中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050401

兩全等多邊形重疊部分的邊長面積探討

學校名稱： 桃園市立武陵高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 王璿宇 高二 王加葉 高二 邱澤	陳依鴻

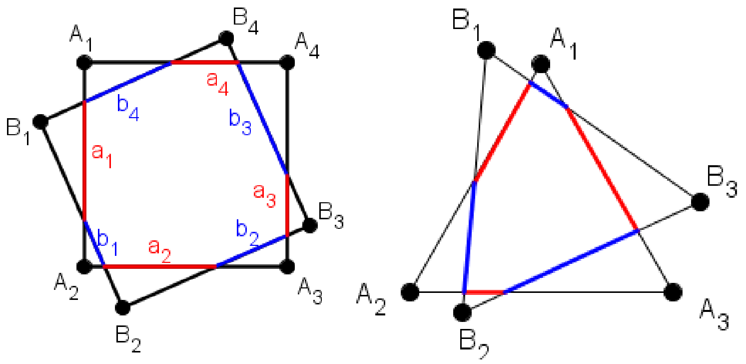
關鍵詞： 多邊形、旋轉平移、相似

摘要

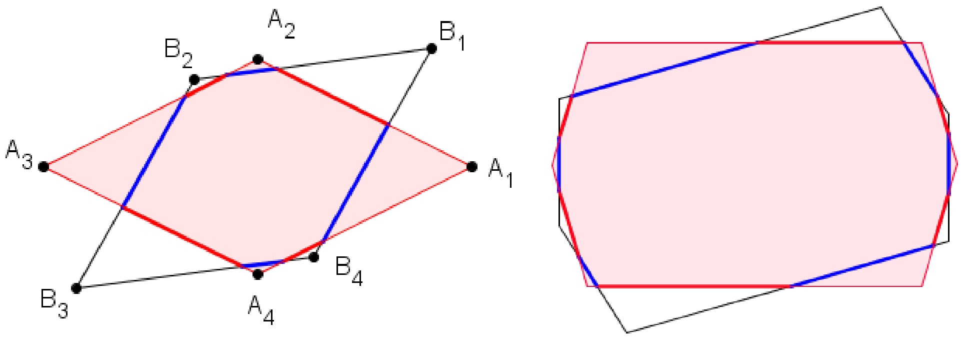
本研究最初將兩正方形重疊，使其面積重疊處形成一八邊形，將此八邊形的八個邊分成兩組，發現此兩組邊長有 1 次方和相等、2 次方和相等的性質。

而後我們將正方形推廣至正 n 邊形，討論什麼條件之下，可以使兩正 n 邊形重疊處為 $2n$ 邊形。探討其中一正 n 邊形對另一正 n 邊形平移範圍的限制。再證明重疊部分 $2n$ 邊形的兩組邊長之 1～n-1 次方和相等，最後再討論兩組邊長 n 次方和相等的條件。

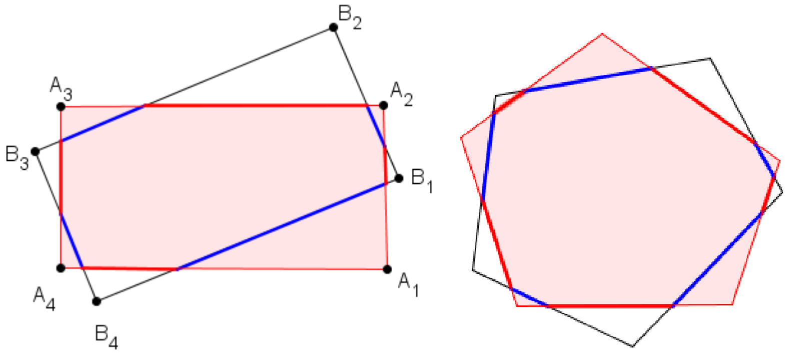
除此之外，我們將正 n 邊形推廣到其他多邊形。發現有兩條互相垂直對稱軸的圖形與等角多邊形，也會具有兩組邊長 1 次方和相等、2 次方和相等的性質。



正多邊形



有兩垂直對稱軸的圖形



等角多邊形

圖 1

壹、前言

一、研究動機：

某日我們在書本《動手玩數學與算術》[4]中發現了以下問題：「如圖 2 所示，正方形$A_1A_2A_3A_4$和正方形$B_1B_2B_3B_4$邊長相同，兩正方形相交後中間形成一個八邊形，邊長分別為a_1、b_1、a_2、b_2、a_3、b_3、a_4、b_4，求證：$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$。」，如下圖：

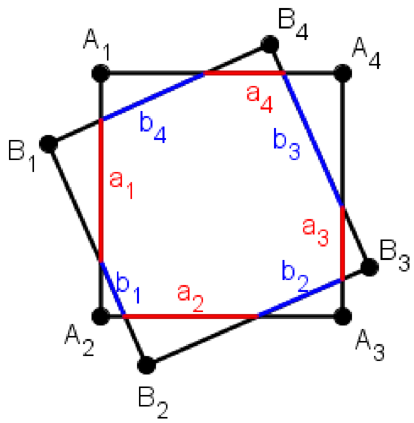


圖 2

由於兩正方形的中心在不同位置，凸出去的 8 個小三角形並不全等，使得這個性質並不直觀。我們找到了代數與幾何的證明方法。為了觀察正方形平移時八邊形的各邊長變化，把題目圖形畫在 GeoGebra 上作測量，卻發現，$a_1 \sim a_4$，$b_1 \sim b_4$不只是 1 次方的和會相等，2 次方、3 次方的和也會相等，但是到了 4 次方和就不相等了。我們還推廣了該性質到其他正多邊形（若其為正 n 邊形，則 1 次方的和到$n-1$次方的和都符合上述等式，即：${a_1}^k+{a_2}^k+\cdots+{a_n}^k={b_1}^k+{b_2}^k+\cdots+{b_n}^k$，$1 \le k \le n-1$，但 n 次方不相等），甚至除了正 n 邊形外，某些特殊條件的 n 邊形也具有邊長和相等的性質。

二、研究目的：

（一）對兩全等正 n 邊形相交後形成 $2n$ 邊形之可平移最大範圍分析。

（二）對兩全等正 n 邊形相交後形成 $2n$ 邊形之邊長性質分析。

（三）對兩全等特定 n 邊形相交後形成 $2n$ 邊形之邊長性質分析。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra。

參、研究過程或方法

一、兩全等正 n 邊形相交後形成 $2n$ 邊形之可平移最大範圍之分析

首先我們先將正 n 邊形的中心為旋轉中心，將正 n 邊形旋轉θ，$0<\theta<\frac{2\pi}{n}$，此時兩個正 n 邊形中心相同(如圖 3) ，接著把旋轉後的正 n 邊形$B_1B_2\ldots\ldots B_n$平移$\vec{s}$(如圖 4)。為了讓兩個正 n 邊形重疊部分形成 $2n$ 邊形，本段落將討論$\vec{s}$的可能範圍。

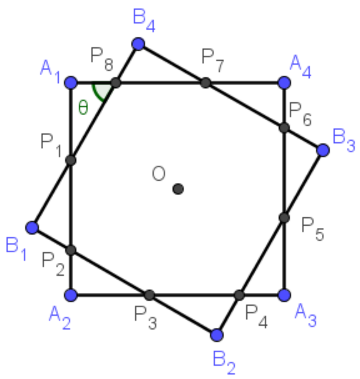


圖 3

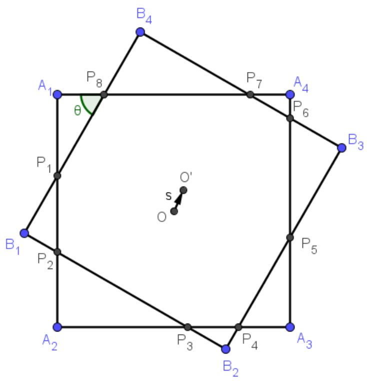


圖 4

由於正方形會有直角、偶數邊...，一些比較好的性質，在討論時一些方法無法類推到其他多邊形，因此下面的討論以正五邊形的圖為例，它的證明方法可以類推到其他正 n 邊形。將正 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$以中心點 O 為旋轉中心正向旋轉θ（$0<\theta<\frac{2\pi}{n}$）後得到正 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$，令正 n 邊形邊長為 a 。如下圖 5：

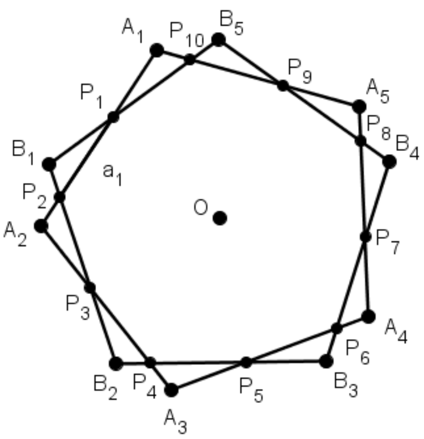


圖 5

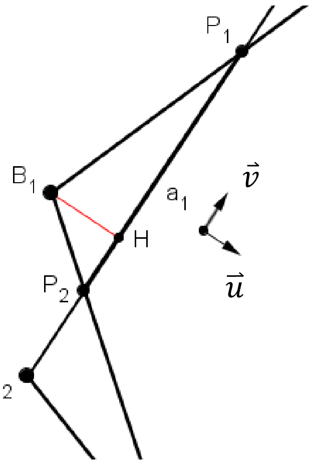


圖 6

若$B_1B_2\ldots B_n$平移$\vec{s}$，我們討論$\vec{s}$在何條件下B_1仍在 n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$外側。$\vec{s}$可拆解成

$\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$，$\vec{u}$垂直$\overline{P_1P_2}$，$\vec{v}$平行$\overline{P_1P_2}$。為了使平移後B_1仍在 n 邊形$A_1A_2 \ldots A_n$外側，$|\vec{u}|$不可大於$\Delta P_2B_1P_1$以a_1為底之高$\overline{B_1H}$ (如圖 6)。同理B_2 、B_3 … 、B_n都有相對應的條件。由於未平移時(圖 5)，所有凸出去的小三角形皆全等，因此三角形的高皆相等，上述向量絕對值的限制值也就相等。

接著我們來計算向量長度的限制值（三角形$\Delta P_2B_1P_1$的高）

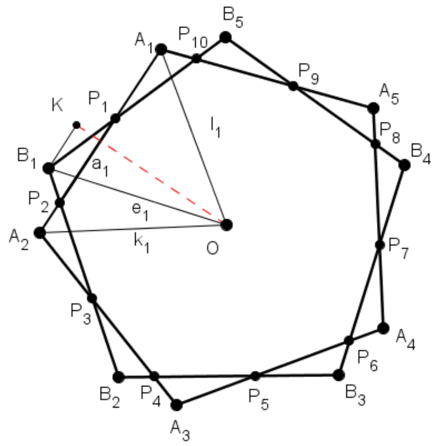


圖 7

$\angle B_1OA_1=\theta$，以下僅以$\theta>\frac{1}{2}\angle A_1OA_2$作範例。(當$\theta\le\frac{1}{2}\angle A_1OA_2$時，計算方法類似)。連接$\overline{OA_1}$、$\overline{OA_2}$、$\overline{OB_1}$，作直線 L 過 O 垂直線段$\overline{A_1A_2}$，過B_1作垂線垂直 L，令其交點為 K。$\angle A_1OK=\frac{1}{2}\angle A_1OA_2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\Rightarrow\angle B_1OK=\theta-\frac{\pi}{n}$

$\overline{OA_1}=\overline{OB_1}=\frac{\frac{1}{2}a}{\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{n}\right)}=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$，$O$ 到兩正 n 邊形任一邊的長度$=\overline{OA_1}\times\cos\frac{\pi}{n}=\frac{a\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}$

三角形$\Delta P_2B_1P_1$的高：（$|\vec{u}|$平移長度限制值）

$$\overline{OB_1}\times\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)-\overline{OA_1}\times\cos\frac{\pi}{n}=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

(當$\theta\le\frac{1}{2}\angle A_1OA_2$時亦為$\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right)$。)

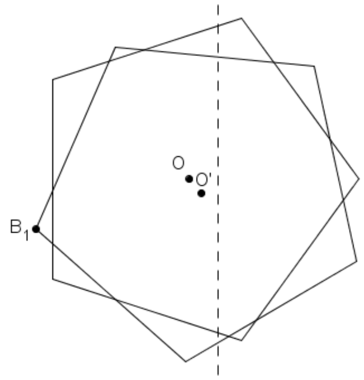


圖 8

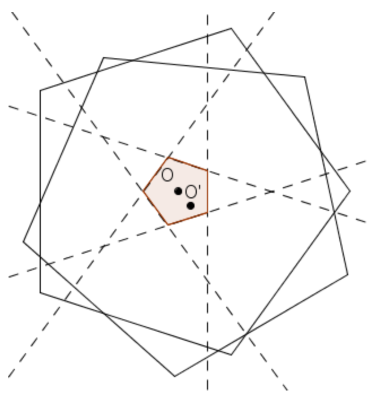


圖 9

經過上面討論，平移向量$\vec{s}=\overrightarrow{OO'}$，平移後為了使$B_1$仍在 n 邊形$A_1A_2\dots A_n$外側，O'必須在圖 8 虛線左側。同理為了使B_2、B_3 … 、B_n仍在 n 邊形$A_1A_2\dots A_n$外側，會推出O'必須在圖 9 的紅色正 n 邊形內。紅色的正 n 邊形是$A_1A_2\dots A_n$縮小再旋轉 180°，邊長會是

$$\frac{a}{\cos\frac{\pi}{n}}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

O'在圖 9 紅色的正 n 邊形內只能保證，頂點B_1 、B_2 、 … 、B_n在多邊形$A_1A_2\dots A_n$外側。但仍有可能頂點A_i跑到多邊形$B_1B_2\dots B_n$內側，如圖 10 所示。以相同方法討論頂點A_1、A_2、⋯、A_n在多邊形$B_1B_2\dots B_n$外側的條件，得出O'必須落在下圖 11 中內側藍色正 n 邊形內。綜合兩條件得知，O'必須落在兩個正 n 邊形的交集 S 之內，如圖 12。

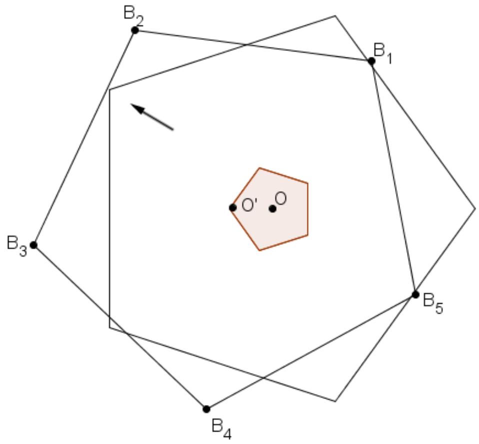


圖 10

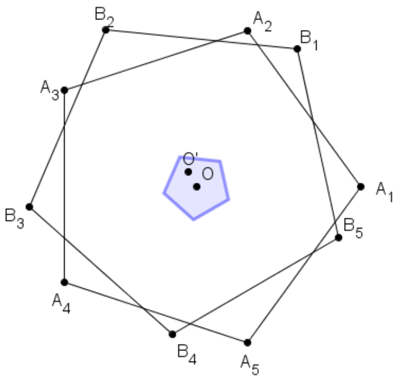


圖 11

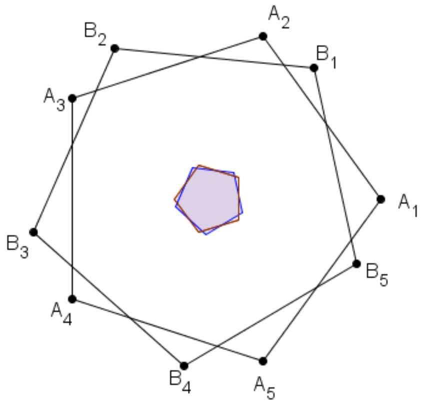


圖 12

故兩個小正 n 邊形的交集 S 之作圖步驟應為：

(一)：畫出正 n 邊形$A_1A_2\dots A_n$ 。

(二)：將$A_1A_2\dots A_n$以中心點 O 為旋轉中心正向旋轉θ後得到正 n 邊形$B_1B_2\dots B_n$ 。

(三)：將$A_1A_2\dots A_n$縮小再旋轉 180°，畫出紅色的正 n 邊形。

(四)：將$B_1B_2\dots B_n$縮小但不旋轉，畫出藍色的正 n 邊形。

(五) ：S 為紅色的正 n 邊形與藍色的正 n 邊形交集

1.當n是偶數，$B_1B_2\dots B_n$尚未平移時的$P_1P_2\dots P_{2n}$的圖形看起來與 S 相似。步驟(三)的旋轉 180°將不影響紅色正 n 邊形的方向，紅色的正 n 邊形各邊與$A_1A_2\dots A_n$各邊平行，藍色的正 n 邊形各邊與$B_1B_2\dots B_n$各邊平行。所以 S 與平移前的$P_1P_2\dots P_{2n}$ 相似(如圖 13) 。

2.當 n 是奇數，則 S 與平移前的$P_1P_2\dots P_{2n}$ 不一定相似。以下圖 14 極端例子為例，當正 5 邊形旋轉$\theta=36°$時，步驟(三)的旋轉後，藍色、紅色小正 5 邊形恰好重合，S 為一塊正 5 邊形，$P_1P_2\dots P_{10}$卻是 10 邊形。

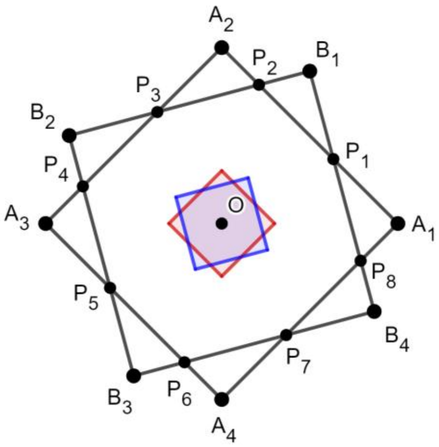


圖 13 n 是偶數

S 與平移前的$P_1P_2\dots P_{2n}$ 相似

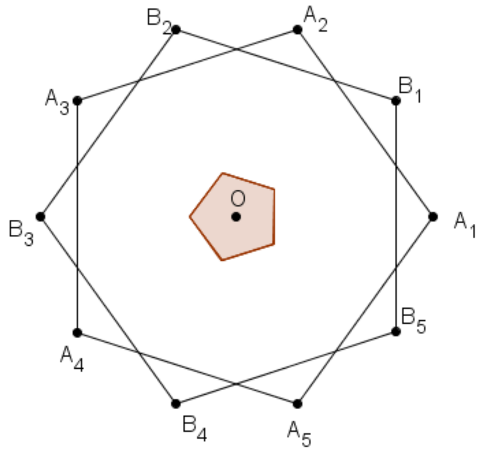


圖 14 n 是奇數

S 與平移前的$P_1P_2\dots P_{2n}$ 不一定相似

二、兩全等正 n 邊形相交後形成 $2n$ 邊形之邊長性質分析

（一）邊長 1、2 次方之和的關係

定理 1：如下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

$$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$$

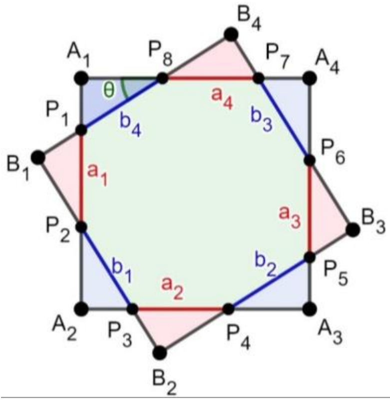


圖 15

證明：令$\angle A_1P_8P_1=\theta$，因為$\angle A_1P_8P_1=\angle B_4P_8P_7$（對頂角）且$\angle A_1=\angle B_4=\frac{\pi}{2}$，所以$\Delta A_1P_8P_1\sim\Delta B_4P_8P_7$（$AA$ 相似）。

同理 $\Delta A_1P_8P_1\sim\Delta B_1P_2P_1\sim\Delta A_2P_2P_3\sim\Delta B_2P_4P_3\sim\Delta A_3P_4P_5\sim\Delta B_3P_6P_5\sim\Delta A_4P_6P_7\sim\Delta B_4P_8P_7$。

則$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2A_2}=b_4\sin\theta+a_1+b_1\cos\theta$，

$\overline{A_2A_3}=b_1\sin\theta+a_2+b_2\cos\theta$

$\overline{A_3A_4} = b_2 \sin\theta + a_3 + b_3 \cos\theta$

$\overline{A_4A_1} = b_3 \sin\theta + a_4 + b_4 \cos\theta$

$\overline{B_1B_2} = a_1 \cos\theta + b_1 + a_2 \sin\theta$

$\overline{B_2B_3} = a_2 \cos\theta + b_2 + a_3 \sin\theta$

$\overline{B_3B_4} = a_3 \cos\theta + b_3 + a_4 \sin\theta$

$\overline{B_4B_1} = a_4 \cos\theta + b_4 + a_1 \sin\theta$

又因為四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同正方形，所以周長相同

四邊相加後可得

$(b_1+b_2+b_3+b_4)(\sin\theta+\cos\theta)+(a_1+a_2+a_3+a_4)=(a_1+a_2+a_3+a_4)(\sin\theta+\cos\theta)+(b_1+b_2+b_3+b_4)$

$\Rightarrow[(b_1+b_2+b_3+b_4)-(a_1+a_2+a_3+a_4)]\ (\sin\theta+\cos\theta-1)=0$

$\Rightarrow[(b_1+b_2+b_3+b_4)-(a_1+a_2+a_3+a_4)]\ (\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1)=0$。

因為 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1\neq 0$

$\Rightarrow(b_1+b_2+b_3+b_4)-(a_1+a_2+a_3+a_4)=0$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$，得證 。■

定理 2：如下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

$$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2=b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2$$

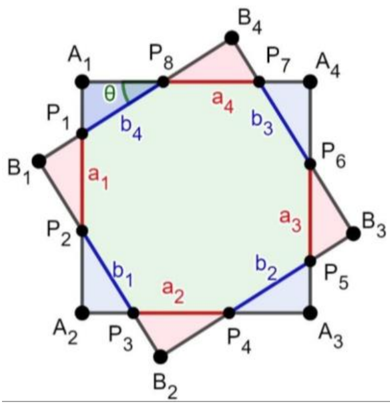


圖 16

證明：欲證明平方相加，我們將它聯想到面積相加，方便起見。定義函數$a(Q)$=多邊形 Q 的面積。凸出去的 8 個小正三角形相似：

$\Delta A_1P_8P_1 \sim \Delta B_1P_2P_1 \sim \Delta A_2P_2P_3 \sim \Delta B_2P_4P_3 \sim \Delta A_3P_4P_5 \sim \Delta B_3P_6P_5 \sim \Delta A_4P_6P_7 \sim \Delta B_4P_8P_7$

因此 8 個小三角形面積比=對應邊的平方比

$a(A_1P_8P_1) : a(B_1P_2P_1) : a(A_2P_2P_3) : a(B_2P_4P_3)$

$: a(A_3P_4P_5) : a(B_3P_6P_5) : a(A_4P_6P_7) : a(B_4P_8P_7)$

$=b_4{}^2 : a_1{}^2 : b_1{}^2 : a_2{}^2 : b_2{}^2 : a_3{}^2 : b_3{}^2 : a_4{}^2$。

由圖 16 可知，4 個藍色小三角形面積等於 4 個紅色小三角形面積

$a(A_1A_2A_3A_4) - a(P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8) = a(B_1B_2B_3B_4) - a(P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8)$

$a(A_1P_8P_1) + a(A_2P_2P_3) + a(A_3P_4P_5) + a(A_4P_6P_7)$

$= a(B_1P_2P_1) + a(B_2P_4P_3) + a(B_3P_6P_5) + a(B_4P_8P_7)$

所以${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + {b_4}^2$得證。■

接下來想要把定理 1、定理 2 推廣到正 n 邊形時。由於證明過程主要用到凸出去的小三角形皆相似，依類似方法可以順利推廣。以下以正五邊形為例。

定理 3：如下圖正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$和正五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$邊長相同

性質(1).$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$

性質(2).${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + {a_5}^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + {b_4}^2 + {b_5}^2$

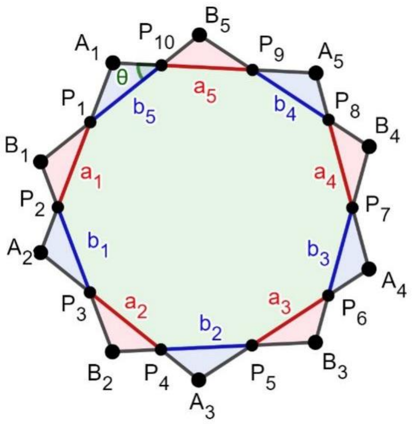


圖 17

性質(1).明顯地$\Delta A_1P_{10}P_1 \sim \Delta B_1P_2P_1 \sim \Delta A_2P_2P_3 \sim \cdots \sim \Delta A_5P_8P_9 \sim \Delta B_5P_{10}P_9$。

在$\Delta B_1P_2P_1$中，假設$\overline{B_1P_1} = ma_1$，$\overline{B_1P_2} = na_1$（$mn \neq 0$），也就是上述的小三角形三邊比皆為$1:m:n$。

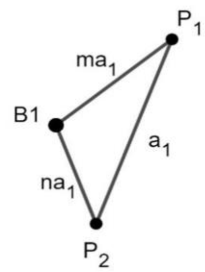


圖 18

所以$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2A_2} = mb_5 + a_1 + nb_1$，同理

$\overline{A_2A_3} = mb_1 + a_2 + nb_2$

$\overline{A_3A_4} = mb_2 + a_3 + nb_3$

$\overline{A_4A_5} = mb_3 + a_4 + nb_4$

$\overline{A_5A_1} = mb_4 + a_5 + nb_5$

$\overline{B_1B_2} = na_1 + b_1 + ma_2$

$\overline{B_2B_3} = na_2 + b_2 + ma_3$

$\overline{B_3B_4} = na_3 + b_3 + ma_4$

$\overline{B_4B_5} = na_4 + b_4 + ma_5$

$\overline{B_5B_1} = na_5 + b_5 + ma_1$

又因為五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$和五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$周長相等，所以可得

$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)(m + n) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)(m + n) + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$

$\Rightarrow [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)](m + n - 1) = 0$….(1)

在$\Delta B_1P_2P_1$中，$\overline{B_1P_1} + \overline{B_1P_2} > \overline{P_1P_2}$

$\Rightarrow ma_1 + na_1 > a_1$

$\Rightarrow m + n - 1 > 0$

$\Rightarrow m + n - 1 \neq 0$………代入(1)

$\Rightarrow [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)] = 0$

$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$得證。■

性質(2)：同定理 2 的證明方法，凸出去的紅色三角形面積和=藍色三角形面積和

$a(A_1A_2A_3A_4A_5) - a(P_1P_2P_3 \ldots P_{10}) = a(B_1B_2B_3B_4B_5) - a(P_1P_2P_3 \ldots P_{10})$

因此${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + {a_5}^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + {b_4}^2 + {b_5}^2$得證。■

因此我們有以下結論：

定理 4：兩全等的正 n 邊形，若其重疊部分為 $2n$ 邊形，$2n$ 邊形邊長逆時鐘依序為a_1、b_1、a_2、b_2、…、a_n、b_n，則

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2$

（二）邊長$n-1$次方之和的關係

由於我們在 GeoGebra 上觀察到了正四邊形有 1、2、3 次方和相等、4 次方和不一定相等的性質，而正五邊形有 1、2、3、4 次方和相等、5 次方和不一定相等的性質，因此我們猜測正 n 邊形的 1 次方和到$n-1$次方和都會相等，到 n 次方才會不相等。首先嘗試證明 3 次方和相等，我們將每段長度算出，試著觀察其他的性質、特徵來找證明的方法。舉例來說：下圖 19 正方形$A_1A_2A_3A_4$是邊長為 12 的正方形，將它逆時針旋轉 60°，並平移$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，得到正方形 $B_1B_2B_3B_4$，可算出:

$$a_1 = 14 - 4\sqrt{3} \quad a_2 = 14 - 4\sqrt{3} \quad a_3 = 10 - 4\sqrt{3} \quad a_4 = 10 - 4\sqrt{3}$$

$$b_1 = 11 - 5\sqrt{3} \quad b_2 = 11 - 3\sqrt{3} \quad b_3 = 13 - 3\sqrt{3} \quad b_4 = 13 - 5\sqrt{3}$$

滿足

$$a_1+a_2+a_3+a_4=48-16\sqrt{3}=b_1+b_2+b_3+b_4$$
$${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2=784-384\sqrt{3}={b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2+{b_4}^2$$
$${a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3+{a_4}^3=14400-7872\sqrt{3}={b_1}^3+{b_2}^3+{b_3}^3+{b_4}^3$$

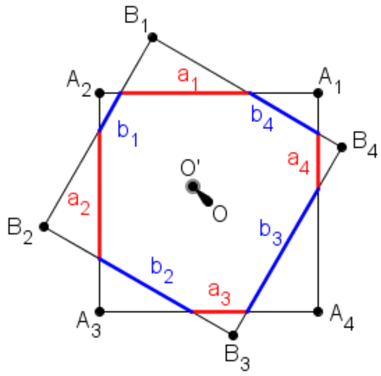


圖 19

由這個例子可以看出$a_1+a_3=a_2+a_4=b_1+b_3=b_2+b_4$，這是在$n$是偶數才有的特性，可以由平移時的幾何特徵推知(留待後面定理 9 會證明)。利用此性質加上之前 1、2 次方和相等的結果可以證出$\sum_{i=1}^{n}a_i^3=\sum_{i=1}^{n}b_i^3$，$n\geq 4$，$n$是偶數。但由於此證明無法再推廣$4,5,\ldots,n-1$次方和。可見每嘗試證明下一個次方，就要找新的性質。這種用幾何性質方法不太適合繼續嘗試下去。我們打算將邊長的通式求出來，再用代數方法來證明 1 次方和到$n-1$次方和都會相等。

從我們最熟悉的五邊形開始討論，n=5。假設正五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$以中心為旋轉中心正向旋轉θ，形成正五邊形$B_1B_2B_3B_4B_5$。原五邊形與旋轉後的五邊形中心相同(如圖 20) ，中間會形成一個各邊長相等的 10 邊形，假設 10 邊形邊長為L

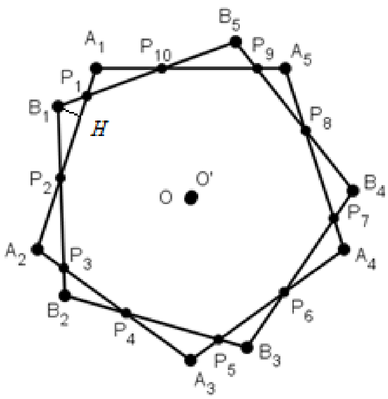


圖 20

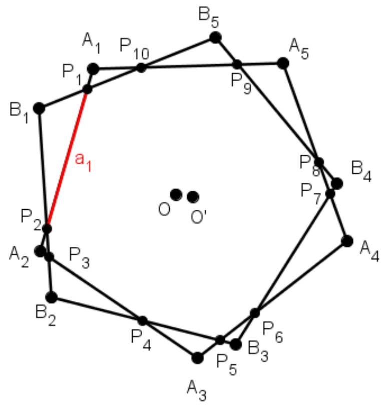


圖 21

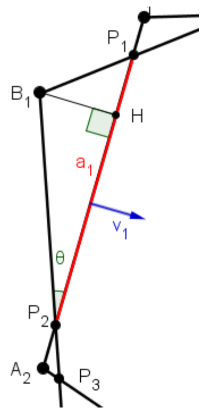


圖 22

觀察圖 20 中$\Delta B_1P_1P_2$，$\overline{P_1P_2}=L$，$\overline{P_1B_1}=L\frac{\sin\theta}{\sin(\frac{3\pi}{5})}$

H 為B_1在$\overline{P_1P_2}$的垂足，$\overline{B_1H}=\overline{P_1B_1}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)=L\frac{\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)}{\sin(\frac{3\pi}{5})}$

$\overline{B_1H}:\overline{P_1P_2}=1:\frac{\sin(\frac{3\pi}{5})}{\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)}$

將$B_1B_2B_3B_4B_5$平移$\overrightarrow{OO}'$後(如圖 21) ，觀察邊a_1，令$\overrightarrow{v_1}$垂直 a_1且指向五邊形內部(如圖 22)。$\vec{s}$為平移向量，$\vec{s}=\overrightarrow{OO}'$，$\vec{s}$可拆解成兩個向量相加，一個與$\overrightarrow{v_1}$平行，一個與$\overrightarrow{v_1}$垂直。由於$a_1$長度不受與$\overrightarrow{v_1}$垂直的向量影響，所以只須考慮$\vec{s}$在$\overrightarrow{v_1}$上的正射影。令 $\overrightarrow{v_1}$轉了有向角α後與$\vec{s}$平行且同向，令$|\vec{s}|=s$。可知平移$\vec{s}$後，B_1向$\overline{P_1P_2}$靠近了$s\cos\alpha$，($\cos\alpha<0$ 時為遠離) ，可推出$a_1=L-s\cdot\cos(\alpha)\frac{\sin(\frac{3\pi}{5})}{\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)}$。不妨假設$k=\frac{-\sin(\frac{3\pi}{5})}{\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)}$，($|k|$代表意義為 $\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{B_1H}}$)

則： $a_1=L+s\cdot\cos(\alpha)k$ ，

$a_2=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{5}\right)k$ ，

$a_3=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{4\pi}{5}\right)k$，

$a_4=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{6\pi}{5}\right)k$，

$a_5=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{8\pi}{5}\right)k$

因此我們可推得$a_i=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{(i-1)2\pi}{5}\right)k$ ，$i\in\{1,2,3,4,5\}$

同理可得$b_i=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)2\pi}{5}\right)k$ ，$i\in\{1,2,3,4,5\}$，

經過上面討論，當$n\geq 3$，$n\in\mathbb{N}$時，中間圍成的 $2n$ 邊形各邊長可表達成

$a_i=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$ ，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$

$b_i=L+\mathrm{s}\cdot\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$ ，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$

其中L，k，α， s ，θ為常數。L是旋轉後未平移前的 $2n$ 邊形邊長，s為平移向量的長度，α為$\overline{A_1A_2}$的法向量$\overrightarrow{v_1}$轉至$\vec{s}$的正向角，$k=\frac{-\sin(\frac{n-2}{n}\pi)}{\sin\theta\sin\left(\frac{2\pi}{n}-\theta\right)}$。

證明$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^r=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^r$等價於證明一連串的餘弦函數值的和相等。由於要證明各

次方的和，我們想利用多項式根與係數的關係來輔助證明。

引理 5：給定正整數 n，$n \geq 2$，若$\theta_n = \frac{2\pi}{n}$，$\gamma = \frac{\theta_n}{3} = \frac{2\pi}{3n}$，則$\cos(\gamma + \theta_n)$, $\cos(\gamma + 2\theta_n), \dots, \cos(\gamma + n\theta_n)$均相異

證明：假設$a, b \in \{1,2,\dots,n\}$，$\cos(\gamma + a\theta_n) = \cos(\gamma + b\theta_n)$ ，$a \neq b$

由於$\gamma + a\theta_n$、$\gamma + b\theta_n$不會是同界角所以 cos 值相同表示$-(\gamma + a\theta_n)$、$\gamma + b\theta_n$是同界角，則$(\gamma + a\theta_n) + (\gamma + b\theta_n) = 2m\pi$，$m \in \mathbb{N}$，

$\Rightarrow \frac{4\pi}{3n} + \frac{2a\pi}{n} + \frac{2b\pi}{n} = 2m\pi$　再將式子同乘$\frac{n}{\pi}$

$\frac{4}{3} + 2a + 2b = 2mn$，（$m, n, a, b$都是正整數，矛盾）。

$\cos(\gamma + 2\theta_n), \dots, \cos(\gamma + n\theta_n)$均相異■

引理 6：給定正整數 n，$n \geq 2$，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$\theta_n = \frac{2\pi}{n}$，則

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\theta_n) + \cos(\alpha+2\theta_n) + \dots + \cos(\alpha+n\theta_n) = \cos(\beta+\theta_n) + \cos(\beta+2\theta_n) + \dots + \cos(\beta+n\theta_n) \\ \cos^2(\alpha+\theta_n) + \cos^2(\alpha+2\theta_n) + \dots + \cos^2(\alpha+n\theta_n) = \cos^2(\beta+\theta_n) + \cos^2(\beta+2\theta_n) + \dots + \cos^2(\beta+n\theta_n) \\ \vdots \\ \cos^{n-1}(\alpha+\theta_n) + \cos^{n-1}(\alpha+2\theta_n) + \dots + \cos^{n-1}(\alpha+n\theta_n) = \cos^{n-1}(\beta+\theta_n) + \cos^{n-1}(\beta+2\theta_n) + \dots + \cos^{n-1}(\beta+n\theta_n) \end{cases}$$

證明：建構兩個 n 次多項式函數：

$$g(x) = (x - \cos(\alpha + \theta_n))(x - \cos(\alpha + 2\theta_n)) \dots (x - \cos(\alpha + n\theta_n))$$

$$f(x) = (x - \cos(\beta + \theta_n))(x - \cos(\beta + 2\theta_n)) \dots (x - \cos(\beta + n\theta_n))$$

欲證明這兩個多項式展開之後按降冪排列只有常數項不同。

取$\gamma = \frac{2\pi}{3n}$，由**引理 5** 知$\cos(\gamma + \theta_n), \cos(\gamma + 2\theta_n), \dots, \cos(\gamma + n\theta_n)$均相異，

將$\cos(\gamma + \theta_n)$代入$g(x)$，並用和差化積公式化簡

$$g(\cos(\gamma+\theta_n)) = (\cos(\gamma+\theta_n) - \cos(\alpha+\theta_n))(\cos(\gamma+\theta_n) - \cos(\alpha+2\theta_n)) \dots (\cos(\gamma+\theta_n) - \cos(\alpha+n\theta_n))$$

$$= (-2)^n \left(\sin\left(\frac{\gamma + \alpha + 2\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{\gamma + \alpha + 3\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma - \alpha - \theta_n}{2}\right)\right) \dots$$

$$\left(\sin\left(\frac{\gamma + \alpha + (n+1)\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma - \alpha - (n-1)\theta_n}{2}\right)\right)$$

將$\cos(\gamma + 2\theta_n)$代入$g(x)$，並使用和差化積公式化簡

$$g(\cos(\gamma+2\theta_n)) = (\cos(\gamma+2\theta_n) - \cos(\alpha+\theta_n))(\cos(\gamma+2\theta_n) - \cos(\alpha+2\theta_n)) \dots (\cos(\gamma+2\theta_n) - \cos(\alpha+n\theta_n))$$

$$= (-2)^n \left(\sin\left(\frac{\gamma + \alpha + 3\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma - \alpha + \theta_n}{2}\right)\right) \left(\sin\left(\frac{\gamma + \alpha + 4\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma - \alpha}{2}\right)\right) \dots$$

$$\left(\sin\left(\frac{\gamma+\alpha+(n+2)\theta_n}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma-\alpha-(n-2)\theta_n}{2}\right)\right)$$

經比較後發現兩者完全相同，繼續代入$\cos(\gamma+3\theta_n),\cdots,\cos(\gamma+n\theta_n)$

可推出$g(\cos(\gamma+\theta_n)) = g(\cos(\gamma+2\theta_n)) =\cdots= g(\cos(\gamma+n\theta_n))$---①

同理可證$f(\cos(\gamma+\theta_n)) = f(\cos(\gamma+2\theta_n)) =\cdots= f(\cos(\gamma+n\theta_n))$---②

令$h(x) = g(x) - f(x)$，$\deg(h(x)) \le n-1$，或$h(x)$為 0 函數

由①、②得 $h(\cos(\gamma+\theta_n)) = h(\cos(\gamma+2\theta_n)) =\cdots= h(\cos(\gamma+n\theta_n))$，

由於$\cos(\gamma+\theta_n), \cos(\gamma+2\theta_n),\ldots,\cos(\gamma+n\theta_n)$為 n 個相異實數，

可知$h(x)$為常數函數，因此$f(x)$，$g(x)$展開之後只有常數項可能不同

再由多項式根與係數的關係，與對稱多項式基本定理的性質，本定理得證■

(**對稱多項式基本定理** Fundamental Theorem of Symmetric Polynomials)在$x_1, x_2,\ldots, x_n$對稱多項式中，令基本對稱多項式(elementary symmetric polynomial)，

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n} x_1 \text{ ， } \sigma_2=\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \text{ ，...， } \sigma_m=\sum_{1\le j_1<j_2\ldots<j_m\le n} x_{j_1}x_{j_1}\ldots x_{j_m}$$

設 $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$為包含變數 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ 的對稱多項式，則 f 可以表示成以σ_1、σ_2、...、σ_n 作為變數的多項式。

例如對稱多項式$\sum_{i=1}^{n} x_i^r$ 可以由下面方法表示

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sigma_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma_1\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sigma_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sigma_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sigma_2\sum_{i=1}^{n} x_i + 3\sigma_3$$

…

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^r = \sigma_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{r-1} - \sigma_2\sum_{i=1}^{n} x_i^{r-2} + \ldots + (-1)^r \sigma_{r-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 + (-1)^{r+1} n\sigma_n$$

以上定理引用自參考資料[2][3]。

定理 7：已知：n 邊形$A_1A_2\ldots A_n$和 n 邊形$B_1B_2\ldots B_n$為全等的正 n 邊形，兩多邊形重疊部分為 $2n$ 邊形，各邊長依序為$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$，則：

$$\begin{cases} a_1+a_2+\ldots+a_n = b_1+b_2+\ldots+b_n \\ {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2 = {b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2 \\ \vdots \\ {a_1}^{n-1}+{a_2}^{n-1}+\cdots+{a_n}^{n-1} = {b_1}^{n-1}+{b_2}^{n-1}+\cdots+{b_n}^{n-1} \end{cases}$$

證明：由前面討論知，存在常數L，k，α，s，θ

$$a_i = L+s\cdot\cos\left(\alpha-\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k\ \text{，}i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

$$b_i = L+s\cdot\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k\ \text{，}i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

給定$1\le r\le n-1$檢驗$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^r=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^r$

$$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^r=\sum_{i=1}^{n}\left(C_0^rL^r+C_1^rL^{r-1}\left(s\cos\left(\alpha-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^1+\ldots+C_r^r\left(s\cos\left(\alpha-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^r\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}{b_i}^r=\sum_{i=1}^{n}\left(C_0^rL^r+C_1^rL^{r-1}\left(s\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^1+\ldots+C_r^r\left(s\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^r\right)$$

由**引理** 6 知：

$\sum_{i=1}^{n}cos^t\left(\alpha-\frac{(i-1)\cdot2\pi}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}cos^t\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot2\pi}{n}\right)$，$\forall t\in\mathbb{N}$，$1\le t\le r$

故$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^r=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^r$ ，$1\le r\le n-1$ 得證■

接著我們想討論何時會讓${a_1}^n+{a_2}^n+\cdots+{a_n}^n={b_1}^n+{b_2}^n+\cdots+{b_n}^n$也成立

這個情況就會是下面的方程組每個式子全都成立，

$$\begin{cases} a_1+a_2+\ldots+a_n = b_1+b_2+\ldots+b_n \\ {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2 = {b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2 \\ \vdots \\ {a_1}^{n}+{a_2}^{n}+\cdots+{a_n}^{n} = {b_1}^{n}+{b_2}^{n}+\cdots+{b_n}^{n} \end{cases}$$

考慮多項式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$
$$g(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$$

由上面的 n 條等式成立，利用根與係數的關係可以推出 $f(x)$ 與 $g(x)$ 展開後的各項係數都相同，所以這兩個多項式相等。因此 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的因式分解會相同，也就是根 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 與 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 會相同，重根次數也會相同，只差在順序的差異。

接下來將討論 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 與 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 什麼情況相同(只差在順序的差異)。

舉例：如下圖 23，將正 5 邊形$A_1A_2\ldots A_5$以中心點 O 為旋轉中心正向旋轉θ後得到$B_1B_2\ldots B_5$，此時中間形成的 10 邊形會是線對稱圖形，有 5 條對稱軸，若平移向量$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{s}$ 與其中一條對稱軸垂直(圖 23)，平移後形成的 10 邊形仍是線對稱圖形(如圖 24)，對稱軸通過$\overline{OO'}$中點。因此$a_1,a_2,\ldots,a_n$與$b_1,b_2,\ldots,b_n$長度會相同，只差在順序的差異。

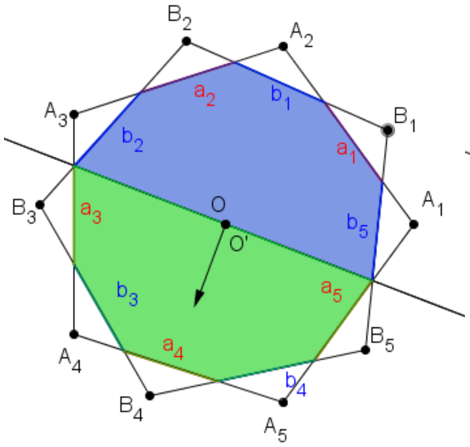


圖 23

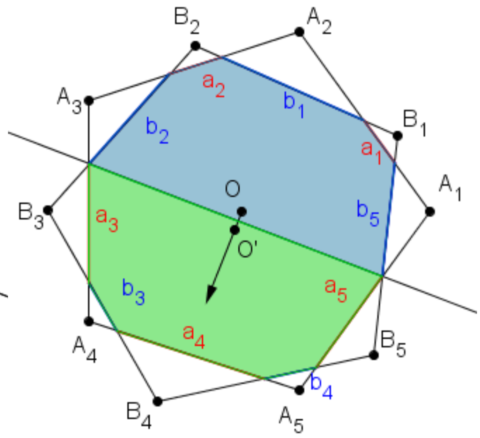


圖 24

由於使用幾何方法無法保證是否找完全部的情況，以下使用代數方法來找尋所有可能。當平移向量$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{0}$時顯然成立，所以我們討論當平移向量$\overrightarrow{s}\neq\overrightarrow{0}$時，

$$a_i = L + s\cdot\cos\left(\alpha - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k\ ，\qquad i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

$$b_i = L + s\cdot\cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k\ ，\quad i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

s為平移向量的長度，s不為 0， $|k|$代表意義為凸出去的三角形邊與高的比例， $k\neq 0$。

假設某兩邊等長$a_1=b_i$那即是

$$L+s\cdot\cos(\alpha)k = L+s\cdot\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\cos\left(\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)$$

(1)case1：α與$\alpha-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}$為同界角

$\Rightarrow 0$與$-\theta+\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}$為同界角 $\Rightarrow \theta$與$\pi-\frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}$為同界角

由於旋轉角的限制$0<\theta<\frac{2\pi}{n}$

當n是偶數，滿足條件的θ無解

當n是奇數，$\theta=\frac{\pi}{n}$， α為任意數

以下圖 25 為例：$n=5$，旋轉角$\theta=\dfrac{\pi}{5}=36°$，平移向量$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{OO'}$，$\overline{A_1A_2}$法向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MA}$旋轉有向角$\alpha$後與$\overrightarrow{s}$平行且同向，$\alpha=\dfrac{\pi}{12}=15°$，此時的$a_1,a_2,...,a_5$與$b_1,b_2,...,b_5$長度如圖左邊所列，$a_1,a_2,...,a_n$與$b_1,b_2,...,b_n$長度會相同，只差在順序的差異。同時可以發現中間的 10 邊形為點對稱圖形，對稱中心為$\overline{OO'}$中點(圖 26)。也因此這個$a_1,a_2,...,a_5$與$b_1,b_2,...,b_5$都是同一組長度的現象也能用幾何來證明。

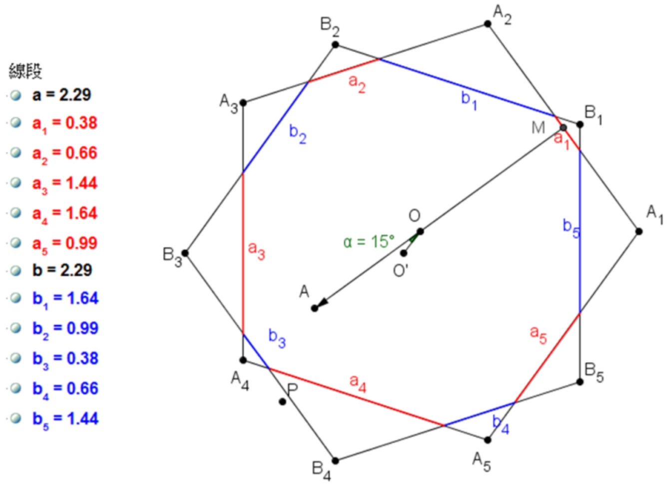


圖 25

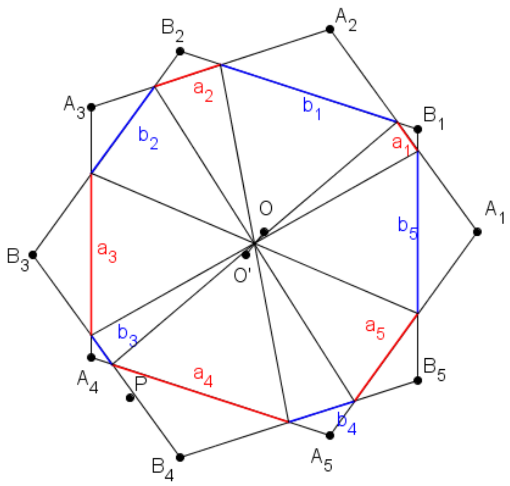


圖 26

(2)case2：$-\alpha$與$\alpha-\theta+\pi-\dfrac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}$為同界角

$\Rightarrow\theta-2\alpha$與$\pi-\dfrac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}$為同界角

$\Rightarrow 2\alpha-\theta=-\pi+\dfrac{(i-1)2\pi}{n}+2\pi\times m=-\pi+\dfrac{(i-1+mn)2\pi}{n}$，$m\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\alpha=\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{(i-1+mn)\pi}{n}$　　簡單來說就是α必須是$\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}$加$\dfrac{\pi}{n}$的整數倍。

將$\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}$加$\dfrac{\pi}{n}$的整數倍的那些角全都列出來，在$0\le\alpha<2\pi$之間，$\alpha$會有$2n$個解。這裡的$2n$個解恰好即是圖 23 的與對稱軸垂直的 $2n$ 種方向。

以下圖 27 為例：$n=5$，旋轉角$\theta=\dfrac{\pi}{6}=30°$，平移向量$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{OO'}$，$\overline{A_1A_2}$法向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MA}$旋轉有向角$\alpha$後與$\overrightarrow{s}$平行且同向，$\alpha=\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{5}=33°$。此時的$a_1,a_2,...,a_5$與$b_1,b_2,...,b_5$長度如圖左邊所列，同時可以發現中間的 10 邊形為線對稱圖形，對稱軸因α選擇而異。

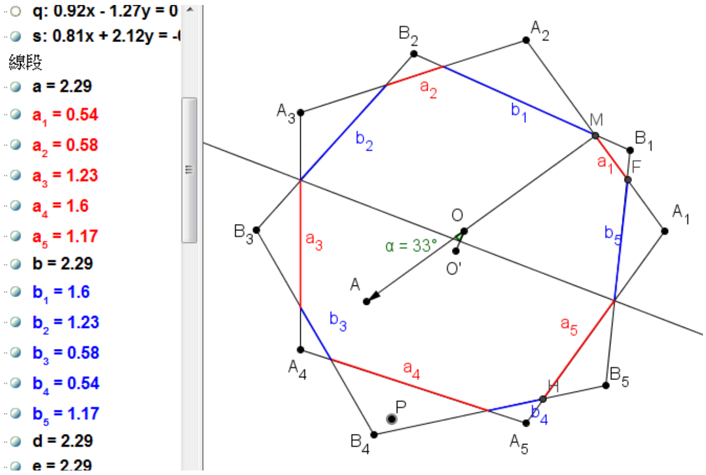


圖 27

這裡做個小結：

1.當 n 是奇數，旋轉角 $\theta=\dfrac{\pi}{n}$ ，則平移向量可以指向任意方向，都會使得中間的 $2n$ 邊形是點對稱圖形，$a_1,a_2,\ldots,a_5$ 與 $b_1,b_2,\ldots,b_5$ 長度相同只有順序的差異。如圖 25、圖 26。

2.旋轉角 $\theta\neq\dfrac{\pi}{n}$ ，則平移向量必須指向 $2n$ 個方向如圖 28(此圖為 n=5，$B_1B_2\ldots B_5$尚未平移前)，這些任意一個方向會與$P_1P_2\ldots P_{2n}$其中之一對稱軸垂直(圖 29)。當平移向量 $\overrightarrow{OO'}$ 指向其中之一方向，平移後會使得中間的 $2n$ 邊形是線對稱圖形(圖 30)，$a_1,a_2,\ldots,a_5$ 與 $b_1,b_2,\ldots,b_5$ 長度相同只有順序的差異。且平移後的$P_1P_2\ldots P_{2n}$對稱軸會與原對稱軸平行。

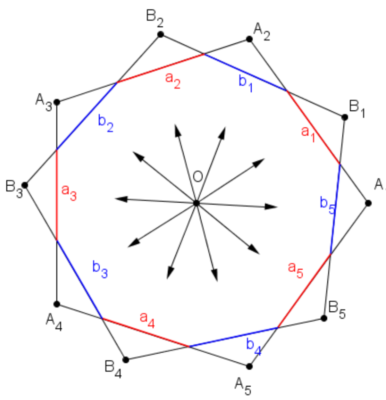


圖 28

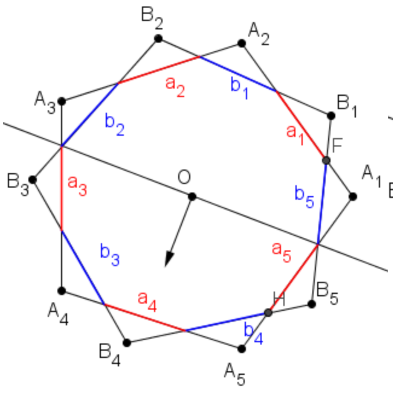


圖 29

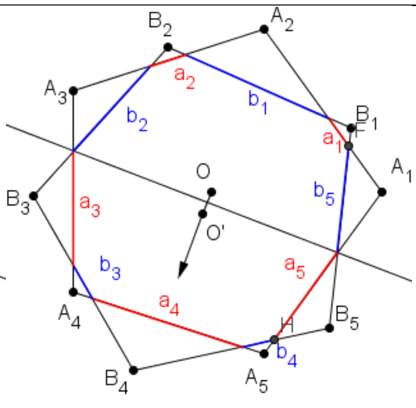


圖 30

只有前面兩種討論的情況下，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 與 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 會滿足

$$\begin{cases} a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n \\ {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2={b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2 \\ \vdots \\ {a_1}^n+{a_2}^n+\cdots+{a_n}^n={b_1}^n+{b_2}^n+\cdots+{b_n}^n \end{cases}$$

更進一步說其實任意次方和都會成立，$\sum_{i=1}^{n}a_i^m=\sum_{i=1}^{n}b_i^m$ ，$m\in\mathbb{N}$。

三、兩全等特定 n 邊形相交後形成 $2n$ 邊形之邊長性質分析

接下來我們嘗試試驗其他多邊形是否有類似的性質。這類型的圖形因為不像正多邊形每個邊都等長，為了讓長邊會跟長邊相交才會使長度有類似的性質，在本章節討論時均假設$\angle B_1$畫出去的兩邊與$\overline{A_1A_2}$相交。

長方形：

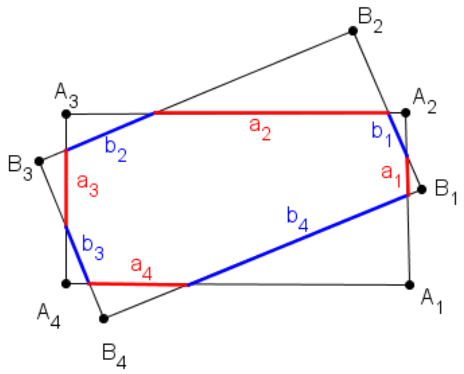


圖 31

性質一：$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$　　1 次方之和相等

性質二：${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2={b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2+{b_4}^2$　　2 次方之和相等

性質三：$a_1+a_3=b_1+b_3$，$a_2+a_4=b_2+b_4$　　對邊和兩兩相等

菱形：

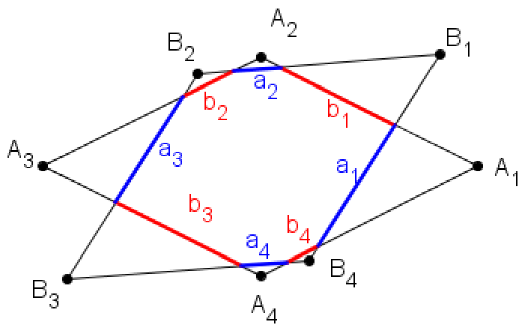


圖 32

性質一：$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$　　一次方之和相等

性質三：$a_1+a_3=b_1+b_3$，$a_2+a_4=b_2+b_4$　　對邊和兩兩相等

平行四邊形：

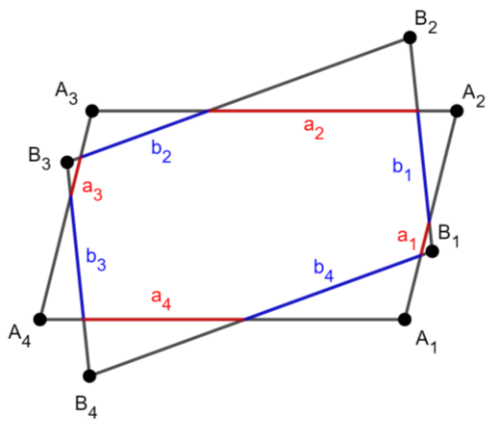


圖 33

無明顯性質

鳶形:

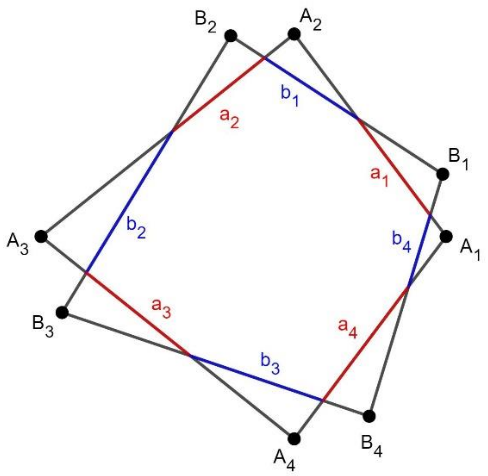


圖 34

無明顯性質。

(一) 有兩條垂直對稱軸的圖形

我們發現性質三在長方形和菱形皆可成立，而平行四邊形與鳶形皆不成立，於是我們先從原圖形的基本性質分析。從邊長探討，菱形四邊等長，長方形與平行四邊形對邊等長，而鳶形鄰邊等長，得知對邊等長可能是性質三成立的必要條件；從角度探討，長方形四角相等，而菱形與平行四邊形僅對角相等，鳶形僅對稱軸兩邊的角相等，得知對角相等可能是性質三成立的必要條件，但兼具此兩種基本性質的平行四邊形亦不具性質三，於是我們從「對稱」著手。

平行四邊形是點對稱圖形，鳶形是有一條對稱軸的線對稱圖形，而長方形與菱形是

有兩條相互垂直對稱軸的線對稱圖形和點對稱圖形，比較平行四邊形和長方形、菱形可發現，之前提到的對邊相等與對角相等僅可代表點對稱是性質三的必要條件，也得有線對稱才能使性質三成立，而同時滿足線對稱與點對稱的圖形會具有兩條相互垂直的對稱軸，這個特徵我們稱為「**橫豎對稱**」，這類圖形則可分為以下 3 類。

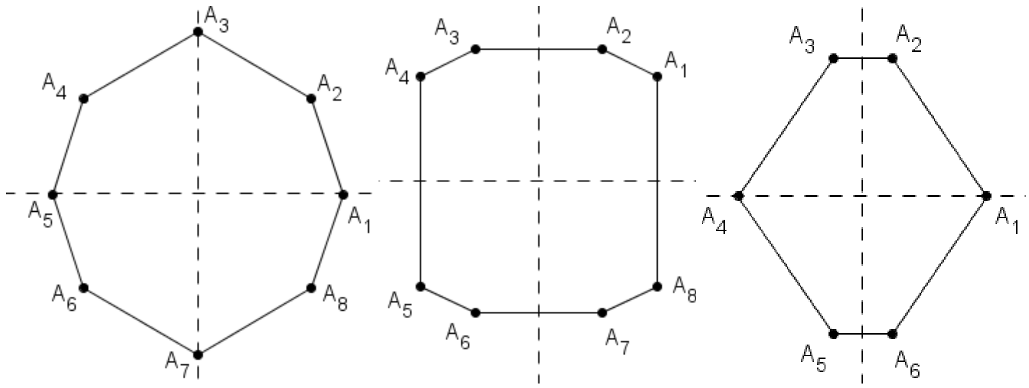


圖 35

1.兩對稱軸均過頂點

2.兩對稱軸均過邊的中點

3.一對稱軸過邊的中點，一對稱軸過頂點

下圖是橫豎對稱的六邊形，我們檢查它是否符合前述的性質

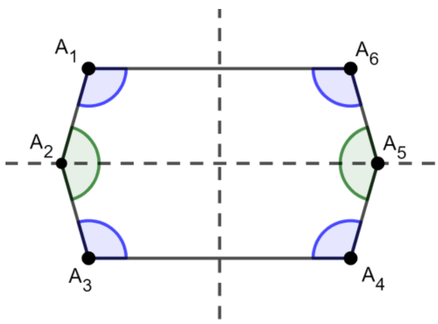


圖 36

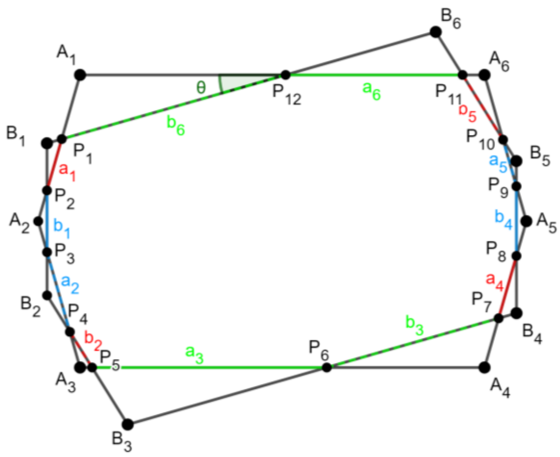


圖 37

性質一：$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_6 = b_1 + b_2 + \cdots + b_6$　　一次方之和相等

性質三：$a_1 + a_4 = b_2 + b_5$

，$a_2 + a_5 = b_1 + b_4$

，$a_3 + a_6 = b_3 + b_6$

可以看出仍符合性質一與性質三，與菱形的情況相同。 其實這三類圖形都會有前述

的性質，下方以第三類來作證明。由於性質三是性質一的充分條件。我們僅需要證明橫豎對稱導致性質三成立即可。由於圖形的各邊不再等長，因此驗證性質三時，$A_1A_2 \dots A_n$長邊的截痕必須跟$B_1B_2 \dots B_n$長邊的截痕相比較，所以我們先觀察原來圖形各邊長的性質

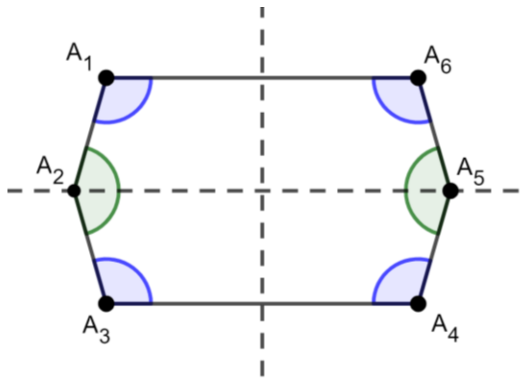


圖 38

上圖 38 的六邊形具有下列性質

1.是點對稱圖形

2. $\angle A_2 = \angle A_5$，$\angle A_1 = \angle A_3 = \angle A_4 = \angle A_6$

3. $\overleftrightarrow{A_1A_6} \parallel \overleftrightarrow{A_2A_5} \parallel \overleftrightarrow{A_3A_4}$，$\overleftrightarrow{A_1A_2} \parallel \overleftrightarrow{A_4A_5}$且$\overleftrightarrow{A_3A_2} \parallel \overleftrightarrow{A_6A_5}$

4. $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_5} = \overline{A_5A_6}$

定理 8：下圖 39 中六邊形$A_1A_2 \dots A_6$，有兩條對稱軸，且兩對稱軸相互垂直。而六邊形$B_1B_2 \dots B_6$和$A_1A_2 \dots A_6$為全等的六邊形，兩多邊形重疊部分為 12 邊形$P_1P_2 \dots P_{12}$，各邊長依序為$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_6, b_6$，其各邊長滿足

$$a_1 + a_4 = b_2 + b_5 \quad , \quad a_2 + a_5 = b_1 + b_4 \quad , \quad a_3 + a_6 = b_3 + b_6$$

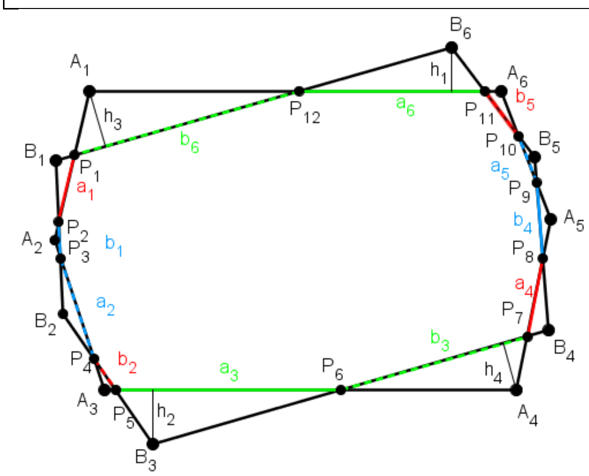


圖 39

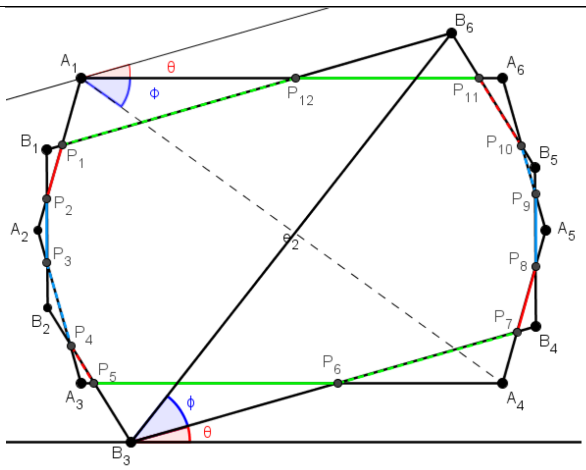


圖 40

證明：我們先討論$a_3 + a_6$與$b_3 + b_6$之間的關係

$\angle A_1 = \angle B_6 = \angle A_4 = \angle B_3$

且$\angle A_1P_{12}P_1 = \angle B_6P_{12}P_{11} = \angle B_4P_6A_4 = \angle B_3P_6P_5 = \theta$

$\therefore \Delta P_{12}A_1P_1 \sim \Delta P_{11}B_6P_{12} \sim \Delta P_6A_4P_7 \sim \Delta P_5B_3P_6$

設$\Delta P_{11}B_6P_{12}$中a_6的高為h_1，$\Delta P_5B_3P_6$中a_3的高為h_2，$\Delta P_{12}A_1P_1$中b_6的高為h_3，$\Delta P_6A_4P_7$中b_3的高為h_4

因此只要驗證$h_1 + h_2 = h_3 + h_4$ 即可得知$a_3 + a_6 = b_3 + b_6$

設$\overleftrightarrow{A_1A_6}$與$\overleftrightarrow{A_3A_4}$平行線之間的距離為$d$，$\overleftrightarrow{B_1B_6}$與$\overleftrightarrow{B_3B_4}$平行線之間的距離亦為$d$

$\angle B_6B_3B_4 = \angle A_6A_1A_4 = \emptyset$

由圖 40 可整理出以下等式：

$\overline{B_3B_6}\sin(\emptyset + \theta) = h_1 + d + h_2$， $\overline{A_1A_4}\sin(\emptyset + \theta) = h_3 + d + h_4$

又$\overline{A_1A_4} = \overline{B_3B_6}$，得$h_1 + h_2 = h_3 + h_4$

$\Delta P_{12}A_1P_1 \sim \Delta P_{11}B_6P_{12} \sim \Delta P_6A_4P_7 \sim \Delta P_5B_3P_6$

$\therefore h_1 : b_6 = h_2 : b_3 = h_3 : a_6 = h_4 : a_3$

得$b_6 + b_3 = a_6 + a_3$，$a_3 + a_6 = b_3 + b_6$

同理可證，$a_2 + a_5 = b_2 + b_5$，$a_1 + a_4 = b_1 + b_4$，本定理得證■

圖 39 中滿足$a_1 + a_4 = b_2 + b_5$ ， $a_2 + a_5 = b_1 + b_4$， $a_3 + a_6 = b_3 + b_6$

三式相加即可得$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

多邊形有兩條互相垂直對稱軸，都會有一樣的性質，如圖 41 的範例，$A_1A_2 \dots A_8$亦是有兩條對稱軸，且對稱軸相互垂直的圖形。其滿足

性質一： $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = b_1 + b_2 + \cdots + b_8$ 一次方之和相等

性質三：

$$a_1 + a_5 = b_4 + b_8，$$

$$a_2 + a_6 = b_3 + b_7，$$

$$a_3 + a_7 = b_2 + b_6，$$

$$a_4 + a_8 = b_1 + b_5。$$

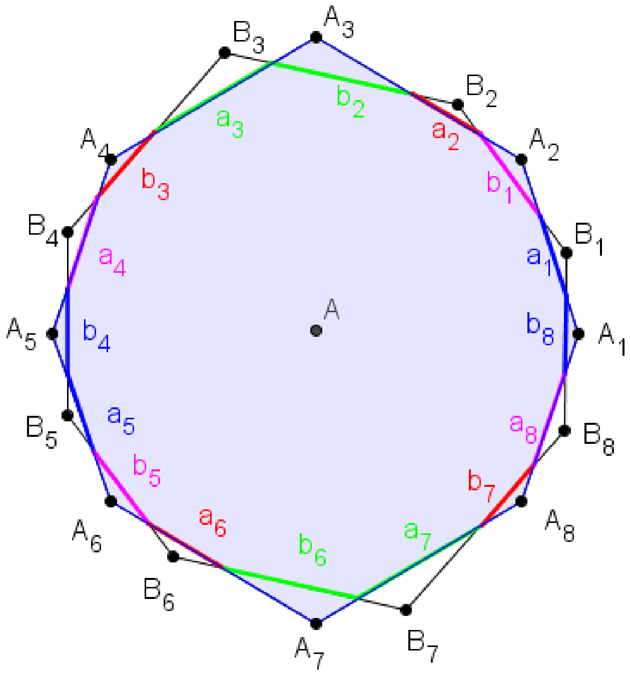


圖 41

正 *n* 多邊形，當 *n* 是偶數時具有兩個垂直的對稱軸，因此也會有上述的性質，由於正多邊形的對稱軸更多，所以會有更強與更多的性質

定理 9：如下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

性質(1) $a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = b_1 + b_3 = b_2 + b_4$

性質(2) $a_1a_3 + a_2a_4 = b_1b_3 + b_2b_4$

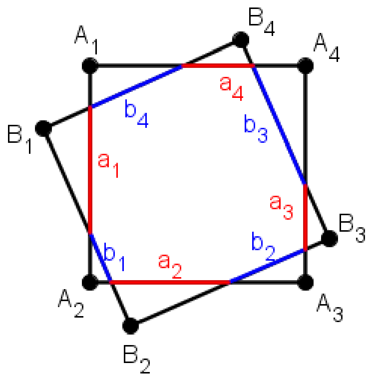


圖 42

證明：性質(1)：略，由於正方形有四條對稱軸，其中兩條互相垂直，另外兩條也互相垂直，利用定理 8 的方法即可得到$a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = b_1 + b_3 = b_2 + b_4$

性質(2) 由定理 2 ${a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_4}^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_4}^2$

又 $a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = b_1 + b_3 = b_2 + b_4$

$(a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_4)^2 = (b_1 + b_3)^2 + (b_2 + b_4)^2$

故$a_1a_3 + a_2a_4 = b_1b_3 + b_2b_4$ 得證■

定理 9 的性質套用在n是偶數時的正n邊形都會成立。其實本性質是當初想證明$a_1{}^3 + a_2{}^3 + \cdots + a_n{}^3 = b_1{}^3 + b_2{}^3 + \cdots + b_n{}^3 (3 \leq n)$ 時附帶的證明結果。利用定理 9 的性質(1) ，可以順利推出n是偶數時

$$a_1{}^3 + a_2{}^3 + \cdots + a_n{}^3 = b_1{}^3 + b_2{}^3 + \cdots + b_n{}^3$$

但因其方法無法繼續類推 4 次方和，5 次方和⋯。所以後來才改用定理 7 的方法，由根與係數的關係一口氣證完。而證明的過程中$a_1{}^3 + a_2{}^3 + \cdots + a_n{}^3 = b_1{}^3 + b_2{}^3 + \cdots + b_n{}^3$我們還發現了下面有趣的性質。

定理 10：如下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

(1) 若 T 為$\overline{P_2P_6}$、$\overline{P_4P_8}$的交點，則

$$a(TP_8P_1) + a(TP_2P_3) + a(TP_4P_5) + a(TP_6P_7)$$
$$= a(TP_2P_1) + a(TP_4P_3) + a(TP_6P_5) + a(TP_8P_7)$$

(2) 若 K 為$\overline{P_3P_7}$、$\overline{P_1P_5}$的交點，則

$$a(KP_8P_1) + a(KP_2P_3) + a(KP_4P_5) + a(KP_6P_7)$$
$$= a(KP_2P_1) + a(KP_4P_3) + a(KP_6P_5) + a(KP_8P_7)$$

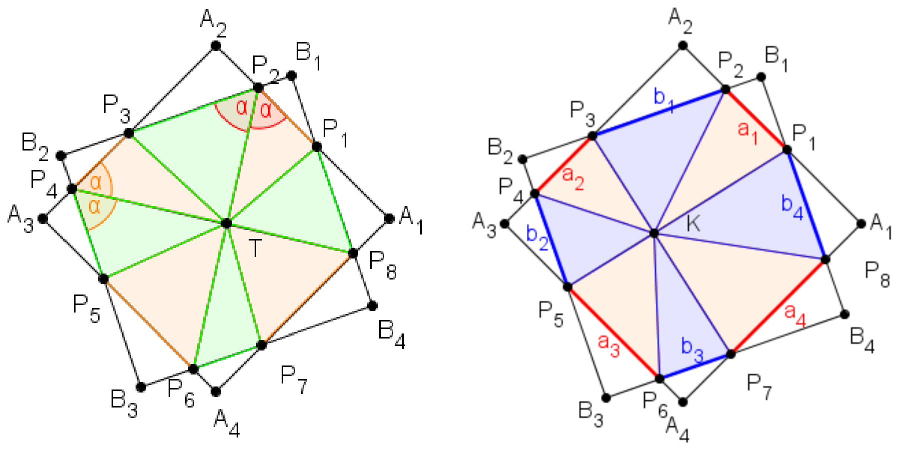


圖 43

證明： (1)首先先證明$\overline{P_2P_6}$是$\angle P_1P_2P_3$的角平分線

P_6到$\overline{P_1P_2}$的垂直距離與正方形$A_1A_2A_3A_4$的邊長相等

P_6到$\overline{P_2P_3}$的垂直距離與正方形$B_1B_2B_3B_4$的邊長相等

因此P_6在$\angle P_1P_2P_3$的角平分線上，同理$\overline{P_4P_8}$是$\angle P_3P_4P_5$的角平分線

且$\angle P_3P_4T = \angle P_5P_4T = \angle P_7P_8T = \angle P_1P_8T = \angle P_1P_2T = \angle P_3P_2T = \angle P_5P_6T = \angle P_7P_6T$

由餘弦定理

$$\overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_2T}^2 - 2\overline{P_2P_3} \cdot \overline{P_2T}\cos\alpha = \overline{P_3T}^2 = \overline{P_3P_4}^2 + \overline{P_4T}^2 - 2\overline{P_3P_4} \cdot \overline{P_4T}\cos\alpha \ldots ①$$

$$\overline{P_4P_5}^2 + \overline{P_4T}^2 - 2\overline{P_4P_5} \cdot \overline{P_4T}\cos\alpha = \overline{P_5T}^2 = \overline{P_5P_6}^2 + \overline{P_6T}^2 - 2\overline{P_5P_6} \cdot \overline{P_6T}\cos\alpha \ldots ②$$

$$\overline{P_6P_7}^2 + \overline{P_6T}^2 - 2\overline{P_6P_7} \cdot \overline{P_6T}\cos\alpha = \overline{P_7T}^2 = \overline{P_7P_8}^2 + \overline{P_8T}^2 - 2\overline{P_7P_8} \cdot \overline{P_8T}\cos\alpha \ldots ③$$

$$\overline{P_1P_8}^2 + \overline{P_8T}^2 - 2\overline{P_1P_8} \cdot \overline{P_8T}\cos\alpha = \overline{P_1T}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2T}^2 - 2\overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_2T}\cos\alpha \ldots ④$$

由定理 2 $\overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_4P_5}^2 + \overline{P_6P_7}^2 + \overline{P_1P_8}^2 = \overline{P_3P_4}^2 + \overline{P_5P_6}^2 + \overline{P_7P_8}^2 + \overline{P_1P_2}^2 \ldots ⑤$

將①②③④式相加再減去⑤，得到

$$\overline{P_2P_3} \cdot \overline{P_2T}\cos\alpha + \overline{P_4P_5} \cdot \overline{P_4T}\cos\alpha + \overline{P_6P_7} \cdot \overline{P_6T}\cos\alpha + \overline{P_1P_8} \cdot \overline{P_8T}\cos\alpha$$
$$= \overline{P_3P_4} \cdot \overline{P_4T}\cos\alpha + \overline{P_5P_6} \cdot \overline{P_6T}\cos\alpha + \overline{P_7P_8} \cdot \overline{P_8T}\cos\alpha + \overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_2T}\cos\alpha$$

將上式乘上$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$即可得到綠色三角形面積和=橘色三角形面積和 得證■

定理 10 的性質在n是偶數時的正n邊形都會成立。

(二) 等角多邊形

在長方形的情況如圖 44，滿足 $a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + b_4{}^2$

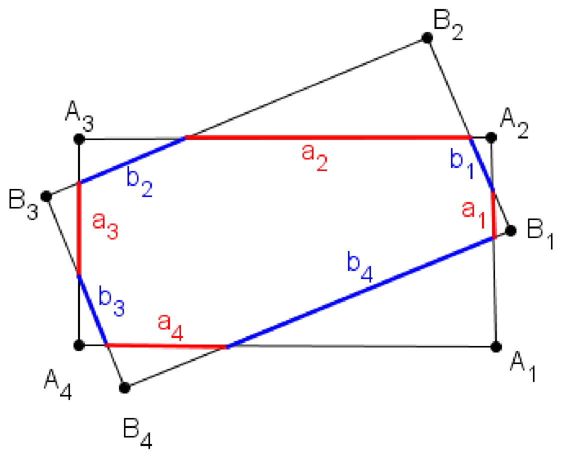


圖 44

在定理 3 中，證明平方和的性質主要用了凸出去的每個小三角形皆相似。$B_1B_2 \ldots B_n$是$A_1A_2 \ldots A_n$旋轉θ後再平移，又因為每個三角形皆以對頂角與相鄰三角形接壤。所以所有凸出去的每個小三角形必有一個角為θ，如果$\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots = \angle A_n = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \angle B_n$，可推得凸出去的每個小三角形皆相似。

定理 11：如下圖五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$每個角都一樣大，$B_1B_2B_3B_4B_5$和$A_1A_2A_3A_4A_5$全等。則

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 + a_5{}^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + b_4{}^2 + b_5{}^2$$

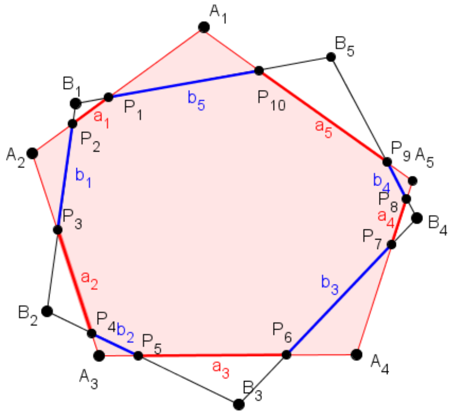


圖 45

證明：由於$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 = \angle A_5 = \angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3 = \angle B_4 = \angle B_5$

可推出 $\Delta A_1P_{10}P_1 \sim \Delta B_1P_2P_1 \sim \Delta A_2P_2P_3 \sim \Delta B_2P_4P_3 \sim \ldots \sim \Delta A_5P_8P_9 \sim \Delta B_5P_9P_{10}$

同定理 3 的證明方法即可得證■

肆、研究結果

以正n邊形的中心為旋轉中心，將其旋轉θ，$0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$，並使旋轉後的正$n$邊形平移$\vec{s}$，使兩正$n$邊形重疊部分形成$2n$邊形，定此$2n$邊形的其中一邊為$a_1$，其餘邊由$a_1$的逆時鐘方向依序定為$b_1$、$a_2$、$b_2$、$a_3$、$b_3$、……、$a_{n-1}$、$b_{n-1}$、$a_n$、$b_n$。

一、為使重疊部分為$2n$邊形，其平移向量$\vec{s}$經拆解成垂直與平行 $2n$ 邊形任一邊的兩向量$\vec{u}$和$\vec{v}$後，$|\vec{u}|$不可大於未平移時，外側三角形以重疊部分$2n$邊形的一邊為底之高。

二、對於所有正n邊形，其重疊部分的$2n$邊形必符合以下性質：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i{}^k = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^k \quad ，k = 1,2,3,\ldots\ldots,n-1$$

$k = n$時成立的情況有兩種：

(一)n為奇數時，若旋轉角為$\theta = \frac{\pi}{n}$，則平移任意方向後都會使得$2n$邊形是點對稱圖形且滿足$\sum_{i=1}^{n} a_i{}^n = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^n$。

(二)旋轉角為θ，則平移方向有$2n$種方向(圖 46)，平移後$2n$邊形是線對稱圖形且滿足$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^n = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^n$。

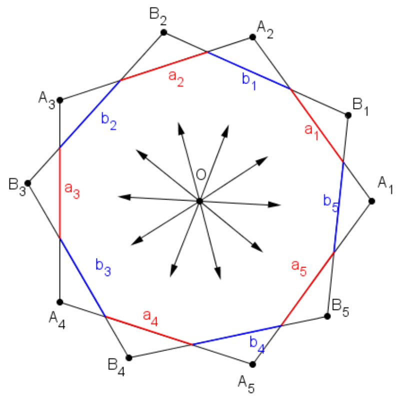


圖 46

三、若將正n邊形改成有兩條互相垂直的對稱軸之n邊形，則在其重疊部分的$2n$邊形中，相互對稱的兩組對邊和會各自相等。

四、若將正n邊形改成等角多邊形，則在其重疊部分的$2n$邊形必符合以下性質：

$$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^k = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^k \text{，} k = 1,2$$

伍、討論

一、在定理 7 中，我們的討論及證明都是圍繞在正多邊形，因此其餘的多邊形是否完全符合定理 7 的敘述，有待討論與證明。

二、在定理 10 中，我們得到了相隔面積和相等的性質，雖然當下沒有想到可以延伸的空間，但我們發現「披薩定理」與此性質似乎存在關聯性，可進行更深入的探討。

三、我們在研究中得出了以下性質：

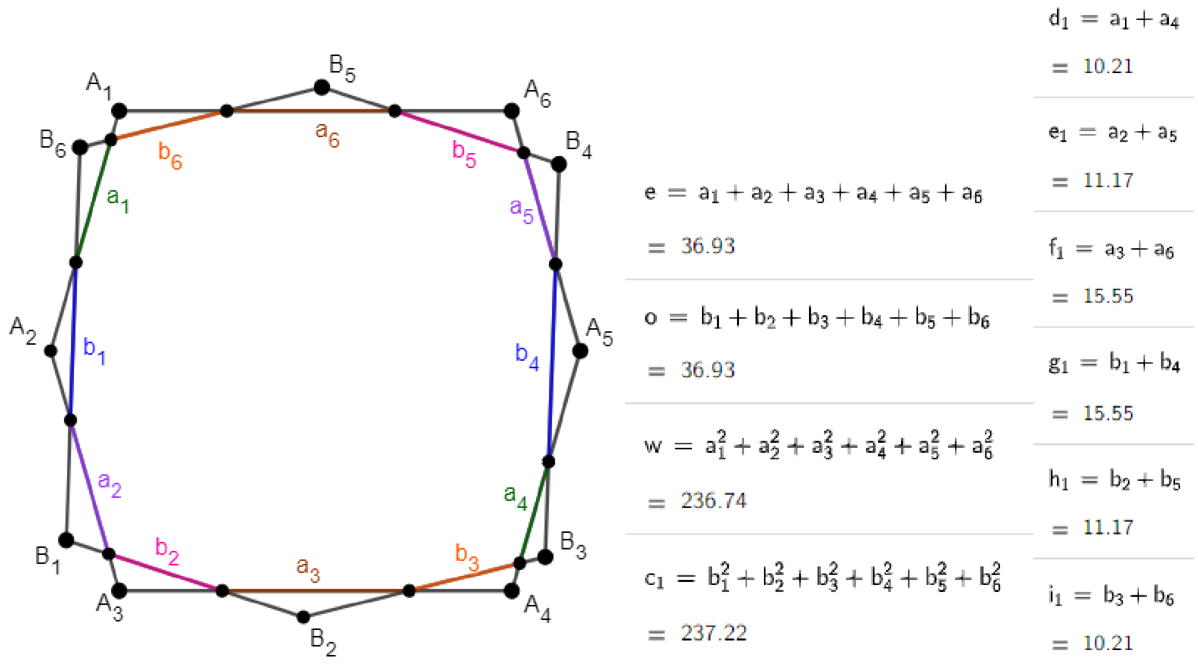
$${a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_{n-1}}^k + {a_n}^k = {b_1}^k + {b_2}^k + \cdots + {b_{n-1}}^k + {b_n}^k \text{，} 1 \le k \le n-1$$

此性質可應用於密碼學，方法如下：給定一組數字$a_1 \sim a_n$，求另一組數字$b_1 \sim b_n$（密碼），使上述性質成立。這種密碼的優點是無法被輕易破解，當n值越大，被破解的可能性就越低，在戰略上即使敵方攔截到所有資訊，甚至動用人工智慧，只要無法聯想到幾何上的性質，就無法破解。但這種密碼也有缺點，在先前的計算中得知，$a_1 \sim a_n$及

b_1~b_n通常為無理數，若以近似小數來表示a_1~a_n，經過高次方計算後所得出的b_1~b_n便可能有誤差，n值越大誤差就會越大，可能導致無法得出正確密碼。

四、在定理 8 中，我們先以「假設$\angle B_1$畫出去的兩邊與$\overline{A_1A_2}$相交」來限制θ角的範圍，但是我們利用 GeoGebra 發現，當θ角超過此限制時，此定理仍成立。

如下圖 47，當θ角超過以上限制時，相互對應之對角的兩邊會被與θ角未超過限制時相異之兩平行邊截過，由之前我們發現此性質成立的關鍵為「相互對應的三角形之間的距離要相等」，可推得：橫豎對稱的圖形無論如何旋轉，相互對應的對角之兩邊始終會被等距且相對旋轉θ角的兩平行邊截過，形成兩組間距相等的相似三角形，透過定理 8 即可得出兩組對邊和相等。



$\theta = 88°$

圖 47

陸、參考文獻資料

1.謝政佑、曹瑞彬、歐秀雯（2004 年）。多邊形與二條水平平行線所截出的上下二個圖形其周長和之探討。中華民國第四十四屆中小學科學展覽會參展作品專輯。

2.周加發。感受伽羅瓦：排列與對稱多項式(P4) 檢自URL http://chowkafat.net/Math/Galois4.pdf (May 31,2024)

3.特殊的對稱多項式牛頓恆等式 檢自URL https://zhuanlan.zhihu.com/p/141923148 (May 31,2024)

4.許志農。動手玩數學與算術（頁59-60）。

註：本作品中的所有圖片均為作者以GeoGebra軟體製作。

【評語】050401

正 n 邊形旋轉之後平移，得另一正 n 邊形。若要兩正 n 邊形的重疊部分形成 2n 邊形，作者探討平移範圍的限制，證明重疊部分 2n 邊形的兩組邊長的 $1,2,\cdots,n-1$ 次方和相等，並討論 n 次方和相等的條件。本作品的精采處在其使用的技巧：如果將邊長 k 次方硬算再去化簡，會非常龐雜，但作者們善用三角函數的特殊性質，及對稱多項式的組合結論，將計算的複雜度有效降低，結果簡潔。

然而當作者試圖將正 n 邊形推廣成線對稱之多邊形或等角多邊形時，因為原先正多邊形的對稱性被簡化太多，因此只能證出奇數邊之邊長和等於偶數邊之長和，推廣結果十分有限。建議作者仔細考慮對稱多項式可應用在本問題的最大可能樣態，回推原問題的設定，才能使用最多的對稱多項式性質。

作品簡報

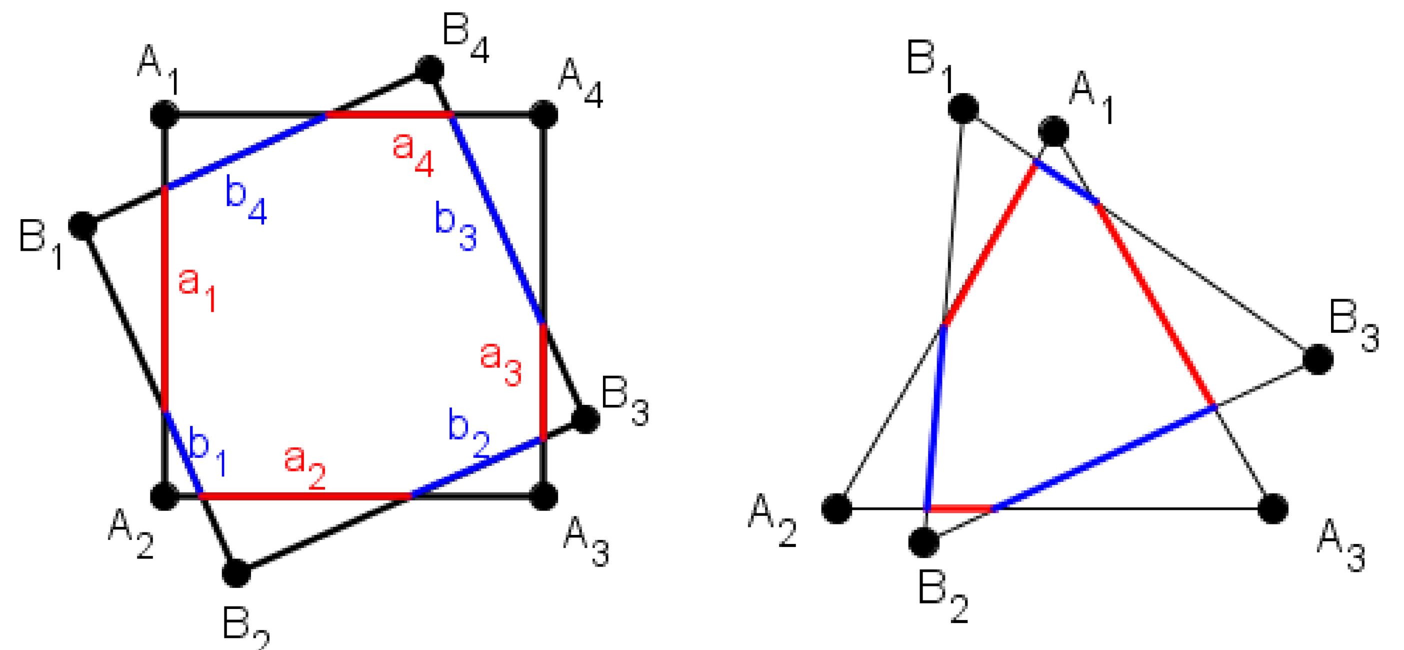
兩全等多邊形重疊部分的邊長面積探討

摘要

本研究最初將兩正方形重疊，使其面積重疊處形成一八邊形，將此八邊形的八個邊分成兩組，發現此兩組邊長有1次方和相等、2次方和相等的性質。

而後我們將正方形推廣至正n邊形，討論什麼條件之下，可以使兩正n邊形重疊處為$2n$邊形。探討其中一正n邊形對另一正n邊形平移範圍的限制。再證明重疊部分$2n$邊形的兩組邊長之$1\sim n$-1次方和相等，最後再討論兩組邊長n次方和相等的條件。

除此之外，我們將正n邊形推廣到其他多邊形。發現有兩條互相垂直對稱軸的圖形與等角多邊形，也會具有兩組邊長1次方和相等、2次方和相等的性質。



正多邊形

研究目的

一、對兩全等正n邊形相交後形成$2n$邊形之可平移最大範圍分析。

二、對兩全等正n邊形相交後形成$2n$邊形之邊長性質分析。

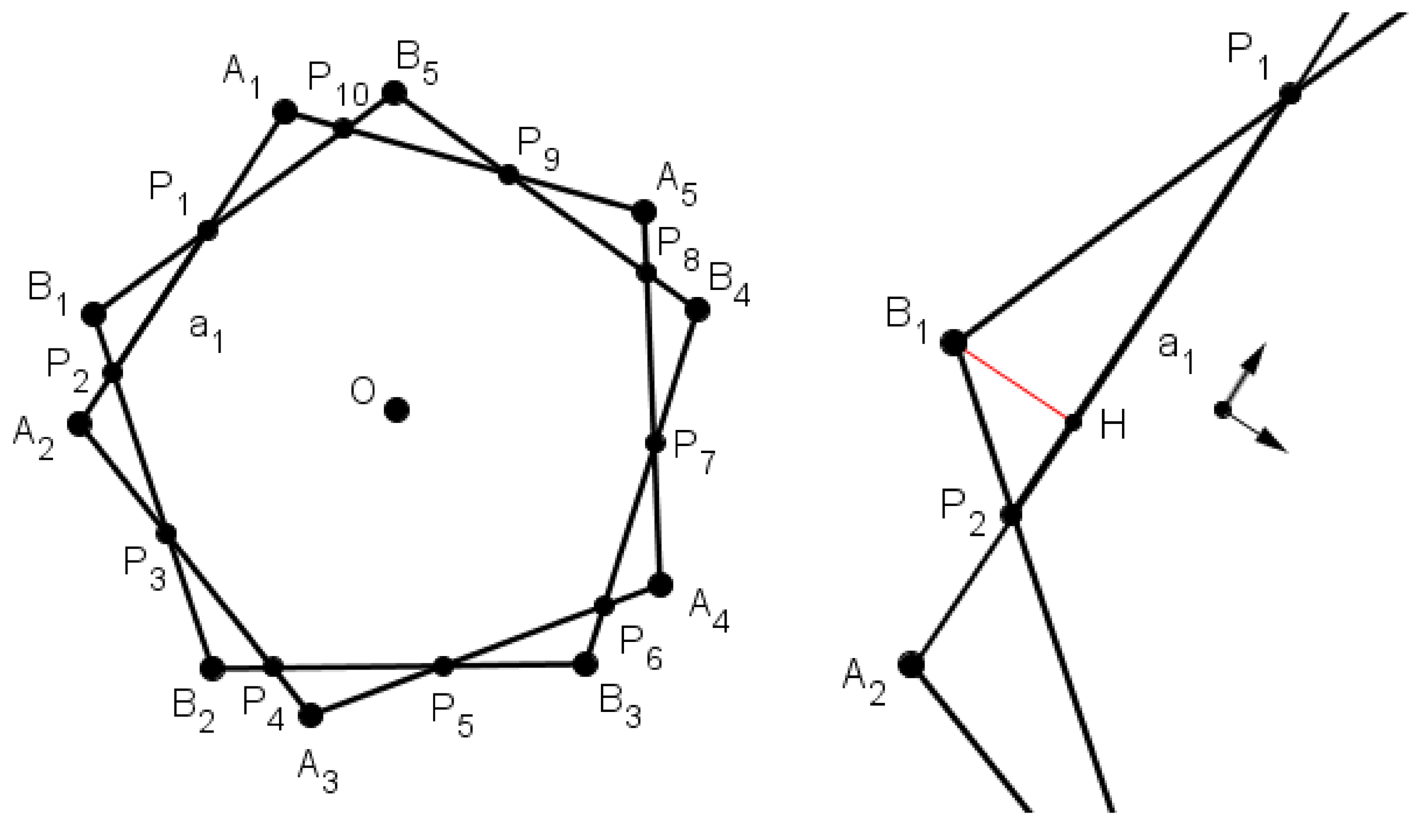
三、對兩全等特定n邊形相交後形成$2n$邊形之邊長性質分析。

研究過程及方法

一、兩全等正n邊形相交後形成$2n$邊形之可平移最大範圍之分析

先使兩正n邊形完全重合，並以其中心點為旋轉中心，旋轉正n邊形$B_1B_2\cdots B_n$（旋轉角度為θ，$0<\theta<\frac{2\pi}{n}$）並平移$\vec{s}$，為了讓兩正n邊形重疊部分形成一$2n$邊形，本段落將探討$\vec{s}$的可能範圍。

以下以正五邊形為例：



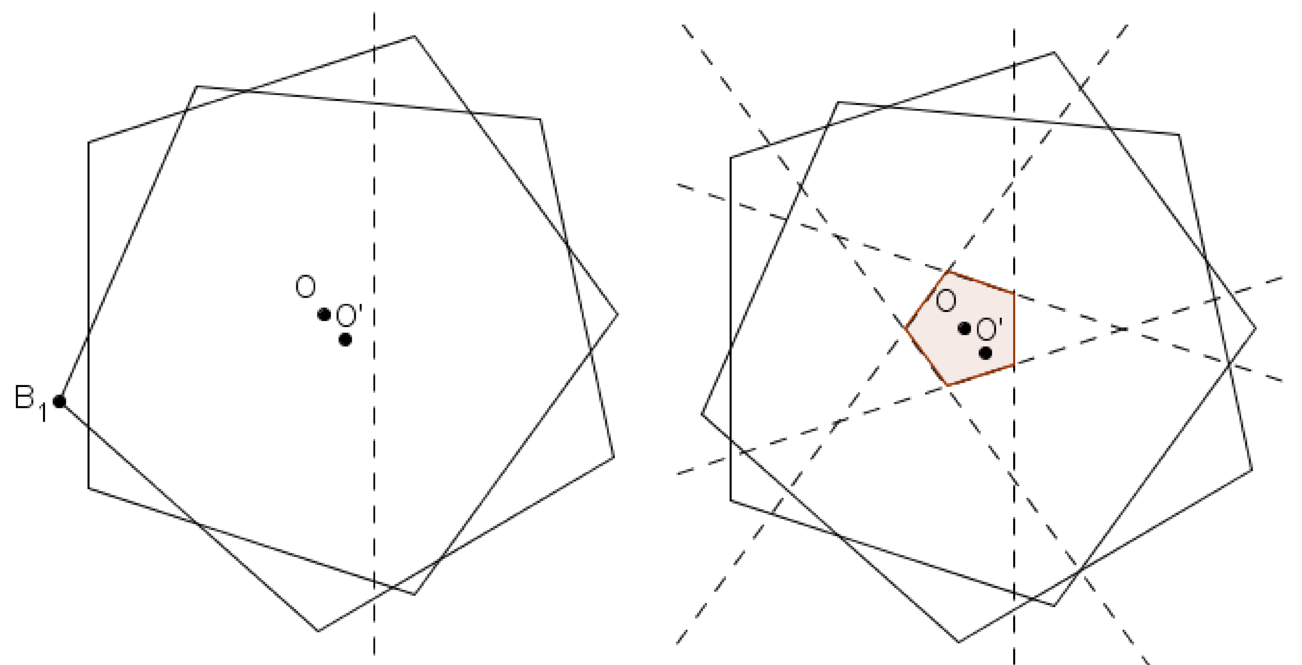
尚未平移的兩正五邊形以及其局部

要讓重疊部分形成$2n$邊形，B_1必須保持在正n邊形$A_1A_2\cdots A_n$外側，所以向量$\vec{s}$中垂直$\overline{P_1P_2}$的分量長度不可超過三角形$P_1B_1P_2$的高$\overline{B_1H}$，而$B_2\sim B_n$也有相對應的條件。由於未平移時，外側三角形是互相全等的，三角形的高也就相等，上述向量的限制值也就相等。

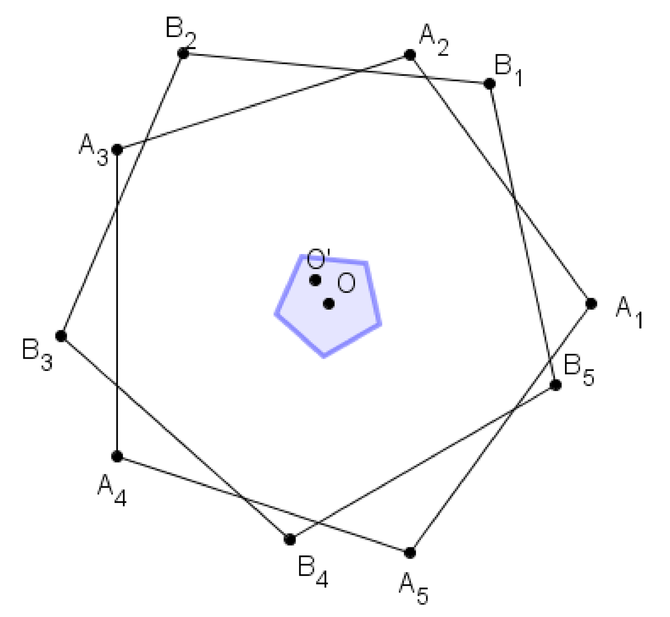
經過計算，限制值可表示為：（a為正n邊形的邊長）

$$\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\left(\theta-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

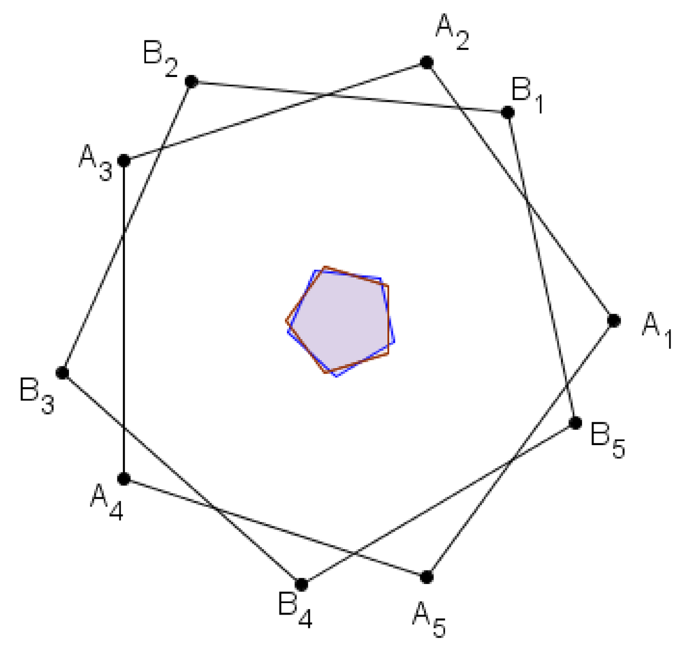
可畫出符合上述條件的平移範圍如下紅色範圍：



對於$A_1\sim A_n$各點來說，它們也需保持在正n邊形$B_1B_2\cdots B_n$外側，因此可用相同方法，畫出符合此條件的平移範圍，如下：



將兩條件的範圍重疊，便可得到能使重疊部分形成一$2n$邊形的平移範圍，結果如下：

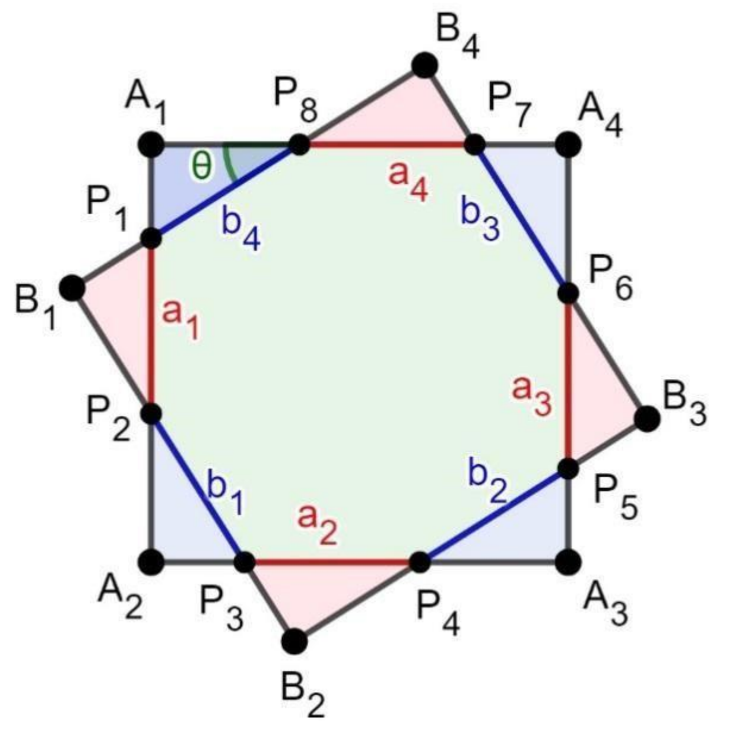


二、兩全等正n邊形相交後形成$2n$邊形之邊長性質分析

（一）邊長1、2次方之和的關係

定理1：如下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

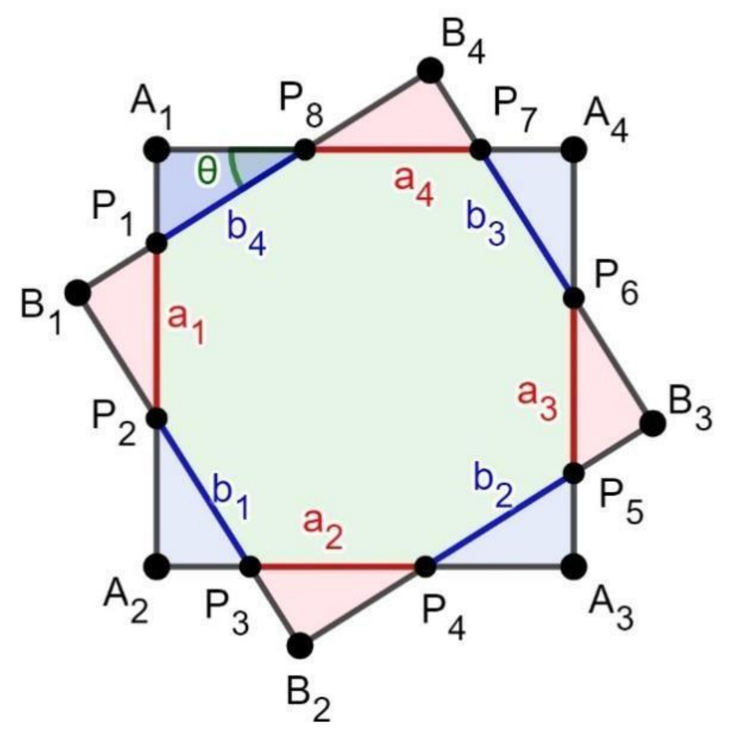
$$a_1+a_2+a_3+a_4=b_1+b_2+b_3+b_4$$



證明：由於外側的八個三角形互相相似，因此只要假設三角形內的一個角為θ，所有三角形的邊就可以用$a_1\sim a_n$以及$b_1\sim b_n$的1倍、$\cos\theta$倍、$\sin\theta$倍來表示，接著再使用兩正方形周長相等此性質列出等式並化簡，便可得證。

定理2：如下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2$$



證明：由於外側的八個三角形皆相似，因此它們的面積比＝對應邊邊長的平方比，又由圖可知，紅色三角形的面積和＝藍色三角形的面積和，即紅色三角形對應邊的平方和＝藍色三角形對應邊的平方和，得證。

接下來我們想把定理1、定理2的性質推廣到正n邊形，而因為以上兩者的證明過程主要運用外側三角形的相似性質，我們可利用類似的方法順利推廣。

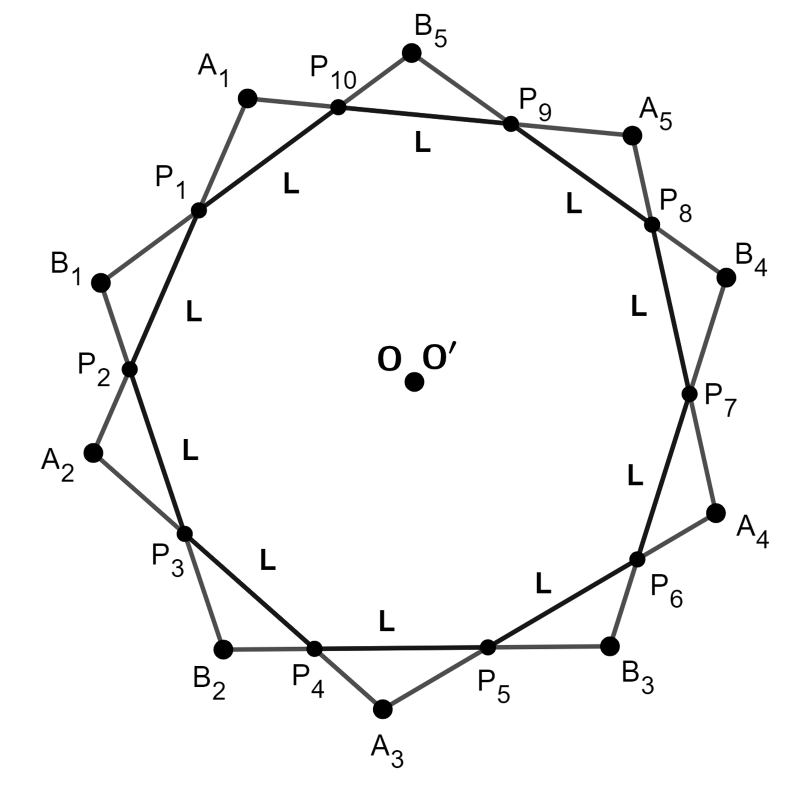
因此，可推得以下定理：

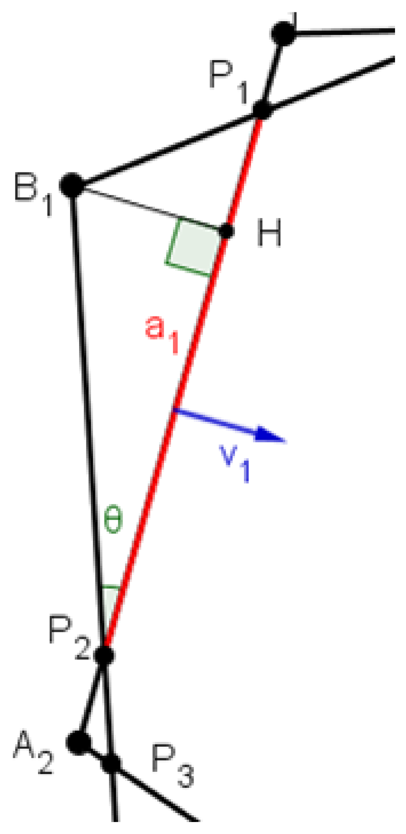
定理3：兩全等的正n邊形，若其重疊部分為$2n$邊形，此$2n$邊形邊長依序為a_1、b_1、a_2、⋯、a_n、b_n，則

1. $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$

(二)邊長n-1次方之和的關係

由於我們在GeoGebra上又觀察到四邊形的3次方和相等、4次方和不一定相等，而五邊形則是3、4次方和相等、5次方和不一定相等，因此我們猜測n邊形的1次方和到n-1次方和都會相等。之前證明1次方和與2次方和時我們分別利用了周長及面積，所以很自然地3次方和我們想到可以利用體積來證明，不過體積是難以在平面圖形中聯想的，且更高次方時更是困難，因此接下來的證明將改成以代數為主的方式，先求出各邊的通式，尋找規律，再進一步證明這個猜想





證明： 觀察$\Delta B_1P_1P_2$，$\overline{P_1P_2} = L$，$\overline{P_1B_1} = L\frac{\sin\theta}{\sin(\frac{3\pi}{5})}$，

則$\overline{B_1H} = \overline{P_1B_1}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right) = L\frac{\sin\theta\,\sin(\frac{2\pi}{5}-\theta)}{\sin(\frac{3\pi}{5})}$

故$\overline{B_1H} : \overline{P_1P_2} = 1 : \frac{\sin(\frac{3\pi}{5})}{\sin\theta\,\sin(\frac{2\pi}{5}-\theta)}$

令$\overrightarrow{v_1}$垂直a_1且指向五邊形內部。$\vec{s}$為平移向量，$\vec{s}$可拆解成兩個向量相加，一個與$\overrightarrow{v_1}$平行，一個與$\overrightarrow{v_1}$垂直。由於a_1長度不受與$\overrightarrow{v_1}$垂直的向量影響，所以只須考慮$\vec{s}$在$\overrightarrow{v_1}$上的正射影。令$\overrightarrow{v_1}$轉了有向角α後與$\vec{s}$平行且同向，令$|\vec{s}| = s$。可知平移$\vec{s}$後，B_1向$\overline{P_1P_2}$靠近了$s\cos\alpha$，可推出

$a_1 = L - \frac{s\cos\alpha\,\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\theta\,\sin(\frac{2\pi}{5}-\theta)}$，不妨假設$k = \frac{-\sin\frac{3\pi}{5}}{\sin\theta\,\sin(\frac{2\pi}{5}-\theta)}$，則：

$a_1 = L + s\cdot cos(\alpha)k$， $a_2 = L + s\cdot cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{5}\right)k$，

$a_3 = L + s\cdot cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{5}\right)k$，$a_4 = L + s\cdot cos\left(\alpha - \frac{6\pi}{5}\right)k$，

$a_5 = L + s\cdot cos\left(\alpha - \frac{8\pi}{5}\right)k$

綜上所述，當$n \ge 3$，$n \in \mathbb{N}$時，中間圍成的2n邊形各邊長可表達成

$a_i = L + s\cdot cos\left(\alpha - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$，$i \in \{1,2,\dots,n\}$

$b_i = L + s\cdot cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$，$i \in \{1,2,\dots,n\}$

其中L，k，α，s，θ為常數。

因為證明$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^r$等價於證明一連串的餘弦函數值的和相等。由於要證明各次方的和，我們想利用多項式根與係數的關係來輔助證明

引理 4：給定正整數n，$n \ge 2$，$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$，$\theta_n = \frac{2\pi}{n}$，則

$$\begin{cases} cos(\alpha+\theta_n)+\dots+cos(\alpha+n\theta_n) = cos(\beta+\theta_n)+\dots+cos(\beta+n\theta_n) \\ cos^2(\alpha+\theta_n)+\dots+cos^2(\alpha+n\theta_n) = cos^2(\beta+\theta_n)+\dots+cos^2(\beta+n\theta_n) \\ \vdots \\ cos^{n-1}(\alpha+\theta_n)+\dots+cos^{n-1}(\alpha+n\theta_n) = cos^{n-1}(\beta+\theta_n)+\dots+cos^{n-1}(\beta+n\theta_n) \end{cases}$$

證明：建構兩個n次多項式函數：

$g(x) = (x - cos(\alpha+\theta_n))(x - cos(\alpha+2\theta_n))\dots(x - cos(\alpha+n\theta_n))$

$f(x) = (x - cos(\beta+\theta_n))(x - cos(\beta+2\theta_n))\dots(x - cos(\beta+n\theta_n))$

欲證明這兩個多項式展開之後按降冪排列，除常數項外的其餘各項係數必相同。取$\gamma = \frac{2\pi}{3n}$，由引理5知：

$cos(\gamma+\theta_n)$,$cos(\gamma+2\theta_n)$,...,$cos(\gamma+n\theta_n)$均相異

將$cos(\gamma+\theta_n)$, $cos(\gamma+2\theta_n)$,..., $cos(\gamma+n\theta_n)$分別代入$g(x)$及$f(x)$，並用和差化積公式化簡，經比較後發現：

$g(cos(\gamma+\theta_n)) = g(cos(\gamma+2\theta_n)) = \dots = g(cos(\gamma+n\theta_n))$---①

$f(cos(\gamma+\theta_n)) = f(cos(\gamma+2\theta_n)) = \dots = f(cos(\gamma+n\theta_n))$---②

令$h(x) = g(x) - f(x)$，$\deg(h(x)) \le n-1$，或$h(x)$為0函數

由①、②得 $h(cos(\gamma+\theta_n)) = h(cos(\gamma+2\theta_n)) = \dots = h(cos(\gamma+n\theta_n))$

由於$cos(\gamma+\theta_n)$,$cos(\gamma+2\theta_n)$,...,$cos(\gamma+n\theta_n)$為n個相異實數，

可知$h(x)$為常數函數，因此$f(x)$，$g(x)$展開之後只有常數項可能不同

再由多項式根與係數的關係，與對稱多項式基本定理的性質，本定理得證∎

引理 5：給定正整數n，$n \ge 2$，若$\theta_n = \frac{2\pi}{n}$，$\gamma = \frac{\theta_n}{3} = \frac{2\pi}{3n}$，則

$cos(\gamma+\theta_n)$,$cos(\gamma+2\theta_n)$,...,$cos(\gamma+n\theta_n)$均相異

定理 6：已知：n邊形$A_1A_2\dots A_n$和n邊形$B_1B_2\dots B_n$為全等的正n邊形，兩多邊形重疊部分為2n邊形，各邊長依序為a_1,b_1,a_2,b_2,...,a_n,b_n，則：

$$\begin{cases} a_1+a_2+\dots+a_n = b_1+b_2+\dots+b_n \\ {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2 = {b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2 \\ \vdots \\ {a_1}^{n-1}+{a_2}^{n-1}+\cdots+{a_n}^{n-1} = {b_1}^{n-1}+{b_2}^{n-1}+\cdots+{b_n}^{n-1} \end{cases}$$

證明：由前面討論知，存在常數L，k，α，s，θ

$a_i = L + s\cdot cos\left(\alpha - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$，$i \in \{1,2,\dots,n\}$

$b_i = L + s\cdot cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$，$i \in \{1,2,\dots,n\}$

給定$1 \le r \le n-1$檢驗$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^r$

$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r =$

$\sum_{i=1}^{n}\left(C_0^rL^r + C_1^rL^{r-1}\left(s\cos\left(\alpha - \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^1 + \dots + C_r^r\left(s\cos\left(\alpha - \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^r\right)$，

$\sum_{i=1}^{n} {b_i}^r =$

$\sum_{i=1}^{n}\left(C_0^rL^r + C_1^rL^{r-1}\left(s\cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^1 + \dots + C_r^r\left(s\cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)k\right)^r\right)$，

由引理6知：

$\sum_{i=1}^{n} cos^t\left(\alpha - \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} cos^t\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{n}\right)$，$\forall t \in \mathbb{N}$，$1 \le t \le r$

故$\sum_{i=1}^{n} {a_i}^r = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^r$，$1 \le r \le n-1$ 得證∎

接著我們討論何時會讓${a_1}^n + {a_2}^n + \cdots + {a_n}^n = {b_1}^n + {b_2}^n + \cdots + {b_n}^n$也成立

這個情況就會是下面的方程組每個式子全都成立，

$$\begin{cases} a_1+a_2+\dots+a_n = b_1+b_2+\dots+b_n \\ {a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2 = {b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2 \\ \vdots \\ {a_1}^{n}+{a_2}^{n}+\cdots+{a_n}^{n} = {b_1}^{n}+{b_2}^{n}+\cdots+{b_n}^{n} \end{cases}$$

考慮多項式

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$
$$g(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$$

由上面的n條等式成立，利用根與係數的關係可以推出$f(x)$與$g(x)$展開後的各項係數都相同，所以這兩個多項式相等。因此$f(x)$與$g(x)$的因式分解會相同，也就是根$a_1,a_2,\dots,a_n$與$b_1,b_2,\dots,b_n$會相同，重根次數也會相同，只差在順序的差異。

由於使用幾何方法無法保證是否找完全部的情況，以下使用代數方法來找尋所有可能。假設某兩邊等長$a_1 = b_i$那即是：

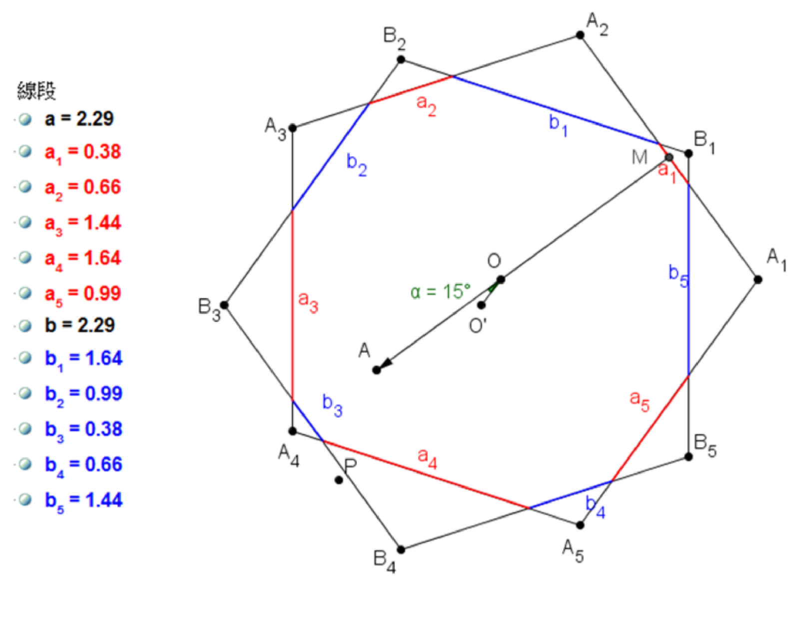
$L + s\cdot cos(\alpha)k = L + s\cdot cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)k$

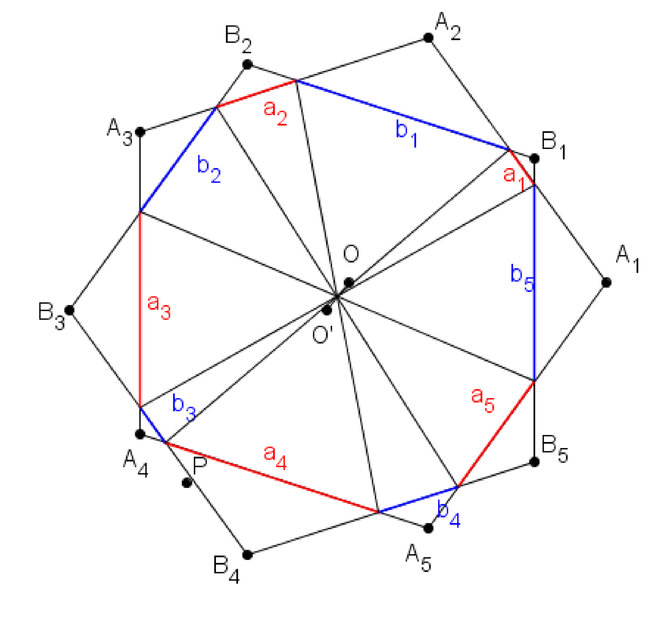
$\Rightarrow cos(\alpha) = cos\left(\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}\right)$

(1)case1：α與$\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}$為同界角

由於旋轉角的限制$0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$，當n是偶數，滿足條件的$\theta$無解，

當n是奇數，$\theta = \frac{\pi}{n}$，α為任意數





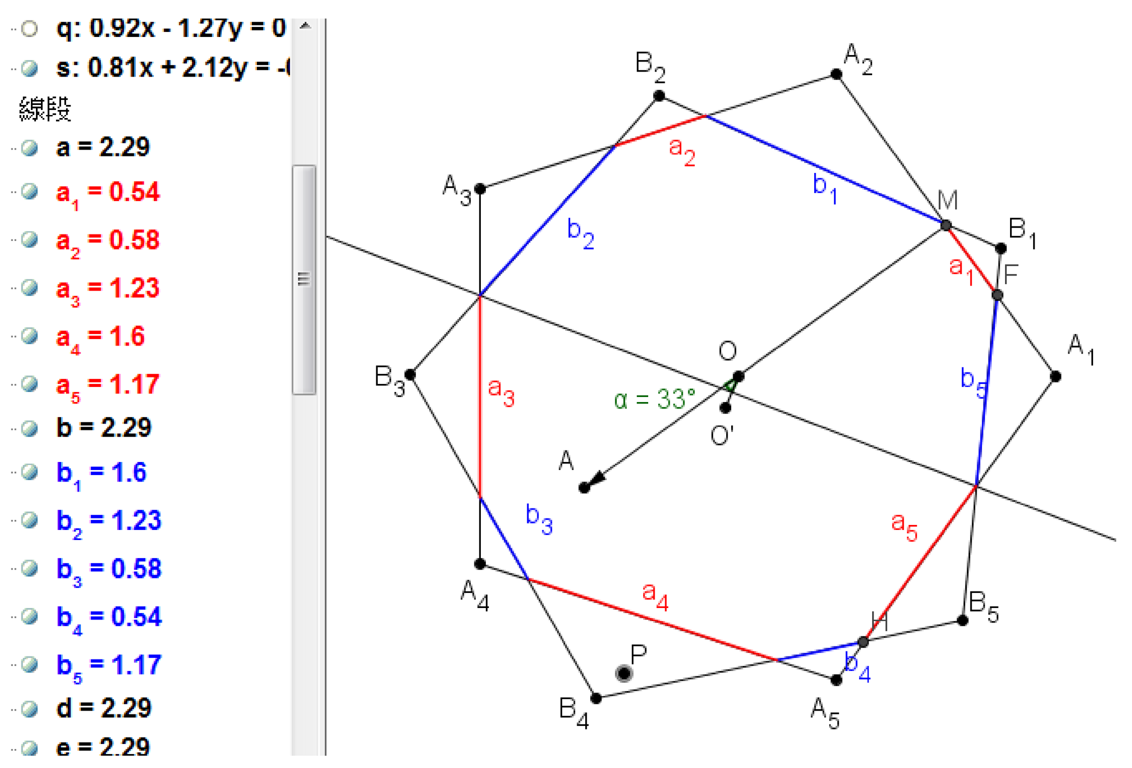
(2)case2：$-\alpha$與$\alpha - \theta + \pi - \frac{(i-1)2\pi}{n}$為同界角

簡單來說就是α必須是$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$加$\frac{\pi}{n}$的整數倍。

將$\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$加$\frac{\pi}{n}$的整數倍的那些角全都列出來，

在$0 \le \alpha < 2\pi$之間，α會有2n個解。

這裡的2n個解恰好即是與未平移時的圖形的n條對稱軸垂直的總共2n種方向

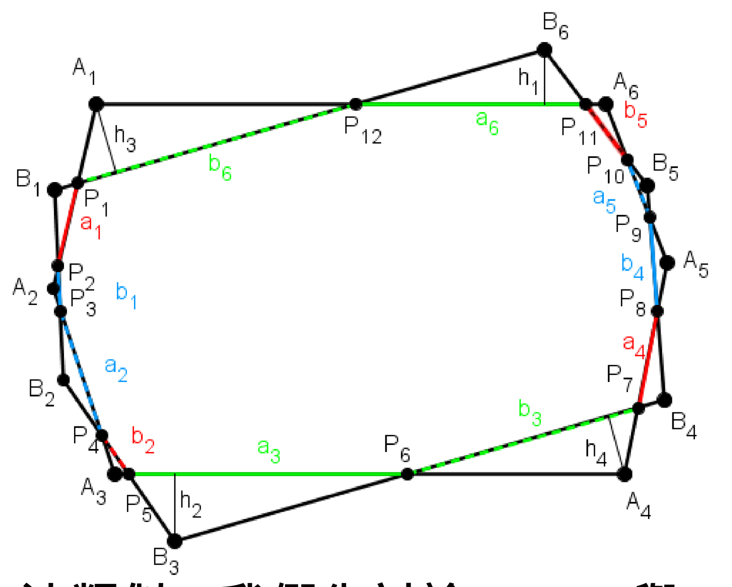


三、兩全等特定n邊形相交形成2n邊形之邊長分析

我們欲將正n邊形延伸至其他n邊形，檢測其重疊部分的2n邊形是否具有類似的性質。

(一) 有兩條垂直對稱軸的圖形

下圖六邊形$A_1A_2\dots A_6$有兩條相互垂直的對稱軸，而六邊形$B_1B_2\dots B_6$和$A_1A_2\dots A_6$全等，兩多邊形重疊部分為12邊形$P_1P_2\dots P_{12}$，各邊長依序為$a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_6,b_6$，各邊長滿足$a_1+a_4=b_2+b_5$，$a_2+a_5=b_1+b_4$，$a_3+a_6=b_3+b_6$



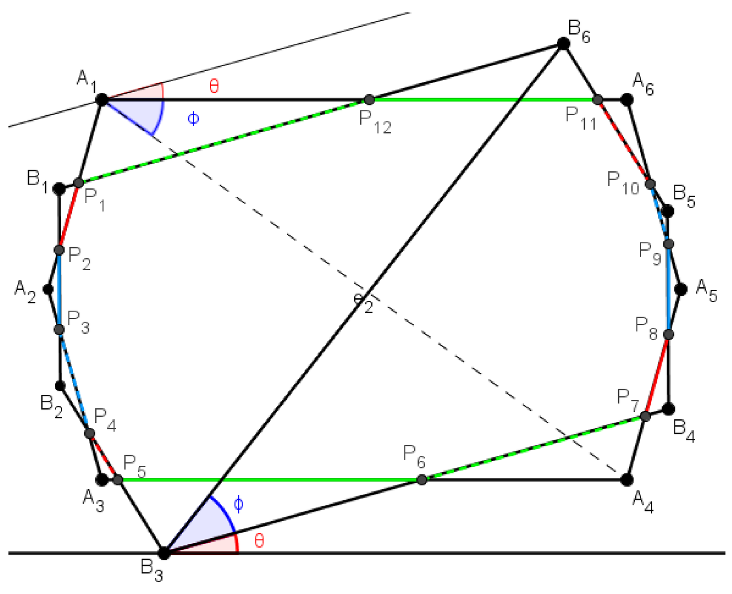
證明：

由於證明方法類似，我們先討論a_3+a_6與b_3+b_6的關係

$\Delta P_{12}A_1P_1\sim\Delta P_{11}B_6P_{12}\sim\Delta P_6A_4P_7\sim\Delta P_5B_3P_6$

設$\Delta P_{11}B_6P_{12}$中a_6的高為h_1，$\Delta P_5B_3P_6$中a_3的高為h_2，$\Delta P_{12}A_1P_1$中b_6的高為h_3，$\Delta P_6A_4P_7$中b_3的高為h_4

因此只要驗證$h_1+h_2=h_3+h_4$即可得知$a_3+a_6=b_3+b_6$



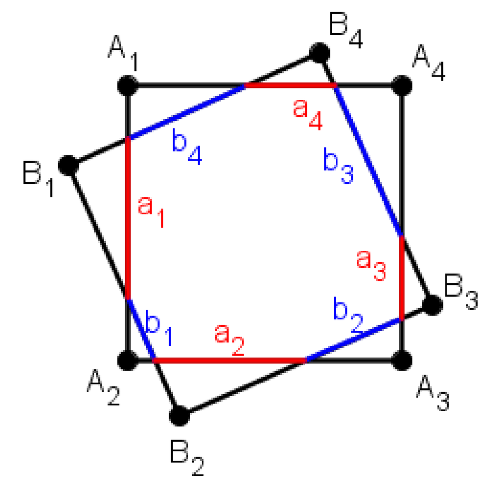
接著利用對角線等長以及對應平行邊距離相等即可得出

$$h_1+h_2 = h_3+h_4 \qquad \therefore a_3+a_6=b_3+b_6$$

同理可證$a_2+a_5=b_2+b_5$，$a_1+a_4=b_1+b_4$，本定理得證∎

多邊形有兩條互相垂直對稱軸，都會有一樣的性質。

正偶數多邊形亦具有兩條互相垂直的對稱軸，因此也會有上述的性質，由於正多邊形的對稱軸更多，所以會有更強與更多的性質，以下以正方形為例:



四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，則

性質1. $a_1+a_3=a_2+a_4=b_1+b_3=b_2+b_4$

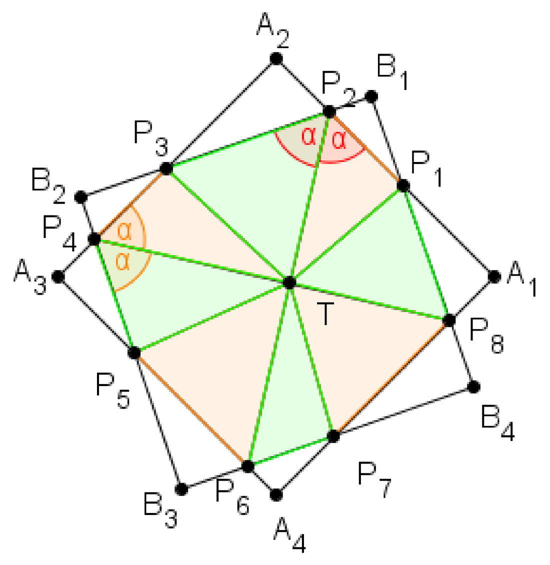
性質2. $a_1a_3+a_2a_4=b_1b_3+b_2b_4$

這些性質套用在n是偶數時的正n邊形都會成立。

以上性質是當初為了證明三次方和相等時附帶的證明結果，而證明性質2過程中我們還發現了以下性質:

下圖四邊形$A_1A_2A_3A_4$和四邊形$B_1B_2B_3B_4$為邊長相同的正方形，若T為$\overline{P_2P_6}$、$\overline{P_4P_8}$的交點，則：

橘色三角形面積總和=綠色三角形面積總和

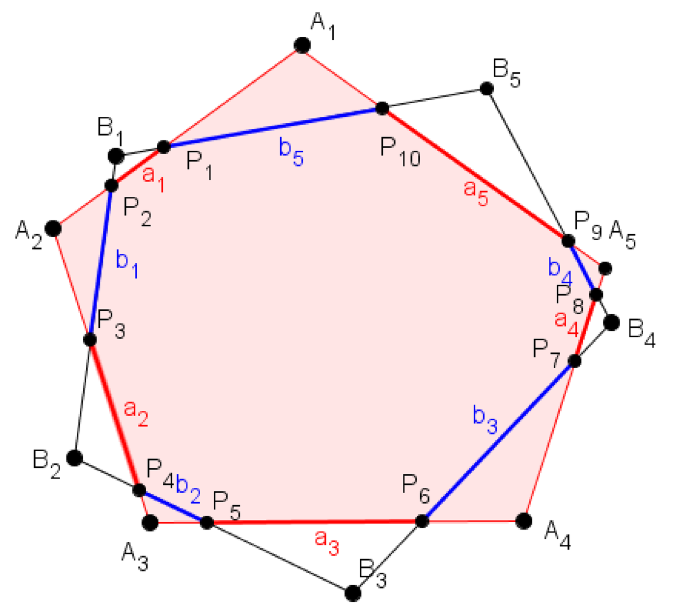


(二) 等角多邊形

如下圖五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$每個角皆等大，$B_1B_2B_3B_4B_5$和$A_1A_2A_3A_4A_5$全等。則：

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$$

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2$$



證明：

由於$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\angle A_4=\angle A_5=\angle B_1=\angle B_2=\angle B_3=\angle B_4=\angle B_5$

可推出$\Delta A_1P_{10}P_1\sim\Delta B_1P_2P_1\sim\Delta A_2P_2P_3\sim\Delta B_2P_4P_3\sim\dots\sim\Delta A_5P_8P_9\sim\Delta B_5P_9P_{10}$

同正n邊形1、2次方和的證明方法即可得證∎

研究成果

以正n邊形的中心為旋轉中心，將其旋轉θ，$0<\theta<\frac{2\pi}{n}$，並使旋轉後的正n邊形平移$\vec{s}$，使兩正n邊形重疊部分形成$2n$邊形，定此$2n$邊形的其中一邊為$\boldsymbol{a_1}$，其餘邊由a_1的逆時鐘方向依序定為b_1、a_2、b_2、a_3、b_3、……、a_{n-1}、b_{n-1}、a_n、b_n。

一、為使重疊部分為$2n$邊形，其平移向量$\vec{s}$經拆解成垂直與平行$2n$邊形任一邊的兩向量$\vec{u}$和$\vec{v}$後，$|\vec{u}|$不可大於未平移時，外側三角形以重疊部分$2n$邊形的一邊為底之高。

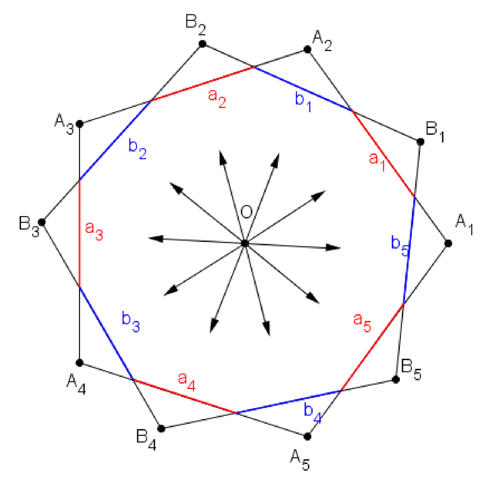
二、對於所有正 n 邊形，其重疊部分的 $2n$ 邊形必符合以下性質：

$$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^k=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^k \text{，} k=1,2,3,\dots\dots,n-1$$

$k=n$時成立的情況有兩種：

(一) n 為奇數時，若旋轉角為$\theta=\pi/n$，則平移任意方向後都會使得$2n$邊形是點對稱圖形且滿足$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^n=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^n$。

(二)旋轉角為θ，則平移方向有$2n$ 種方向(如下圖)，平移後$2n$ 邊形是線對稱圖形且滿足$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^n=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^n$。



三、若將正n邊形改成有兩條互相垂直的對稱軸之n邊形，則在其重疊部分的$2n$邊形中，相互對稱的兩組對邊和會各自相等。

四、若將正n邊形改成等角多邊形，則在其重疊部分的$2n$邊形必符合以下性質：

$$\sum_{i=1}^{n}{a_i}^k=\sum_{i=1}^{n}{b_i}^k \text{，} k=1,2$$

討論

一、定理6中，我們的討論及證明都是圍繞在正多邊形，因此其餘的多邊形是否完全符合定理6的敘述，有待討論證明。

二、「橘色三角形面積總和=綠色三角形面積總和」的證明中，雖然當下沒有想到可以延伸的空間，但我們發現「披薩定理」與此性質似乎存在關聯性。

三、我們在研究中得出正n邊形重疊部分具有以下性質：

${a_1}^k+{a_2}^k+\dots+{a_{n-1}}^k+{a_n}^k={b_1}^k+{b_2}^k+\dots+{b_{n-1}}^k+{b_n}^k$，$1\le k\le n-1$

此性質可應用於密碼學，這種密碼的優點是無法被輕易破解，n值越大，被破解的可能性就越低，而敵方只要無法將此代數等式賦予幾何意義，就無法在短時間內破解密碼。而實用上，${a_1}^k+{a_2}^k+\dots+{a_{n-1}}^k+{a_n}^k={b_1}^k+{b_2}^k+\dots+{b_{n-1}}^k+{b_n}^k$可能不成立， 此時容許$|({a_1}^k+{a_2}^k+\dots+{a_{n-1}}^k+{a_n}^k)-({b_1}^k+{b_2}^k+\dots+{b_{n-1}}^k+{b_n}^k)|<\varepsilon$即解碼（ε>0）。

四、在有兩條垂直對稱軸的圖形探討中，我們的證明基於以「假設$\angle B_1$畫出去的兩邊與$\overline{A_1A_2}$相交」來限制θ角的範圍，但是我們利用GeoGebra發現，當θ角超過此限制時，此定理仍成立。

參考資料及文獻

1.謝政佑、曹瑞彬、歐秀雯（2004 年）。多邊形與二條水平平行線所截出的上下二個圖形其周長和之探討。中華民國第四十四屆中小學科學展覽會參展作品專輯。

2.周加發。感受伽羅瓦：排列與對稱多項式(P4)

3.特殊的對稱多項式牛頓恆等式

4.許志農。動手玩數學與算術（頁 59-60）。