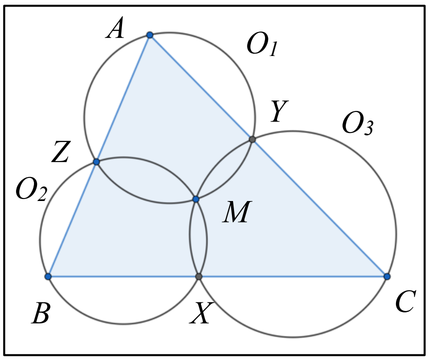


圖 4-1　來源：GeoGebra
作者自行繪製

因為 M 點在重心的位置，我們將此情況稱為「重心型」。

(ii)（四點型）符號如圖 4-2 所示。由引理 2，O_1 交 O_2 於 P、S、交 O_3 於 Q、T，對於這類情況（一覆蓋圓與三邊有四個交點），我們稱為「四點型」。

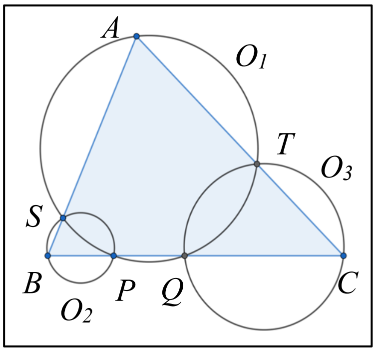


圖 4-2　來源：GeoGebra
作者自行繪製

先假設 $R = 1$，利用座標化，以 A 在 $\overline{BC}$ 上的垂足為原點，$\overrightarrow{BC}$ 方向為 x 軸正向，令三點座標為 $A(0,2\sin\beta\cdot\sin\gamma)$、$B(-2\cos\beta\sin\gamma,0)$、$C(2\sin\beta\cos\gamma,0)$，令圓 O_1 的半徑為 r_1，圓心在(p, q)，因為點 A 在圓 O_1 上，我們有 $p^2+(2\sin\beta\sin\gamma-q)^2 = r_1^2$。

以$(x-p)^2+(y-q)^2 = r_1^2 = p^2+(2\sin\beta\sin\gamma-q)^2$ 聯立 $y=0$、$y=x\cdot\tan\beta+2\sin\beta\sin\gamma$ 和 $y=-x\cdot\tan\gamma+2\sin\beta\sin\gamma$，我們得到

$P(p-\sqrt{p^2+4\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma-4q\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma},\ 0)$、$Q(p+\sqrt{p^2+4\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma-4q\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma},\ 0)$、

$S(2p\cdot\cos^2\beta-4\sin^2\beta\cos\beta\sin\gamma+2q\cdot\sin\beta\cos\beta,\ 2p\cdot\sin\beta\cos\beta-4\sin^3\beta\sin\gamma+2\sin\beta\sin\gamma+2q\cdot\sin^2\beta)$、

$T(2p\cdot\cos^2\gamma+4\sin^2\gamma\cos\gamma\sin\beta-2q\cdot\sin\gamma\cos\gamma,\ -2p\cdot\sin\gamma\cos\gamma-4\sin^3\gamma\sin\beta+2\sin\beta\sin\gamma+2q\cdot\sin^2\gamma)$。

注意到上式中的根號中 q 的次數是 1，我們可以令 $p^2+4\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma-4q\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = x^2$，此時 $q = \frac{p^2+4\sin^2\beta\sin^2\gamma-x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}$，則 $\sum^{3} r^2 = r_1^2+\frac{\overline{PS}^2}{4\sin^2\angle B}+\frac{\overline{QT}^2}{4\sin^2\angle C}$

$$= p^2+(2\sin\beta\sin\gamma-q)^2+\cot^2\beta\cdot(p\cdot\cos\beta-2\sin^2\beta\sin\gamma+q\cdot\sin\beta)^2+\cot^2\gamma\cdot(p\cdot\cos\gamma+2\sin^2\gamma\sin\beta-q\cdot\sin\gamma)^2$$

$$-\cot\beta\cdot(p\cdot\cot\beta-2\sin\beta\sin\gamma+q)(p-x)-\cot\gamma\cdot(p\cdot\cot\gamma+2\sin\gamma\sin\beta-q)(p+x)+\frac{(p-x)^2}{4\sin^2\beta}+\frac{(p+x)^2}{4\sin^2\gamma}$$

$$+(p\cdot\cos\beta-2\sin^2\beta\sin\gamma+\sin\gamma+q\cdot\sin\beta)^2+(-p\cdot\cos\gamma-2\sin^2\gamma\sin\beta+\sin\beta+q\cdot\sin\gamma)^2$$

$$= p^2 + 3(2\sin\beta\sin\gamma - q)^2 - p\cdot\cot\beta\cos^2\beta(2\sin\beta\sin\gamma - q) + p\cdot\cot\gamma\cos^2\gamma(2\sin\beta\sin\gamma - q) + px\cdot\cot^2\beta$$

$$- p\cdot\sin\beta\cos\beta(2\sin\beta\sin\gamma - q) - px\cdot\cot^2\gamma + p\cdot\sin\gamma\cos\gamma(2\sin\gamma\sin\beta - q) - x\cdot\cot\beta(2\sin\beta\sin\gamma - q)$$

$$- x\cdot\cot\gamma(2\sin\gamma\sin\beta - q) - 4\sin\beta\sin\gamma(2\sin\beta\sin\gamma - q) + \frac{(p-x)^2}{4\sin^2\beta} + \frac{(p+x)^2}{4\sin^2\gamma} + 2p\cdot\sin(\gamma-\beta) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

（將上式的 q 改寫成 $\dfrac{p^2 + 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}$）

$$= p^2 + 3\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right)^2 + p\cdot\cot\beta\cos^2\beta\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right) - p\cdot\cot\gamma\cos^2\gamma\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right)$$

$$+ px\cdot\cot^2\beta + p\cdot\sin\beta\cos\beta\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right) - px\cdot\cot^2\gamma - p\cdot\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right)$$

$$+ x\cdot\cot\beta\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right) + x\cdot\cot\gamma\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right) + 4\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\beta\sin^2\gamma - x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right)$$

$$+ \frac{(p-x)^2}{4\sin^2\beta} + \frac{(p+x)^2}{4\sin^2\gamma} + 2p\cdot\sin(\gamma-\beta) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

$$= 3\cdot\frac{(p^2-x^2)^2}{16\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (p\cdot(\cot\beta - \cot\gamma) + x\cdot(\cot\beta + \cot\gamma))\left(\frac{p^2-x^2}{4\sin\beta\sin\gamma}\right) + (p^2+x^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2\beta} + \frac{1}{4\sin^2\gamma}\right)$$

$$+ \frac{px}{2}\cdot(\cot^2\beta - \cot^2\gamma) + p\cdot\sin(\gamma-\beta) - x\cdot\sin(\gamma+\beta) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma$$

$$= 3\cdot\frac{(p^2-x^2)^2}{16\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (p\cdot\sin(\gamma-\beta) + x\cdot\sin(\gamma+\beta))\left(\frac{p^2-x^2}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}\right) + (p^2+x^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2\beta} + \frac{1}{4\sin^2\gamma}\right)$$

$$+ \frac{px}{2\sin^2\beta\sin^2\gamma}\cdot\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\beta) + p\cdot\sin(\gamma-\beta) - x\cdot\sin(\gamma+\beta) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma$$

而在前面假設中，為了計算的方便，我們令 $R = 1$。這裡我們將其一般化，令

$$\sum^{3} r^2 = R^2\cdot s(x,p) = [3\cdot\frac{(p^2-x^2)^2}{16\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (p\cdot\sin(\gamma-\beta) + x\cdot\sin(\gamma+\beta))\cdot\frac{p^2-x^2}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (2\sin^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)\cdot$$

$$\frac{p^2+x^2}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma} + \frac{px}{2\sin^2\beta\sin^2\gamma}\cdot\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\beta) + p\cdot\sin(\gamma-\beta) - x\cdot\sin(\gamma+\beta) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma\,]\cdot R^2$$

上式是一個以 x、p 為變數的二元四次多項式，係數由 β, γ, R 組成，我們要求函數 $s(x,p)$ 的最小值。但礙於上式為二元四次多項式，計算上十分困難，難以寫出 $s(x,p)$的「解析解」，只能求出特殊情況下的解，這個部分我們放在（伍）討論當中。

情況 2. *(iii)*（兩點型）

符號如圖 *4-3* 所示。此時$\Delta ADE \sim \Delta ABC$，我們說明圓 O_1 會通過點 X。由圓內接四邊形 $AEXY$ 和圓內接五邊形 $BEXDC$，我們得到$\angle XYD = \angle AEX = \angle BCX$ 和$\angle XDY = \angle XBC$。故$\Delta XYD \sim \Delta XCB$ *(AA* 相似*)*。

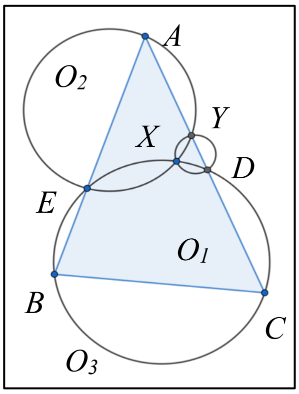


圖 *4-3*　來源：*GeoGebra*
作者自行繪製

因為$\angle BXC$為銳角（若為鈍角，則以$\overline{BC}$為直徑的圓半徑 $< r_3$且覆蓋了 O_3覆蓋三角形的區域），所以$\angle DXY$亦為銳角，則因為圓 O_1為最小覆蓋圓，故會通過點 X。對於這類情況（一覆蓋圓與三邊只有兩個交點），我們稱為「兩點型」。

令 $\overline{DY} = l$，$\angle ABD = x$，此時$\angle DXY = \angle BXC = \alpha+x$

$$\sum^{3} r^2 = \frac{4R^2\sin^2\alpha}{4\sin^2(\alpha+x)} + \frac{l^2}{4\sin^2(\alpha+x)} + \frac{l^2 + 4R^2\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - 2l\cdot 2R\sin\alpha\cdot\frac{\sin x}{\sin(\alpha+x)}\cos\beta}{4\sin^2\alpha}$$

$$=\left(\frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)}+\frac{1}{4\sin^2\alpha}\right)\cdot\left(l-2R\cdot\frac{\sin x\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+x)}{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x)}\right)^2 + R^2\cdot\frac{\sin^2\alpha+\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - R^2\cdot\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x)}$$

$\geq R^2\cdot\left[\frac{\sin^2\alpha+\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x)}\right]$，令 $f(x)=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x)}$，

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-\sin^2\alpha\cdot 2\sin(\alpha+x)\cos(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)} + \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x\cdot 2\sin(\alpha+x)\cos(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)}$$

$= \frac{2\sin x\cdot\cos x\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2\beta\cdot 2\sin(\alpha+x)\cos(\alpha+x)}{(\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x))^2}$，化簡得到

$(2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta\cdot\cos^4\alpha)t^5+(7\cos\alpha-4\cos^3\alpha-5\cos^2\beta\cdot\cos^3\alpha)t^4+(8-4\cos^4\alpha-9\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha)t^3$
$+(12\cos\alpha-12\cos^3\alpha-7\cos^2\beta\cdot\cos\alpha)t^2+(8-12\cos^2\alpha-2\cos^2\beta)t-4\cos\alpha=0$，其中 $t=(\tan x)/\sin\alpha$。

令 $w(t)=(2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta\cdot\cos^4\alpha)t^5+(7\cos\alpha-4\cos^3\alpha-5\cos^2\beta\cdot\cos^3\alpha)t^4+(8-4\cos^4\alpha-9\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha)t^3+(12\cos\alpha-12\cos^3\alpha-7\cos^2\beta\cdot\cos\alpha)t^2+(8-12\cos^2\alpha-2\cos^2\beta)t-4\cos\alpha=0$

若將上式的 t 解出，利用 *GeoGebra* 驗證，代入 $R^2\cdot\left[\frac{\sin^2\alpha+\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x\cdot\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+x)}\right]$
$= R^2\cdot\left[\frac{1+t^2+t^2\cdot\sin^2\alpha}{(1+t\cdot\cos\alpha)^2} - \frac{t^2\cdot\cos^2\beta}{2+2t\cdot\cos\alpha+t^2}\right]$ 後即得最小值。

值得注意的是，在這個例子中 α, β, γ 並沒有大小關係，也就是對於任一三角形，我們仍需比較不同的排列組合，但經過觀察，α, β, γ 應有大小關係，我們未來會繼續處理這個部分。

(iv)（上下型）當 D、E 在 O_2上，我們利用ΔADE的 $N=2$ 最小覆蓋圓組覆蓋ΔADE。這種類型的覆蓋方式，我們稱為「上下型」。

ΔADE 的 $\min\sum^{2} r^2$ 為 $R'^2\cdot\frac{1+\sin^2\alpha}{2}$（$R'$為$\Delta ADE$的外接圓半徑）。

與 $N=2$ 類似的，令$\angle ABD = x$，

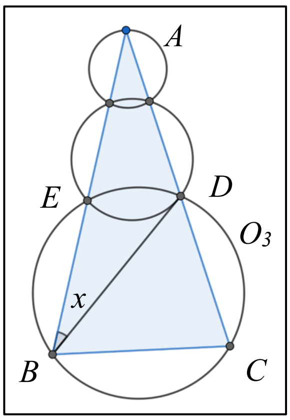


圖 4-4　來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

$$\sum^{3} r^2 = R'^2\cdot \frac{1+sin^2\alpha}{2} + \frac{sin^2\alpha}{sin^2x} \times R'^2 = \left(R\cdot \frac{2R\cdot sin\beta\cdot \dfrac{sin\, x}{sin(\alpha+x)}}{2Rsin\beta} \right)^2\cdot \left(\frac{1+sin^2\alpha}{2} + \frac{sin^2\alpha}{sin^2x}\right)$$

$$= R^2\cdot \frac{sin^2x}{sin^2(\alpha+x)}\cdot \frac{sin^2x + sin^2x\cdot sin^2\alpha + 2sin^2\alpha}{2sin^2x} = R^2\cdot \frac{sin^2x + sin^2x\cdot sin^2\alpha + 2sin^2\alpha}{2sin^2(\alpha+x)} ,$$

令 $f(x) = \dfrac{sin^2x + sin^2x\cdot sin^2\alpha + 2sin^2\alpha}{2sin^2(\alpha+x)}$,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow sinx = \frac{2sin\alpha\cdot cos\alpha}{\sqrt{1+10sin^2\alpha+5sin^4\alpha}}、cosx = \frac{1+3sin^2\alpha}{\sqrt{1+10sin^2\alpha+5sin^4\alpha}}$$

將 x 代入 $f''(x)$，檢驗得到此時 $f''(x) > 0$，$f(x)$有最小值。

代入 $\sum^{3} r^2 = R^2\cdot \dfrac{sin^2x + sin^2x\cdot sin^2\alpha + 2sin^2\alpha}{2sin^2(\alpha+x)}$

$$\geq R^2\cdot \frac{2sin^2\alpha\cdot(1+10sin^2\alpha+5sin^4\alpha)+ 4sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha+4sin^4\alpha\, cos^2\alpha}{2sin^2\alpha\cdot(1+3sin^2\alpha)^2+ 2cos^2\alpha\cdot 4sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha+2\cdot 2sin\alpha\cdot(1+sin^2\alpha)\cdot cos\alpha\cdot sin\alpha\cdot cos\alpha}$$

$$= R^2\cdot \frac{(1+10sin^2\alpha+5sin^4\alpha)+ 2cos^2\alpha+ 2\, sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha}{(1+3sin^2\alpha)^2+ 4cos^4\alpha +2\cdot(1+sin^2\alpha)\cdot cos^2\alpha}$$

$$= R^2\cdot \frac{3sin^4\alpha+10sin^2\alpha+3}{sin^4\alpha+ 6sin^2\alpha +9} = R^2\cdot \frac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha +3}$$

所以 $r_1^2 + r_2^2 \geq R^2\cdot \dfrac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha +3}$。不失一般性，令$\angle A$ 為最小角，此時 $R^2\cdot \dfrac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha +3}$ 最小。

5. *上下型覆蓋圓組*

在前面的討論中，如定理 *2* 和討論 *1* 的情況 *2 (iv)*，不難發現這樣的覆蓋方式有遞迴的特徵，我們將這樣的這種覆蓋稱為上下型，而我們可以對任意的 N，求出上下型之$\sum^{n} r^2$的最小值。(*Note*：上下型的排列不一定為最小覆蓋圓組)

> <u>定理 *3.*</u> 對於任意 N 個圓，銳角和直角三角形「上下型」覆蓋圓組之
>
> $\sum^{n} r^2$的最小值＝ $R^2\cdot \dfrac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^n+ sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^n}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n}$。

<u>*Proof.*</u> 令 N 個圓的「上下型$\sum^{n} r^2$」的最小值＝ $R^2\cdot \dfrac{A_n}{B_n}$，由定理 *2* 和討論 *1* 的情況 *2 (iv)*，$A_2 = 1+sin^2\alpha$, $B_2 = 2$、$A_2 = 3sin^2\alpha+1$, $B_2 = sin^2\alpha +3$，接下來我們要求出 A_n, B_n 的一般式：

欲用 k 個圓以上下型覆蓋ΔABC，與前面類似的，我們做一圓 O_k 覆蓋 B、C 兩點，交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於分別為 E、D，如圖 *5-1*，此時$\Delta ADE \sim \Delta ABC$，接著利用 *k-1* 個圓覆蓋$\Delta ADE$，$\Delta ADE$ 的「$N = k-1$」最小覆蓋圓組的半徑平方和即為 $R'^2\cdot \dfrac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ （R'為ΔADE 的外接圓）

令∠ABD $= x$，則 $\sum^{k} r^2 = R'^2\cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x}\times R'^2 = R^2\cdot\frac{\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)}\cdot\left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x}\right)$

$= R^2\cdot\dfrac{\sin^2 x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+x)}$ 令 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+\sin^2\alpha}{\sin^2(\alpha+x)}$，

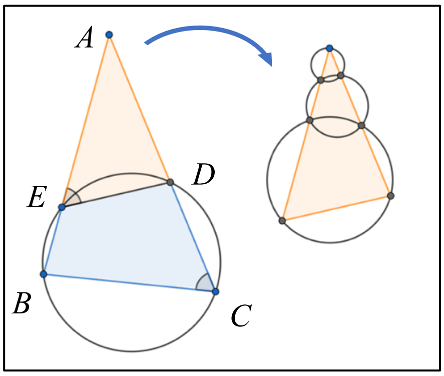


圖 5-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\cdot\sin^2(\alpha+x)$$

$$=(\sin^2 x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+\sin^2\alpha)\cdot 2\sin(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha+x)$$

$$\Rightarrow \sin x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}(\sin(\alpha+x)\cdot\cos x+\cos(\alpha+x)\cdot\sin x) = \sin^2\alpha\cdot\cos(\alpha+x)$$

$$\Rightarrow \sin x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = \sin\alpha\cdot(\cos\alpha\cdot\cos x-\sin\alpha\cdot\sin x)$$

$$\Rightarrow \sin x\cdot\left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+\sin^2\alpha\right) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=\frac{B_{k-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{k-1}+B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{B_{k-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{A_{n-k}^2+B_{n-k}^2\cdot\sin^2\alpha+2A_{n-k}\cdot B_{n-k}\cdot\sin^2\alpha}}、\cos x = \frac{A_{k-1}+B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha}{\sqrt{A_{n-k}^2+B_{n-k}^2\cdot\sin^2\alpha+2A_{n-k}\cdot B_{n-k}\cdot\sin^2\alpha}}$$

接下來我們驗證此時的 $f(x)$ 是最小值：

$$f''(x)=\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\Big[\frac{2\cos^2x-2\sin^2x}{\sin^2(\alpha+x)}-\frac{4\sin x\cdot\cos x\cdot\sin(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)}$$

$$-\frac{4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos(\alpha+x)-2\sin^2x\cdot\sin(\alpha+x)}{\sin^3(\alpha+x)}+\frac{2\sin^2x\cdot\cos(\alpha+x)\cdot 3\sin^2(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha+x)}{\sin^6(\alpha+x)}\Big]$$

$$-\sin^2\alpha\cdot\Big[\frac{-2\sin(\alpha+x)}{\sin^3(\alpha+x)}-\frac{2\cos(\alpha+x)\cdot 3\sin^2(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha+x)}{\sin^6(\alpha+x)}\Big]$$

$$=\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\Big[\frac{2\cos^2x}{\sin^2(\alpha+x)}-\frac{8\sin x\cdot\cos x\cdot\cos(\alpha+x)}{\sin^3(\alpha+x)}+\frac{6\sin^2x\cdot\cos^2(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)}\Big]+\sin^2\alpha\cdot\Big[\frac{2}{\sin^2(\alpha+x)}+\frac{6\cos^2(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)}\Big]$$

（將 $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{B_{k-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{k-1}+B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha}$ 代入 $f''(x)$）

$$f''(x)=\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\Big[\frac{2(A_{k-1}+B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha)^2}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^2}-\frac{8B_{k-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(A_{k-1}+B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha)\cdot A_{k-1}\cdot\cos\alpha}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^3}$$

$$+\frac{6B_{k-1}^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot A_{k-1}^2\cdot\cos^2\alpha}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^4}\Big]+\sin^2\alpha\cdot\Big[\frac{2(A_{k-1}^2+B_{k-1}^2\cdot\sin^2\alpha+2A_{k-1}B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha)}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^2}$$

$$+\frac{6A_{k-1}^2\cdot\cos^2\alpha\cdot(A_{k-1}^2+B_{k-1}^2\cdot\sin^2\alpha+2A_{k-1}B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha)}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^4}\Big]$$

$$=\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\cdot\frac{2A_{k-1}^4\cdot\sin^2\alpha}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^4}+\frac{2A_{k-1}^4\cdot\sin^2\alpha}{(A_{k-1}\cdot\sin\alpha+B_{k-1}\cdot\sin\alpha)^4}+\frac{4A_{k-1}^4}{(A_{k-1}+B_{k-1})^4}+\frac{4A_{k-1}^3B_{k-1}}{(A_{k-1}+B_{k-1})^4}$$

$$+\frac{2A_{k-1}^3B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha}{(A_{k-1}+B_{k-1})^4}+\frac{2A_{k-1}^2B_{k-1}^2\cdot\sin^2\alpha}{(A_{k-1}+B_{k-1})^4}+\frac{4A_{k-1}^2}{(A_{k-1}+B_{k-1})^2}+\frac{6A_{k-1}B_{k-1}\cdot\sin^2\alpha}{(A_{k-1}+B_{k-1})^2}+\frac{2B_{k-1}^2\cdot\sin^2\alpha}{(A_{k-1}+B_{k-1})^2}>0$$

由此，我們說明了當 $\frac{sinx}{cosx} = \frac{B_{k-1}\cdot sin\alpha\cdot cos\alpha}{A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha}$ 時，$f(x)$有最小值。代入$\overset{k}{\Sigma} r^2$，

$$\overset{k}{\Sigma} r^2 = R^2\cdot\frac{sin^2x\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}+sin^2\alpha}{sin^2(\alpha+x)}$$

$$\geq R^2\cdot[\,sin^2\alpha\cdot(B_{k-1}\cdot sin\alpha\cdot cos\alpha+A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha\,)^2+B_{k-1}^2\cdot sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha\cdot\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}\,]\,/$$

$$[\,sin^2\alpha\cdot(A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha\,)^2+cos^2\alpha\cdot B_{k-1}^2\cdot sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha+2B_{k-1}\cdot sin^2\alpha\cdot cos^2\alpha\cdot(A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha)]$$

$$= R^2\cdot[\,B_{k-1}^2\cdot sin^2\alpha+A_{k-1}^2+A_{k-1}\cdot B_{k-1}+A_{k-1}\cdot B_{k-1}\cdot sin^2\alpha]\,/$$

$$[A_{k-1}^2+B_{k-1}^2\cdot sin^4\alpha+2A_{k-1}\cdot B_{k-1}\cdot sin^2\alpha+B_{k-1}^2\cdot cos^4\alpha+2B_{k-1}\cdot cos^2\alpha\cdot(A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha)]$$

$$= R^2\cdot[A_{k-1}+B_{k-1}][A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha]\,/\,[A_{k-1}+B_{k-1}]^2 = R^2\cdot\frac{A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha}{A_{k-1}+B_{k-1}}$$

$\therefore \begin{cases} A_k = A_{k-1}+B_{k-1}\cdot sin^2\alpha \\ B_k = A_{k-1}+B_{k-1}\end{cases}$, $\begin{matrix} A_2 = 1+sin^2\alpha \\ B_2 = 2\end{matrix}$ ，我們定義 $A_1=1, B_1=1$，$A_0=1, B_0=0$。

接下來我們將遞迴關係式寫成矩陣，求出一般式：

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sin^2\alpha \\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_{k-1} \\ B_{k-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sin^2\alpha \\ 1 & 1\end{bmatrix}^k\cdot\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sin^2\alpha \\ 1 & 1\end{bmatrix}^k\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix}$$

令 $\begin{bmatrix} 1 & sin^2\alpha \\ 1 & 1\end{bmatrix} = M,\ ch_M(\lambda) = det(\lambda\cdot I-M)$

$det(\lambda\cdot I-M)=0 \Rightarrow\ det\begin{bmatrix} \lambda-1 & -sin^2\alpha \\ -1 & \lambda-1\end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2-2\lambda+1-sin^2\alpha = 0$

$\Rightarrow\ \lambda = 1\pm sin\alpha$，令 $\lambda_1 = 1+sin\alpha$，$\lambda_2 = 1-sin\alpha$

令 $v_1\in Ker(\lambda_1\cdot I-M) \ \Rightarrow \begin{bmatrix} sin\alpha & -sin^2\alpha \\ -1 & sin\alpha\end{bmatrix}\cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix}$ ，取 $v_1 = \begin{bmatrix} sin\alpha \\ 1\end{bmatrix}$

令 $v_2\in Ker(\lambda_2\cdot I-M) \ \Rightarrow \begin{bmatrix} -sin\alpha & -sin^2\alpha \\ -1 & -sin\alpha\end{bmatrix}\cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix}$ ，取 $v_2 = \begin{bmatrix} sin\alpha \\ -1\end{bmatrix}$

令 $P = [\ v_1\ \ v_2\ ] = \begin{bmatrix} sin\alpha & sin\alpha \\ 1 & -1\end{bmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2sin\alpha}\cdot\begin{bmatrix} 1 & sin\alpha \\ 1 & -sin\alpha\end{bmatrix}$，則 $P^{-1}\cdot M\cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$

$$M^k = P\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}^k\cdot P^{-1} = \frac{1}{2sin\alpha}\cdot\begin{bmatrix} sin\alpha & sin\alpha \\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1+sin\alpha & 0 \\ 0 & 1-sin\alpha\end{bmatrix}^k\cdot\begin{bmatrix} 1 & sin\alpha \\ 1 & -sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2sin\alpha}\cdot\begin{bmatrix} sin\alpha & sin\alpha \\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} [1+sin\alpha]^k & 0 \\ 0 & [1-sin\alpha]^k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & sin\alpha \\ 1 & -sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2sin\alpha}\cdot\begin{bmatrix} sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^k+sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^k & sin^2\alpha\cdot[1+sin\alpha]^k-sin^2\alpha\cdot[1-sin\alpha]^k \\ [1+sin\alpha]^k-[1-sin\alpha]^k & sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^k+sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^k\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{[1+\sin\alpha]^k+[1-\sin\alpha]^k}{2} & \dfrac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^k-\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^k}{2} \\ \dfrac{[1+\sin\alpha]^k-[1-\sin\alpha]^k}{2\sin\alpha} & \dfrac{[1+\sin\alpha]^k+[1-\sin\alpha]^k}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = M^k\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{[1+\sin\alpha]^k+[1-\sin\alpha]^k}{2} & \dfrac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^k-\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^k}{2} \\ \dfrac{[1+\sin\alpha]^k-[1-\sin\alpha]^k}{2\sin\alpha} & \dfrac{[1+\sin\alpha]^k+[1-\sin\alpha]^k}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{[1+\sin\alpha]^k+[1-\sin\alpha]^k}{2} \\ \dfrac{[1+\sin\alpha]^k-[1-\sin\alpha]^k}{2\sin\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \dfrac{[1+\sin\alpha]^k+[1-\sin\alpha]^k}{2} \\ B_k = \dfrac{[1+\sin\alpha]^k-[1-\sin\alpha]^k}{2\sin\alpha} \end{cases},\ \forall\, k\in\mathbb{N}$$

$\therefore$ N 個圓覆蓋ΔABC 的上下型$\sum^{n} r^2$的最小值$=R^2\cdot\dfrac{A_n}{B_n}=R^2\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^n+\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n}$ □

<u>定理 4.</u> 上下型覆蓋圓組中各個覆蓋圓的半徑

$$r_{n-k} = R\cdot\frac{\sin\alpha\sqrt{2[1+\sin\alpha]^{2n-2k-1}+2[1-\sin\alpha]^{2n-2k-1}}}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n}\cdot\cos^k\alpha。$$

<u>*Proof.*</u> 我們將 $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{n-1}+B_{n-1}\cdot\sin^2\alpha}$ 寫成 A_n, B_n 的表達式：($\begin{cases} A_n = A_{n-1}+B_{n-1}\cdot\sin^2\alpha \\ B_n = A_{n-1}+B_{n-1} \end{cases}$)

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{n-1}+B_{n-1}\cdot\sin^2\alpha}=\frac{B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_n}=\frac{B_n-A_n}{1-\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_n}=\frac{B_n\cdot\sin\alpha-A_n\cdot\sin\alpha}{A_n\cdot\cos\alpha}$$

有了 $\sin x, \cos x$ 的值，我們就可以求出此時的 r_n：

$$r_n = R\cdot\frac{\sin x}{\sin(\alpha+x)}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin x}=R\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos x+\cos\alpha\cdot\sin x}$$

$$=R\cdot\frac{\sin\alpha\sqrt{A_n^2\cdot\cos^2\alpha+B_n^2\cdot\sin^2\alpha+A_n^2\cdot\sin^2\alpha-2A_n\cdot B_n\cdot\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\cdot A_n\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot(B_n\cdot\sin\alpha-A_n\cdot\sin\alpha)}=R\cdot\frac{\sqrt{A_n^2+B_n^2\cdot\sin^2\alpha-2A_n\cdot B_n\cdot\sin^2\alpha}}{B_n\cdot\cos\alpha}$$

接下來，我們還需要求出 R'（被 $N-1$ 個圓覆蓋的三角形之外接圓半徑）：

$$R'=R\cdot\frac{\sin x}{\sin(\alpha+x)}=R\cdot\frac{B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot(A_{n-1}+B_{n-1}\cdot\sin^2\alpha)+\cos\alpha\cdot B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=R\cdot\frac{B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{n-1}\cdot\sin\alpha+B_{n-1}\cdot\sin\alpha}$$

最後，我們要求 $r_{n-k}\,(k=0, 1, \ldots, n-1)$：

$$r_{n-1} = R'\cdot\frac{\sqrt{A_{n-1}^2+B_{n-1}^2\cdot\sin^2\alpha-2A_{n-1}\cdot B_{n-1}\cdot\sin^2\alpha}}{B_{n-1}\cdot\cos\alpha}$$

$$= R\cdot\frac{B_{n-1}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{n-1}\cdot\sin\alpha+B_{n-1}\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{\sqrt{A_{n-1}^2+B_{n-1}^2\cdot\sin^2\alpha-2A_{n-1}\cdot B_{n-1}\cdot\sin^2\alpha}}{B_{n-1}\cdot\cos\alpha}$$

故 $r_{n-k} = R\cdot\dfrac{\sqrt{A_{n-k}^2+B_{n-k}^2\cdot\sin^2\alpha-2A_{n-k}\cdot B_{n-k}\cdot\sin^2\alpha}}{B_{n-k}\cdot\cos\alpha}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\dfrac{B_{n-k+j}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{A_{n-k+j}\cdot\sin\alpha+B_{n-k+j}\cdot\sin\alpha}$

$$= R \cdot \frac{\sqrt{A_{n-k}^2 + B_{n-k}^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_{n-k} \cdot B_{n-k} \cdot \sin^2\alpha}}{B_{n-k} \cdot \cos\alpha} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{B_{n-k+j} \cdot \cos\alpha}{B_{n-k+j+1}} \quad (B_n = A_{n-1} + B_{n-1})$$

$$= R \cdot \frac{\sqrt{A_{n-k}^2 + B_{n-k}^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_{n-k} \cdot B_{n-k} \cdot \sin^2\alpha}}{B_{n-k} \cdot \cos\alpha} \cdot \cos^k\alpha \cdot \frac{B_{n-k}}{B_n}$$

$$= R \cdot \frac{\sqrt{A_{n-k}^2 + B_{n-k}^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_{n-k} \cdot B_{n-k} \cdot \sin^2\alpha}}{B_n} \cdot \cos^{k-1}\alpha$$

最後代入 B_n、A_{n-k}、B_{n-k} 的一般式即得

$$r_{n-k} = R \cdot \frac{\sin\alpha\sqrt{2[1+\sin\alpha]^{2n-2k-1} + 2[1-\sin\alpha]^{2n-2k-1}}}{[1+\sin\alpha]^n - [1-\sin\alpha]^n} \cdot \cos^k\alpha \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)。 \quad \square$$

值得注意的是，無論是上下型覆蓋圓組的總面積或是各覆蓋圓的半徑，都只被 N, R, α（覆蓋圓數、外接圓半徑、最小角大小）決定！換句話說，只要 N, R, α 不變，上下型覆蓋圓組的總面積和各覆蓋圓的半徑皆不變！

（二）對於鈍角三角形，利用 N 個不等圓覆蓋

6. *對於鈍角和直角三角形，利用 2 個不等圓覆蓋*

<u>定理 5.</u> 鈍角或直角三角形 ABC 的 $\min \sum^{2} r^2 = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1+\sin^2\alpha}{2}$。

<u>*Proof.*</u> 令 $\angle C$ 為鈍角或直角，由引理 1，A,B 兩點在覆蓋圓上，若有一圓同時覆蓋 A,B，則其直徑 $\geq L$，我們稍後說明這不是最小覆蓋圓。令覆蓋 A 點的圓為 O_1，覆蓋 B、C 兩點的圓為 O_2，由引理 2，O_1、O_2 交於 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，令交點分別為 E、D，如圖 6-1。

（*Note*：O_1、O_2 有可能沒覆蓋到點 C）

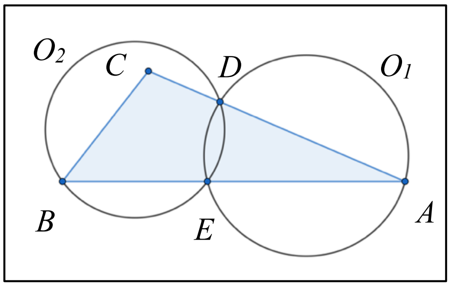


圖 6-1　來源：*GeoGebra*
作者自行繪製

若 D 點的位置固定，$r_1 = \frac{\overline{AD}}{2\sin\angle DEA}$，$r_2 = \frac{\overline{BD}}{2\sin\angle DEB}$，

當 $\angle DEA = 90°$，即 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 時，$r_1^2 + r_2^2$ 最小。

（此時 O_2 以 $\overline{BD}$ 為直徑，會覆蓋 ΔBCD）

令 $\angle ABD = x$ 且 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$，

$$\sum^{2} r^2 = r_1^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x} \times r_1^2 \qquad (\overline{DE} = 2r_1 \cdot \sin\alpha = 2r_2 \cdot \sin x)$$

$$= \left(\frac{L}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin(\pi - \alpha - x)}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 x}\right)$$

（由 ΔABD 中的正弦定理及 $\overline{AD} = 2r_1$ 可知：$\frac{2r_1}{L} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\sin x}{\sin(\pi - \alpha - x)}$）

$= \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{sin^2\alpha + sin^2x}{sin^2(\alpha+x)}$ ，令 $f(x)=\dfrac{sin^2\alpha + sin^2x}{sin^2(\alpha+x)}$，

與 $N = 2$ 銳角三角形的情況同樣的（定理 2），$f(x)$的最小值發生在

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{sin\alpha \cdot cos\alpha}{1+sin^2\alpha} \Rightarrow sinx = \dfrac{sin\alpha \cdot cos\alpha}{\sqrt{1+3sin^2\alpha}}$、$cosx = \dfrac{1+sin^2\alpha}{\sqrt{1+3sin^2\alpha}}$。

故 $\sum^{2} r^2 = \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{sin^2\alpha + sin^2x}{sin^2(\alpha+x)} \geq \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2}$。又 $\dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2} < \dfrac{L^2}{4}$，所以沒有一圓同時覆蓋 A、B（半徑平方和 $\geq \dfrac{L^2}{4} > \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2}$）。不失一般性，令$\angle A$ 為最小角，此時 $\dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2}$ 最小。故鈍角三角形 ABC 的 $min \sum^{2} r^2 = \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2}$。 □

其實從證明中不難發現，當 $N = 2$，銳角三角形與鈍角三角形的最小覆蓋圓組很相似，我們想嘗試分析其原因。

若我們作$\overline{AC}$的延長線，交 O_2 於 H，連接$\overline{BH}$。如右圖 6-2，則$\angle BHA = 90°$（B、E、D、H 共圓），所以此覆蓋圓組正是直角ΔABH 的 $N = 2$ 最小覆蓋圓組！並且此時 $L = 2R'$，由此可得鈍角或直角三角形 ABC 的 $min \sum^{2} r^2$

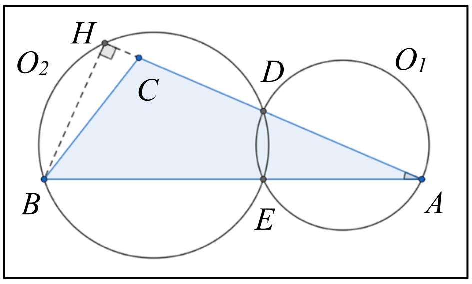


圖 6-2　來源：*GeoGebra*
作者自行繪製

$= R'^2 \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2} = \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+sin^2\alpha}{2}$（令 R' 為ΔABH 的外接圓半徑）。

7. 上下型覆蓋圓組

從上面的討論中，我們看到鈍角三角形的最小覆蓋圓組也具有上下型的樣子，只是將鈍角三角形轉化成直角三角形，所以我們將銳角三角形上下型的討論拓展到鈍角三角形中。

> <u>定理 6.</u>　對於任意 N 個圓，鈍角三角形「上下型」覆蓋圓組之
>
> $$\sum^{n} r^2 \text{的最小值} = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{sin\alpha \cdot [1+sin\alpha]^n + sin\alpha \cdot [1-sin\alpha]^n}{[1+sin\alpha]^n - [1-sin\alpha]^n}。$$

<u>Proof.</u>　對於鈍角三角形，我們不再像先前銳角三角形有良好的遞迴關係，我們需要自行造出直角，而且我們需要說明為什麼這樣的上下型覆蓋圓組是好的定義。利用數學歸納法，我們說明鈍角三角形的上下型覆蓋圓組都可以轉換成直角三角形的上下型覆蓋圓組。

當 $N = 2$，由定理 4.，此時上下型覆蓋圓組為直角ΔABH 的最小覆蓋圓組

假設 $N = k$ 時，鈍角三角形的上下型覆蓋圓組可以轉換成直角三角形的最小覆蓋圓組。

當 $N=k+1$，令覆蓋 B、C 兩點的圓為 O_{k+1}，分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 E、D，我們要選 ΔADE 的上下型覆蓋圓，為了使覆蓋圓組的 $\sum^{n} r^2$ 盡量的小，我們有以下討論：

當 $\angle BED$ 為鈍角，如下左圖 7-1，O_{k+1} 覆蓋了四邊形 $BEDC$，我們可以作另一圓 O_{k+1}' 以 $\overline{BD}$ 為直徑，因為 $\angle BED$ 和 $\angle C$ 皆為鈍角，故 O_{k+1}' 也覆蓋四邊形 $BEDC$ 且 $r_{k+1}' < r_{k+1}$，表示還有 $\sum^{n} r^2$ 更小的上下型覆蓋圓組。

當 $\angle BED$ 為銳角，如下中圖 7-2，由歸納法假設，ΔADE 的上下型覆蓋圓組中 O_k（覆蓋兩個頂點的圓）交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 D、H，其中 $\angle DHA=90°$，但由引理 2.，O_k 與 O_{k+1} 要交於 E、D，表示還有 $\sum^{n} r^2$ 更小的上下型覆蓋圓組。

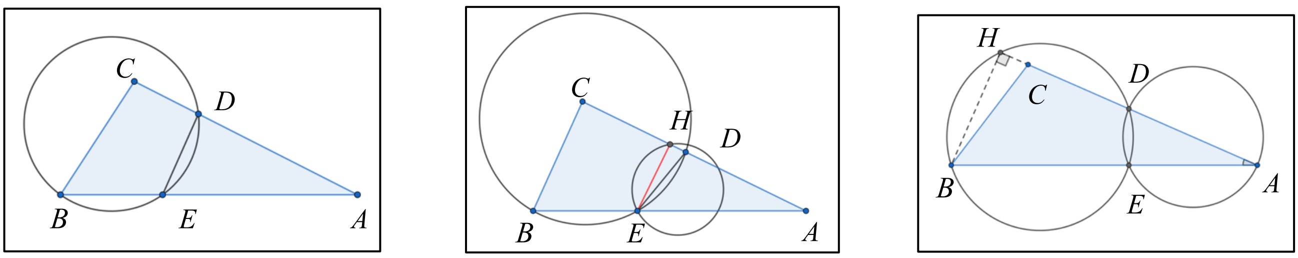
當 $\angle BED$ 為直角，O_{k+1} 覆蓋四邊形 $BEDC$，如下右圖 7-3，因為 $\angle DEC=90°$，故 O_{k+1} 以 $\overline{BD}$ 為直徑，所以 O_{k+1} 也會覆蓋直角 ΔBDH，其中 $\angle BHD=90°$，故 ΔABC 的上下型覆蓋圓組也會覆蓋直角 ΔABH，取 ΔABC 的上下型覆蓋圓組為直角 ΔABH 的上下型覆蓋圓組

由數學歸納法，我們證明鈍角三角形都可以轉換成直角三角形的上下型覆蓋圓組。

$\therefore$ 鈍角 ΔABC 的上下型 $\sum^{n} r^2$ 的最小值 $=$ 直角 ΔABH 的上下型 $\sum^{n} r^2$ 的最小值

$$=\frac{L^2}{4}\cdot\frac{A_n}{B_n}=\frac{L^2}{4}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^n+\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n}\quad\square$$

圖 7-1~7-3　來源：GeoGebra
作者自行繪製



8. $N=3$，對於鈍角三角形，利用 3 個不等圓覆蓋

<u>討論 2.</u>　鈍角三角形 ABC 的 $\min\sum^{3} r^2$。

與銳角情況同樣的，我們利用相似的步驟將最小覆蓋圓組分成類似的四種情況：

(i) 重心型 (ii) 四點型 (iii) 兩點型 (iv) 上下型。

下面我們分開討論：（不失一般性，令 $\angle C$ 為最大角）

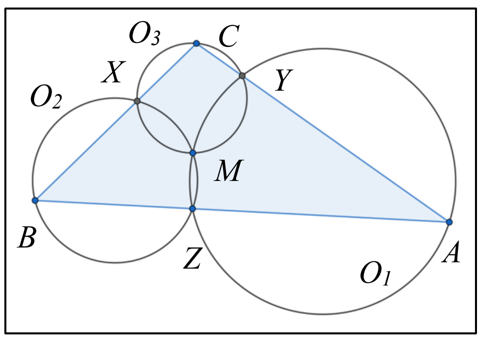


圖 8-1　來源：GeoGebra
作者自行繪製

(i)（重心型）

令 O_1 與 O_2 的交點為 M、Z，其中 Z 在 $\overline{AB}$ 上，O_1 與 O_2 分別與 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 的交點為 Y、X，如上圖 8-1，由引理 2，O_3 與 O_1、O_2 分別交於 Y、X。

由密克定理，C、X、M、Y 四點共圓。接下來我們說明若 O_3 為最小覆蓋圓，則 O_3 為過 C、X、M、Y 四點的圓。

首先，若 O_3 為最小覆蓋圓，則 X、Y 在 O_3 上。因為 O_3 為覆蓋圓，故 O_3 會覆蓋 C、M 兩點，又 $\angle C$ 為鈍角，所以 $\angle XMY$ 為銳角，ΔXMY 的 $N=1$ 最小覆蓋圓組即為 ΔXMY 的外接圓，又 C、X、M、Y 四點共圓，故 C 點亦在 ΔXMY 的外接圓上，O_3 即為過 C、X、M、Y 四點的圓。

接下來，與銳角三角形 $N=3$（4 情況 1.(1)）完全相同，此時 $\sum^{3} r^2$ 的最小值發生在 $\angle AYM=\angle BZM=\angle CXM=90°$ 且 M 為重心時，$\sum^{3} r^2$ 的最小值 $=\dfrac{R^2}{3}\cdot(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$。

(ii)（四點型）若 O_1、O_2 無交點，由引理 2.，令 O_1、O_2 與邊 $\overline{BC}$ 交於 Q、P，O_1、O_2 分別與 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 交於 T、S，由引理 2，令 O_3 交 O_1 於 Q、T，交 O_2 於 P、S，如下圖 8-2，此種情況亦稱為「四點型」。

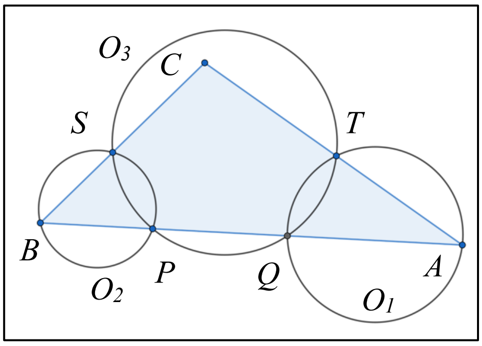


圖 8-2　來源：GeoGebra
作者自行繪製

與銳角三角形 $N=3$（4.情況 1(2)）類似地，先假設 $R=1$，利用座標化，以 A 在 $\overline{BC}$ 上的垂足為原點，$\overrightarrow{BC}$ 方向為 x 軸正向，令三點座標為 $C(0,2\sin\alpha\cdot\sin\beta)$、$B(-2\sin\alpha\cdot\cos\beta,0)$、$A(2\cos\alpha\cdot\sin\beta,0)$，令圓 O_1 的半徑為 r_1，圓心在(p,q)。以 $(x-p)^2+(y-q)^2 = r_1^2$ 聯立 $y=0$、$y=x\cdot\tan\beta+2\sin\alpha\sin\beta$ 和 $y=-x\cdot\tan\alpha+2\sin\alpha\sin\beta$，得到 $P(p-\sqrt{r_3^2-q^2},0)$、$Q(p+\sqrt{r_3^2-q^2},0)$、

$S(p\cdot\cos^2\beta-2\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha+q\cdot\sin\beta\cos\beta-\cos\beta\cdot\sqrt{r_3^2-(p\cdot\sin\beta+2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma-q\cdot\cos\beta)^2},$

$p\cdot\sin\beta\cos\beta+2\sin\beta\cos^2\beta\sin\alpha+q\cdot\sin^2\beta-\sin\beta\cdot\sqrt{r_3^2-(p\cdot\sin\beta+2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma-q\cdot\cos\beta)^2})$、

$T(p\cdot\cos^2\gamma+2\sin^2\gamma\cos\gamma\sin\beta-q\cdot\sin\gamma\cos\gamma+\cos\beta\cdot\sqrt{r_3^2-(p\cdot\sin\beta-2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma+q\cdot\cos\beta)^2},$

$-p\cdot\sin\gamma\cos\gamma+2\sin\gamma\cos^2\gamma\sin\beta+q\cdot\sin^2\gamma-\sin\beta\cdot\sqrt{r_3^2-(p\cdot\sin\beta-2\sin\beta\cos\beta\sin\gamma+q\cdot\cos\beta)^2})$。

但與銳角三角形 $N = 3$ 中情況 $1(2)$不同，C 點不一定在圓 O_3 上，故我們少了一個條件，使得根號無法化簡，且上式有三個變數（p,q,r_3），使得這個極值問題更為棘手。不過在某些情況下，此覆蓋圓組是最小覆蓋圓組，這個部分我們放（伍）討論當中。

(iii)（兩點型）

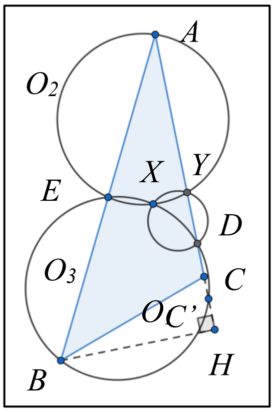


圖 8-3
來源：GeoGebra
作者自行繪製

我們先說明「A、D 在 O_2上」不是最小覆蓋圓組，令 O_3與$\overline{AC}$的延長線交於 C'，作一點 H 在$\overline{AC}$的延長線使得$\angle BHA = 90°$，顯然 C'在$\overline{CH}$中（若在$\overline{CH}$外，則以$\overline{BD}$為直徑的圓半徑 $< r_3$ 且覆蓋了 O_3 覆蓋三角形的區域），所以$\angle BC'A$ 為鈍角或直角。因為$\Delta ADE \sim \Delta ABC'$，故$\angle AED$ 亦為鈍角或直角，則當 O_2（過 A、D 兩點）為以$\overline{AD}$為直徑的圓半徑最小且圓 O_2、O_3 即覆蓋ΔABC，而這回到 $N = 2$ 的情況，不合。

所以 A、E 在 O_2上。令 O_2與 O_3的交點為 E、X，其中 X 在弧 DE 上，令 O_2交$\overline{AC}$於 Y，由引理 2，O_1與 O_2、O_3 分別交於 D、E，與銳角三角形兩點型同樣地，圓 O_1 會通過點 X 且$\Delta XYD \sim \Delta XC'B$。對於這類情況，我們亦稱為「兩點型」。

令$\angle ABC' = \varphi$（$\beta \le \varphi \le \frac{\pi}{2} - \alpha$），與銳角三角形兩點型完全相同的，令 $t = \dfrac{\tan\angle ABD}{\sin\alpha}$，

則 $\sum^{3} r^2 \ge R^2 \cdot \left[\dfrac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2\alpha}{(1 + t \cdot \cos\alpha)^2} - \dfrac{t^2 \cdot \cos^2\varphi}{2 + 2t \cdot \cos\alpha + t^2} \right]$，

其中 t 滿足 $w(t) = (2 - \cos^2\alpha - \cos^2\varphi \cdot \cos^4\alpha)t^5 + (7\cos\alpha - 4\cos^3\alpha - 5\cos^2\varphi \cdot \cos^3\alpha)t^4 + (8 - 4\cos^4\alpha - 9\cos^2\varphi \cdot \cos^2\alpha)t^3 + (12\cos\alpha - 12\cos^3\alpha - 7\cos^2\varphi \cdot \cos\alpha)t^2 + (8 - 12\cos^2\alpha - 2\cos^2\varphi)t - 4\cos\alpha = 0$

因為上式 t 的解析解尚未求出，那麼我們是否可以在此情況下確認 φ 的值呢？

因為 $\left[\dfrac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2\alpha}{(1 + t \cdot \cos\alpha)^2} - \dfrac{t^2 \cdot \cos^2\varphi}{2 + 2t \cdot \cos\alpha + t^2} \right]$中帶有 t 和 φ，並且 t 的值受到 φ 影響，也就是說，我們不能只靠證明遞增遞減性決定 φ 的值應該為最大值還是最小值。

然而我們知道，t 會滿足 $w(t) = 0$，我們可以將

$(2 - \cos^2\alpha - \cos^2\varphi \cdot \cos^4\alpha)t^5 + (7\cos\alpha - 4\cos^3\alpha - 5\cos^2\varphi \cdot \cos^3\alpha)t^4 + (8 - 4\cos^4\alpha - 9\cos^2\varphi \cdot \cos^2\alpha)t^3$

$+ (12\cos\alpha - 12\cos^3\alpha - 7\cos^2\varphi \cdot \cos\alpha)t^2 + (8 - 12\cos^2\alpha - 2\cos^2\varphi)t - 4\cos\alpha = 0$ 視為 φ, t 皆滿足的關係式，於是解得 $\cos^2\varphi = \dfrac{((2 - \cos^2\alpha)t - \cos\alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos\alpha + 2)^2}{t(1 + t \cdot \cos\alpha)^3(2 + t \cdot \cos\alpha)}$，代入

$[\dfrac{1+t^2+t^2\cdot sin^2\alpha}{(1+t\cdot cos\alpha)^2} - \dfrac{t^2\cdot cos^2\varphi}{2+2t\cdot cos\alpha+t^2}]$化簡得 $\dfrac{((2-cos^2\alpha)t^2+t\cdot cos\alpha+2)(t\cdot cos\alpha-t+1)(t\cdot cos\alpha+t+1)}{(1+t\cdot cos\alpha)^3(2+t\cdot cos\alpha)}$

我們便得到沒有 φ 的關係式，接下來只要證明上式隨 t 的遞增減性即可。

令 $g(t) = \dfrac{((2-cos^2\alpha)t^2+t\cdot cos\alpha+2)(t\cdot cos\alpha-t+1)(t\cdot cos\alpha+t+1)}{(1+t\cdot cos\alpha)^3(2+t\cdot cos\alpha)}$，對 t 微分得到

$$g'(t) = \frac{-2\cdot[(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)t^4+(8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8)t^3+(12cos^3\alpha-9cos\alpha)t^2+8cos^2\alpha\cdot t+2cos\alpha]}{(1+t\cdot cos\alpha)^4(2+t\cdot cos\alpha)^2}$$

，其中當 $t\geq 0$ 時，$p(t) = (2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)t^4+(8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8)t^3+(12cos^3\alpha-9cos\alpha)t^2+8cos^2\alpha\cdot t+2cos\alpha\geq 0$，下面我們進行證明：

我們要證明當 $t\geq 0$ 時，$p'(t)\geq 0$。

$p'(t) = 4(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)t^3+3(8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8)t^2+2(12cos^3\alpha-9cos\alpha)t+8cos^2\alpha$

$p'(0) = 8cos^2\alpha\geq 0$，再求 $p'(t)$的極值：

$p''(t) = 0\Rightarrow 12(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)t^2+6(8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8)t+2(12cos^3\alpha-9cos\alpha) = 0$

$t = \dfrac{-8cos^4\alpha+15cos^2\alpha-8\pm\sqrt{49cos^4\alpha-120cos^2\alpha+64}}{4(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)}$，取正根（負根 <0）令為 k，

其中判別式 $\geq 0\Rightarrow\ |cos\alpha|\leq\dfrac{\sqrt{58}-\sqrt{2}}{7}<1$。

當 $\alpha > cos^{-1}(\dfrac{\sqrt{58}-\sqrt{2}}{7})$，$p''(t)$ 恆正 $\Rightarrow p'(t)$ 遞增。又 $p'(0)\geq 0$，故當 $t\geq 0$ 時，$p'(t)\geq 0$。

當 $0<\alpha\leq cos^{-1}(\dfrac{\sqrt{58}-\sqrt{2}}{7})$，將 k 代入 $p'(t)$，

$$p'(k) = 4(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)k^3+3(8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8)k^2+2(12cos^3\alpha-9cos\alpha)k+8cos^2\alpha$$

$$=[12(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)k^2+6(8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8)k+2(12cos^3\alpha-9cos\alpha)]$$

$$\times[\frac{k}{3}+\frac{8cos^4\alpha-15cos^2\alpha+8}{12(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)}]+\frac{-1}{2}\cdot\frac{49cos^4\alpha-120cos^2\alpha+64}{2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha}\cdot k+\frac{-3}{2}\cdot\frac{4cos^4\alpha-cos^2\alpha-8}{2cos^4\alpha-6cos^2\alpha+5}$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot\frac{49cos^4\alpha-120cos^2\alpha+64}{2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha}\cdot\frac{-8cos^4\alpha+15cos^2\alpha-8+\sqrt{49cos^4\alpha-120cos^2\alpha+64}}{4(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4cos^4\alpha-cos^2\alpha-8}{2cos^4\alpha-6cos^2\alpha+5}$$

$$=\frac{-96cos^{10}\alpha+704cos^8\alpha-1815cos^6\alpha+2188cos^4\alpha-1440cos^2\alpha+512-\sqrt{(49cos^4\alpha-120cos^2\alpha+64)^3}}{8(2cos^5\alpha-6cos^3\alpha+5cos\alpha)^2}$$

最後代入 *GeoGebra*（圖 8-4）即可看出上式 $p'(k)$ 在 $0\leq cos\alpha\leq\dfrac{\sqrt{58}-\sqrt{2}}{7}$ 時皆大於等於 0。

並且觀察 $p'(t)$圖形的大域特徵（圖 8-5），$t=k$ 時達到極小值，且此時 $p'(t)\geq 0$、$p'(0)\geq 0$，並且 $t\geq 0$ 時，$p'(t)\geq 0$ 無其他極值，故 $p'(t)$在 $t>k$ 時遞增、在 $t<k$ 時遞減，由此即得。

故我們證明了當 $t \geq 0$ 時，$p'(t) \geq 0$。又 $p(0) = 2\cos\alpha \geq 0$，且 $t \geq 0$ 時 $p(t)$遞增，故當 $t \geq 0$ 時，$p(t) \geq 0$，

即 $g'(t) = \dfrac{-2 \cdot p(y)}{(1+y\cdot\cos\alpha)^4(2+y\cdot\cos\alpha)^2} \leq 0$

$\Rightarrow$ $g(t)$遞減。

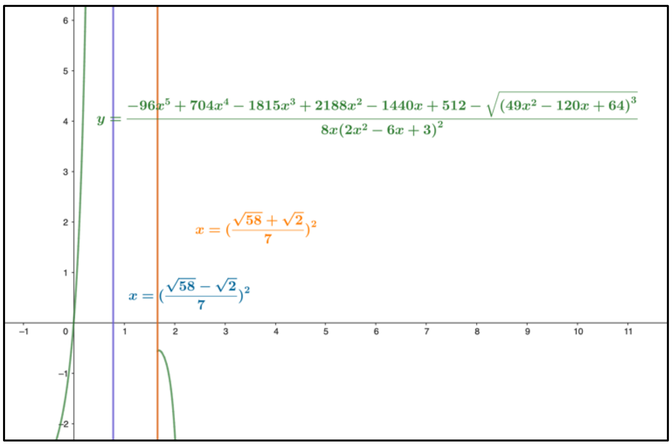


圖 8-3　來源：GeoGebra 作者自行繪製

最後說明 t 隨著 φ 遞減而遞增：

$$\cos^2\varphi = \frac{(y^2+y^2\cdot\sin^2\alpha-\cos\alpha)(y^2+2y\cdot\cos\alpha+2)^2}{y(1+y\cdot\cos\alpha)^3(2+y\cdot\cos\alpha)},$$

令 $h(x) = \dfrac{(x^2+x^2\cdot\sin^2\alpha-\cos\alpha)(x^2+2x\cdot\cos\alpha+2)^2}{x(1+x\cdot\cos\alpha)^3(2+x\cdot\cos\alpha)}$，

$$h'(x)=\frac{x^2+2x\cdot\cos\alpha+2}{x^2(1+x\cdot\cos\alpha)^4(2+x\cdot\cos\alpha)^2}\cdot[\cos^2\alpha(-\cos^2\alpha+2)x^6+2\cos\alpha(\cos^2\alpha-4)(\cos^2\alpha-2)x^5+(2\cos^4\alpha+\cos^3\alpha-14\cos^2\alpha+20)x^4+2\cos\alpha(1+\cos\alpha)(3\cos^2\alpha-5\cos\alpha+4)x^3+2(9\cos^3\alpha-2\cos^2\alpha-3\cos\alpha+4)x^2+16\cos^2\alpha\cdot x+4\cos\alpha]$$

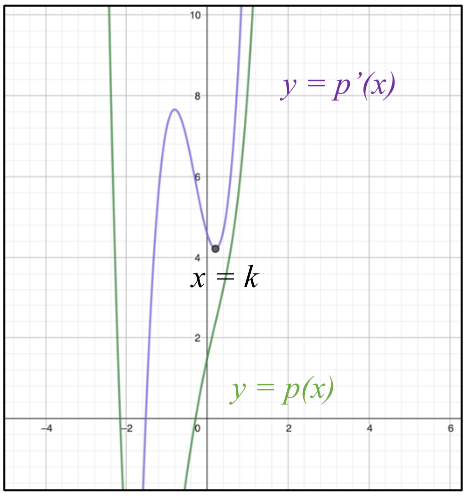


圖 8-4　來源：GeoGebra 作者自行繪製

$$=\frac{x^2+2x\cdot\cos\alpha+2}{x^2(1+x\cdot\cos\alpha)^4(2+x\cdot\cos\alpha)^2}\cdot[\cos^2\alpha(2-\cos^2\alpha)x^6+2\cos\alpha(4-\cos^2\alpha)(2-\cos^2\alpha)x^5+(2\cos^4\alpha+\cos^3\alpha+14(1-\cos^2\alpha)+6)x^4+2\cos\alpha(1+\cos\alpha)(3(\cos\alpha-\frac{5}{6})^2+\frac{23}{12})x^3+2(9\cos\alpha(\cos^2\alpha-\frac{1}{6})^2+2(1-\cos^2\alpha)+\frac{1}{4}(1-\cos\alpha)+\frac{7}{4})x^2+16\cos^2\alpha\cdot x+4\cos\alpha]$$

從上式可以觀察到，因為$|\cos\alpha| < 1$，故右邊多項式的各項係數皆大於等於 0，故當 $x > 0$，$h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$嚴格遞增。也就是當 t 遞增，$\cos^2\varphi$ 也遞增，則 φ 遞減。且因為嚴格遞增的結果，間接驗證 φ 與 t 有一一對應的性質，也就是對任意的 φ，t 大於 0 的解只有一個。

至此，我們說明了當 φ 遞減，t 遞增；當 t 遞增，$\sum^{3} r^2$遞減。故 φ 應為最小值，也就是 β，換句話說，圓 O_3 會通過 C 點，這與銳角三角形兩點型的情況完全相同！

(iv)（上下型）

令圓 O_3 覆蓋 B、C 兩點，且分別交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於 E、D，此時$\Delta ADE \sim \Delta ABC$，與銳角三角形一樣地，我們只需處理$\Delta ADE$ 的 $N = 2$ 最小覆蓋圓組即可。而這就是鈍角三角形上下型的

排列，即同定理 6，3 個圓覆蓋鈍角ΔABC 的上下型 $\sum^{3} r^2$ 的最小值$=\frac{L^2}{4}\cdot\frac{A_3}{B_3}=\frac{L^2}{4}\cdot$

$\frac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^3+sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^3}{[1+sin\alpha]^3-[1-sin\alpha]^3}=\frac{L^2}{4}\cdot\frac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3}$。

伍、討論

一、當 N 遞增，$min\sum^{n} r^2$（$N=1,2,3$）和上下型$\sum^{n} r^2$的最小值嚴格遞減。

（一）$N=1,2,3$，當 N 遞增，$min\sum^{n} r^2$嚴格遞減。

<u>定理 7.</u> $min\sum^{1} r^2 > min\sum^{2} r^2 > min\sum^{3} r^2$。

<u>Proof.</u> 因為 $|sin\alpha|<1$，$\frac{1+sin^2\alpha}{2}<\frac{1+1}{2}=1$。故

$$min\sum^{1} r^2=\begin{cases}R^2 & \text{銳角三角形}\\ \frac{L^2}{4} & \text{鈍角和直角三角形}\end{cases} > min\sum^{2} r^2=\begin{cases}R^2\cdot\frac{1+sin^2\alpha}{2} & \text{銳角三角形}\\ \frac{L^2}{4}\cdot\frac{1+sin^2\alpha}{2} & \text{鈍角和直角三角形}\end{cases}$$

且 $\frac{1+sin^2\alpha}{2}-\frac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3}=\frac{sin^4\alpha-2sin^2\alpha+1}{2sin^2\alpha+6}=\frac{(sin^2\alpha-1)^2}{2sin^2\alpha+6}>0$

故我們有 $\frac{1+sin^2\alpha}{2}>\frac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3}$， 則

$$min\sum^{2} r^2=\begin{cases}R^2\cdot\frac{1+sin^2\alpha}{2} & \text{銳角三角形}\\ \frac{L^2}{4}\cdot\frac{1+sin^2\alpha}{2} & \text{鈍角三角形}\end{cases} > \begin{cases}R^2\cdot\frac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3} & \text{銳角三角形}\\ \frac{L^2}{4}\cdot\frac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3} & \text{鈍角三角形}\end{cases} \geq min\sum^{3} r^2 \quad \square$$

（二）上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$的最小值隨著 N 遞增而嚴格遞減

<u>定理 8.</u> 上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$隨著 N 遞增而嚴格遞減。

<u>Proof.</u> 令 $f(x)=\frac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^x+sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^x}{[1+sin\alpha]^x-[1-sin\alpha]^x}$，

$f'(x)=\frac{sin\alpha}{([1+sin\alpha]^x-[1-sin\alpha]^x)^2}\cdot\{([1+sin\alpha]^x\cdot ln(1+sin\alpha)+[1-sin\alpha]^x\cdot ln(1-sin\alpha))([1+sin\alpha]^x-$

$[1-sin\alpha]^x)-([1+sin\alpha]^x+[1-sin\alpha]^x)\cdot([1+sin\alpha]^x\cdot ln(1+sin\alpha)-[1-sin\alpha]^x\cdot ln(1-sin\alpha))\}$

$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{sin\alpha}{([1+sin\alpha]^x-[1-sin\alpha]^x)^2}\cdot[2\cos^{2x}\alpha\cdot ln(1-sin\alpha)-2\cos^{2x}\alpha\cdot ln(1+sin\alpha)]$

$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{sin\alpha}{([1+sin\alpha]^x-[1-sin\alpha]^x)^2}\cdot[2\cos^{2x}\alpha\cdot x\cdot ln(\frac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha})]<0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow\ f(x)$ 嚴格遞減，$\forall x>0$ $\square$

二、上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$中，α 為三角形中的最小角。

<u>定理 9.</u> 當 α 為三角形中的最小角，上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$最小。

Proof. 令 $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta\cdot[1+\sin\theta]^n+\sin\theta\cdot[1-\sin\theta]^n}{[1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n}$，

$$\frac{df}{d\theta} = -\cos\theta\cdot\frac{[1+\sin\theta]^n+[1-\sin\theta]^n}{[1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n}+\sin\theta\cdot\Big[\frac{n[1+\sin\theta]^{n-1}\cdot\cos\theta-n[1-\sin\theta]^{n-1}\cdot\cos\theta}{[1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n}$$

$$-\frac{([1+\sin\theta]^n+[1-\sin\theta]^n)(n[1+\sin\theta]^{n-1}\cdot\cos\theta+n[1-\sin\theta]^{n-1}\cdot\cos\theta)}{([1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n)^2}\Big]$$

$$=\cos\theta\cdot\Big[-\frac{[1+\sin\theta]^n+[1-\sin\theta]^n}{[1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n}+n\cdot\sin\theta\cdot\Big[\frac{([1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n)([1+\sin\theta]^{n-1}-[1-\sin\theta]^{n-1})}{([1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n)^2}$$

$$-\frac{([1+\sin\theta]^n+[1-\sin\theta]^n)([1+\sin\theta]^{n-1}+[1-\sin\theta]^{n-1})}{([1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n)^2}\Big]\Big]$$

$$=\cos\theta\cdot\Big[-\frac{[1+\sin\theta]^n+[1-\sin\theta]^n}{[1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n}+n\cdot\sin\theta\cdot\frac{-4\cdot[1+\sin\theta]\cdot\cos^{2n-2}\theta}{([1+\sin\theta]^n-[1-\sin\theta]^n)^2}\Big]<0,\ \forall\ 0<\theta<90^\circ$$

$\Rightarrow$ $f(\theta)$ 嚴格遞減，$\forall\ 0<\theta<90^\circ$。 □

三、當 $n\to\infty$，上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$的最小值和各個覆蓋圓半徑的極限

<u>討論 3.</u> 當 $n\to\infty$，上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$的最小值的極限。

$\because$ $f(x)$ 嚴格遞減且 $f(x)>0,\ \forall\ x>0$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在（遞減且有下界）

$\therefore$ 當 $n\to\infty$，$R^2\cdot\dfrac{A_n}{B_n}= R^2\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^n+\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n}= R^2\cdot\sin\alpha\cdot\dfrac{1+[\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}]^n}{1-[\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}]^n}\to R^2\cdot\sin\alpha$

<u>討論 4.</u> 當 $n\to\infty$，上下型覆蓋圓組的 r_{n-k} 的極限。

同樣的，當 $n\to\infty$，（已知 $\dfrac{A_n}{B_n}\to\sin\alpha$ 、 $\dfrac{B_n}{B_{n-1}}=\dfrac{A_{n-1}+B_{n-1}}{B_{n-1}}\to\sin\alpha+1$）

$$r_{n-k} = R\cdot\frac{\sqrt{A_{n-k}^2+B_{n-k}^2\cdot\sin^2\alpha-2A_{n-k}\cdot B_{n-k}\cdot\sin^2\alpha}}{B_n}\cdot\cos^{k-1}\alpha$$

$$= R\cdot\sqrt{\Big(\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}}\Big)^2+\sin^2\alpha-2\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}}\cdot\sin^2\alpha}\ \frac{B_{n-k}}{B_n}\cdot\cos^{k-1}\alpha$$

$$= R\cdot\sqrt{\Big(\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}}\Big)^2+\sin^2\alpha-2\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}}\cdot\sin^2\alpha}\cdot\frac{B_{n-k}}{B_{n-k+1}}\cdot\frac{B_{n-k+1}}{B_{n-k+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{B_{n-1}}{B_n}\cdot\cos^{k-1}\alpha$$

$$\to R\cdot\sqrt{2\sin^2\alpha-2\sin^3\alpha}\cdot\Big(\frac{1}{1+\sin\alpha}\Big)^k\cdot\cos^{k-1}\alpha = R\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{2-2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^{2k}}\cdot\cos^{2k-2}\alpha}$$

$$= R\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{2-2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^{2k}}\cdot(1+\sin\alpha)^{k-1}(1-\sin\alpha)^{k-1}} = R\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}^{\,k}\quad(k=0,1,\ldots)$$

令人驚訝的是，當 $n \to \infty$，上下型覆蓋圓組中各覆蓋圓的半徑成等比的關係，正是體現了遞迴關係的美妙特性！

四、上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$的最小值中的係數。

我們實際將 $\dfrac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^n+sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^n}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n}$ 展開：

$\dfrac{A_1}{B_1}=1$ 、 $\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{sin^2\alpha+1}{2}$ 、 $\dfrac{A_3}{B_3}=\dfrac{sin^2\alpha+3}{3sin^2\alpha+1}$ 、 $\dfrac{A_4}{B_4}=\dfrac{sin^4\alpha+6sin^2\alpha+1}{4sin^2\alpha+4}$ 。

不難注意到，$\dfrac{A_n}{B_n}$ 中的係數就是二項式係數，下面我們進行證明：

<u>定理 10.</u>　上下型覆蓋圓組的$\sum^{n} r^2$的最小值中的係數為二項式係數。

<u>*Proof.*</u> $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^n+sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^n}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n}=sin\alpha\cdot\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}C^n_k\cdot sin^k\alpha+\sum\limits_{k=0}^{n}C^n_k\cdot(-sin\alpha)^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}C^n_k\cdot sin^k\alpha-\sum\limits_{k=0}^{n}C^n_k\cdot(-sin\alpha)^k}$

當 n 為偶數，令 $n=2s$，

$$=sin\alpha\cdot\frac{2\cdot\sum\limits_{m=0}^{s}C^n_{2m}\cdot sin^{2m}\alpha}{2\cdot\sum\limits_{m=0}^{s-1}C^n_{2m+1}\cdot sin^{2m+1}\alpha}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{s}C^n_{2m}\cdot sin^{2m}\alpha}{\sum\limits_{m=0}^{s-1}C^n_{2m+1}\cdot sin^{2m}\alpha}=\frac{C^n_0+C^n_2\cdot sin^2\alpha+\ldots+C^n_n\cdot sin^n\alpha}{C^n_1+C^n_3\cdot sin^2\alpha+\ldots+C^n_{n-1}\cdot sin^n\alpha}$$

當 n 為奇數，令 $n=2s+1$，

$$=sin\alpha\cdot\frac{2\cdot\sum\limits_{m=0}^{s}C^n_{2m}\cdot sin^{2m}\alpha}{2\cdot\sum\limits_{m=0}^{s}C^n_{2m+1}\cdot sin^{2m+1}\alpha}=\frac{\sum\limits_{m=0}^{s}C^n_{2m}\cdot sin^{2m}\alpha}{\sum\limits_{m=0}^{s}C^n_{2m+1}\cdot sin^{2m}\alpha}=\frac{C^n_0+C^n_2\cdot sin^2\alpha+\ldots+C^n_{n-1}\cdot sin^{n-1}\alpha}{C^n_1+C^n_3\cdot sin^2\alpha+\ldots+C^n_n\cdot sin^{n-1}\alpha}\quad\square$$

五、$N=3$ 的最小覆蓋圓組之間的關聯。

<u>討論 5.</u>　當 $N=3$，重心型和上下型的大小關係。

對於銳角三角形，令 $\dfrac{R^2}{3}(sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2\gamma)=R^2\cdot\dfrac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3}$

$\Rightarrow sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2\gamma=3\cdot\dfrac{3sin^2\alpha+1}{sin^2\alpha+3}$　　$\Rightarrow 2sin^2\beta+2sin^2\gamma=\dfrac{-2sin^4\alpha+12sin^2\alpha+6}{sin^2\alpha+3}$

$\Rightarrow(1-cos2\beta)+(1-cos2\gamma)=\dfrac{-2sin^4\alpha+12sin^2\alpha+6}{sin^2\alpha+3}$　$\Rightarrow cos2\beta+cos2\gamma=\dfrac{2sin^4\alpha-10sin^2\alpha}{sin^2\alpha+3}$

$\Rightarrow 2cos(\dfrac{2\beta+2\gamma}{2})cos(\dfrac{2\beta-2\gamma}{2})=\dfrac{2sin^4\alpha-10sin^2\alpha}{sin^2\alpha+3}$　$\Rightarrow cos(\pi-\alpha)cos(\beta-\gamma)=\dfrac{sin^4\alpha-5sin^2\alpha}{sin^2\alpha+3}$

$$\Rightarrow \quad \gamma-\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha-4}{\cos^3\alpha-4\cos\alpha}\right) \quad or \quad \beta-\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha-4}{\cos^3\alpha-4\cos\alpha}\right) \text{（不合）}$$

$$\Rightarrow \quad \pi-2\beta-\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha-4}{\cos^3\alpha-4\cos\alpha}\right) \quad \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\cdot\left[\pi-\alpha-\cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha-4}{\cos^3\alpha-4\cos\alpha}\right)\right]$$

對於鈍角或直角三角形，令 $\frac{R^2}{3}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) = \frac{L^2}{4}\cdot\frac{3\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+3}$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma = 3\cdot\frac{3\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+3}\cdot\sin^2\gamma \qquad \Rightarrow \quad 2\sin^2\alpha+2\sin^2\beta = \frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+3}\cdot 2\sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\alpha+2(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\gamma+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\gamma+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma) = \frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+3}\cdot 2\sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\alpha+(\sin^2\alpha\cdot(1+\cos 2\gamma)+(1-\sin^2\alpha)\cdot(1-\cos 2\gamma)+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin 2\gamma) = \frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+3}\cdot 2\sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow \sin 2\gamma\cdot(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\sin^2\alpha+3))+\cos 2\gamma\cdot(2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3) = (-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3)$$

$$\Rightarrow \sin\left(2\gamma+\sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3}{\sqrt{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha+3)^2+(2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3)^2}}\right)\right)$$

$$= \frac{-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3}{\sqrt{4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha+3)^2+(2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\gamma+\sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3}{\sqrt{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3}{\sqrt{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}}\right)+2k\pi$$

$$or\ 2\gamma+\sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3}{\sqrt{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3}{\sqrt{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}}\right) = \pi+2k\pi$$

經檢驗，第一式不符合 $\alpha\le\beta\le\gamma$，故

$$2(\pi-\beta-\alpha)+\sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3}{\sqrt{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3}{\sqrt{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}}\right) = \pi$$

化簡得到

$$\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{1}{2}\cdot\sin^{-1}\left[2\sin\alpha(\sin\alpha^2+3)\cdot\frac{(2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3)\cos^2\alpha+(-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3)\sqrt{-\sin^4\alpha+12\sin^2\alpha-3}}{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}\right]$$

我們利用 *GeoGebra* 模擬，結果如下圖 *9-1*。圖中 x 座標表示 α，y 座標表示 β（弧度），紫色區域和藍色區域為滿足(x, y)為三角形和 $\alpha\le\beta\le\gamma$ 的區域，紫色區域為鈍角三角形，藍色區域為銳角三角形，交界處為直角三角形。

當(x, y)在曲線上方時，上下型 $>$ 重心型，

當(x, y)在曲線上時， 上下型 $=$ 重心型，

當(x, y)在曲線下方時，上下型 $<$ 重心型。

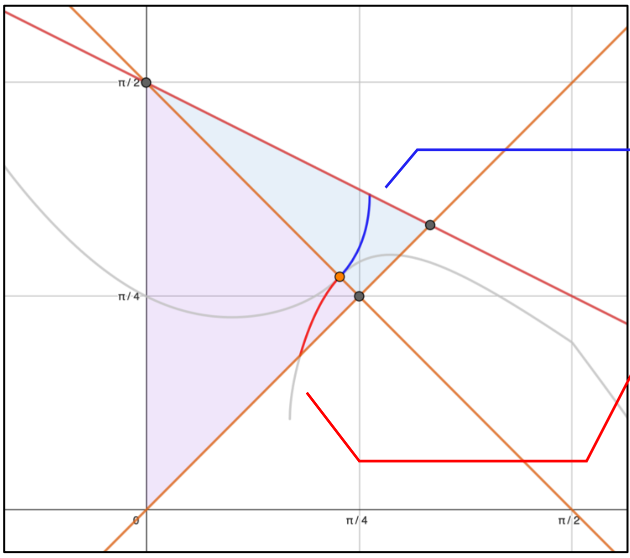


圖 9-1　來源：GeoGebra
作者自行繪製

$$y = \frac{1}{2}\cdot\left[\pi - x - \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x - 4}{\cos^3 x - 4\cos x}\right)\right]$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{2}\cdot \sin^{-1}\left[2\sin\alpha(\sin\alpha^2+3)\cdot \frac{(2\sin^4\alpha+13\sin^2\alpha-3)\cos^2\alpha+(-2\sin^4\alpha+\sin^2\alpha-3)\sqrt{-\sin^4\alpha+12\sin^2\alpha-3}}{32\sin^6\alpha+145\sin^4\alpha-42\sin^2\alpha+9}\right]$$

<u>討論 6.</u>　當 $N = 3$，四種覆蓋圓組是否皆可能為最小覆蓋圓組？

我們針對等腰三角形（以 θ 為底角, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）進行討論：

對於重心型覆蓋圓組，$\sum^{3} r^2$的最小值 $= \dfrac{R^2}{3}\,(2\sin^2\theta + \sin^2(2\theta))$

對於上下型覆蓋圓組，$\sum^{3} r^2$的最小值 $= \begin{cases} R^2\cdot\dfrac{3\sin^2 2\theta+1}{\sin^2 2\theta+3} & \dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ R^2\cdot\dfrac{3\sin^2\theta+1}{\sin^2\theta+3} & \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{3} \\ R^2\sin^2 2\theta\cdot\dfrac{3\sin^2\theta+1}{\sin^2\theta+3} & 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

對於兩點型覆蓋圓組，$\sum^{3} r^2$的最小值 $= R^2\cdot\left[\dfrac{1+t^2+t^2\cdot\sin^2\alpha}{(1+t\cdot\cos\alpha)^2} - \dfrac{t^2\cdot\cos^2\beta}{2+2t\cdot\cos\alpha+t^2}\right]$，

其中 t 滿足 $w(t) = 0$。（因爲 α、β 可能為頂角或底角，我們取所有情況的最小值。）

對於四點型覆蓋圓組，當 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$，令 $\alpha = \beta = \theta$，則

$$\sum^{3} r^2 = R^2\cdot s(x,p) = [3\cdot\frac{(p^2-x^2)^2}{16\sin^2 2\theta\sin^2\theta} + (p\cdot\sin 3\theta + x\cdot\sin\theta)\cdot\frac{p^2-x^2}{4\sin^2 2\theta\sin^2\theta} + (2\sin^2 2\theta\sin^2\theta+\sin^2 2\theta+\sin^2\theta)\cdot$$

$$\frac{p^2+x^2}{4\sin^2 2\theta\sin^2\theta} + \frac{px}{2\sin^2 2\theta\sin^2\theta}\cdot\sin\theta\sin 3\theta + p\cdot\sin 3\theta - x\cdot\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^2 2\theta - \sin^2\theta\sin^2 2\theta\,]\cdot R^2$$

$$= [3\cdot\frac{(p^2-x^2)^2}{64\sin^4\theta\cos^2\theta} + (p\cdot(3-4\sin^2\theta)+x)\cdot\frac{p^2-x^2}{16\sin^3\theta\cos^2\theta} + (8\sin^2\theta\cos^2\theta + 1 + 4\cos^2\theta)\cdot$$

$$\frac{p^2+x^2}{16\sin^2\theta\cos^2\theta} + \frac{px}{8\sin^2\theta\cos^2\theta}\cdot(3-4\sin^2\theta) + p\cdot\sin 3\theta - x\cdot\sin\theta + \sin^2\theta + 4\sin^2\theta\cos^4\theta\,]\cdot R^2$$

當 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{3}$，此時 $\beta = \gamma = \theta$，且由對稱性可得 $p = 0$。

代入 $s(x,0)=[\dfrac{3x^4}{16\sin^4\theta}-\sin(2\theta)(\dfrac{x^3}{4\sin^4\theta})+x^2\cdot(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sin^2\theta})-x\cdot\sin(2\theta)+2\sin^2\theta-\sin^4\theta]$

將上式對 x 微分，解得 $s(x,0)$最小值的解析式$[\dfrac{x^2}{2}+x\cdot\dfrac{\cos\theta-8\sin^2\theta\cos\theta}{6\sin\theta}+\dfrac{5\sin^2\theta-2\sin^4\theta}{3}]$，

其中 $x=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{3}+\dfrac{\sin\theta}{3}\cdot\sqrt[3]{16\sin^2\theta\cos\theta-4\cos\theta+4\sqrt{16\sin^6\theta+24\sin^4\theta-9\sin^2\theta+1}}$

$+\dfrac{\sin\theta}{3}\cdot\sqrt[3]{16\sin^2\theta\cos\theta-4\cos\theta-4\sqrt{16\sin^6\theta+24\sin^4\theta-9\sin^2\theta+1}}$。

當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，此時 $\beta=\gamma=\theta$，且由對稱性可得 $p=0$。

代入 $\sum^{3} r^2=r_3^2+\dfrac{2}{4\sin^2\theta}\cdot(\sqrt{r_3^2-q^2}+2\sin^3\theta\cos\theta+q\cdot\sin\theta\cos\theta-\cos\theta\cdot\sqrt{r_3^2-(2\sin^2\theta\cos\theta-q\cdot\cos\theta)^2})^2$

$+\dfrac{2}{4\sin^2\theta}\cdot(2\sin^2\theta\cos^2\theta+q\cdot\sin^2\theta-\sin\theta\cdot\sqrt{r_3^2-(2\sin^2\theta\cos\theta-q\cdot\cos\theta)^2})^2$

$=\dfrac{1+2\sin^2\theta}{2\sin^2\theta}\cdot r_3^2-\dfrac{2}{4\sin^2\theta}\cdot q^2+\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot(\sqrt{r_3^2-q^2})(2\sin^3\theta+q\cdot\sin\theta-\sqrt{r_3^2-(2\sin^2\theta\cos\theta-q\cdot\cos\theta)^2})+\dfrac{\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}\cdot$

$(2\sin^3\theta+q\cdot\sin\theta-\sqrt{r_3^2-(2\sin^2\theta\cos\theta-q\cdot\cos\theta)^2})^2+\dfrac{1}{2}\cdot(2\sin\theta\cos^2\theta+q\cdot\sin\theta-\sqrt{r_3^2-(2\sin^2\theta\cos\theta-q\cdot\cos\theta)^2})^2$

可以看到，當 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，四點型$\sum^{3} r^2$的一般式仍是二元四次式，雖然我們無法對所有情況模擬，但若給定 θ，我們還是可以計算出此情況的最小值。

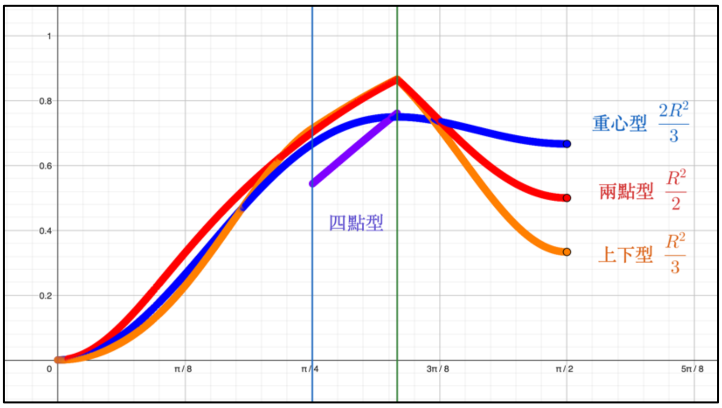


圖 9-2　來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

將上述結果用 *GeoGebra* 模擬，結果如左圖 9-2（四點型只有在$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$可以模擬），圖中任一點的 x 座標表示 θ（弧度），y 座標表示四種覆蓋圓組 $\sum^{3} r^2$ 的最小值。

圖中藍色鉛直線為 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，綠色鉛直線為 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，故藍色鉛直線左側為鈍角三角形，故藍色和綠色鉛直線之間為銳角三角形，最小角為 θ，綠色鉛直線右側為銳角三角形，最小角為 $\pi-2\theta$。可以注意到，有三種排列都可能為最小覆蓋圓組，而兩點型是否可能為最小覆蓋圓組呢？在模擬中，我們沒有發現在兩點型為最小覆蓋圓組的情況，不過在圖中也可以看出兩點型並不總是總面積和最大的覆蓋圓組，故兩點型依然有研究價值。

陸、研究結果

彙整上述的定理與討論，我們歸納出了以下研究結果：

一、最小覆蓋圓組的必要條件

（一）在最小覆蓋圓組中，若$\angle A$為銳角或直角，則A在最小覆蓋圓組的某一個覆蓋圓上。

（二）令圓O為一最小覆蓋圓，則圓O與三角形邊的交點，必定有另一圓通過。

二、$N = 1, 2, 3$，任意三角形的 $\min \sum^{n} r^2$

（一）$\min \sum^{1} r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角和直角三角形} \\ \dfrac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}$。

（二）$\min \sum^{2} r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot \dfrac{1+\sin^2\alpha}{2} & \text{銳角和直角三角形} \\ \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{1+\sin^2\alpha}{2} & \text{鈍角三角形} \end{cases}$。

（三）銳角和直角三角形的 $\min \sum^{3} r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot \dfrac{3\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+3} & \text{上下型} \\ R^2 \cdot \dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3} & \text{重心型} \\ R^2 \cdot s(x,p) \text{ 的最小值} & \text{四點型} \\ R^2 \cdot \left[\dfrac{1+t^2+t^2\cdot\sin^2\alpha}{(1+t\cdot\cos\alpha)^2} - \dfrac{t^2\cdot\cos^2\beta}{2+2t\cdot\cos\alpha+t^2}\right] & \text{兩點型} \end{cases}$，

其中 $s(x,p) = [3\cdot\dfrac{(p^2-x^2)^2}{16\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (p\cdot\sin(\gamma-\beta)+x\cdot\sin(\gamma+\beta))\cdot\dfrac{p^2-x^2}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (2\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\cdot$
$\dfrac{p^2+x^2}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma} + \dfrac{px}{2\sin^2\beta\sin^2\gamma}\cdot\sin(\gamma-\beta)\sin(\gamma+\beta)+p\cdot\sin(\gamma-\beta)-x\cdot\sin(\gamma+\beta)+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\beta\sin^2\gamma\,]$

鈍角三角形的 $\min \sum^{3} r^2 = \begin{cases} \dfrac{L^2}{4} \cdot \dfrac{3\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+3} & \text{上下型} \\ R^2 \cdot \dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3} & \text{重心型} \\ \text{尚無解析解} & \text{四點型} \\ R^2 \cdot \left[\dfrac{1+t^2+t^2\cdot\sin^2\alpha}{(1+t\cdot\cos\alpha)^2} - \dfrac{t^2\cdot\cos^2\beta}{2+2t\cdot\cos\alpha+t^2}\right] & \text{兩點型} \end{cases}$，

兩點型中 t 滿足 $w(t)=(2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta\cdot\cos^4\alpha)t^5 + (7\cos\alpha-4\cos^3\alpha-5\cos^2\beta\cdot\cos^3\alpha)t^4 + (8-4\cos^4\alpha$
$-9\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha)t^3 + (12\cos\alpha-12\cos^3\alpha-7\cos^2\beta\cdot\cos\alpha)t^2 + (8-12\cos^2\alpha-2\cos^2\beta)t-4\cos\alpha = 0$。

（四）$N = 1, 2, 3$，當 N 遞增，$\min \sum^{n} r^2$ 嚴格遞減。

三、任意三角形的上下型覆蓋圓組

（一）任意三角形的上下型之

$$\sum^{n} r^2 \text{ 的最小值 } = \begin{cases} R^2 \cdot \dfrac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^n + sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^n}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n} & \text{銳角三角形} \\ \dfrac{L^2}{4}\cdot\dfrac{sin\alpha\cdot[1+sin\alpha]^n + sin\alpha\cdot[1-sin\alpha]^n}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n} & \text{鈍角三角形} \end{cases} 。$$

（二）當 N 遞增，上下型$\sum^{n} r^2$的最小值嚴格遞減。

（三）上下型各覆蓋圓的半徑r_{n-k} $=\begin{cases} R\cdot\dfrac{sin\alpha\sqrt{2[1+sin\alpha]^{2n-2k-1}+2[1-sin\alpha]^{2n-2k-1}}}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n}\cdot cos^k\alpha & \text{銳角三角形} \\ \dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{sin\alpha\sqrt{2[1+sin\alpha]^{2n-2k-1}+2[1-sin\alpha]^{2n-2k-1}}}{[1+sin\alpha]^n-[1-sin\alpha]^n}\cdot cos^k\alpha & \text{鈍角三角形} \end{cases}$。

（四）當$n\to\infty$，上下型$\sum^{n} r^2$的最小值 $\to R^2\cdot sin\alpha$。

（五）當$n\to\infty$，上下型各個覆蓋圓的半徑 $r_{n-k}\to R\cdot sin\alpha\cdot\sqrt{\dfrac{2}{1+sin\alpha}}\cdot\sqrt{\dfrac{1-sin\alpha}{1+sin\alpha}}^{\,k}$。

（六）上下型$\sum^{n} r^2$的最小值中的係數為二項式係數。

四、$N=3$ 的最小覆蓋圓組之間的關聯

（一）當$N=3$，重心型和上下型的大小關係：

對於銳角三角形 $\beta = \dfrac{1}{2}\cdot[\pi-\alpha-cos^{-1}(\dfrac{cos^4\alpha+3cos^2\alpha-4}{cos^3\alpha-4cos\alpha})]$時及

對於鈍角或直角三角形 $\beta = \dfrac{\pi}{2}-x+\dfrac{1}{2}\cdot sin^{-1}[2sin\alpha(sin\alpha^2+3)\cdot$

$$\frac{(2sin^4\alpha+13sin^2\alpha-3)cos^2\alpha+(-2sin^4\alpha+sin^2\alpha-3)\sqrt{-sin^4\alpha+12sin^2\alpha-3}}{32sin^6\alpha+145sin^4\alpha-42sin^2\alpha+9}]$$時，

上下型$\sum^{3} r^2$ ＝ 重心型$\sum^{3} r^2$。

（二）當$N=3$，對於等腰三角形，四種覆蓋圓的大小關係如上圖9-2。

柒、結論

在文獻探討中，關於三角形或多邊形的覆蓋，大多是利用「等圓」去作覆蓋，而我們嘗試利用「不等圓」去作覆蓋，雖然看似是放寬條件讓問題變得更複雜，實際上正是因為多邊形本身不帶有像圓一樣的對稱性，利用不等圓去覆蓋正好彌補了多邊形的不對稱性。

研究中，我們從 $N=1$ 的情況開始，找出滿足最小覆蓋圓的必要條件，並分成銳角及鈍角三角形兩種情況，並逐一解決 $N=2$、3 的情況。過程中，我們發現了上下型覆蓋圓的遞迴關係，並推廣至任意 N 個圓的情況，得到相當簡潔的解析式。

在討論中，我們比較 $N=1$、 2、3 的大小關係，尋找上下型覆蓋圓的性質，以及討論

$N = 3$ 中四種覆蓋圓之間的關係。

回到研究一開始提出的問題：「在一個三角形的城鎮中放入 N 個 *Wi-Fi* 分享器…」，我們提出了當 $N = 1$、2、3 的解決方案，即將 *Wi-Fi* 分享器放置在最小覆蓋圓組中覆蓋圓圓心的位置，分享範圍即為此覆蓋圓，如此便能在覆蓋三角形的情況下使費用最低。

捌、未來展望

在研究中，我們針對「哪些是成為最小覆蓋圓組的必要條件」進行觀察，發現上述的最小覆蓋圓組，都有一些共同的性質，但由於我們對於 N 更大的情況尚不熟悉，因此放在未來展望中，盼未來有機會解決這些未解之謎。

> <u>猜想</u> 對於銳角三角形，在最小覆蓋圓組中，若 P 點為某三圓的共同交點，則沒有第四個圓通過 P 點。

> <u>猜想</u> 對於銳角三角形，令圓O為最小覆蓋圓，則圓O與其他圓或邊的交點為三線共點。

並且，在 $N=3$ 的討論中，我們遺留了一些尚未解決的問題，包括鈍角三角形的四點型覆蓋圓的$\overset{3}{\Sigma}\, r^2$ 的最小值，以及對於任意三角形的 $min \overset{3}{\Sigma}\, r^2$，期望未來能夠逐一解決。

玖、參考資料及其他

一、朱啟台、李政豐、陳昭地（*2015*）。凸多邊形邊上或內部一點到各頂點距離平方和的極值。*科學教育月刊*，(*376*)，*14-24*。

二、何詩涵、董家瑋、楊沛錡（*2018*）。蓋世”五”功。金門地區第 *58* 屆中小學科學展覽會。

三、林宜樺、李佳駿、唐婉馨，張博盛（*2004*）。鋪天蓋地。中華民國第 *44* 屆中小學科學展覽會。

四、劉宇昕、陳正昕（*2022*）。當三角形遇見圓—最大覆蓋率之探討。中華民國第 *62* 屆中小學科學展覽會。

五、*James Stewart* (*2019*). *Calculus* (*8th edition*.).

六、*Kenneth M Hoffman*, & *Ray Kunze* (*1971*). *Linear algebra* (*second edition*.).

七、*Miquel's Theorem*. *Wikipedia*. *Retrieved September*, *2016*, *from*

https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel's theorem

【評語】050402

用 2 或 3 個半徑不相等的圓覆蓋三角形，求半徑平方和最小值。作者分開討論將角、直角、鈍角三角形。首先刻劃幾何性質，這部分的討論十分有趣。作者以組合學嚴格證明最小覆蓋為四個候選覆蓋之一，這是一個不容易的結論。其次，作者在這四類中有三類可以找到最小值的解析解，另一類則只能求出臨界點，箇中證明極有價值。

作者利用微積分處理極值問題，計算繁複而實在。最終得到三角形角度、外切圓半徑，及最長邊長所決定的解，可惜未解的的幾何意義多做討論。建議日後亦可試圖找出最佳化的數值解。

在銳角的情況，作者以矩陣運算獲致上下型覆蓋圓的遞迴關係，進而將結果推廣至 N 個圓的情況，頗具巧思。

作品簡報

Wi-Fi收訊範圍

— 三角形覆蓋圓面積之探討

研究動機

「欲在一個三角形的城鎮中放入數個*Wi-Fi*分享器，分享器的分享範圍是以本身為中心的圓，並且費用與圓面積成正比，那麼要如何放置分享器和利用多大的分享範圍才能使費用最低呢？」為了解決這個問題，我們開始了我們的研究。

研究目的

一、對**銳角和直角**三角形，利用***1***個圓覆蓋，求出圓面積的最小值。

二、對**銳角和直角**三角形，利用***2***個圓覆蓋，求出兩圓面積和的最小值。

三、對**銳角和直角**三角形，利用***3***個圓覆蓋，求出三圓面積和的最小值。

四、對**鈍角**三角形，利用***1***個圓覆蓋，求出圓面積的最小值。

五、對**鈍角**三角形，利用***2***個圓覆蓋，求出兩圓面積和的最小值。

六、對**鈍角**三角形，利用***3***個圓覆蓋，求出三圓面積和的最小值。

七、利用*N*個圓**上下型**排列覆蓋三角形，求出總面積和的最小值。

研究過程

在文獻探討中，先前關於「利用圓覆蓋多邊形」的研究，大多聚焦在等圓或正多邊形作討論。於是我們爲了討論「利用數個**半徑不相等**的圓完全覆蓋三角形」，我們開始了以下討論：

N = 1

定理 *1*. $N=1$，三角形 *ABC* 的 $\min \sum^{1} r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角和直角三角形} \\ \dfrac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}$。

當 $N > 1$，我們不再能輕易看出覆蓋圓的位置和大小，所以我們想找出滿足圓為最小覆蓋圓的**必要條件**：

引理*1*. 在最小覆蓋圓組中，若$\angle A$為銳角或直角，則*A*在最小覆蓋圓組的某一個覆蓋圓上。

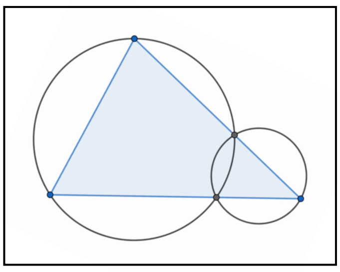
引理*2*. 若圓*O*為最小覆蓋圓組中的某個覆蓋圓，則圓*O*與邊的交點，必有覆蓋圓通過。

由上述結果，我們發現銳角和直角三角形與鈍角三角形有不同的性質，所以在下面的研究中，我們**分開討論**銳角和直角三角形、鈍角三角形。

N = 2 銳角和直角三角形

由引理1、2，我們可以說明 此時只有一種情況：

定理 *2*. 銳角和直角三角形的 $\min \sum^{2} r^2 = R^2 \cdot \dfrac{1+\sin^2\alpha}{2}$。

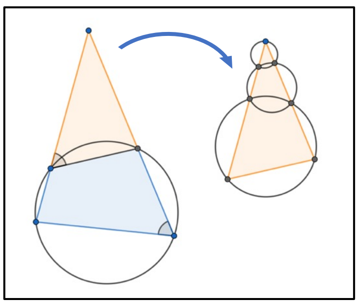


來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

上下型覆蓋圓組 銳角和直角三角形

定理 *3*. 對於任意 *N* 個圓，銳角和直角三角形「上下型」覆蓋圓組之 $\sum^{n} r^2$ 的最小值 $= R^2 . \dfrac{\sin\alpha \cdot [1+\sin\alpha]^n + \sin\alpha \cdot [1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n - [1-\sin\alpha]^n}$。

具有遞迴性質

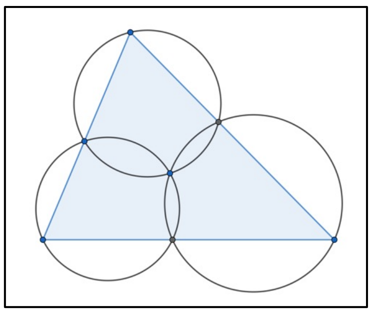


來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

N = 3　銳角三角形

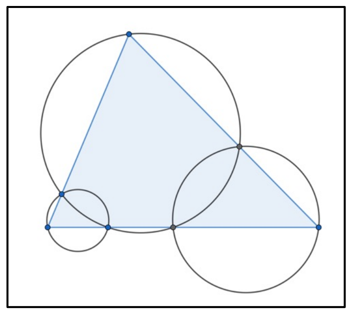
由引理1、2，我們將最小覆蓋圓與邊的相交情形分成下面四種：

來源：*GeoGebra*　作者自行繪製



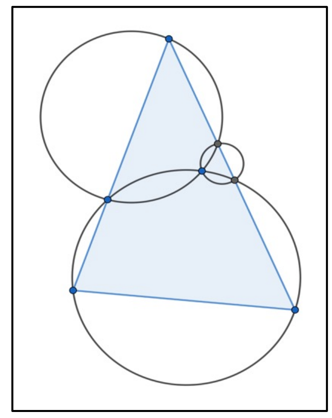
重心型

$\frac{R^2}{3}\cdot(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$



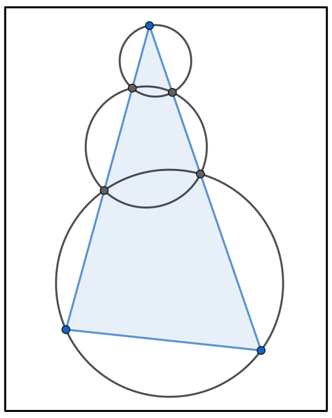
四點型

$R^2\cdot s(x,p)$ 的最小值



兩點型

$R^2\cdot\left[\frac{1+t^2+t^2\cdot\sin^2\alpha}{(1+t\cdot\cos\alpha)^2}-\frac{t^2\cdot\cos^2\beta}{2+2t\cdot\cos\alpha+t^2}\right]$



上下型

$R^2\cdot\frac{3\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+3}$

其中 $s(x,p)=\frac{1}{4}\left[3(x^2-p^2)^2-2(ax-mp)(x^2-p^2)+\left(4+\frac{m^2+a^2}{2}\right)(x^2+p^2)-2ampx-2ax-2mp+1+\frac{m^2+a^2}{2}\right]$

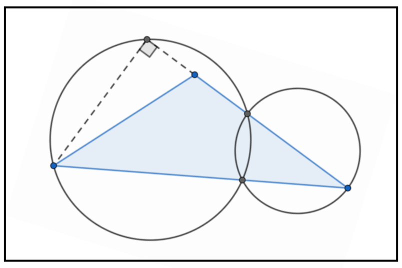
且 $w(t)=(2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta\cdot\cos^4\alpha)t^5+(7\cos\alpha-4\cos^3\alpha-5\cos^2\beta\cdot\cos^3\alpha)t^4+(8-4\cos^4\alpha-9\cos^2\beta\cdot\cos^2\alpha)t^3$

$+(12\cos\alpha-12\cos^3\alpha-7\cos^2\beta\cdot\cos\alpha)t^2+(8-12\cos^2\alpha-2\cos^2\beta)t-4\cos\alpha=0$

N = 2 鈍角三角形

定理 5. 鈍角三角形的 $\min\sum^{2} r^2=\frac{L^2}{4}\cdot\frac{1+\sin^2\alpha}{2}$。

鈍角三角形的最小覆蓋圓組 = 直角三角形的最小覆蓋圓組

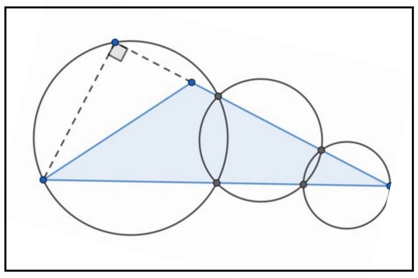


來源：*GeoGebra*　作者自行繪製

上下型覆蓋圓組 鈍角三角形

定理 6. 對於任意 N 個圓，鈍角三角形「上下型」覆蓋圓組之 $\sum^{n} r^2$ 的最小值 $=\frac{L^2}{4}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^n+\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n}$。

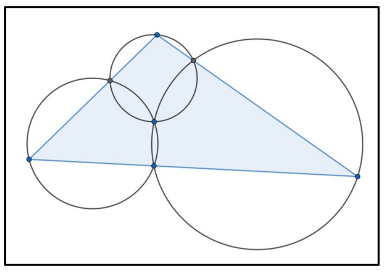
鈍角三角形的上下型覆蓋圓組 = 直角三角形的上下型覆蓋圓組



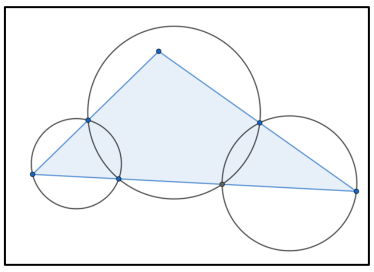
來源：*GeoGebra*　作者自行繪製

N = 3　鈍角三角形

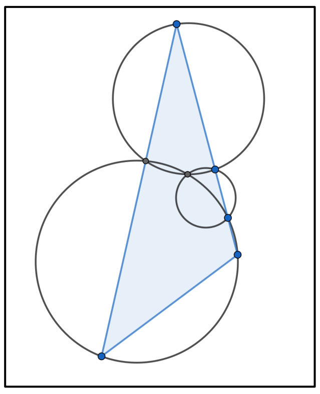
來源：*GeoGebra*　作者自行繪製



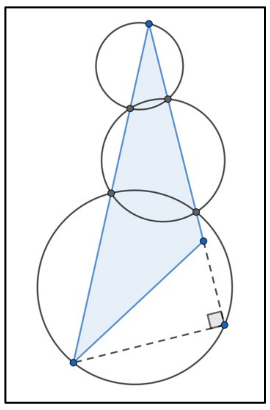
$\frac{R^2}{3}\cdot(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$



尚未解決

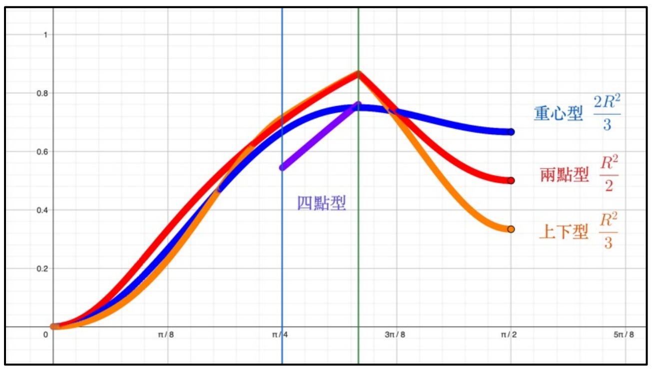


$R^2\cdot\left[\frac{1+t^2+t^2\cdot\sin^2\alpha}{(1+t\cdot\cos\alpha)^2}-\frac{t^2\cdot\cos^2\beta}{2+2t\cdot\cos\alpha+t^2}\right]$



$\frac{L^2}{4}\cdot\frac{3\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+3}$

討論：四種覆蓋圓組是否皆可能為最小覆蓋圓組？



來源：*GeoGebra*　作者自行繪製

針對等腰三角形（以θ為底角, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$）進行討論

重心型、四點型和上下型都可能為最小覆蓋圓組，而兩點型是否可能為最小覆蓋圓組尚待確認。

討論：上下型覆蓋圓組中各個覆蓋圓的半徑。

定理 4. $r_{n-k} = R \cdot \dfrac{\sin\alpha\sqrt{2[1+\sin\alpha]^{2n-2k-1}+2[1-\sin\alpha]^{2n-2k-1}}}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n} \cdot \cos^k\alpha \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$。

討論：$\min\sum^n r^2(N=1,2,3)$和上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值。

定理 7. $N = 1, 2, 3$，當 N 遞增 $\min\sum^n r^2$ 嚴格遞減。

定理 8. 上下型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值隨著 N 遞增而嚴格遞減。

討論：上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 中，α 為三角形中的最小角。

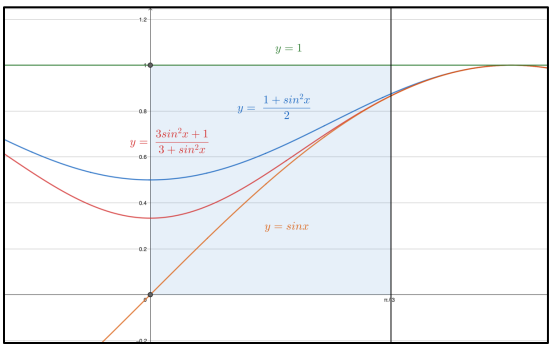
定理 9. 當 α 為三角形中的最小角，上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 最小。

討論：當 n → ∞，上下型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值與 r_{n-k} 的極限。

$$\sum^n r^2 = R^2\cdot\frac{A_n}{B_n} \to R^2\cdot\sin\alpha$$

$$r_{n-k} \to R\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}^{\,k}$$

上下型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值



來源：GeoGebra　作者自行繪製

討論：上下型覆蓋圓組的最小值中的係數為二項式係數。

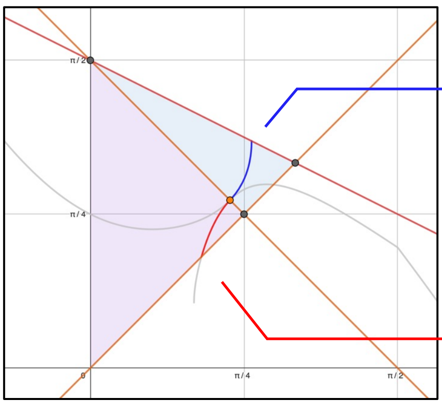
$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{\sin\alpha\cdot[1+\sin\alpha]^n+\sin\alpha\cdot[1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n-[1-\sin\alpha]^n}$$

快速求出最小值

$$\frac{A_1}{B_1} = 1 、 \frac{A_2}{B_2} = \frac{\sin^2\alpha+1}{2} 、 \frac{A_3}{B_3} = \frac{\sin^2\alpha+3}{3\sin^2\alpha+1} 、 \frac{A_4}{B_4} = \frac{\sin^4\alpha+6\sin^2\alpha+1}{4\sin^2\alpha+4}$$

至此，我們求出了上下型覆蓋圓組面積和各圓半徑的**一般式**及**覆蓋方式**，並且給出了面積一般式的**快速求法**，以及說明了上下型覆蓋圓組的**極限情況**，對上下型覆蓋圓組作出完整的討論。

討論：當N = 3，重心型和上下型的大小關係。



來源：GeoGebra　作者自行繪製

$$y = \frac{1}{2}\cdot[\pi - x - \cos^{-1}(\frac{\cos^4x+3\cos^2x-4}{\cos^3x-4\cos x})]$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{2}\cdot\sin^{-1}[2\sin x\sqrt{\sin^2x+3}\cdot\frac{(2\sin^4x+13\sin^2x-3)\cos x\sqrt{\sin^2x+3}+(-2\sin^4x+\sin^2x-3)\sqrt{\sin^4x-12\sin^2x+3}}{32\sin^6x+145\sin^4x-42\sin^2x+9}]$$

結論

一、最小覆蓋圓的必要條件

二、 $N = 1, 2, 3$，任意三角形的 $\min\sum^n r^2$

三、任意三角形的上下型覆蓋圓組

四、 $N = 3$ 的最小覆蓋圓組之間的關聯

參考文獻

一、朱啟台、李政豐、陳昭地（2015）。凸多邊形邊上或內部一點到各頂點距離平方和的極值。*科學教育月刊*，（376），14-24。

二、何詩涵、董家瑋、楊沛錡（2018）。蓋世"五"功。金門地區第58屆中小學科學展覽會。

三、林宜樺、李佳駿、唐婉馨，張博盛（2004）。鋪天蓋地。中華民國第44屆中小學科學展覽會。

四、劉宇昕、陳正昕（2022）。當三角形遇見圓—最大覆蓋率之探討。中華民國第 62 屆中小學科學展覽會。

五、*James Stewart* (2019). *Calculus* (8th *edition*.).

六、*Kenneth M Hoffman, & Ray Kunze* (1971). *Linear algebra* (*second edition*.).

七、*Miquel's Theorem. Wikipedia. Retrieved September, 2016, from* https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel's theorem