

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

團隊合作獎

030422

四角網格利樂棒的探討

學校名稱：桃園市立龍潭國民中學

作者： 國二 孫少甫 國二 葉愛理	指導老師： 章寧靜 張君怡
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：利樂棒、矩形網格、阿茲特克鑽石

摘要

此研究主要探討將利樂棒填入不同之矩形及阿茲特克鑽石網格圖形，研究重點放在以二棒、三棒、四棒的單一或任取兩種元件分別探討不同比例的組合，可成功覆蓋圖形格線的情形，研究發現，不同元件可透過擺放位置及棒數計算，利用著色法、窮舉法、遞迴式及數學歸納法等不同方法，分析成功覆蓋及無解原因，加以歸納說明，並將其可擴展之矩形邊長及鑽石階數以一般式呈現。

壹、前言

一、研究動機

在準備獨立研究課程報告時，於書店找到 crazy curves 這款益智玩具，最初為國內陳文錫先生在 1972 年所創作，並命名為「智巧板」，且投稿於《科學月刊》^{[1][2]}。其規則為使用十種不同的元件填滿一個 4×4 的四角網格，每一種元件均為四條線段所組成，原以為和俄羅斯方塊差不多，操作多次後發現似乎更有挑戰性，加上我們對於「以單一元件，或任取兩種元件，能否成功覆蓋 $n \times n$ 網格或阿茲特克鑽石網格」很想一探究竟，故以此做為我們的研究主題。

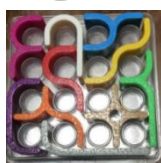


圖 1-1 crazy curves

二、研究目的

(一) 分別探討二棒、三棒、四棒可覆蓋的矩形、阿茲特克鑽石分為

1. 單一元件覆蓋不同圖形的解
2. 兩種元件 1:1 或特定比例混合解
3. 探討可成功覆蓋圖形的延伸方法
4. 探討無法覆蓋圖形之原因

貳、研究設備及器材

紙、蠟筆、益智教具(Crazy Curves)、GGB(GeoGebra)

參、研究方法

一、利樂棒的單一元件定義：

我們依形狀分別予以英文字母代號命名如下：(非對稱圖形可以翻轉，翻轉前後視為同一圖形)

(一) 二棒的利樂棒有 2 種(如圖 1-2)

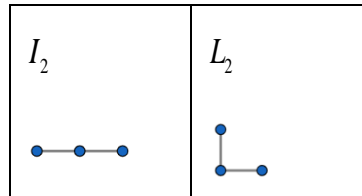


圖 1-2 二棒單一元件

(二) 三棒的利樂棒有 5 種(如圖 1-3)，而任取兩種元件有 $C_2^5 = 10$ 種組合。

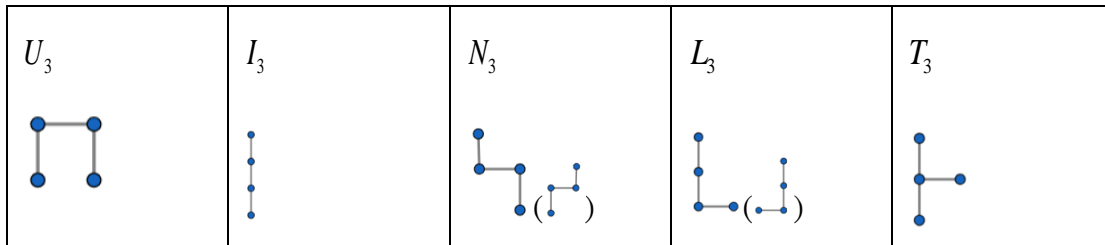


圖 1-3 三棒單一元件

(三) 四棒的利樂棒有 16 種^[3](如圖 1-4)，而任取兩種元件有 $C_2^{16} = 120$ 種組合。

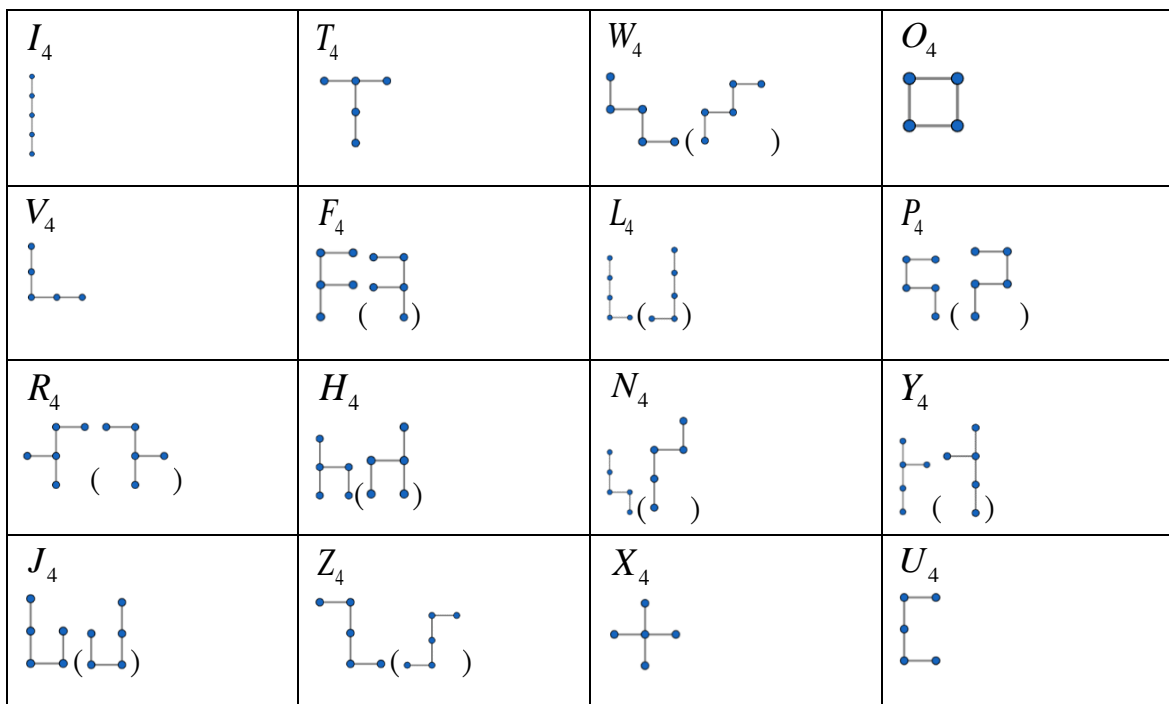


圖 1-4 四棒單一元件

二、各種圖形的棒數計算：

(一) 矩形圖形的棒數計算：在長為 n 的橫線上，共有 $(n+1)$ 條縱線，並且每條縱線的長度為 m ；在寬為 m 的縱線上，共有 $(m+1)$ 條橫線，並且每條橫線的長度為 n ，此矩形共有 $(n+1)m + (m+1)n$ 棒。

以圖 2-1 為例，當 $n=4$ 、 $m=3$ ，共有 $(4+1) \times 3 + (3+1) \times 4 = 31$ 棒。



圖 2-1 4×3 矩形棒數

(二) T 階阿茲特克鑽石的棒數計算：鑽石階數 T 定義為中層的最大格數， $T=5$ 的 5 階鑽石(如圖 2-2)，其棒數為 $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 = (5+1)^2 = 6^2 = 36$ 棒。

發現從上述之 T 階($T \neq 1$ ，且必為奇數) T 鑽石圖形中，棒數排列形式都是以 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot T \cdot T+1 \cdot T \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ，且 $T+1$ 必為偶數，所以不論哪種鑽石圖形之棒數總數為

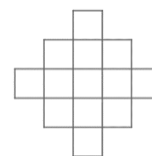


圖 2-2 5 階鑽石

$\frac{(1+T) \times T}{2} \times 2 + (T+1) = (T+1)^2$ ，且必為 4 的倍數。

參、文獻探討：

國內學者高文山整理與父親高義勇研究的弧線拼板(segment puzzle)覆蓋 5×5 矩形(高文山, 2001 年^[3])，並找出多種解法。Donald E. Knuth 教授以獨特演算法用電腦程式找出以四棒 10 個元件覆蓋 5×5 矩形的 83 種解法^[4]。另 Alfred Wassermann 教授也以電腦程式找出以混合四棒元件覆蓋 9 階鑽石圖形的解法^[5]。

本研究不同的是，先以人工手繪嘗試後，再利用 polysolver 程式作為研究的輔助，用數學歸納出各類單一元件或兩種元件組合，推導出 $n \times n$ 矩形覆蓋方法及推導出 t 階鑽石的覆蓋方法，擴展其他覆蓋情形並加以分析，在國內科展則顯少有此相關資料。

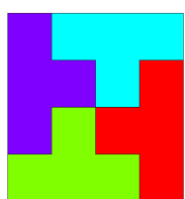


圖 2-3-1 常見的多連方塊面積覆蓋問題

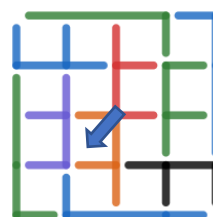


圖 2-3-2 本研究利樂棒覆蓋網格格線

由上圖得知常見的多連方塊覆蓋問題主要是覆蓋方格面積，而本研究主要是探討利樂棒元件覆蓋網格格線，而在擴充上不能像面積覆蓋問題一樣用放大縮小的方式，我們無法直接使用同一種圖形擴充在邊界上，否則會出現重複交叉的問題。

肆、研究過程

一、二棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 矩形成功的解法以及無解的原因：

1. 單一 L_2 元件可成功覆蓋 2×2 、 3×3 、 \dots 、 $n \times n$ 矩形 (n 為正整數):

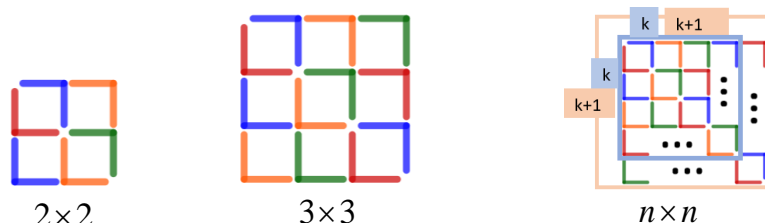


圖 3-1 單一 L_2 元件可成功覆蓋 $n \times n$ 矩形

設 n 是正整數， $n \times n$ 矩形網格可以被 L_2 型不重疊地覆蓋。(如圖 3-1)

【證明】

(1) 當 $n = 2$ 時，圖形為 2×2 矩形網格可以被 L_2 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(2) 設 $n = k$ 時，命題成立，即 $k \times k$ 矩形網格，可以被 L_2 型不重疊地覆蓋。

當 $n = k + 1$ 時，圖形為 $(k + 1)(k + 1)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $k \times k$ 矩形網格和一個外圍規則性排法的方式，由假設知 $k \times k$ 矩形網格可以被 L_2 型不重疊地覆蓋，所以當 $n = k + 1$ 時，命題也成立。

由(1)(2)及數學歸納法原理得證， $n \times n$ 矩形網格可以被 L_2 型不重疊地覆蓋。

2. 單一 I_2 元件無解原因：

點的編號定義，我們將一個點所連接出去的線段數量作為命名(如圖 3-2)：

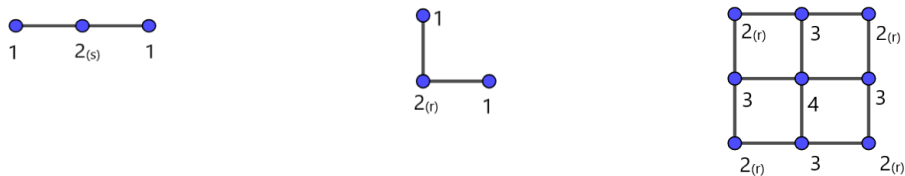
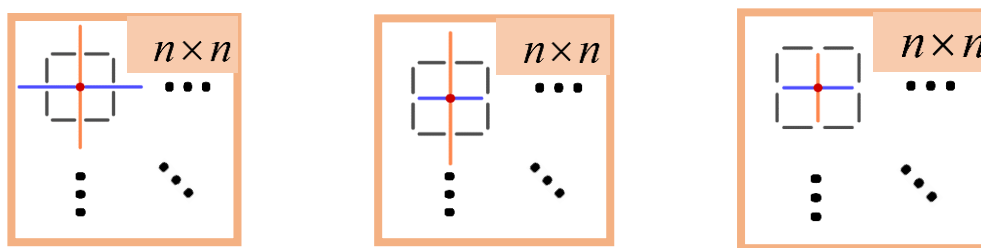


圖 3-2 點編號定義

"4"有三種組合形式， $1+1+1+1$ 、 $1+1+2$ 、 $2+2$ ，因為 I_2 非此形式，故均無解。

(紅點為解釋點) 圖 3-3



$1+1+1+1$ ，超出範圍

$1+1+2$ ，超出範圍

$2_s + 2_s \neq 4$ ，互相交叉

圖 3-3 透過中心的紅點說明單一 I_2 元件無解原因

3. $L_2 + I_2$ (兩者數量比例1:1)混合解：

因為我們想要探討長方形和正方形兩種情況的圖形，這裡我們設矩形(正方形)邊長為 n 為例，則在1:1的前提下能成功的矩形為 $\frac{n(n+1)}{2}$ 為偶數，因為 $n(n+1) \times 2$ 總和為棒數，所以 $n(n+1)$ 會是所有兩棒圖形個數，則 $L_2 + I_2$ 能以1:1的形式填入。成功的有兩類：

(1) $(4n+3) \times (4n+3)$ 矩形 (n 為非負整數)： 3×3 、 7×7 ... (如圖 3-4、3-5)

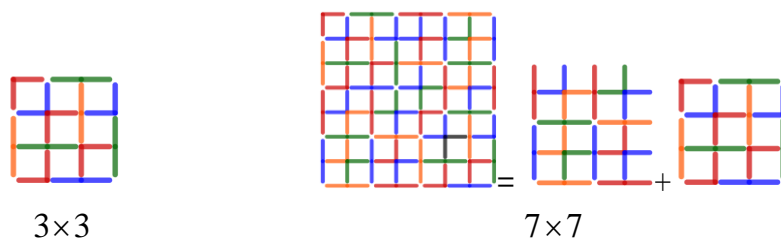
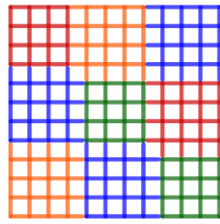
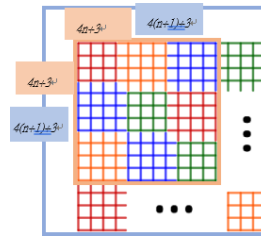


圖 3-4 $L_2 + I_2$ (1:1) 可覆蓋 $(4n+3) \times (4n+3)$ 矩形



11×11 (內部省略)



$n \times n$

圖 3-5 $L_2 + I_2 (1:1)$ 可覆蓋 $(4n+3) \times (4n+3)$ 矩形

(2) $4n \times 4n$ 矩形 (n 為正整數) : 4×4 、 $8 \times 8 \dots$ (如圖 3-6)

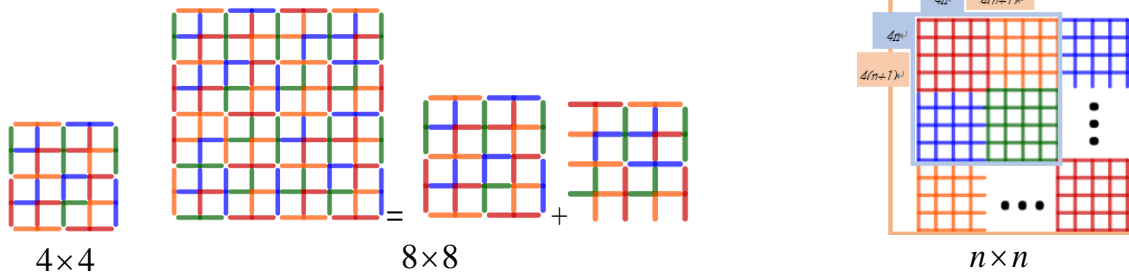


圖 3-6 $L_2 + I_2 (1:1)$ 可覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

(3) $L_2 + I_2$ 無法以 $(1:1)$ 覆蓋 $(4n+2) \times (4n+2)$ (如圖 3-7)

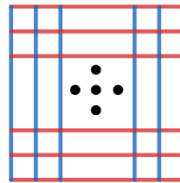


圖 3-7

如圖有 $(4n+2)(4n+3)$ 紅， $(4n+2)(4n+3)$ 藍

有 a 個 L_2 覆蓋 1 紅 1 藍、有 b 個 I_2 覆蓋 2 紅、有 c 個 I_2 覆蓋 2 藍

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{(4n+2)(4n+3) \times 2}{2} = (4n+2)(4n+3) \\ a+2b = (4n+2)(4n+3) \\ a+2c = (4n+2)(4n+3) \end{cases} \quad b=c \quad a:(b+c)=1:1 \quad b+c=a$$

故可知 $4c = (4n+2)(4n+3)$ ， b 、 c 無正整數解

$L_2 + I_2$ 無法以 $(1:1)$ 覆蓋 $(4n+1) \times (4n+1)$ (說明同上)

(二) 阿茲特克鑽石成功的解法以及無解的原因：

1. 單一 L_2 元件可覆蓋 $2t+1$ 階 (t 為正整數) 鑽石圖形：

在 3 階外圍增加一層鑽石底座結構，可延伸成 5、7、11... 階。(如圖 3-8)

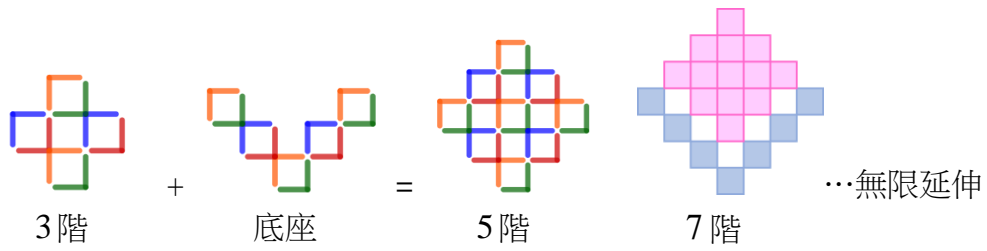


圖 3-8 單一 L_2 元件可覆蓋 $2t+1$ 階 (t 為正整數) 鑽石圖形

若元件能完全覆蓋 3 階，且能覆蓋「底座」圖案，
均能向下擴張無限延伸，組成 $2t+1$ 階鑽石圖形。
(如圖 3-9)

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 3 \\
 a_t &= a_{t-1} + 2 \\
 a_t &= a_1 + (t-1) \times 2 \\
 &= 3 + (t-1) \times 2 \\
 &= 2t + 1 \quad (t \in N)
 \end{aligned}$$

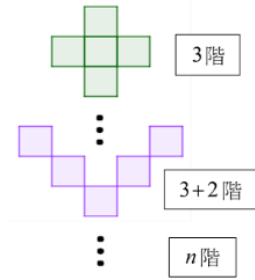


圖 3-9

2. 單一 I_2 元件無解原因：(紅點為解釋點)

因為角邊無法覆蓋，所以 n 階也無法覆蓋。(如圖 3-10)

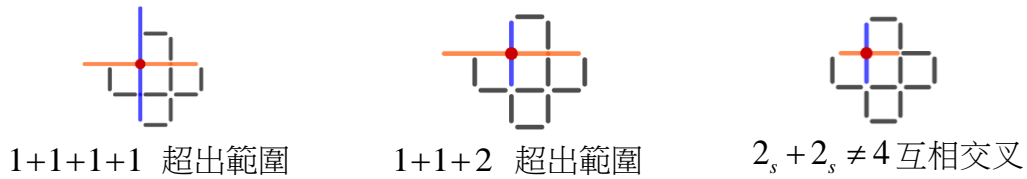


圖 3-10 單一 I_2 元件無解原因

3. $L_2 + I_2$ (1:1) 混合解：(如圖 3-11)

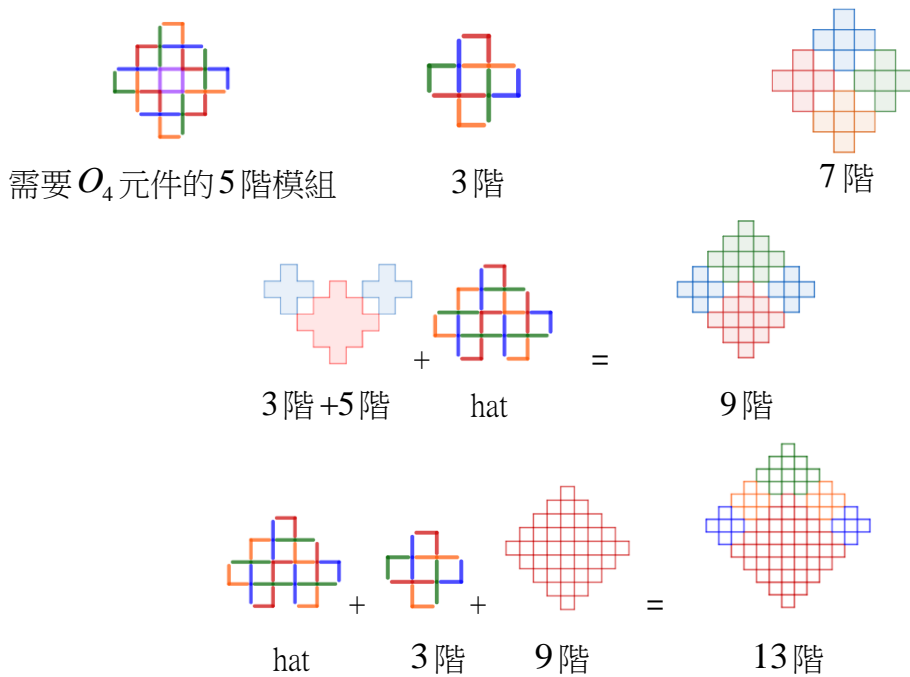
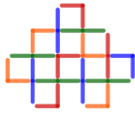



圖 3-11 $L_2 + I_2$ (1:1) 混合可覆蓋任何 $2t+1$ 階鑽石圖形

研究發現，在 3 階外圍增加一層由 3 階鑽石組成的結構，則可組成 7 階。此外，因為

每以  (命名為 hat) 加上  (3 階) 外擴一圈，就可以得出 $4t+9$ 階的解 (t 為 >1 的正整數)，如: 13 階、17 階、21 階... 等，後三階能單獨延伸出 $4t+3$ 階的解(如: 7 階、11 階、15 階)，又因只有奇數階，所以 $L_2 + I_2$ (比例 1:1) 混合能延伸覆蓋任何 $2t+1$ 階的解 (t 為正整數)。

★需加上 O_4 元件的 5 階模組說明

我們發現部分圖形會以兩個方格為一個單位覆蓋，因此當 3 階鑽石不需要多加一個 O_4 元件，但當圖形的方格數為奇數時，正中間就會需要多加一個 O_4 元件，這種處理方式會在後續的研究過程中運用。(如圖 3-12)



方格總數 4 個為偶數

方格總數 9 個需加上 O_4 元件

圖 3-12 需加上 O_4 元件的情形

因為鑽石所有階數 T 均為奇數，故我們將階數設成 $T = 2K + 1$ (K 為正整數) 來加以分析，分成三種情況討論：

Case1.

當 $K = 2$ ， $T = 2K + 1 = 5$ 時，則把 5 階圖形視為需要正中間加 O_4 元件的獨立模組。(如圖 3-13)

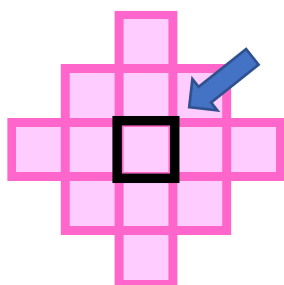


圖 3-13 5 階鑽石模組

Case2.

當 $K = 2t + 1$ 時， $T = 2K + 1 = 2(2t + 1) + 1 = 4t + 3$ (t 非負整數)。可透過 3 階圖形擴展成 $(4t + 3)$ 階圖形。(如圖 3-14)

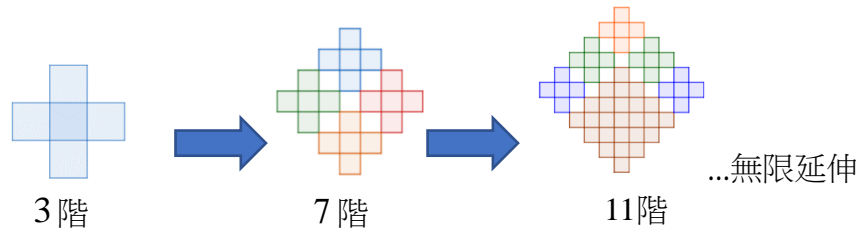


圖 3-14 $(4t + 3)$ 階鑽石圖形

Case3.若 $K = 2t + 2$ 時，則階數 $T = 2K + 1 = 2(2t + 1) + 1 = 4t + 5$ (t 為正整數)。必須先將 Hat 模組合併 3 階、5 階模組(含 1 個 O_4 元件)組成 9 階圖形，再透過 9 階圖形擴展成 $(4t + 1)$ 階圖形。(如圖 3-15)

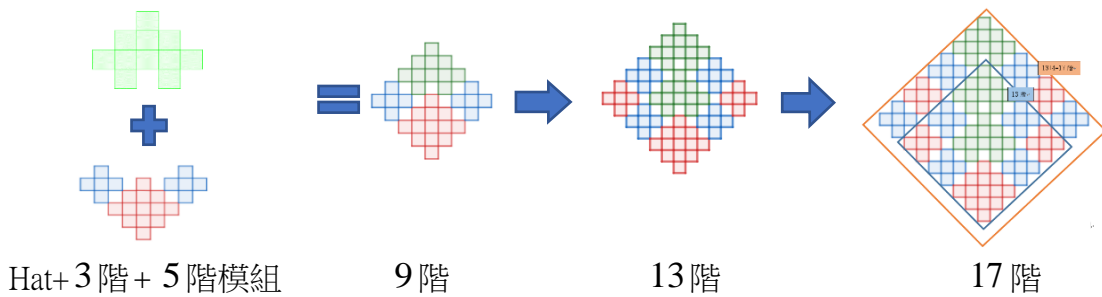


圖 3-15 $(4t + 1)$ 階鑽石圖形

二、三棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 矩形成功的解法以及無解的原因

依照「長為 n ，寬邊為 m ，棒數為 $m(n+1) + n(m+1)$ 」推得「當正方形邊長為 n ，則棒數為 $2n(n+1)$ 」。推得當 $n = 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12 \dots$ 填入三棒有解。

$(6n + k)(6n + k)$ 矩形的總棒數為

$$2(6n + k)(6n + k + 1) = 2 \left[(6n + k)^2 + (6n + k) \right] = 72n^2 + 24nk + 12n + 2k^2 + 2k$$

當 $k = 0, 2, 3, 5$ 時可被 3 整除，則 $(6n + 1) \times (6n + 1)$ 、 $(6n + 4) \times (6n + 4)$ 無法被 3 棒完全覆蓋

$(3n + k)(3n + k)$ 矩形的總棒數為

$$2(3n + k)(3n + k + 1) = 2 \left[(3n + k)^2 + (3n + k) \right] = 18n^2 + 12nk + 6n + k^2 + k$$

$k = 0, 2$ 可被 3 整除，則 $(3n + 1) \times (3n + 1)$ 無法被 3 棒完全覆蓋

1. 單一 I_3 元件無解原因：因為 2×2 無法容納 I_3 因此 2×2 無法成功， 3×3 則是因為如果要填滿橘色部分會導致出現重疊因此無法成功 $n \times n$ 也同樣。(如圖 4-1)



圖 4-1 單一 I_3 元件無解原因

2. 單一 N_3 元件無解原因：因為 N_3 在角的覆蓋當中角的部分會為了要覆蓋到邊，因此會超出邊界無法填滿。(如圖 4-2)



圖 4-2 單一 N_3 元件無解原因

3. 單一 L_3 元件無解原因：因為 L_3 在角的覆蓋當中會為了覆蓋其他位置因此會有橘色的位置無法填滿，所以無法完全覆蓋。(如圖 4-3)



圖 4-3 單一 L_3 元件無解原因

4. 單一 T_3 元件僅可覆蓋 $6n \times 6n$ 、 $(6n+2) \times (6n+2)$ 矩形：單一 T_3 元件無法完全覆蓋奇數邊長的正方形，但可以完全覆蓋偶數邊長的正方形，奇數邊長因為紅色邊的位置而無法完全覆蓋。(如圖 4-4)

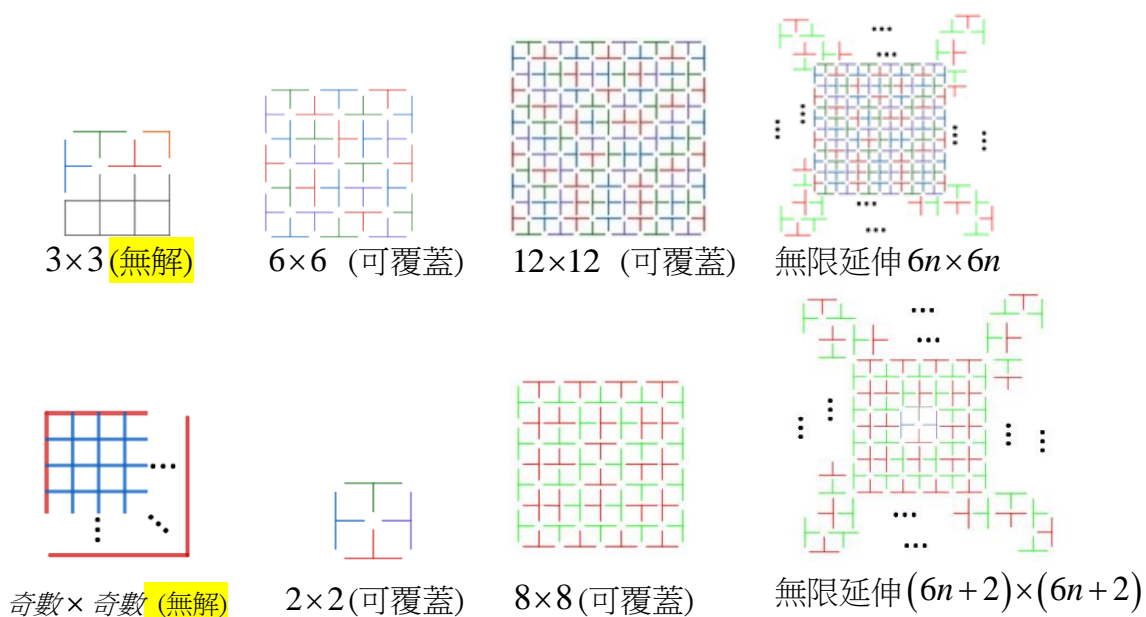


圖 4-4 單一 T_3 元件僅可覆蓋 $6n \times 6n$ 、 $(6n+2) \times (6n+2)$ 矩形

5. 單一 U_3 元件可成功覆蓋之圖形：

(1) 2×2 和 $(6n+5) \times (6n+5)$ 矩形 (n 為非負整數)。(如圖 4-5)

我們發現 U_3 填入 $(6n+5) \times (6n+5)$ 之形式時，填入由 U_3 組成之圍繞圖形再加上由 U_3 形上下交錯排列為一組，然後無限延伸，直到中間剩下 5×5 之圖形。

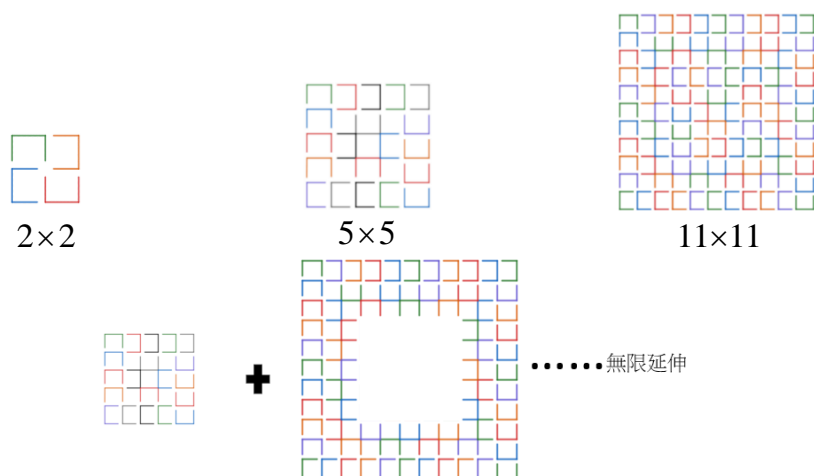


圖 4-5 單一 U_3 元件可覆蓋 $(6n+5) \times (6n+5)$ 矩形

(2) $(6n+3) \times (6n+3)$ 矩形 (n 為非負整數)。(如圖 4-6)

我們發現 U_3 填入 $3k$ 之形式是，填入由 U_3 組成之圍繞圖形再加上由 U_3 形上下交錯排列為一組，然後無限延伸，直到中間剩下 3×3 之圖形。

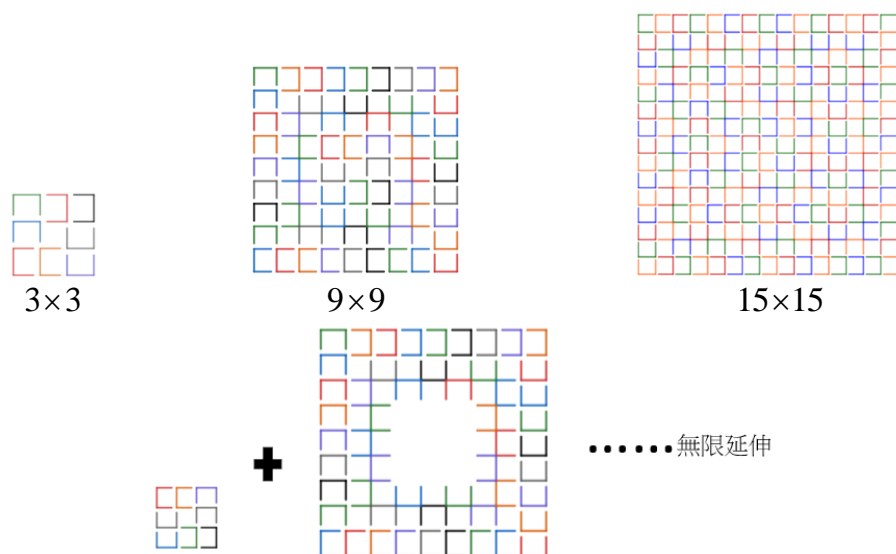


圖 4-6 單一 U_3 元件可覆蓋 $(6n+3) \times (6n+3)$ 矩形

(3) 單一 U_3 元件無法覆蓋 6×6 、 8×8 、 12×12 、 $14\times 14\cdots 6n\times 6n$ 、 $(6n+2)\times(6n+2)$ 因為要填滿正方形，所以不管各種擺法，一定會把所有格線填滿，我們先以 6×6 為基準(皆從左上方開始)，先填滿外圍之線段(如圖 4-7)。我們要想辦法填滿中間，但是發現此利樂棒無法完全覆蓋橘色線段的四個角。因此 8×8 、 12×12 、 14×14 階無法完全覆蓋。研究結果，單一 U_3 元件可覆蓋的矩形有 2×2 、 3×3 、 5×5 、 9×9 、 11×11 、 $15\times 15\cdots$ 。



圖 4-7 單一 U_3 元件無法覆蓋 6×6 矩形

6.任取兩種元件以混合方式覆蓋矩形，有 $C_2^5 = 10$ 種組合的情形

(1) L_3 和 T_3 搭配時可成功覆蓋 3×3 、 $2\times(10n+2)$ 、 $5\times(12n+5)$

(a) L_3 和 T_3 搭配時可成功(1:1)覆蓋 $5\times(12n+5)$ (如圖 4-11)

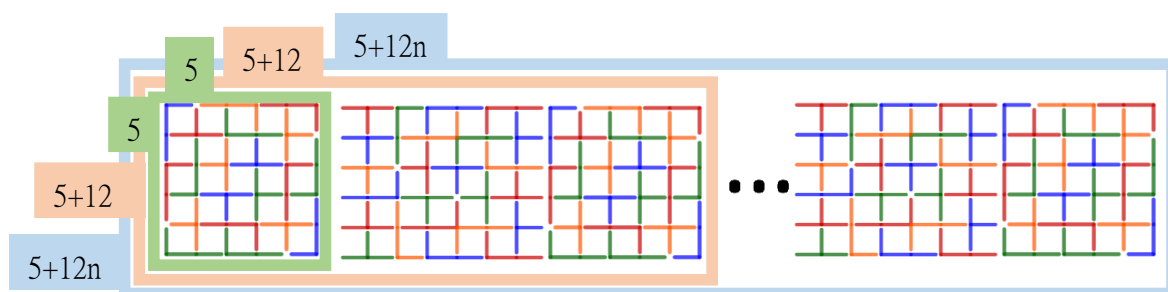



圖 4-11 L_3 和 T_3 搭配時可成功覆蓋 $5\times(12n+5)$

(b) L_3 和 T_3 搭配時可成功(1:1)覆蓋 $2\times(10n+2)$ 時，每個正方形的一行  個數為等差數列規律。(如圖 4-12)

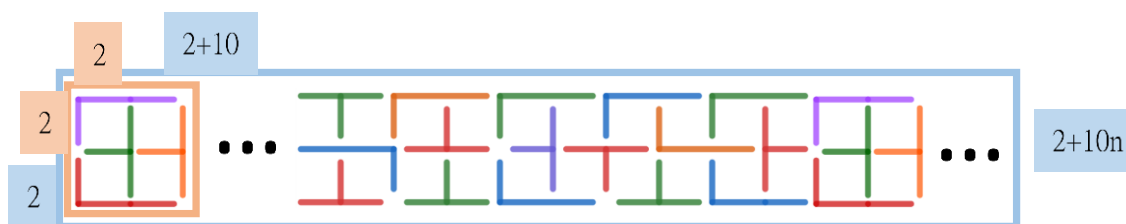


圖 4-12 L_3 和 T_3 搭配時可成功覆蓋 $2\times(10n+2)$

(2) T_3 和 I_3 搭配時可成功覆蓋 $3n \times 3n$

【證明】

(a) 當 $n=1$ 時，圖形為 3×3 矩形網格，可以被 T_3 和 I_3 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(b) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $3k \times 3k$ 矩形網格，可以被 T_3 和 I_3 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，圖形為 $(3k+3) \times (3k+3)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $3k \times 3k$ 矩形網格和側邊之一個規則性排法的方式，由假設知 $3k \times 3k$ 矩形網格可以被 T_3 和 I_3 型不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。由(a)(b)及數學歸納法原理得證， $3n \times 3n$ 矩形網格可以被 T_3 和 I_3 型不重疊覆蓋。(如圖 4-13)

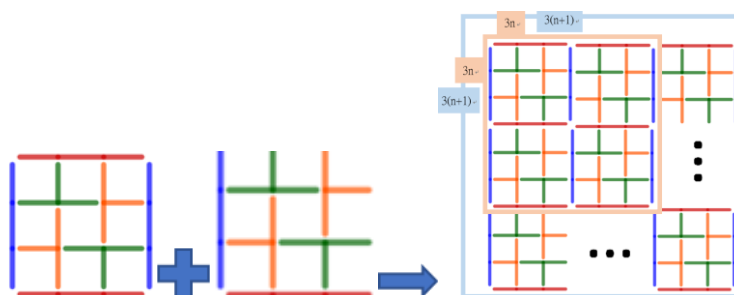


圖 4-13 T_3 和 I_3 搭配時可成功覆蓋 $3n \times 3n$

(3) U_3 和 T_3 搭配時以 (1:1) 成功覆蓋 $5 \times (5n+12)$ (如圖 4-14)。

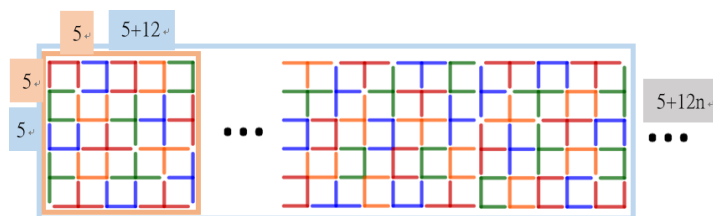


圖 4-14 U_3 和 T_3 搭配時以 (1:1) 成功覆蓋 $5 \times (5n+12)$

(4) U_3 和 I_3 搭配時可成功覆蓋 $3n \times 3n$ (如圖 4-15)

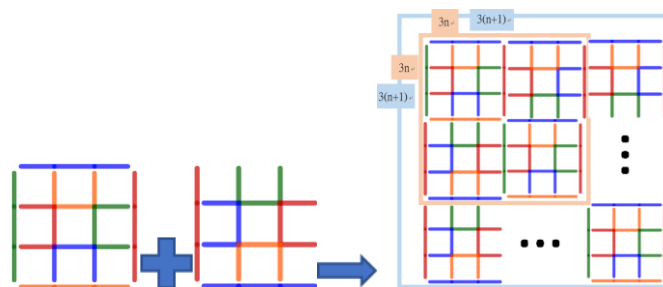
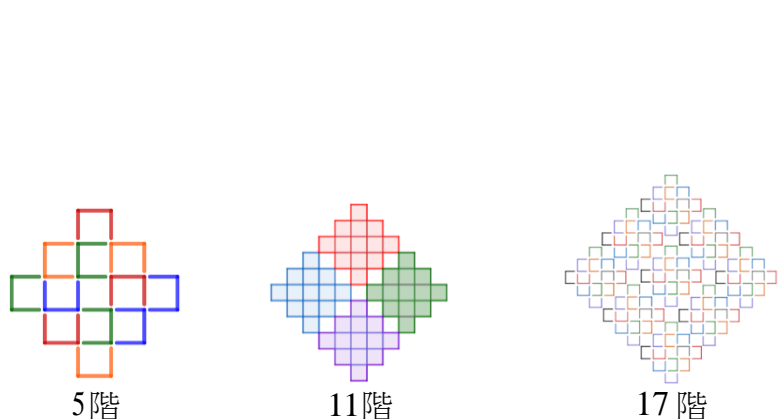


圖 4-15 U_3 和 I_3 搭配時可成功覆蓋 $3n \times 3n$

(二)阿茲特克鑽石成功的解法以及無解的原因

1. 單一元件覆蓋鑽石情形：5階鑽石的棒數 $(5+1)^2 = 36$ 為3的倍數，故可以三棒用完全覆蓋。(6*t*+1)階和(6*t*+3)階無法被三棒完全覆蓋)

(1) 單一 U_3 可覆蓋5階鑽石，進而可覆蓋6*t*+5階(*t*為非負整數)鑽石。(如圖 4-16)



$$a_1 = 5$$

$$a_i = a_{i-1} + 6$$

$$a_t = a_1 + (t-1) \times 6$$

$$= 5 + (t-1) \times 6$$

$$= 6t - 1$$

$$= 6t + 5$$

$$t \in N \cup \{0\}$$

圖 4-16 單一 U_3 元件可覆蓋(6*t*+5)階鑽石

(2) 以 N_3 填入時成功覆蓋5階鑽石，進而可覆蓋6*t*+5階鑽石，(*t*為非負整數)。

(如圖 4-17)

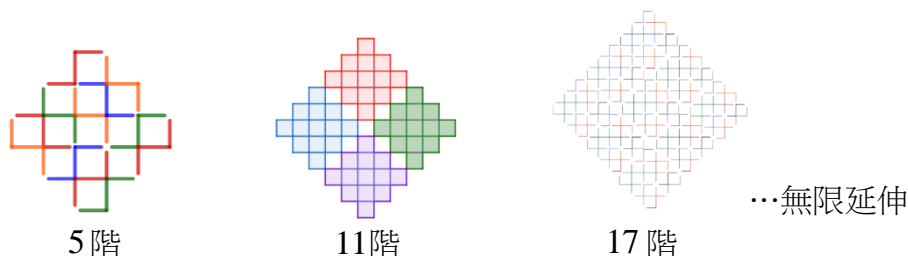
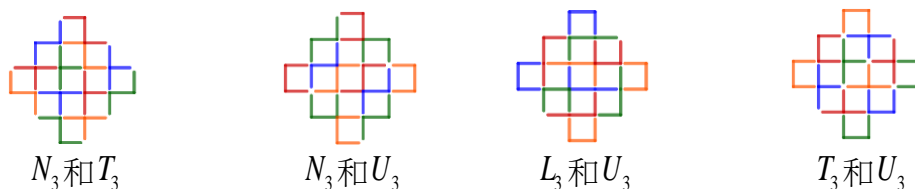


圖 4-17 單一 N_3 元件可覆蓋(6*t*+5)階鑽石

2. 任取兩種元件以1:1混合方式覆蓋鑽石之情形

(1) N_3 和 T_3 、 N_3 和 U_3 、 L_3 和 U_3 、 T_3 和 U_3 可覆蓋(6*t*+5)階(*t*為非負整數)鑽石。

因能成功以1:1覆蓋5階鑽石，進而可覆蓋6*t*+5階。(如圖 4-18)



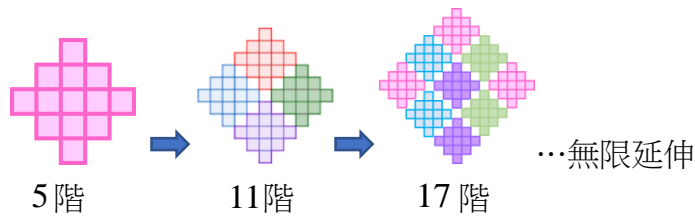


圖 4-18 N_3 和 T_3 、 N_3 和 U_3 、 L_3 和 U_3 、 T_3 和 U_3 可以(1:1)覆蓋 $(6t+5)$ 階鑽石

三、四棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 矩形網格無解原因

1. $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形無解原因

圖 4-19	圖 4-20	圖 4-21	圖 4-22

(1) 無法以單一元件 W_4 覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形

【證明】如圖 4-19，有紅線:藍線 $\neq 1:1$ ，且每一個 W_4 一定覆蓋住 2 紅 2 藍

所以紅線、藍線數量該相同，但紅線、藍線的數量不符合故 W_4 無法完全覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形。

(2) 無法以單一元件 O_4 覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形

【證明】如圖 4-20，有紅線:藍線 $\neq 1:1$ ，而每一個元件覆蓋住 2 紅 2 藍。但紅線、藍線的數量不符合故 O_4 無法完全覆蓋 3×3 矩形。

(3) 無法以單一元件 T_4 、 I_4 、 L_4 、 R_4 、 U_4 、 V_4 、 X_4 、 Z_4 覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形

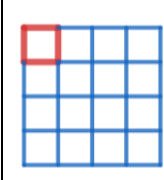
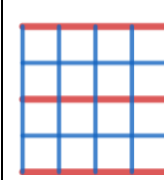
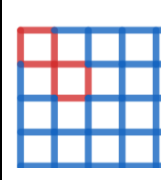
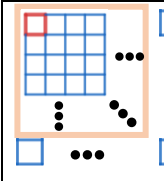
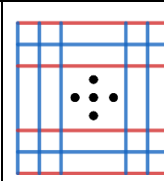
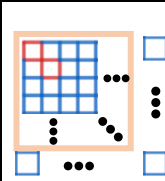
如圖 4-21，因上述元件無法覆蓋到紅色線段，故上述元件均無法完全覆蓋

$(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形。

(4) 無法以單一元件 N_4 覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形

如圖 4-22，因 N_4 元件無法覆蓋到紅色線段，無法完全覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形。

2. $2n \times 2n$ 矩形無解原因

		
		
圖 4-23	圖 4-24	圖 4-25

(1) 無法以單一元件 T_4 、 I_4 、 L_4 、 R_4 、 U_4 、 V_4 、 X_4 、 Z_4 覆蓋 4×4 矩形

如圖 4-23，因上述元件無法覆蓋到紅色線段，故上述元件均無法完全覆蓋 4×4 矩形。

(2) 無法以單一元件 O_4 、 P_4 、 W_4 覆蓋 4×4 矩形

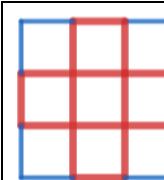
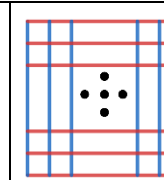
如圖 4-24 經化簡過後紅線:藍線 = $(k+1):(3k+1) \neq 1:3$ (每一個元件覆蓋住 1 紅 3 藍)，

故 O_4 、 P_4 、 W_4 覆元件均無法完全覆蓋 4×4 矩形

(3) 無法以單一元件 N_4 覆蓋 $2n \times 2n$ 矩形

如圖 4-25，因 N_4 元件無法覆蓋到紅色線段，無法完全覆蓋 $2n \times 2n$ 矩形。

3. 單一元件 H_4 、 J_4 $n \times n$ 矩形無解原因

	
圖 4-26	圖 4-27

(1) 無法以單一元件 H_4 覆蓋 3×3 矩形

【證明】如圖 4-26，有 16 條紅線，8 條藍線，而每一個元件覆蓋住 4 紅 0 藍或 3 紅 1 藍。假設有 a 個元件是覆蓋 4 紅 0 藍，有 b 個元件是覆蓋 3 紅 1 藍

$$\begin{cases} a+b=6 \\ 4a+3b=16 \end{cases} \text{ 經解二元一次聯立方程式推得 } a \text{ 為負整數非正整數解，}$$

故上述元件均無法完全覆蓋 3×3 矩形。

(2)無法以單一元件 H_4 、 J_4 覆蓋 $(4n+1) \times (4n+1)$ 矩形

【證明】如圖 4-27 每一個元件覆蓋住 3 紅 1 藍或 1 紅 3 藍。假設有 a 個元件是覆蓋 3 紅 1 藍，有 b 個元件是覆蓋 1 紅 3 藍

$$\begin{cases} 3a + b = (4n+1)(4n+2) \\ a + 3b = (4n+1)(4n+2) \\ a + b = (4n+1)(2n+1) \end{cases} \text{推得 } a \text{ 不為正整數所以無解}$$

$$2a = (4n+1)(2n+1)$$

(3)無法以單一元件 H_4 、 J_4 覆蓋 $(4n+2) \times (4n+2)$ 矩形

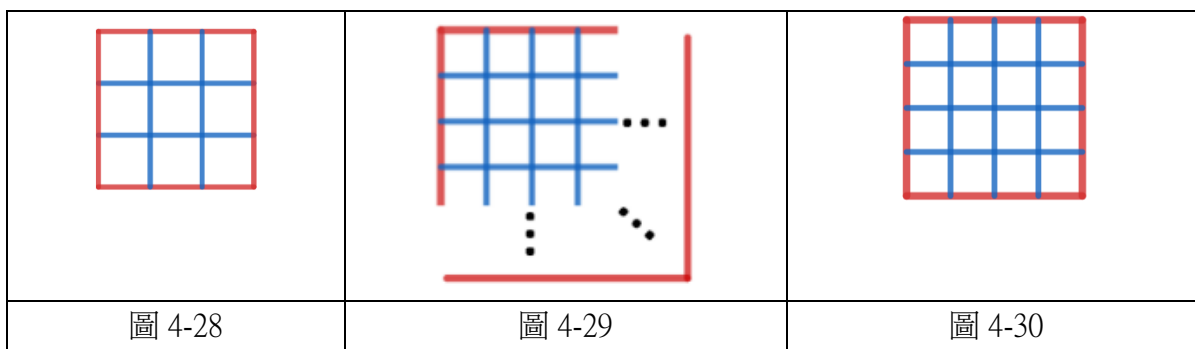
如圖 4-27 有 16 條紅線，24 條藍線，因 Y_4 元件無法覆蓋到紅色線段，故 Y_4 元件均無法

$$\begin{cases} 3a + b = (4n+2)(4n+3) \\ a + 3b = (4n+2)(4n+3) \\ 2a = (4n+3)(2n+1) \end{cases} \text{推得 } a \text{ 不為正整數所以無解}$$

(3)無法以單一元件 H_4 、 J_4 覆蓋 $(4n+3) \times (4n+3)$ 矩形

因棒數不符，故 Y_4 元件均無法

3. 無法以單一元件 Y_4 覆蓋 $n \times n$ 矩形無解原因



(1)無法以單一元件 Y_4 覆蓋 3×3 矩形

如圖 4-28，有 12 條紅線，12 條藍線，而每一個 Y_4 元件覆蓋住 0 紅 4 藍或 3 紅 1 藍。

假設有 a 個元件是覆蓋 4 紅 0 藍，有 b 個元件是覆蓋 3 紅 1 藍則透過解聯立推得覆蓋 3 紅 1 藍的 Y_4 元件有四個但在將 3 紅 1 藍的 Y_4 元件放入後剩下的面積都無法被 Y_4 完全覆蓋，所以 Y_4 無法覆蓋 3×3 矩形。

(2)無法以單一元件 Y_4 覆蓋 $3n \times 3n$ 矩形

如圖 4-29，在不重疊的情況下總圖形數最多為

$$n(3n+1) + n(n+1) = 3n^2 + n + n^2 + n = 4n^2 + 2n = \frac{8n^2 + 4n}{2}$$

但需要的圖形數是 $\frac{(3n) \times (3n+1) \times 2}{4} = \frac{9n^2 + 3n}{2}$ ，但 $\frac{9n^2 + 3n}{2} \geq \frac{8n^2 + 4n}{2}$ ， $(n=1)$ 已經證明無解，所以需要的圖形數必大於不重疊的情況下總圖形數，所以一定會出現重疊，所以無解。

(3) 無法以單一元件 Y_4 覆蓋非 $3n \times 3n$ 矩形

如圖 4-30，因 Y_4 元件無法覆蓋到紅色線段，故 Y_4 元件均無法完全覆蓋 $2n \times 2n$ 矩形

(二) 矩形網格成功之解法：

當正方形邊長為 n ，則棒數為 $2n(n+1)$ 。因為推得 $2n(n+1) = (2 \times \text{奇} \times \text{偶})$ 或 $(2 \times \text{偶} \times \text{奇})$ ，則必可以用四棒元件填滿。

1. $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋情形：

(1) $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4 \times 4n$ 矩形網格

【證明】

(a) 當 $n=1$ 時圖形為 4×4 矩形網格，可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(b) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $4 \times 4k$ 矩形網格可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，圖形為 $4 \times (4k+4)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $4 \times 4k$ 矩形網格和側邊之一個規則性排法的方式，由假設知 $4 \times 4n$ 矩形網格可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，命題也成立。由(a)(b)及數學歸納法原理得證， $4 \times 4n$ 矩形網格可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋。(如圖 5-1)

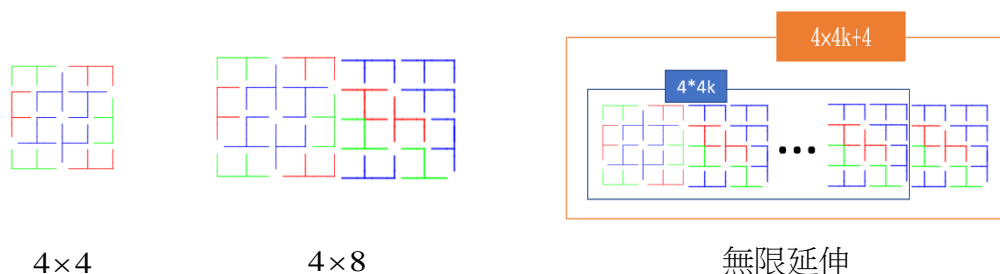


圖 5-1 $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4 \times 4n$ 矩形

(2) $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形網格

【證明】

(a) 當 $n=1$ 時，圖形為 4×4 矩形網格，可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(b) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $4k \times 4k$ 矩形網格，可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，圖形為 $(4k+4) \times (4k+4)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $4k \times 4k$ 矩形網格和側邊之一個規則性排法的方式，由假設知 $4k \times 4k$ 矩形網格可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。由(a)(b)及數學歸納法原理得證， $4n \times 4n$ 矩形網格可以被 $H_4 + F_4$ 型不重疊覆蓋。(如圖 5-2)

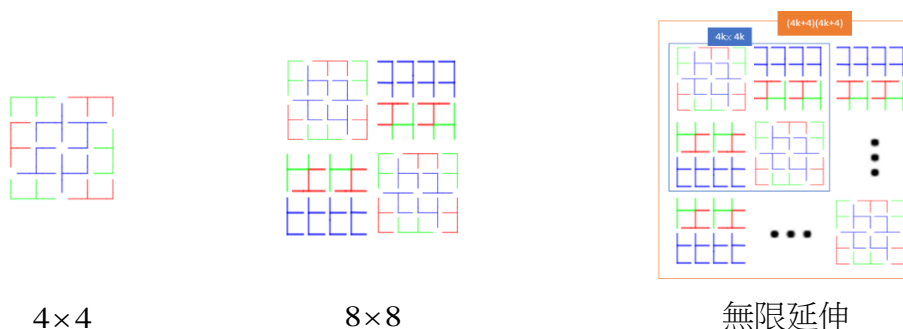


圖 5-2 $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

(3) $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $5 \times (4n+1)$ (n 為正整數) 矩形網格(如圖 5-3)

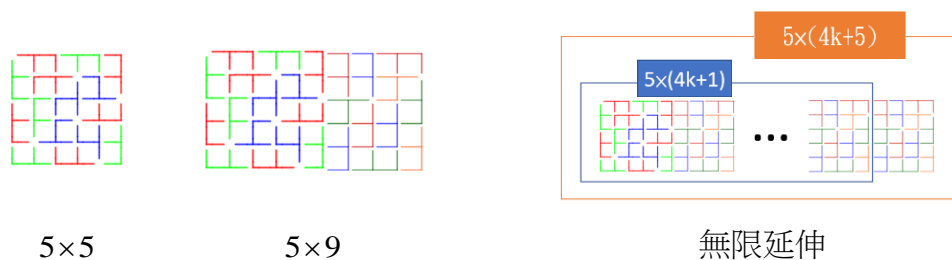


圖 5-3 $H_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $5 \times (4n+1)$ 矩形

2. $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋情形：

(1) $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4 \times 4n$ (n 為正整數) $4 \times 4n$ 矩形網格 $4 \times 4n$ (如圖 5-4)

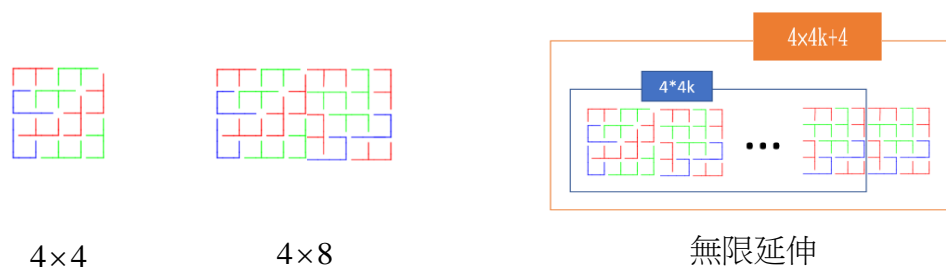


圖 5-4 $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4 \times 4n$ 矩形

(2) $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4n \times 4n$ (n 為正整數) $4n \times 4n$ 矩形網格 (如圖 5-5)

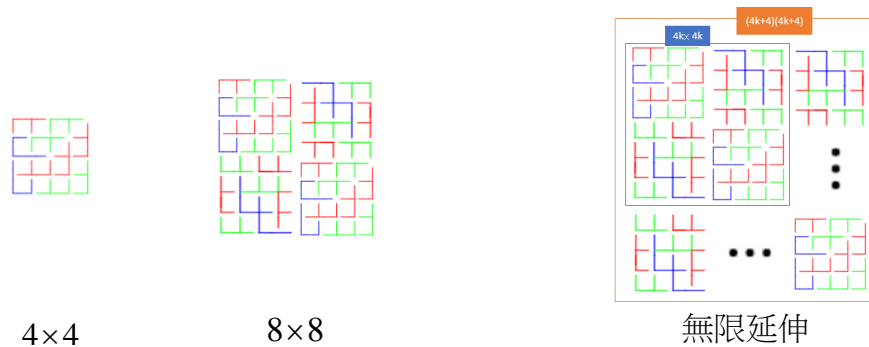


圖 5-5 $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

(3) $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $5 \times (4n + 1)$ (n 為非負整數) $5 \times (4n + 1)$ 矩形網格 (如圖 5-6)

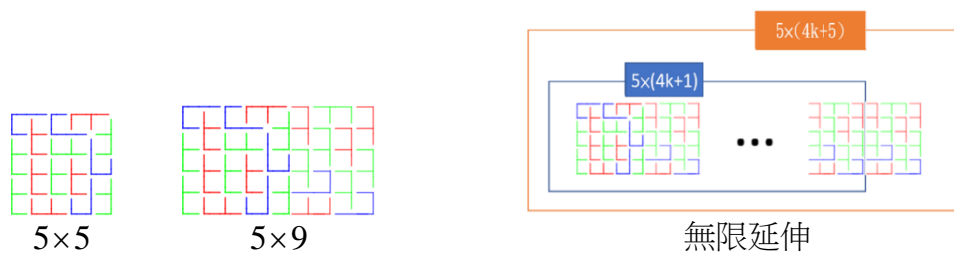


圖 5-6 $J_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $5 \times (4n + 1)$ 矩形

3. $I_4 + F_4$ 可成功覆蓋情形： (如圖 5-7)

(1) $I_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4 \times 4n$ 矩形

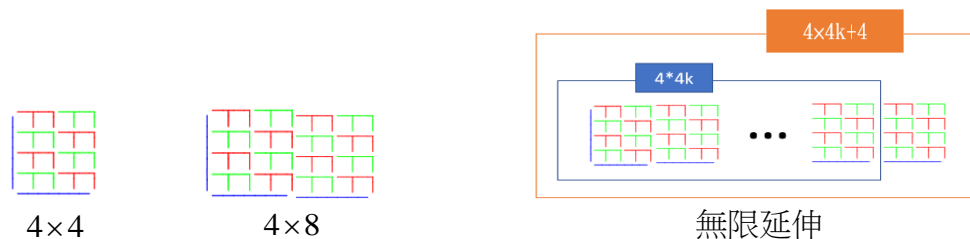


圖 5-7 $I_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4 \times 4n$ 矩形

(2) $I_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4n \times 4n$ (n 為正整數) 矩形網格 $4n \times 4n$ (如圖 5-8)

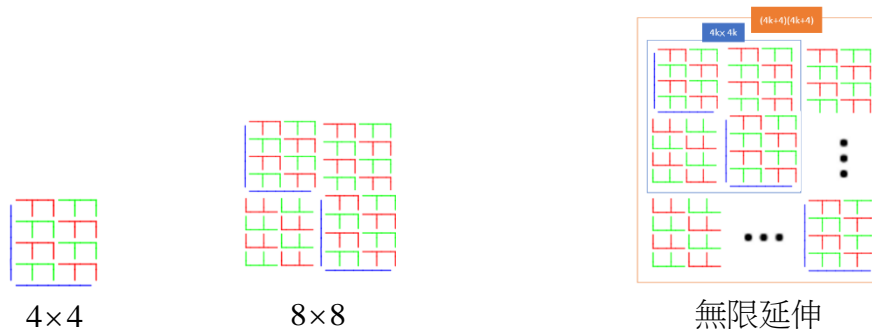


圖 5-8 $I_4 + F_4$ 可成功覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

4. $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋情形：

(1) $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $2 \times (4n+2)$ 矩形網格(如圖 5-9)

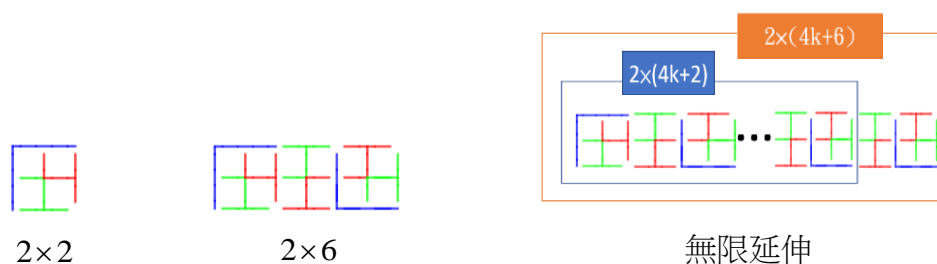


圖 5-9 $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $2 \times (4n+2)$ 矩形

(2) $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $2n \times 2n$ (n 為正整數) 矩形網格

【證明】

(a) 當 $n=1$ 時，圖形為 2×2 矩形網格，可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(b) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $2k \times 2k$ 矩形網格，可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，圖形為 $(2k+2) \times (2k+2)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $k \times k$ 矩形網格和側邊之一個規則性排法的方式，由假設知 $2k \times 2k$ 矩形網格可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。由(a)(b)及數學歸納法原理得證， $2n \times 2n$ 矩形網格可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋。(如圖 5-10)

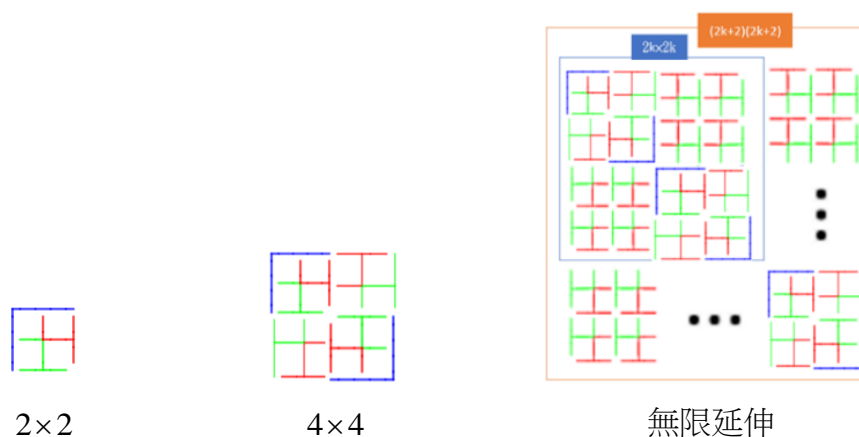


圖 5-10 $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $2n \times 2n$ (n 為正整數) 矩形

(3) $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $6 \times (4n + 2)$ 矩形網格 (如圖 5-11)

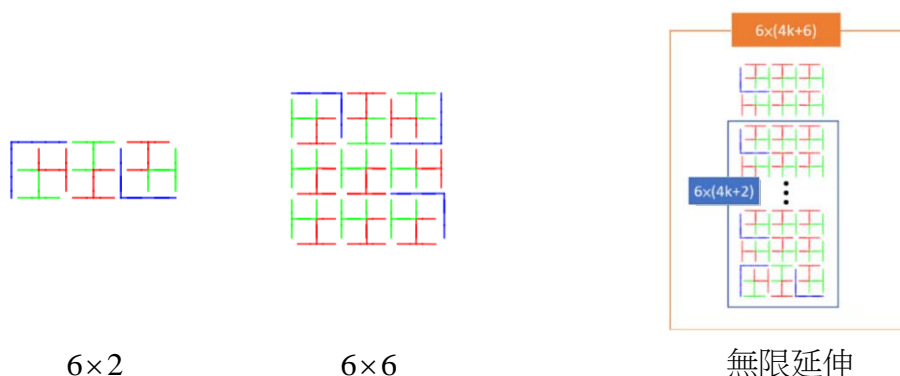


圖 5-11 $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $6 \times (4n + 2)$ 矩形網格

(4) $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $6n \times 6n$ (n 為正整數) 矩形網格

【證明】

(a) 當 $n=1$ 時，圖形為 6×6 矩形網格，可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(b) 設 $n=k$ 時，命題成立，即 $6k \times 6k$ 矩形網格，可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，圖形為 $(6k+6) \times (6k+6)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $k \times k$ 矩形網格和側邊之一個規則性排法的方式，由假設知 $6k \times 6k$ 矩形網格可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋，所以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。由(a)(b)及數學歸納法原理得證， $6n \times 6n$ 矩形網格可以被 $V_4 + H_4$ 型不重疊地覆蓋。(如圖 5-12)

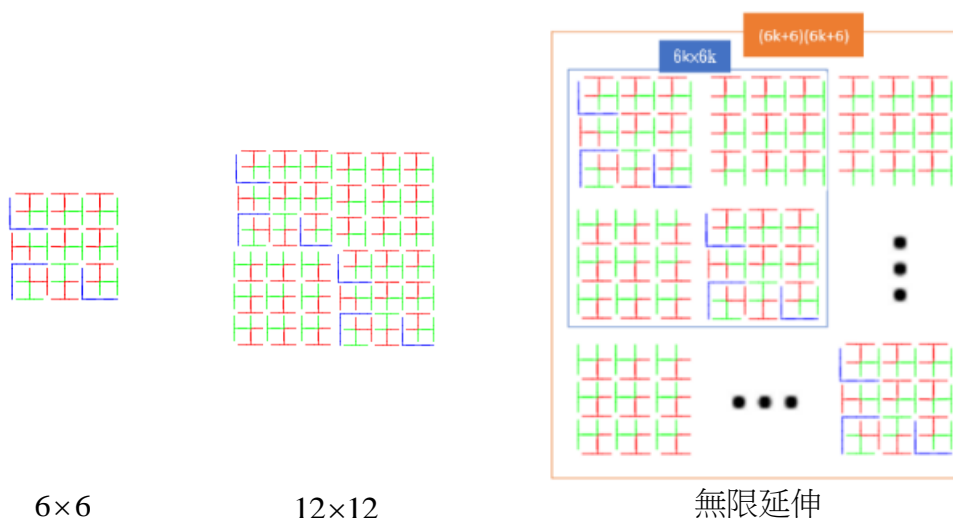


圖 5-12 $V_4 + H_4$ 可成功覆蓋 $6n \times 6n$ 矩形

5. H_4+O_4 可成功覆蓋 $3\times(4n+3)$ (n 為非負整數)矩形網格(如圖 5-13)

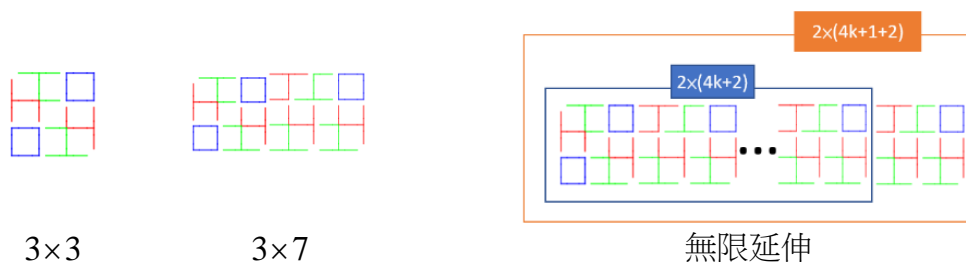


圖 5-13 H_4+O_4 可成功覆蓋 $3\times(4n+3)$ 矩形

6. F_4+O_4 可覆蓋 $n\times n$ 矩形網格

(a)當 $n=2$ 時，圖形為 2×2 矩形網格可以被 F_4+O_4 型不重疊地覆蓋，命題成立。

(b)設 $n=k$ 時，命題成立，即 $k\times k$ 矩形網格，可以被 F_4+O_4 型不重疊地覆蓋。

當 $n=k+1$ 時，圖形為 $(k+1)\times(k+1)$ 矩形網格。即圖形可分為一個 $k\times k$ 矩形網格和一個外圍規則性排法的方式，由假設知 $k\times k$ 矩形網格可以被 F_4+O_4 型不重疊地覆蓋，所

以當 $n=k+1$ 時，命題也成立。(如圖 5-14)

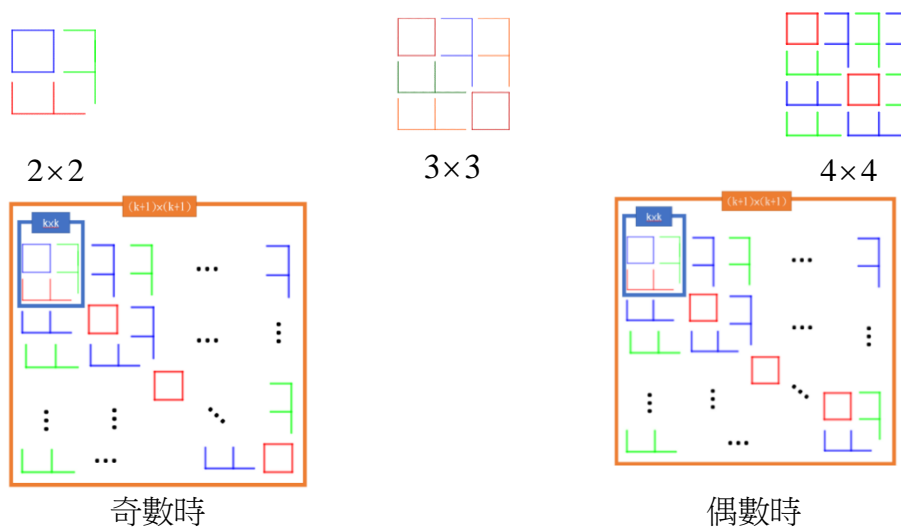
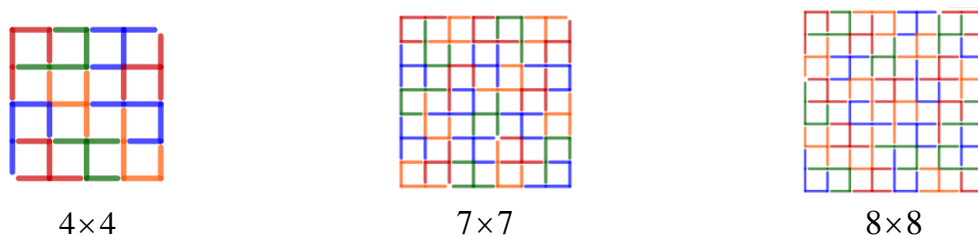


圖 5-14 F_4+O_4 可覆蓋 $n\times n$ 矩形網格

7. H_4+J_4 可成功(1:1)覆蓋情形(如圖 5-15)：



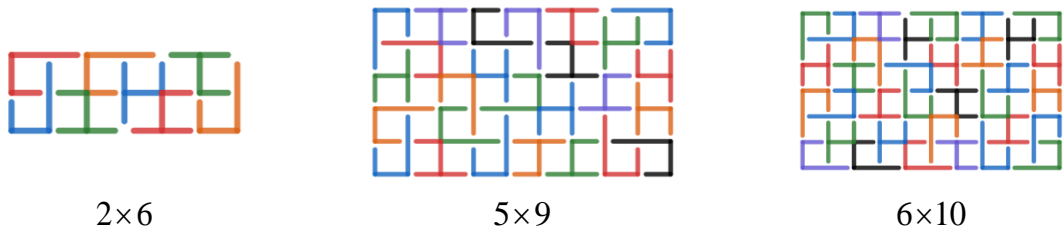


圖 5-15 H_4+J_4 可以(1:1)成功覆蓋 4×4 、 7×7 、 8×8 、 2×6 、 5×9 、 6×10

(三) 阿茲特克鑽石模組成功之解法及無解原因：

1. 單一圖形覆蓋鑽石圖形

(1) 單一 O_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ (t 為正整數) 階鑽石(如圖 5-16)

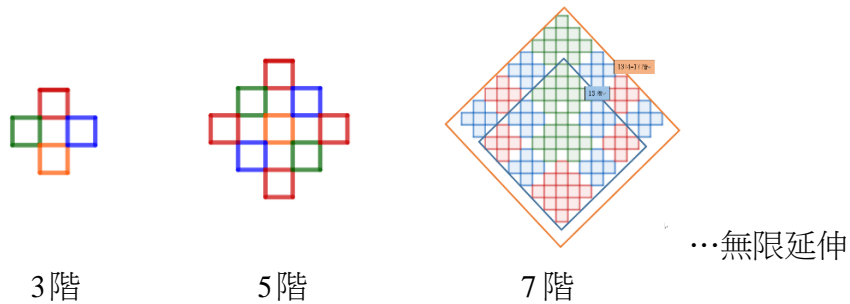


圖 5-16 單一 O_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石

(2) 單一 H_4 元件可覆蓋 $(4t+3)$ (t 為非負整數) 階鑽石(如圖 5-17)

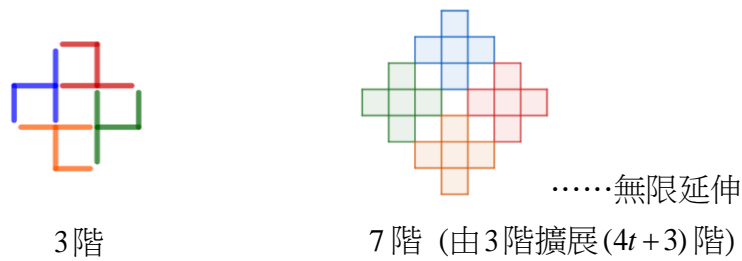


圖 5-17 單一 H_4 元件可覆蓋 $(4t+3)$ 階鑽石圖形

(3) 單一 J_4 元件可覆蓋 $(4t+3)$ (t 為非負整數) 階鑽石(如圖 5-18)

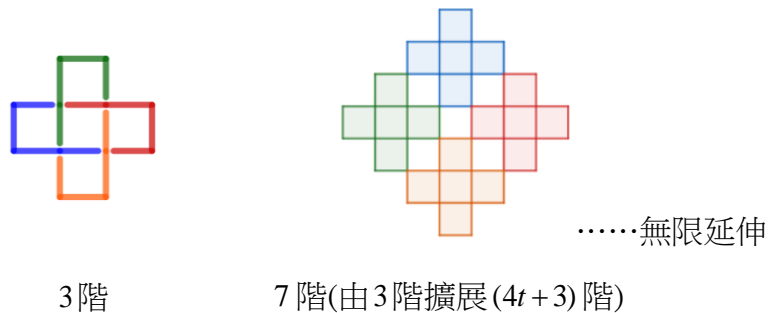


圖 5-18 單一 J_4 元件可覆蓋 $(4t+3)$ 階鑽石圖形

2. 無法以單一元件覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石之情形

(1) H_4 、 J_4 無法覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石

【證明】 $(4t+1)$ 階有 $(4t+1+1)^2 = 2^2(2t+1)^2$ 棒，有 $2(2t+1)^2$ 條直棒、 $2(2t+1)^2$ 條橫棒。而每一種元件皆有相同特性，即擺放方法可覆蓋 3 直 1 橫或 1 直 3 橫。

假設有 a 個元件是覆蓋 3 直 1 橫，有 b 個元件是覆蓋 1 直 3 橫，得
$$\begin{cases} 3a+b=2(2t+1)^2 \\ a+3b=2(2t+1)^2 \end{cases} \quad \text{且}$$

a 、 b 均無整數解，故上述元件無法完全覆蓋 5 階鑽石。

(2) 無法以單一元件 W_4 、 R_4 、 F_4 、 P_4 覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石(如圖 5-19)

【證明】 $(4t+1)$ 階有 $[1+3+\dots+(2t-1)+(2t+1)+(2t-1)\dots+3+1] \times 4$
 $= \left\{ \frac{[1+(2t-1)]t}{2} \right\} \times 2 + (2t+1) \times 4 = 8t^2 + 8t + 4$ 條紅線和

$(4t+1+1)^2 - (8t^2 + 8t + 4) = 8t^2 + 8t$ 條藍線，而每一個元件覆蓋住 2 紅 2 藍。

但紅線、藍線的數量不符合故 W_4 、 R_4 元件均無法完全覆蓋 5 階鑽石。

(3) 無法以單一元件 F_4 、 P_4 覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石(如圖 5-19)

證明方法類似但每一個 F_4 或 P_4 覆蓋住 3 紅 1 藍或 1 紅 3 藍，假設有 a 個元件是覆蓋住 3 紅 1 藍，有 b 個元件是覆蓋 1 紅 3 藍，模仿(1-4-1)推得無解

(4) 無法以單一元件 T_4 、 X_4 、 V_4 、 U_4 、 L_4 、 N_4 、 Y_4 覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石(如圖 5-20)

因上述元件無法覆蓋到紅色線段，故上述元件均無法完全覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石。

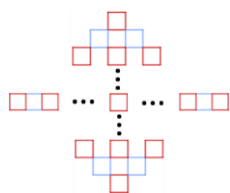


圖 5-19

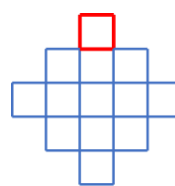
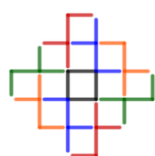


圖 5-20

3. 搭配 5 階模組覆蓋阿茲特克鑽石成功之解法：

(1) 單一 R_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ (t 為正整數) 階鑽石(如圖 5-21)



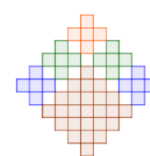
需加 O_4 元件的 5 階模組



3 階



7 階



11 階

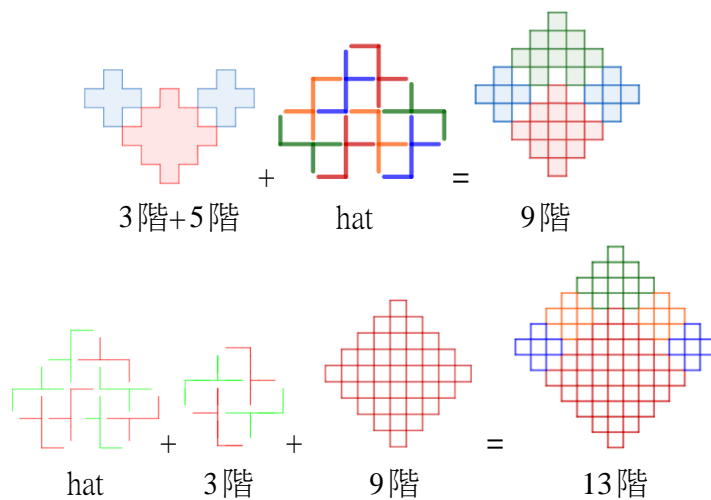


圖 5-21 單一 R_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形

(2) 單一 P_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ (t 為正整數) 階的解 (如圖 5-22)

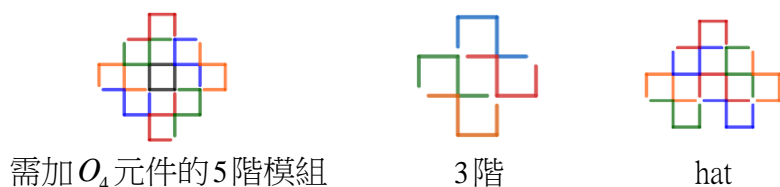


圖 5-22 單一 P_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形

(3) 單一 W_4 型元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形 (如圖 5-23)

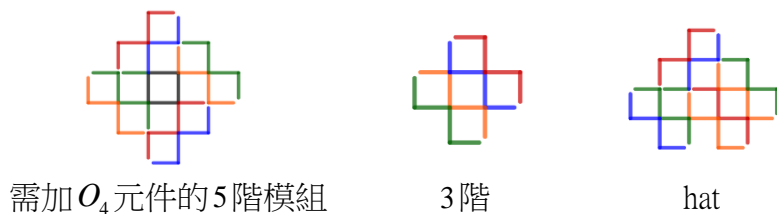
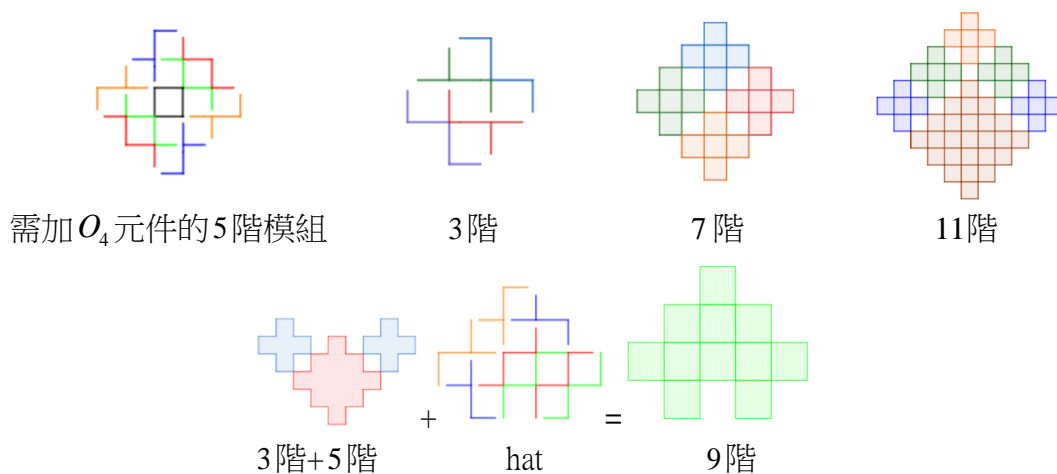


圖 5-23 單一 W_4 元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形

4. 搭配 5 階模組任取兩種元件以 1 : 1 混合方式覆蓋鑽石之情形

(1) $W_4 + R_4$ 混和元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形 (如圖 5-24)



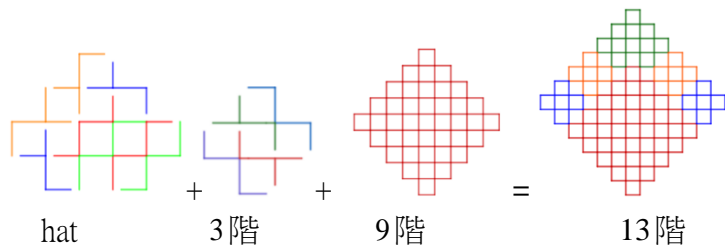


圖 5-24 W_4+R_4 混和元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形

(2) P_4+O_4 混和元件可覆蓋 $(2t+1)$ (t 為正整數) 階的解

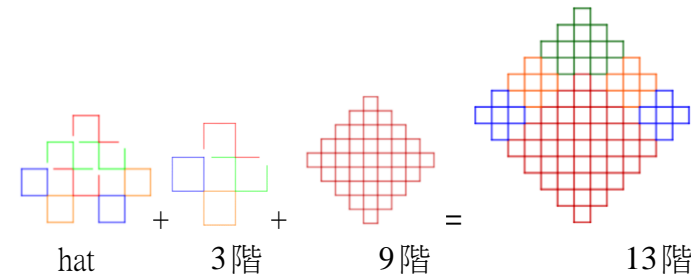
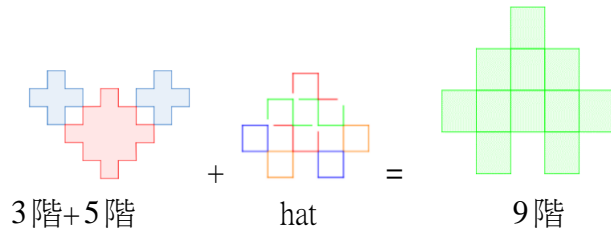
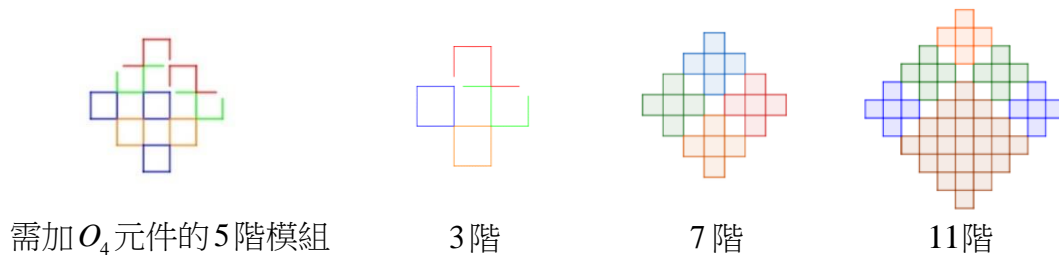


圖 5-25 P_4+O_4 混和元件可覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石圖形

任取兩種組合繁多，其他圖形分析請參考研究日誌。

伍、研究成果

研究發現能透過不同元件組成，來覆蓋各種矩形或鑽石圖形，確定有解的圖形如下：

一、二棒可覆蓋的網格圖形： (x) 代表無解情形、 (v) 代表有解情形

矩形、阿茲特克鑽石的單一元件解、兩種元件 1:1 混合解之延伸圖形：

	L_2	I_2	L_2+I_2
矩形	$n \times n (v)$	(x)	$4n \times 4n (v)$ $(4n+1) \times (4n+1) (x)$ $(4n+2) \times (4n+2) (x)$ $(4n+3) \times (4n+3) (v)$
鑽石	$(2t+1)$ 階 (v)	(x)	$(4t+1)$ 階 (v)

二、三棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 矩形、阿茲特克鑽石的單一元件解之延伸圖形：

單一	I_3	L_3	T_3	N_3	U_3
矩形	(x)	(x)	$6n \times 6n$ (v) $(6n+1) \times (6n+1)$ (x) $(6n+2) \times (6n+2)$ (v) $(6n+3) \times (6n+3)$ (x) $(6n+4) \times (6n+4)$ (x) $(6n+5) \times (6n+5)$ (x)	(x)	$6n \times 6n$ (x) $(6n+1) \times (6n+1)$ (x) 2x2(特例) $(6n+2) \times (6n+2)$ (x) $(6n+3) \times (6n+3)$ (v) $(6n+4) \times (6n+4)$ (x) $(6n+5) \times (6n+5)$ (v)
鑽石	(x)	(x)	(x)	$(6t+5)$ 階(v)	$(6t+5)$ 階(v)

(二) 矩形、阿茲特克鑽石的任取兩種元件 1 : 1 混合解之延伸圖形：

混合	N_3+L_3	N_3+T_3	L_3+T_3	N_3+U_3
矩形	2x2(v)、 3x3(v)、5x5(v)	3x3(v) 5x5(v)	$(12n+5) \times (12n+5)$ (v) $(12n+9) \times (12n+9)$ (v)	
鑽石		$(6t+5)$ 階(v)		$(6t+5)$ 階(v)
混合	T_3+I_3	L_3+U_3	U_3+T_3	U_3+I_3
矩形	$3n \times 3n$ (v) $(3n+1) \times (3n+1)$ (x) $(3n+2) \times (3n+2)$ (x)	2x2(v)、 3x3(v)、5x5(v)	$5 \times (12n+5)$ (v)	$3n \times 3n$ (v) $(3n+1) \times (3n+1)$ (x) $(3n+2) \times (3n+2)$ (x)
鑽石		$(6t+5)$ 階(v)	$(6t+5)$ 階(v)	

三、四棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 矩形、阿茲特克鑽石的單一元件解之延伸圖形：

	I_4	L_4	H_4
矩形	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	3×3 (x) $(4n+1) \times (4n+1)$ (x) $(4n+2) \times (4n+2)$ (x)
鑽石(階)	$(2t+1)$ (x)	$(2t+1)$ (x)	$(4t+3)$ (v) $(4t+1)$ (x)
	Y_4	J_4	N_4
矩形	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)
鑽石(階)	$(2t+1)$ (x)	$(4t+3)$ (v) $(4t+1)$ (x)	$(2t+1)$ (x)

	T_4	W_4	O_4	V_4	Z_4
矩形	$n \times n(x)$	$n \times n(x)$	$n \times n(x)$	$n \times n(x)$	$n \times n(x)$
鑽石(階)	$(2t+1)(x)$	$(4t+1)(x)$ $(4t+3)(v)$	$(2t+1)(v)$	$(2t+1)(x)$	$(2t+1)(x)$
	F_4	P_4	R_4	X_4	U_4
矩形		$2n \times 2n(x)$	$n \times n(x)$	$n \times n(x)$	$n \times n(x)$
鑽石(階)	$(4t+1)(x)$	$(4t+1)(x)$ $(4t+3)(v)$	$(4t+1)(x)$ $(4t+3)(v)$	$(2t+1)(x)$	$(2t+1)(x)$

(二)矩形的兩種元件混合通解： 註：在上表中 W_4 、 P_4 、 R_4 額外加一個 O_4 後，均可使 $(2t+1)$ 階鑽石有解。

混合	$H_4 + F_4$	$J_4 + F_4$	$I_4 + F_4$	$V_4 + H_4$	$H_4 + O_4$	$F_4 + O_4$
矩形	$4n \times 4n(v)$ $5 \times (4n+1)(v)$	$4n \times 4n(v)$ $5 \times (4n+1)(v)$	$4n \times 4n(v)$	$2 \times (4n+2)(v)$ $2n \times 2n(v)$ $6n \times 6n(v)$ $6 \times (4n+2)(v)$	$3 \times (3+4n)(v)$	$n \times n(v)$

(三) 阿茲特克鑽石的兩種元件混合通解(額外加 O_4)：

$(2t+1)$	$(6t+5)$	$(4t+3)$
$(W_4 + W_4)$ 、 $(W_4 + O_4)$ 、 $(W_4 + P_4)$ 、 $(W_4 + R_4)$ 、 $(W_4 + X_4)$ 、 $(O_4 + W_4)$ 、 $(O_4 + O_4)$ 、 $(O_4 + P_4)$ 、 $(P_4 + F_4)$ 、 $(P_4 + P_4)$ 、 $(R_4 + R_4)$	$(H_4 + W_4)$ 、 $(N_4 + W_4)$ 、 $(J_4 + W_4)$ 、 $(O_4 + R_4)$ 、 $(O_4 + H_4)$ 、 $(O_4 + J_4)$ 、 $(F_4 + H_4)$ 、 $(F_4 + J_4)$ 、 $(P_4 + R_4)$ 、 $(P_4 + H_4)$ 、 $(P_4 + N_4)$ 、 $(P_4 + U_4)$ 、 $(H_4 + J_4)$	$(J_4 + J_4)$ 、 $(H_4 + H_4)$

陸、結論

- 一、 本研究作品與原先文獻覆蓋方式不同，是以單一元作或任取兩種元件組合來覆蓋圖形，透過計算棒數及使用圖形組合等數學方法來列舉證明圖形成功與否，比起文獻使用電腦嘗試與演算，增添更多數學探討可能性。
- 二、 在歷屆科展作品中，顯少有此研究，故本次研究改變原具有獨創性及研究價值，創造出不同的益智遊戲玩法。
- 三、 可利用各模組圖形，製作出幾何磁磚或窗花藝術作品，在生活中的擺飾品或杯墊等文創作品。因為我們可透過組合起來的模組，無限延伸的重疊與對稱性，可以排出美麗的幾何圖案，不論是矩形或阿茲特克圖形，能夠應用在磁磚和窗花設計上，研究作品不但具科學價值，也充滿藝術的品味。

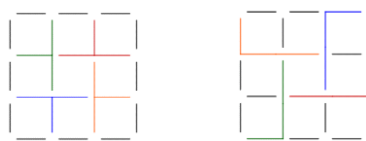
四、未來可繼續朝以下幾個方向研究：

(一)利用電腦程式試出各類可覆蓋情形的**多種解法**加以紀錄，並繼續完整呈現**四棒各種元件組合的解及解的個數**。

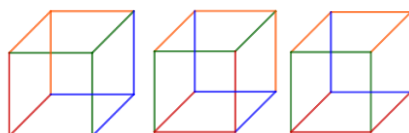
(二)將正方形推至矩形的探討，探究其**對稱性質**或**重覆遞迴特性**。例如：2×10、3×7矩形的混合元件解法。



(三)研討在固定圖形中，放入**最多可放入的元件個數**。例如在 3×3 矩形，最多可放入 4 個 T 或 4 個 L 元件。



(四)推廣至 **3D 圖形**的解，以特定的三棒元件，能覆蓋立方體所有的邊。



柒、參考資料

[1]陳文錫-智巧板，2009，<https://blog.udn.com/chendon/3411491>

[2]益智曲型拼盤（845 Combinations, The Tetra-Stick puzzle）- puzzle,
<https://blog.udn.com/puzzlez/4708321>

[3]高文山-美麗的拼圖 The most Beautiful Solution,2001,
<https://o6dmdu8wwmhqqfbxzuzk0a.on.drv.tw/MyWeb/note3.htm>

[4]Donald E. Knuth, “Dancing Links” (2000)p.16-20

[5]Alfred Wassermann-Covering the Aztec Diamond with One-sided Tetrasticks Extended Version(2000)

[6]PolyForm 解謎器 <https://www.jaapsch.net/puzzles/polysolver.htm>

[7]TetraSticks <https://taylorjg.github.io/dlplib-demos/#/demo/tetrasticks>

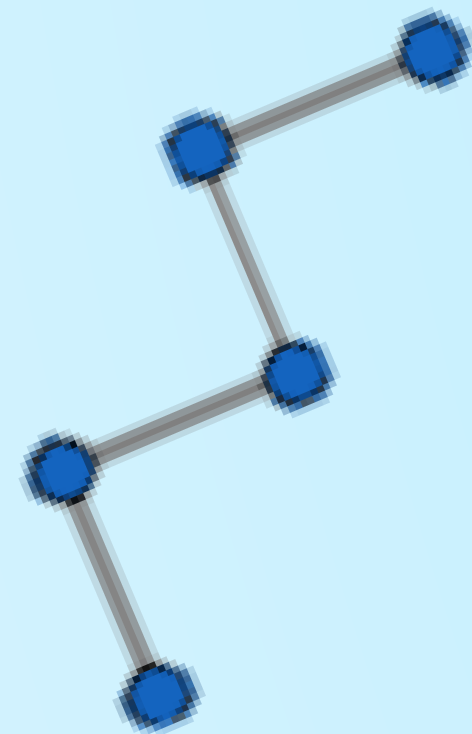
註：整份作品中的照片及圖片均為作者親自製作。

【評語】 030422

本作品主要探討將利樂棒填入不同之矩形及阿茲特克鑽石網格圖形，研究重點放在以二棒、三棒、四棒的單一或任取兩種元件分別探討不同比例的組合，可成功覆蓋圖形的條件。作品屬於組合數學中給定拼片與區域的拼圖 (tiling) 問題，此類問題首先要能判斷是否能成功覆蓋，作者先以數論的手法，輔以相關位置著色的技巧，屏除一些不可能完整覆蓋的情形；再利用歸納法論證可完整覆蓋的條件。作品有趣，但側重觀察，歸納，其數學難度不高，但作者應花了很大心力做觀察。未來也許可以考慮進一步分析結構或討論拼法數，會有更多的數學內容。

作品簡報

四角網格



利樂棒自的探討

壹、前言

此研究探討將利樂棒填入**矩形及阿茲特克鑽石網格圖形**，並著重在二棒、三棒、四棒及其組合是否能成功覆蓋圖形格線。本研究利用著色法、窮舉法、遞迴式及數學歸納法等**分析成功覆蓋的擴展性及無解原因**。

一、研究動機

在準備獨立研究課程報告時，於書店找到crazy curves這款益智玩具(圖1)，加上我們對於「**以單一元件，或任取兩種元件，能否成功覆蓋網格或阿茲特克鑽石網格**」想一探究竟，故以此做為我們的研究主題。

圖1 crazy curves



二、研究目的

探討利樂棒二棒、三棒、四棒可覆蓋的四角網格圖形：

1. 探討矩形的單一元件解、兩種元件混合解及延伸圖形。
2. 探討阿茲特克鑽石的單一元件解、兩種元件1:1混合解及延伸圖形。
3. 探討無法覆蓋圖形之原因。

三、文獻探討

1. 學者高文山整理與父親高義勇研究的弧線拼板(segment puzzle)覆蓋 5×5 矩形，並討論其對稱性找出多種解法(高文山,2001年)。
2. Donald E. Knuth以演算法用電腦程式找出以四棒10種元件覆蓋 4×4 矩形83種解法。
3. Alfred Wassermann也以電腦程式找出以混合四棒元件覆蓋9階鑽石圖形的解法。
4. 常見的多連方塊是**覆蓋方格面積(圖2)**，而本研究主要是探討**覆蓋網格格線(圖3)**。

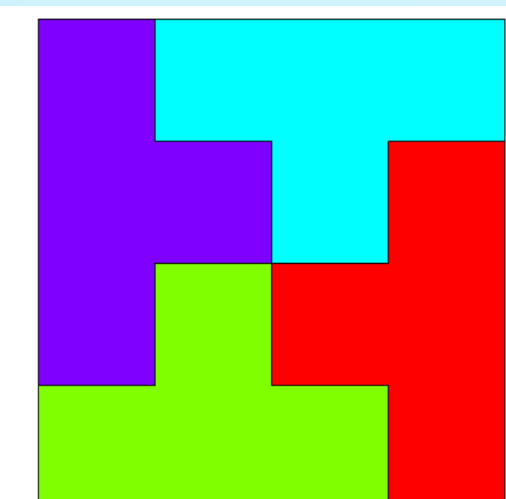


圖2 覆蓋方格

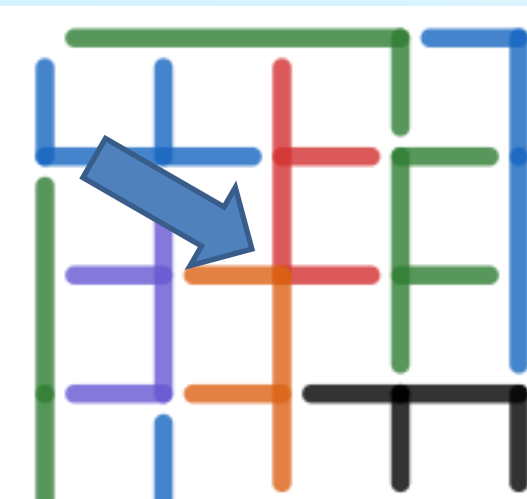


圖3 覆蓋格線

貳、預備知識

一、利樂棒的單一元件定義：

我們依形狀及棒數分別予以英文字母代號命名，例如 L_2 代表單一元件 L 的二棒利樂棒。

二、各種圖形的棒數計算：

(一) 矩形圖形：在長為 n 、寬為 m ，則此矩形共有 $(n + 1) \times m + (m + 1) \times n$ 棒。

例：當 $n = 4$ 、 $m = 3$ ，共有 $(4 + 1) \times 3 + (3 + 1) \times 4 = 31$ 棒(圖4)。

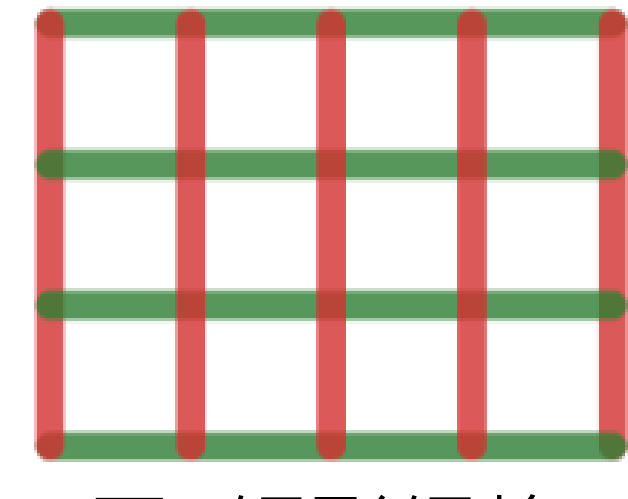


圖4 矩形網格

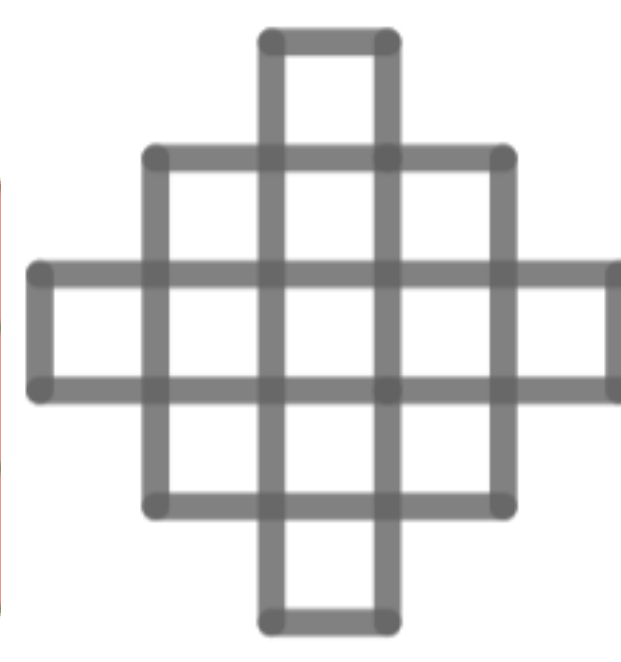


圖5 鑽石網格

(二) T 階阿茲特克鑽石圖形：鑽石階數定義為中間層的最大格數，且 T 必為奇數，

鑽石圖形中棒數排列形式都是以 $1、2、3、...、T、T + 1、T、...3、2、1$ ，且 $T + 1$ 必為偶數。棒數總數 = $\frac{(1+T)T}{2} \times 2 + (T + 1) = (T + 1) \times (T + 1)$ ，且必為4的倍數(圖5)。

參、研究結果

一、二棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 單一元件 L_2 可成功覆蓋 $n \times n$ 矩形：只需在前一個矩形向外加一層依下圖規律即可無限延伸進行覆蓋(圖6)。

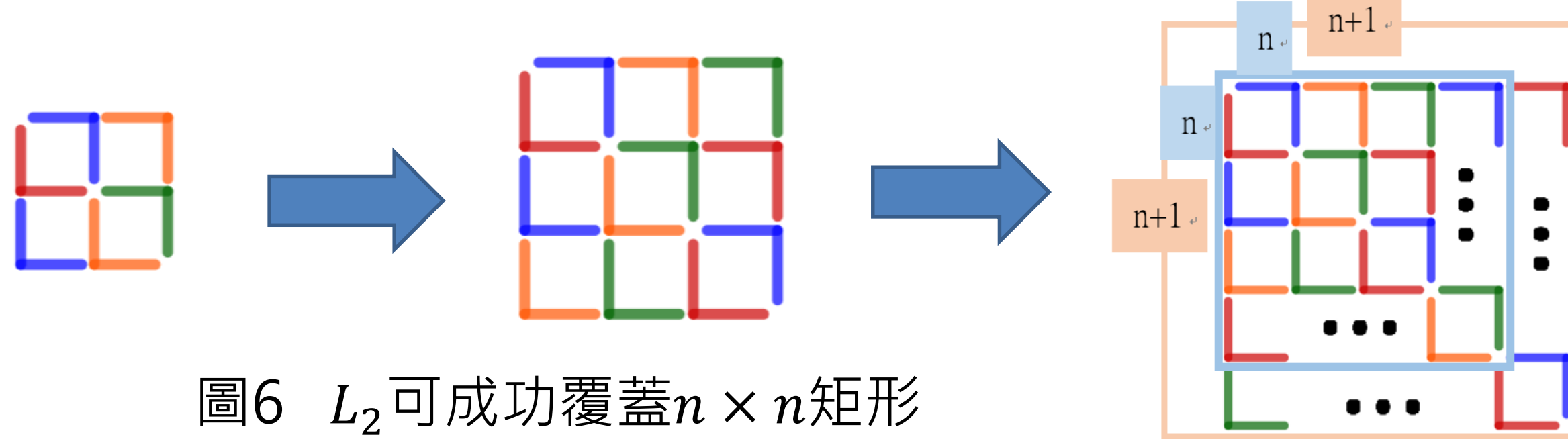


圖6 L_2 可成功覆蓋 $n \times n$ 矩形

(二) $L_2 + I_2$ (兩者數量比例1:1)混合解：分為 $(4n + 3) \times (4n + 3)$ 和 $4n \times 4n$ 兩種方法的無限延伸方式(圖7、圖8)。

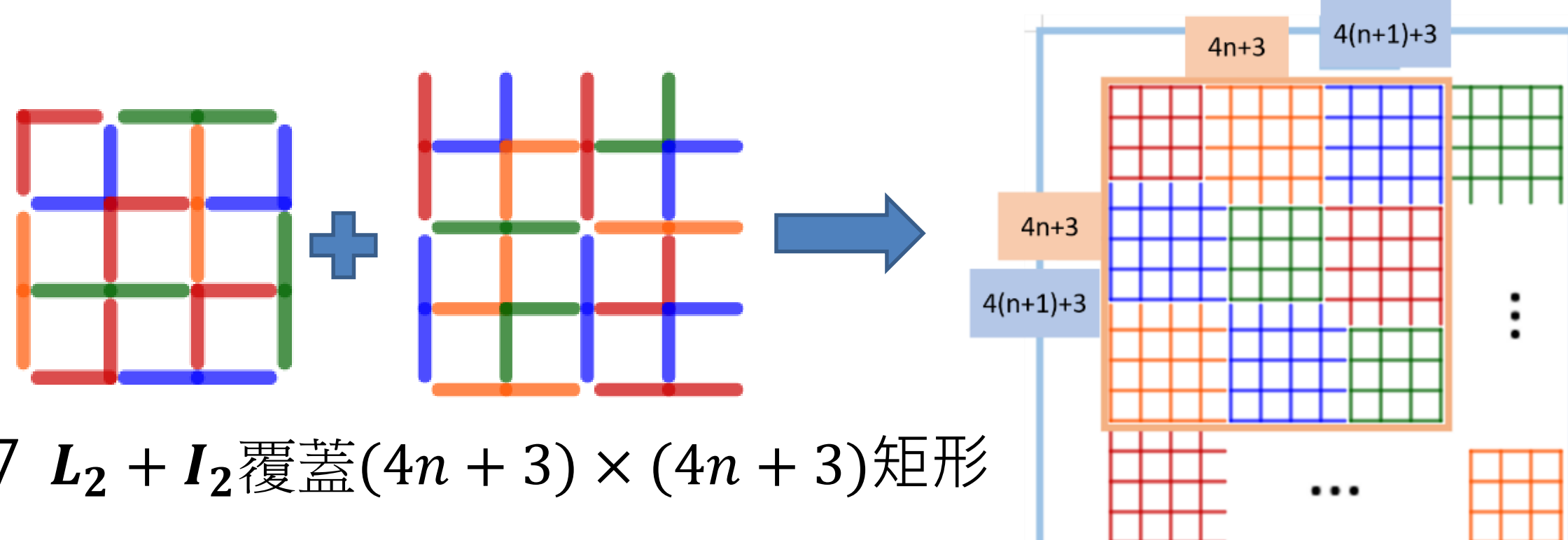


圖7 $L_2 + I_2$ 覆蓋 $(4n + 3) \times (4n + 3)$ 矩形

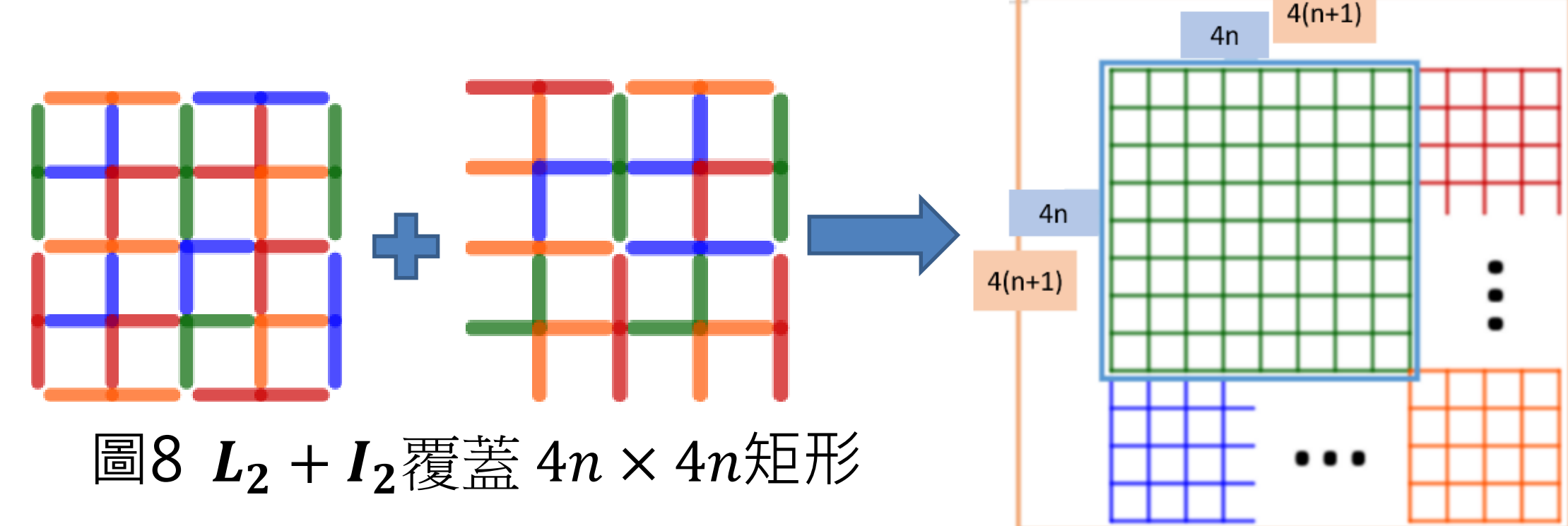


圖8 $L_2 + I_2$ 覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

二、三棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 單一元件解：以單一元件 U_3 為例，可成功覆蓋 $(6n + 3) \times (6n + 3)$ 和 $(6n + 5) \times (6n + 5)$ 矩形(圖9、圖10)。

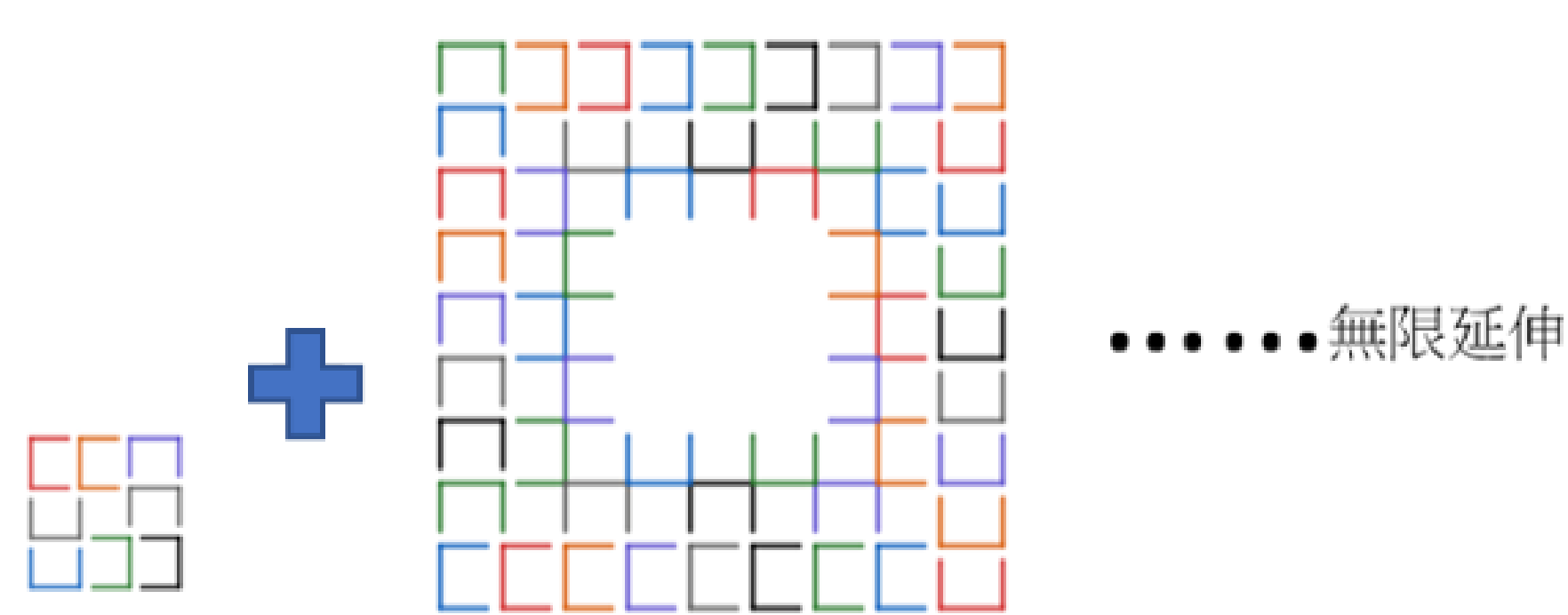


圖9 U_3 覆蓋 $(6n + 3) \times (6n + 3)$ 矩形

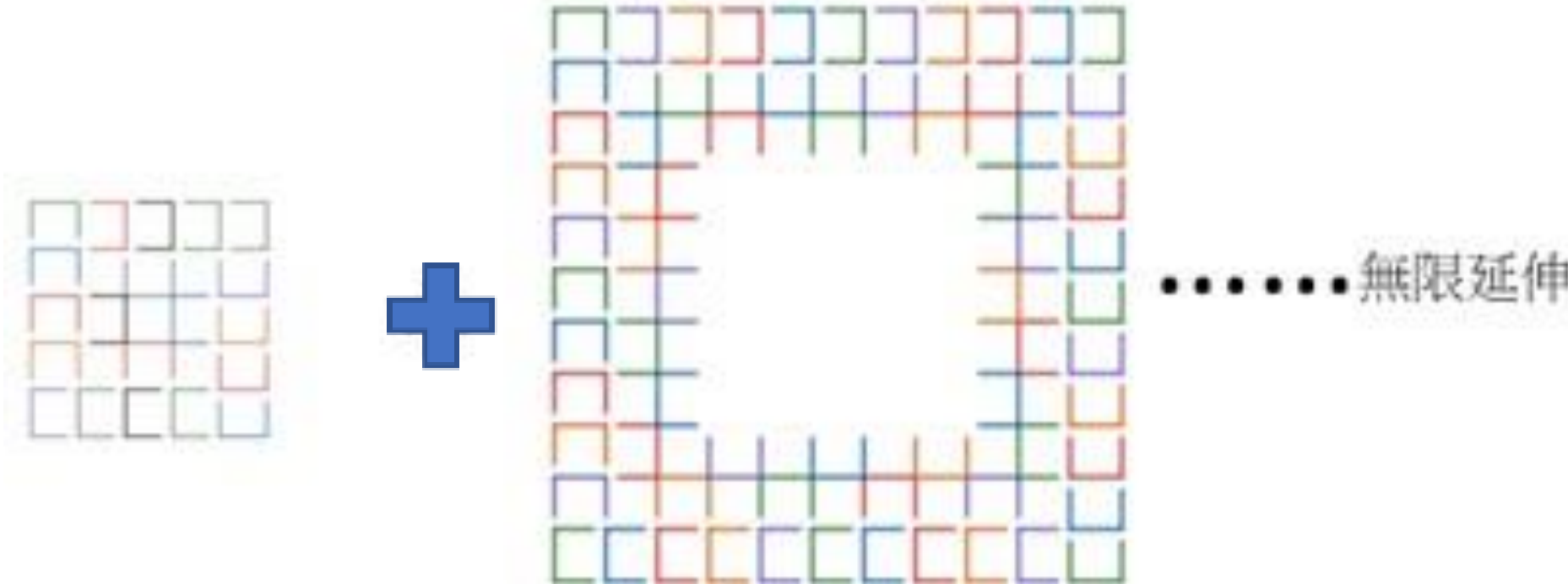


圖10 U_3 覆蓋 $(6n + 5) \times (6n + 5)$ 矩形

(二) 三棒混和解：以 $I_3 + T_3$ 以及 $I_3 + U_3$ 為例，可覆蓋 $3n \times 3n$ 矩形(圖11、圖12)。

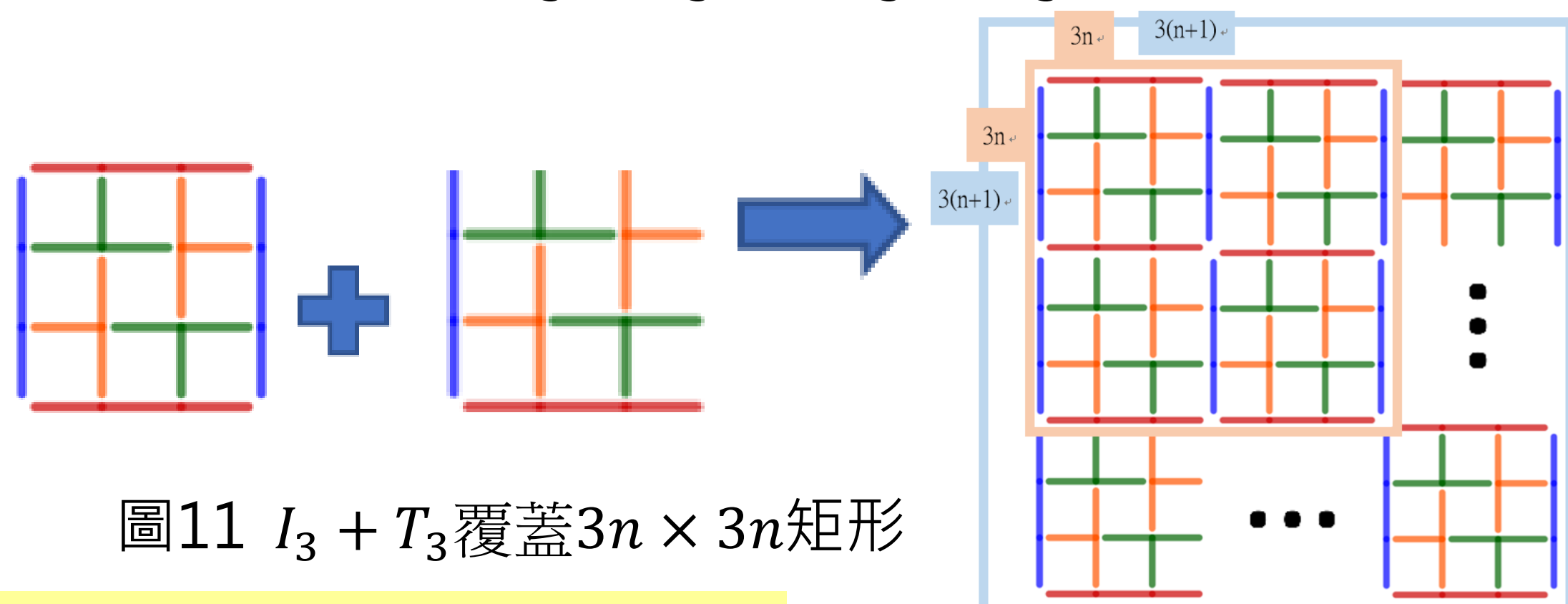


圖11 $I_3 + T_3$ 覆蓋 $3n \times 3n$ 矩形

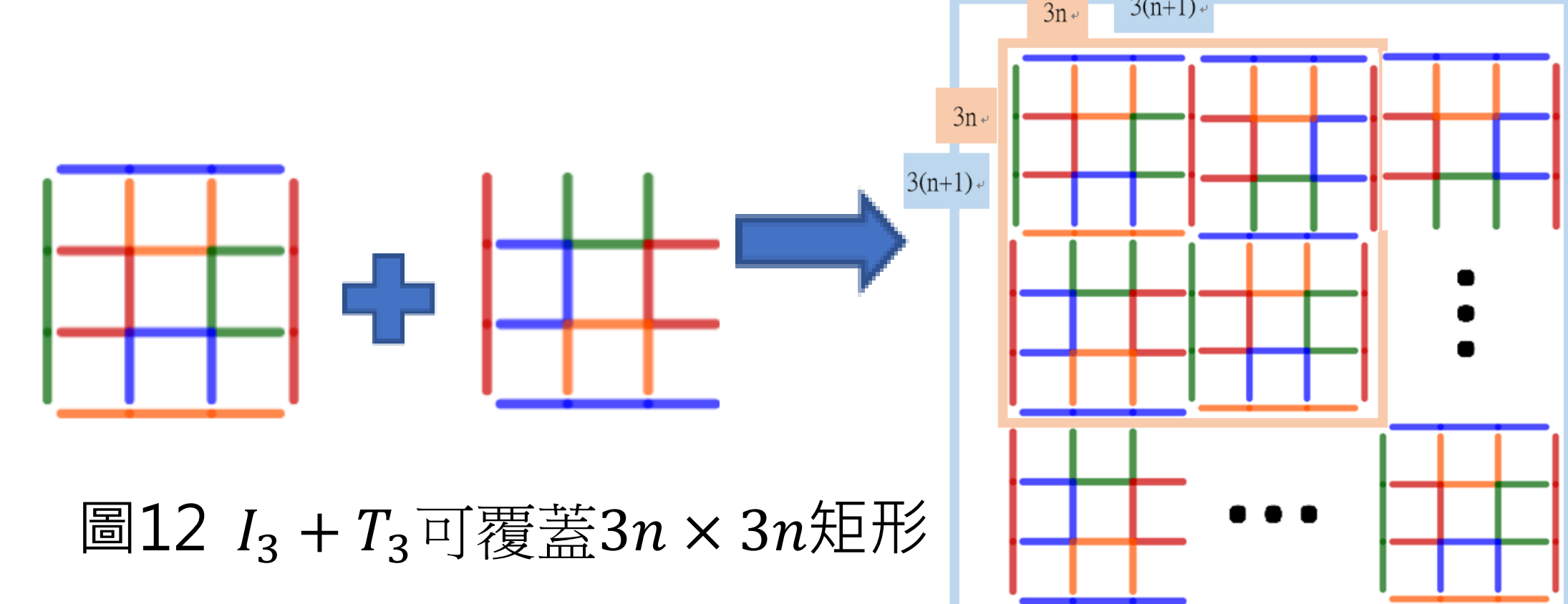


圖12 $I_3 + U_3$ 可覆蓋 $3n \times 3n$ 矩形

三、四棒可覆蓋的網格圖形：

(一) 兩種元件混和覆蓋矩形成功的解法：

研究發現，分為單向無限延伸的 $4 \times 4n$ 、 $5 \times (4n + 1)$ 、 $2 \times (4n + 2)$ 、 $6 \times (4n + 2)$ 、 $3 \times (4n + 3)$ 矩形覆蓋，以及非單向無限延伸的 $n \times n$ 、 $6n \times 6n$ 、 $2n \times 2n$ 、 $4n \times 4n$ 矩形覆蓋，舉下列幾種圖形說明：

1. 以 $4n \times 4n$ 為例：只要沿著對角線、右側及下側的部分填充，即可形成 $4n \times 4n$ 無限延伸(圖13、圖14、圖15)

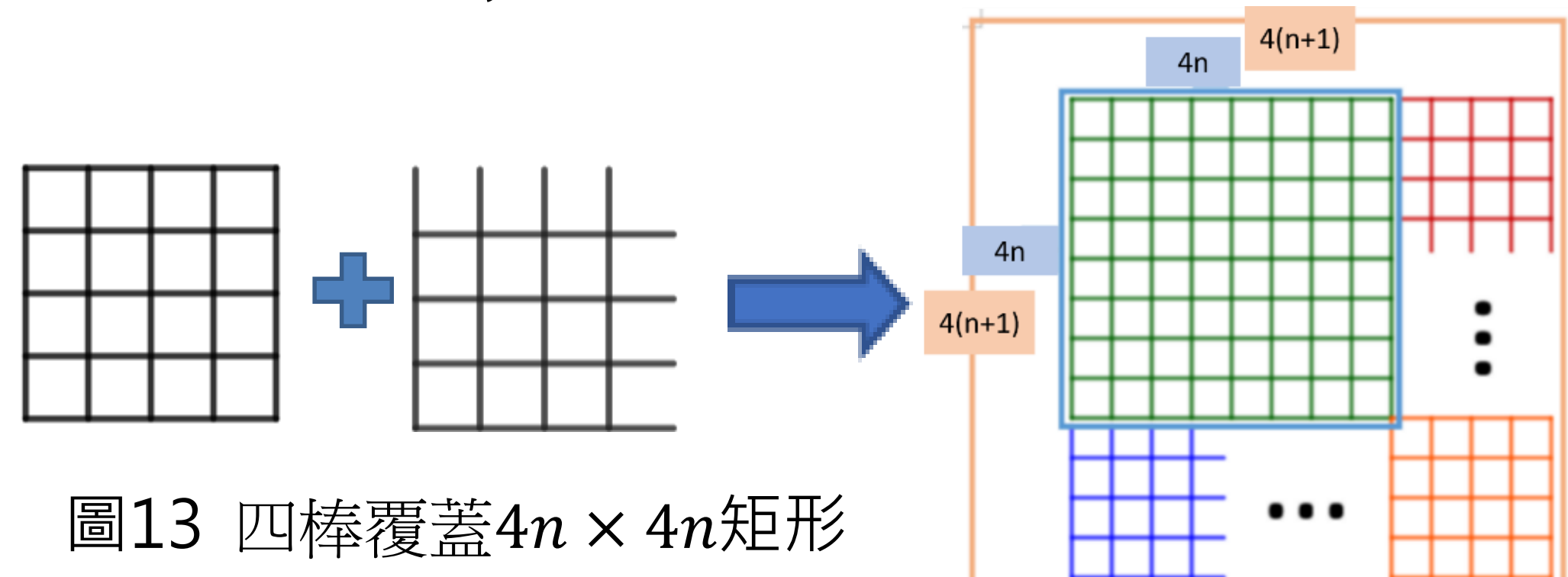


圖13 四棒覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

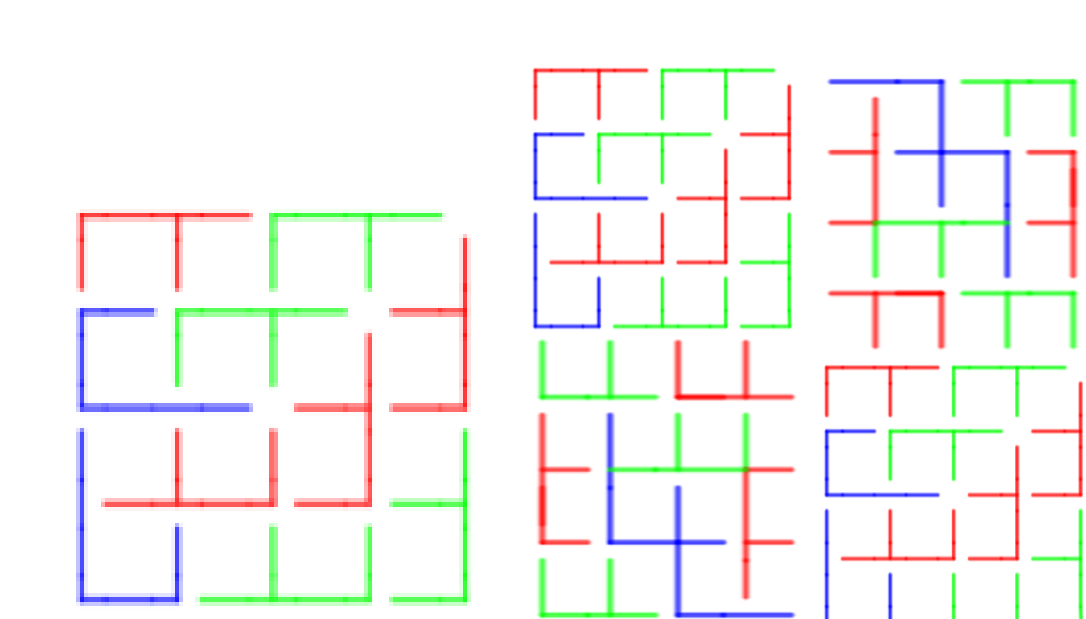


圖14 $J_4 + F_4$ 覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

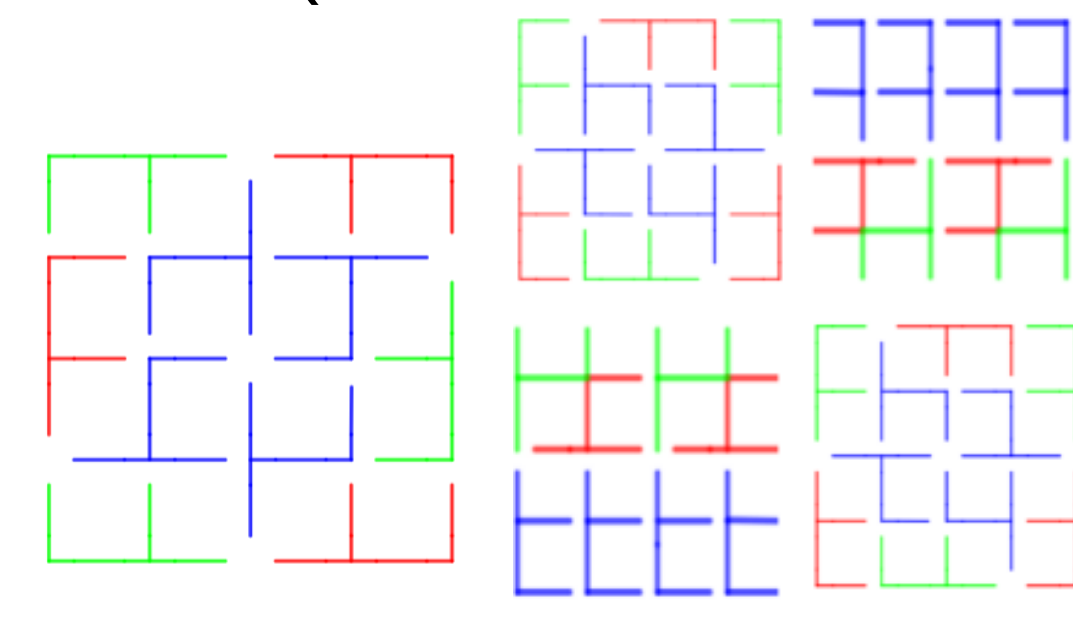


圖15 $H_4 + F_4$ 覆蓋覆蓋 $4n \times 4n$ 矩形

2.以 $2n \times 2n$ 為例：與 $4n \times 4n$ 雷同，只差在對角線和側邊所增加的長度不同(圖16、圖17)。

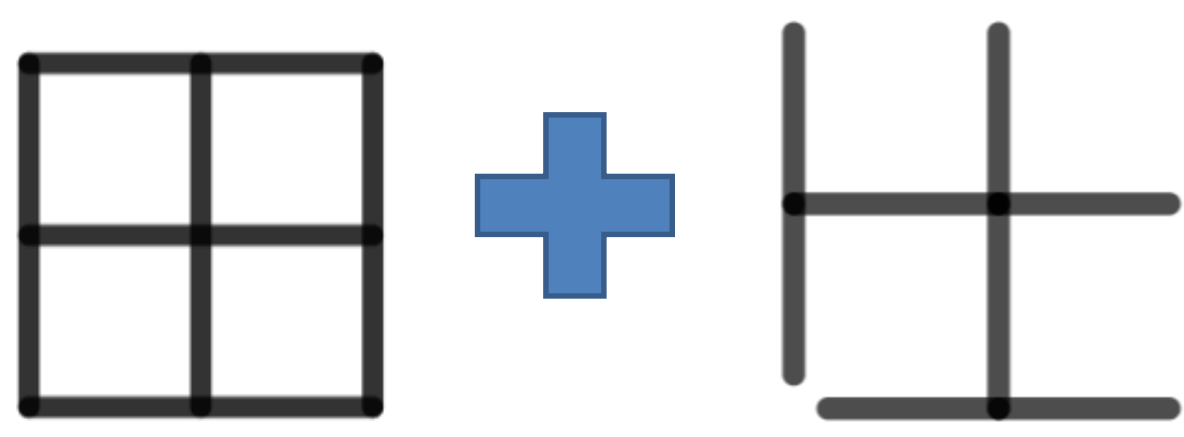


圖16 四棒覆蓋 $2n \times 2n$ 矩形

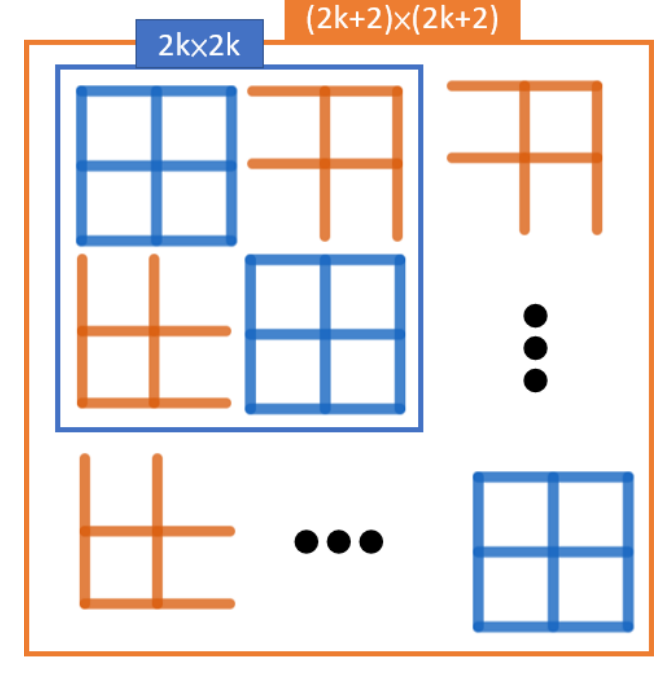


圖17 $H_4 + V_4$ 覆蓋 $2n \times 2n$ 矩形

3.以 $F_4 + O_4$ 覆蓋 $n \times n$ 矩形為例：可分為當 n 為奇數及 n 為偶數兩種延伸方法(圖18、圖19、圖20)

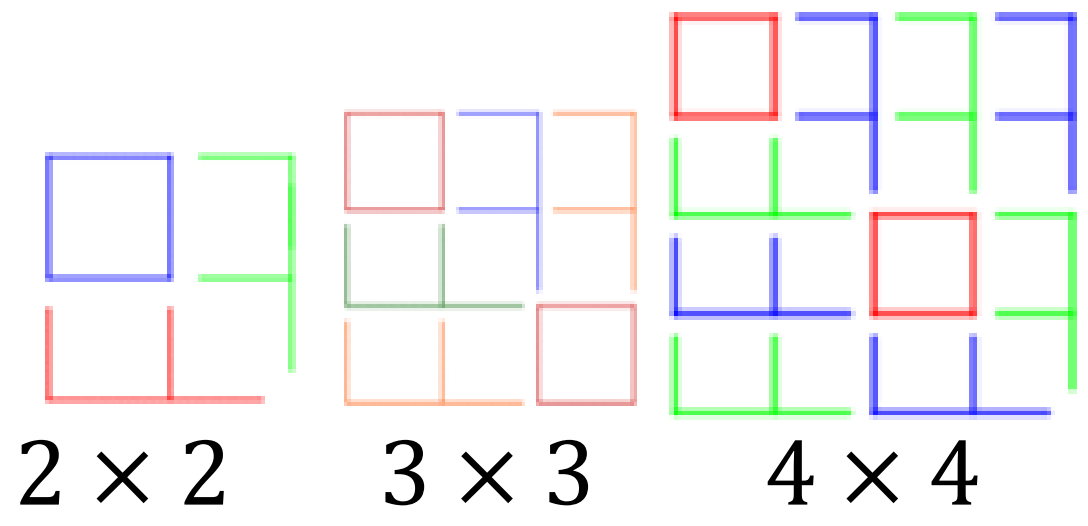


圖18 $F_4 + O_4$ 可覆蓋矩形

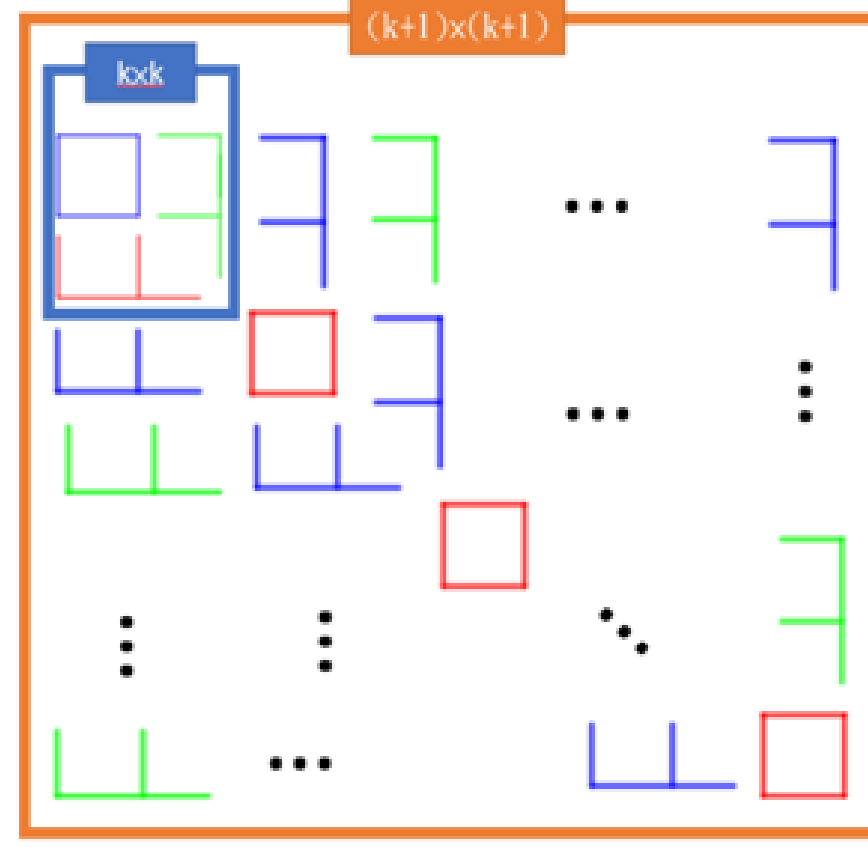


圖19 當 n 為奇數

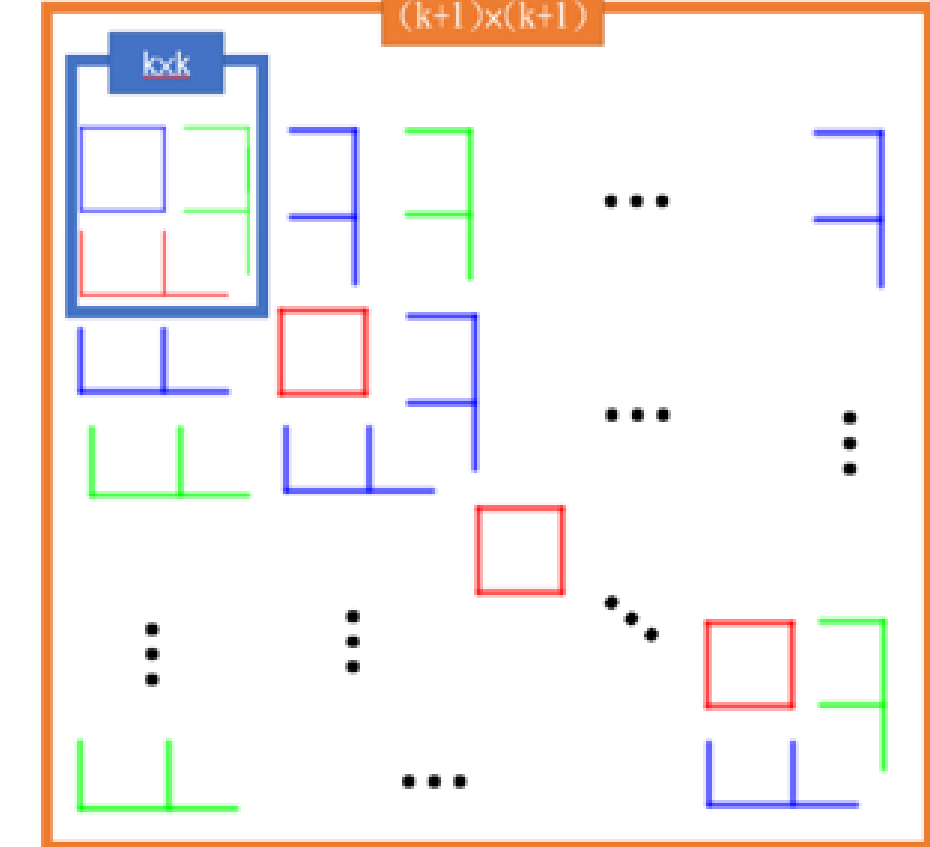


圖20 當 n 為偶數

(二)單一元件覆蓋網格圖形無解的原因:

1.單一元件覆蓋矩形無解的原因:

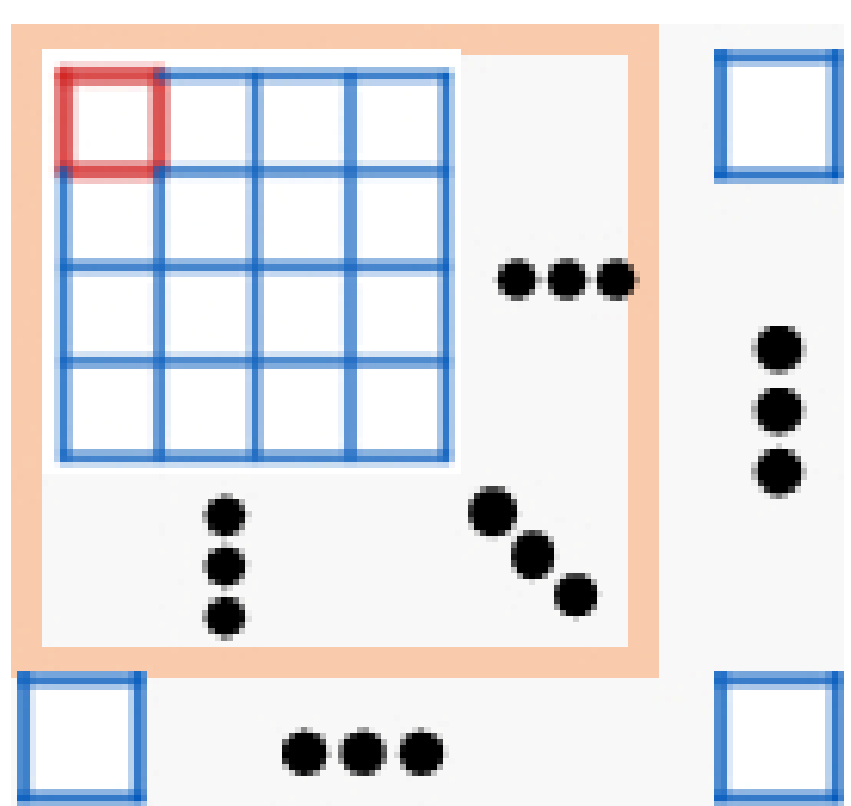


圖21

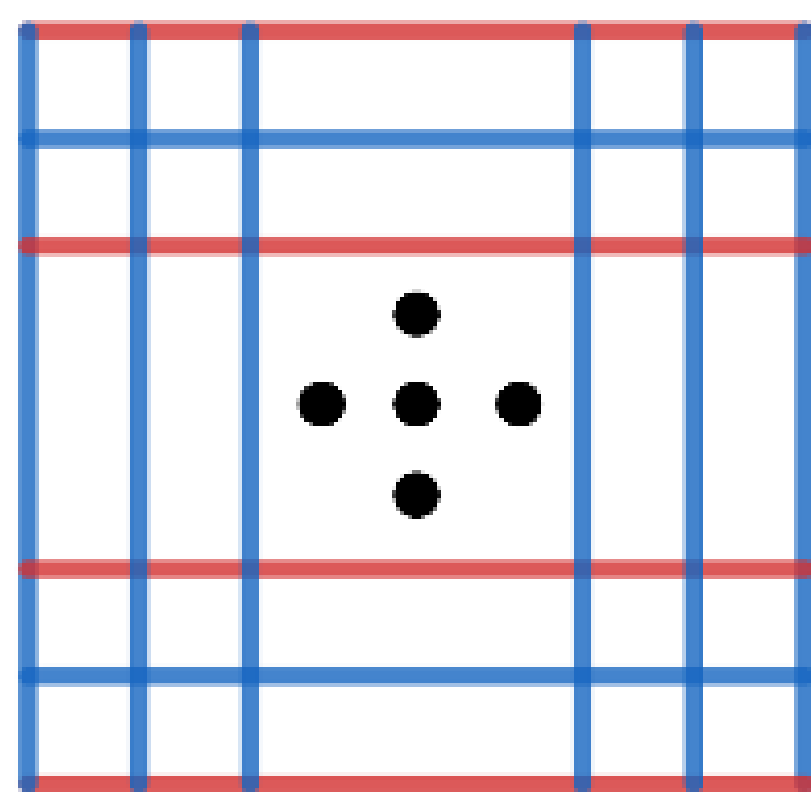


圖22

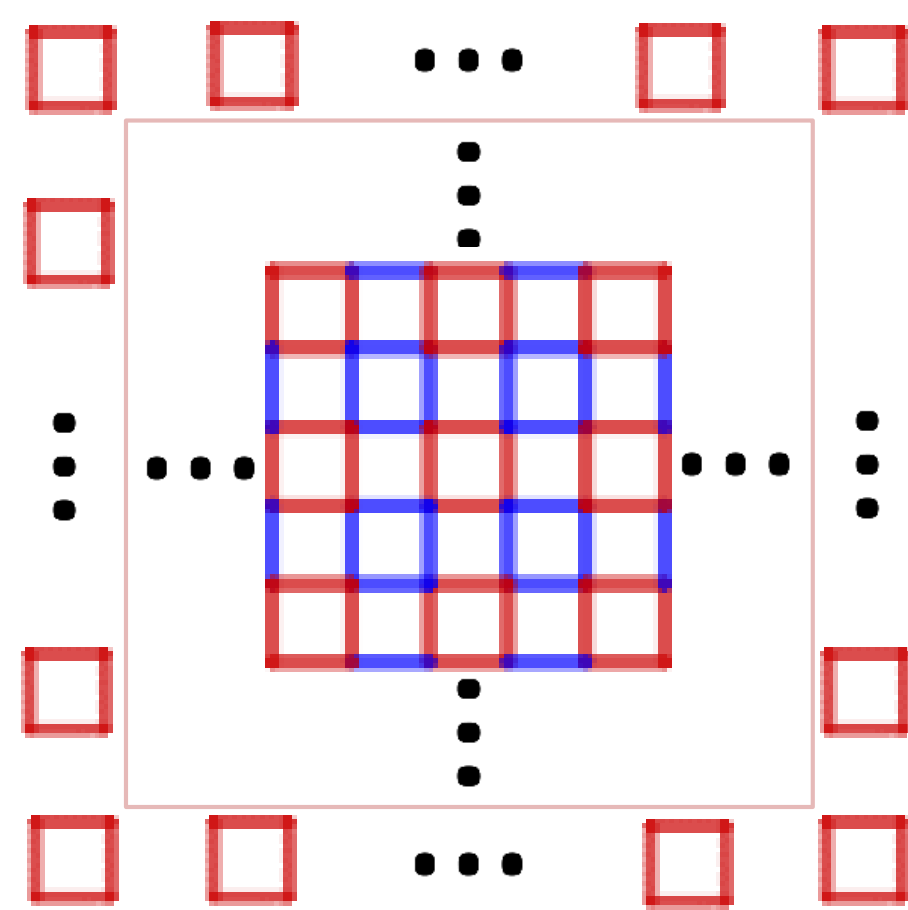


圖23

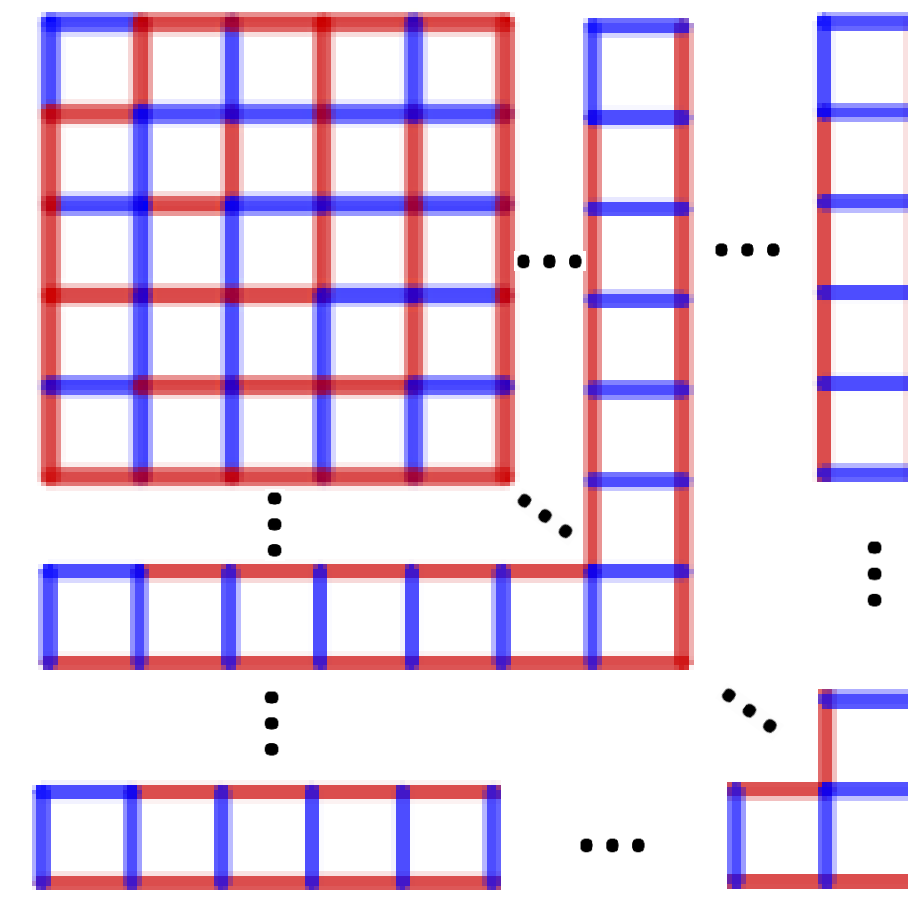


圖24

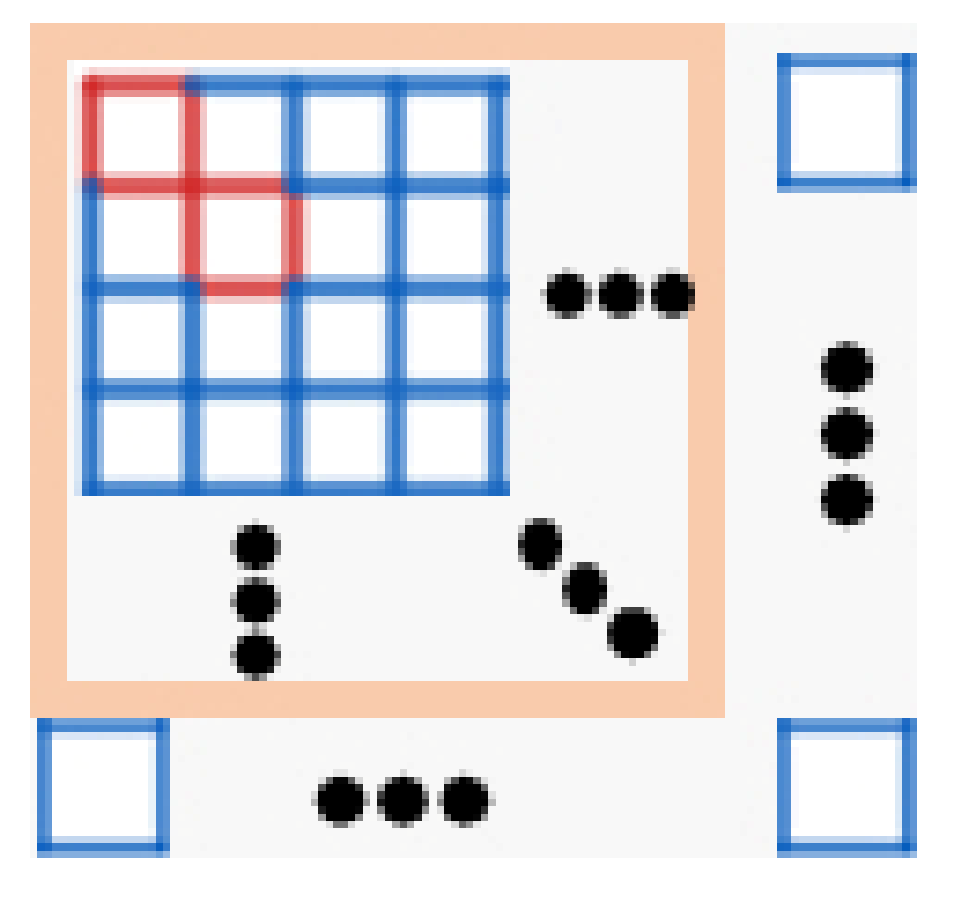


圖25

- (1) 如圖21，因單一元件 $T_4, I_4, L_4, R_4, U_4, V_4, X_4, Z_4$ 無法覆蓋到紅色線段，故無法覆蓋完全 $n \times n$ 矩形。
- (2) 如圖22， O_4, P_4, W_4 每一個元件覆蓋1紅3藍，而圖形的紅線：藍線 = $(k+1):(3k+1) \neq 1:3$ ，故均無法完全覆蓋 $2n \times 2n$ 矩形。同理，如圖23，可證明 W_4 無法完全覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形；如圖24，可證明 O_4 無法完全覆蓋 $(2n+1) \times (2n+1)$ 矩形。因此，無法以單一元件 O_4, W_4 覆蓋 $n \times n$ 矩形。
- (3) 如圖25，因 N_4 元件無法覆蓋到紅色線段，故無法完全覆蓋 $n \times n$ 矩形。

2.單一元件覆蓋鑽石無解的原因:

(1) H_4, J_4 無法覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石

【證明】 $(4t+1)$ 階有 $(4t+1+1)^2 = 2^2(2t+1)^2$ 棒，有 $2(2t+1)^2$ 條直棒、 $2(2t+1)^2$ 條橫棒。而 H_4, J_4 元件皆有相同特性，即擺放方法可覆蓋3直1橫或1直3橫。

假設有 a 個元件是覆蓋3直1橫，有 b 個元件是覆蓋1直3橫，得
$$\begin{cases} 3a + b = 2(2t+1)^2 \\ a + 3b = 2(2t+1)^2 \end{cases}$$
 且 a, b 均無整數解，

故上述 H_4, J_4 無法完全覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石。

(2) 無法以單一元件 W_4, R_4, F_4, P_4 覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石(如圖26)。

【證明】上述單一元件可覆蓋住2紅2藍，而 $(4t+1)$ 階圖形中，
紅線數量： $[1+3+\dots+(2t-1)+(2t+1)+(2t-1)\dots+3+1] \times 4 = 8t^2 + 8t + 4$
藍線數量： $(4t+1+1)^2 - (8t^2 + 8t + 4) = 8t^2 + 8t$
計算推得紅、藍線的數量不符合，故 W_4, R_4 元件均無法完全覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石。

(3) 無法以單一元件 F_4, P_4 覆蓋 $(4t+1)$ 階鑽石(如圖26)。

每一個 F_4 或 P_4 元件可覆蓋3紅1藍或1紅3藍，假設有 a 個元件是覆蓋住3紅1藍，有 b 個元件是覆蓋1紅3藍，以聯立二元一次方程式同理可推得無解。

(4) 無法以單一元件 $T_4, X_4, V_4, U_4, L_4, N_4, Y_4, I_4, Z_4$ 覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石(如圖27)。

因上述元件無法覆蓋到紅色線段，故上述元件均無法完全覆蓋 $(2t+1)$ 階鑽石。

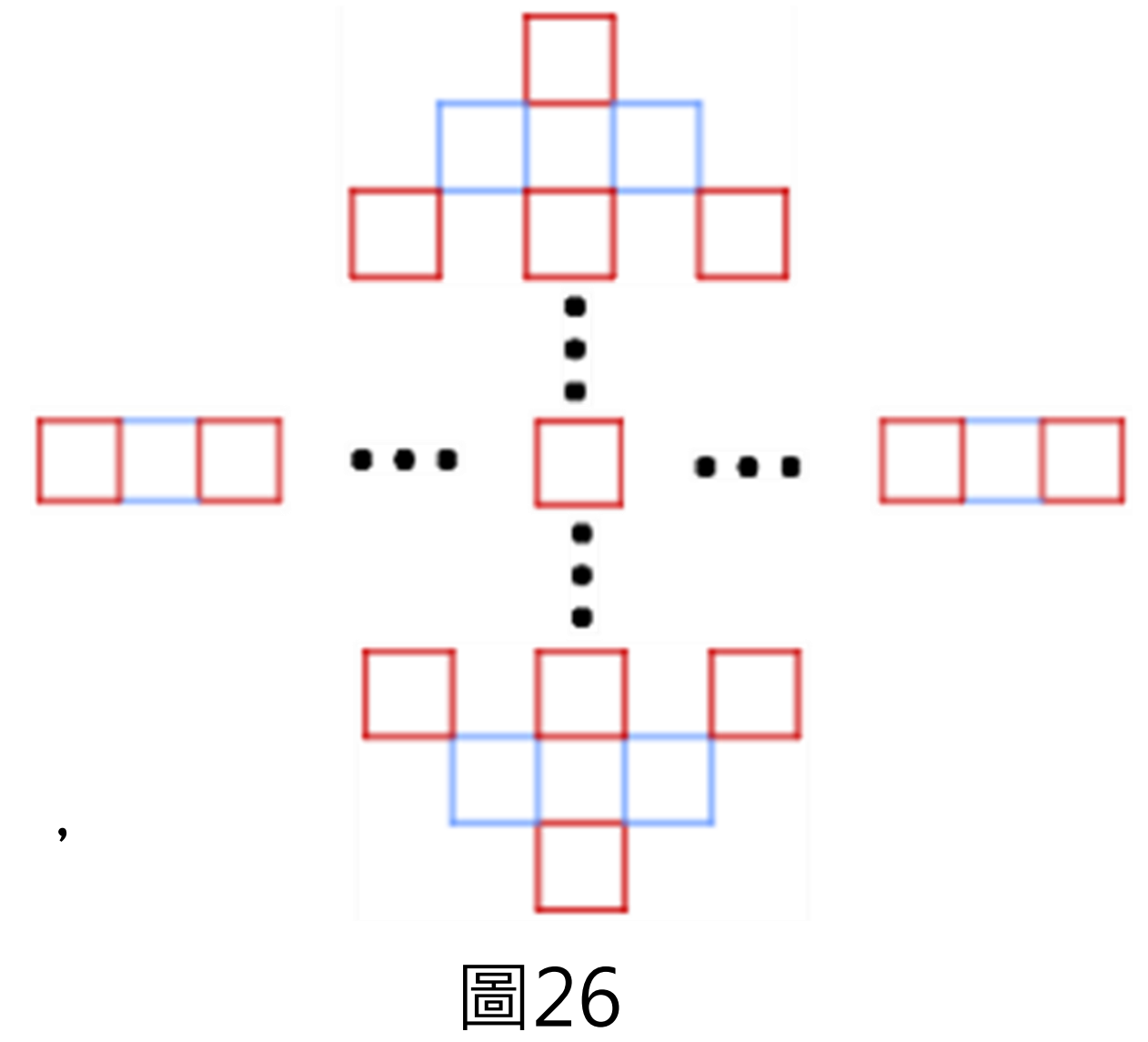


圖26

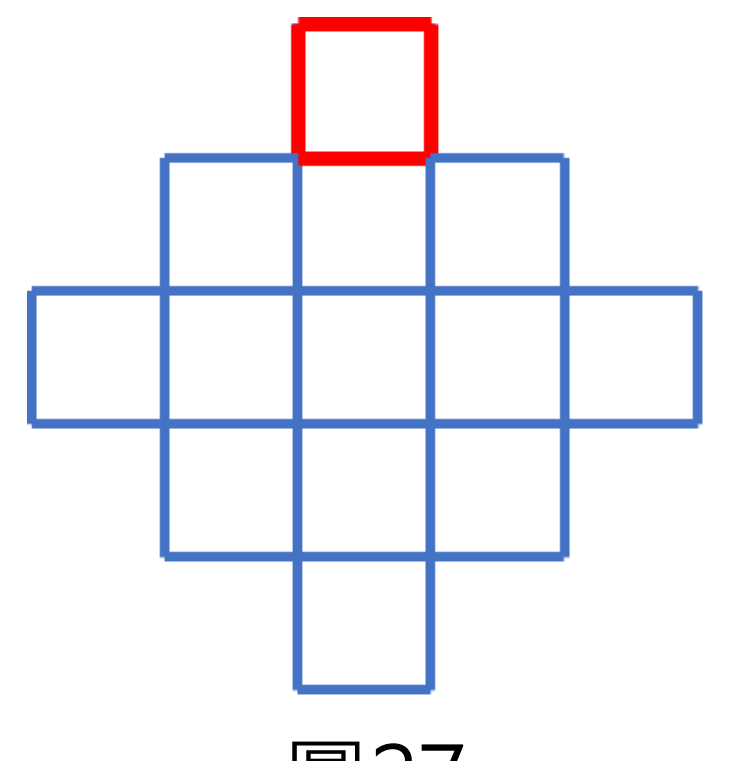


圖27

(三)無限延伸鑽石之情形：

部分圖形會以兩個方格為一個單位覆蓋，因此當3階鑽石不需要多加一個 O_4 元件，但當圖形的方格數為奇數時，正中間就會需要多加一個 O_4 元件。(圖28)

因為鑽石所有階數均為奇數，故我們將階數設成 $T = 2K + 1$ ，來加以分析，分成三種情況討論：

1. $K = 2, T = 2K + 1 = 5$ ，把5階圖形視為需要正中間加 O_4 元件的獨立模組。(圖29)
2. $K = 2t + 1, T = 4t + 3 (t \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ 。可透過3階圖形擴展成 $(4t+3)$ 階圖形。(圖30)
3. $K = 2t + 2, T = 4t + 5 (t \in \mathbb{N})$ 。將Hat模組合併3階、5階模組組成9階圖形，再透過9階圖形擴展成 $(4t+5)$ 階圖形。(圖31)

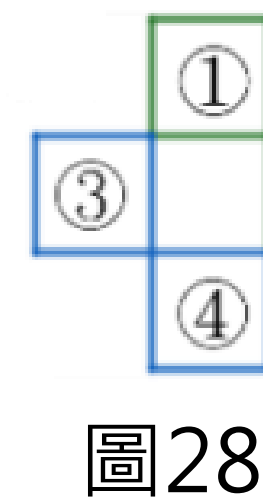


圖28

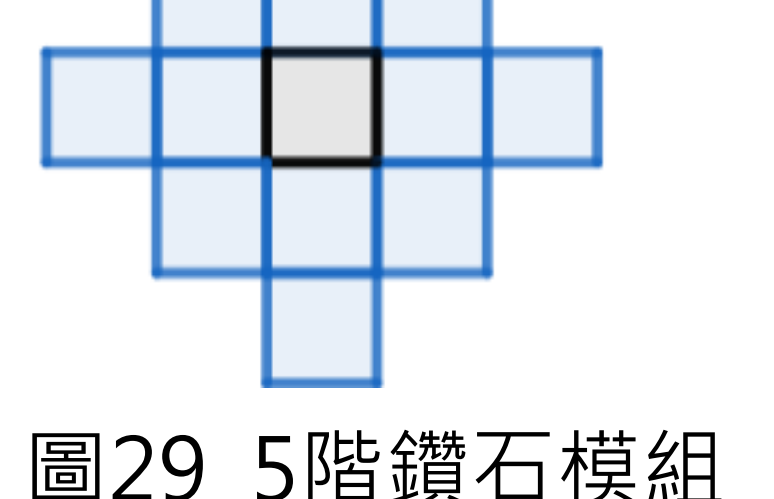


圖29 5階鑽石模組

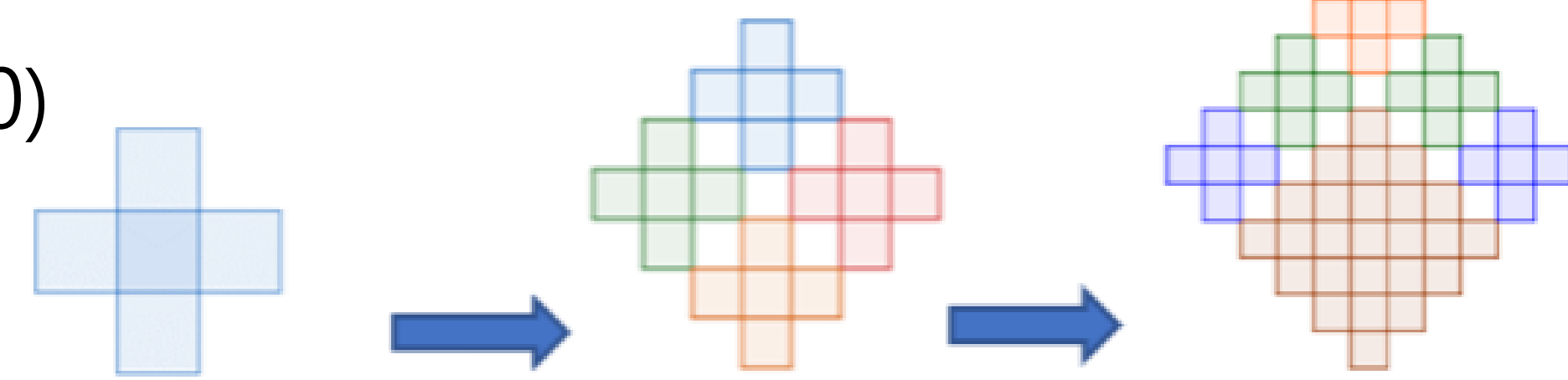


圖30 3階圖形擴展成 $(4t+3)$ 階圖形

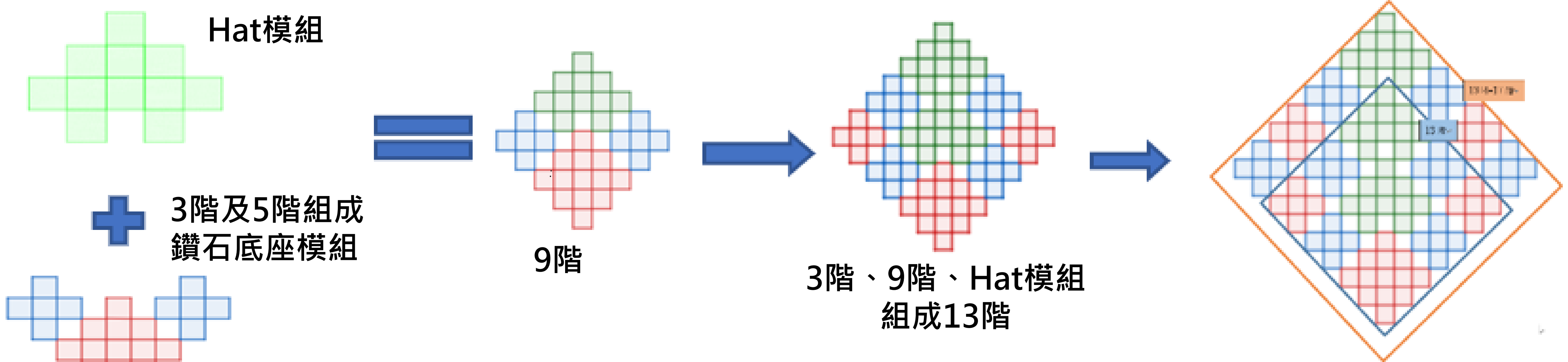
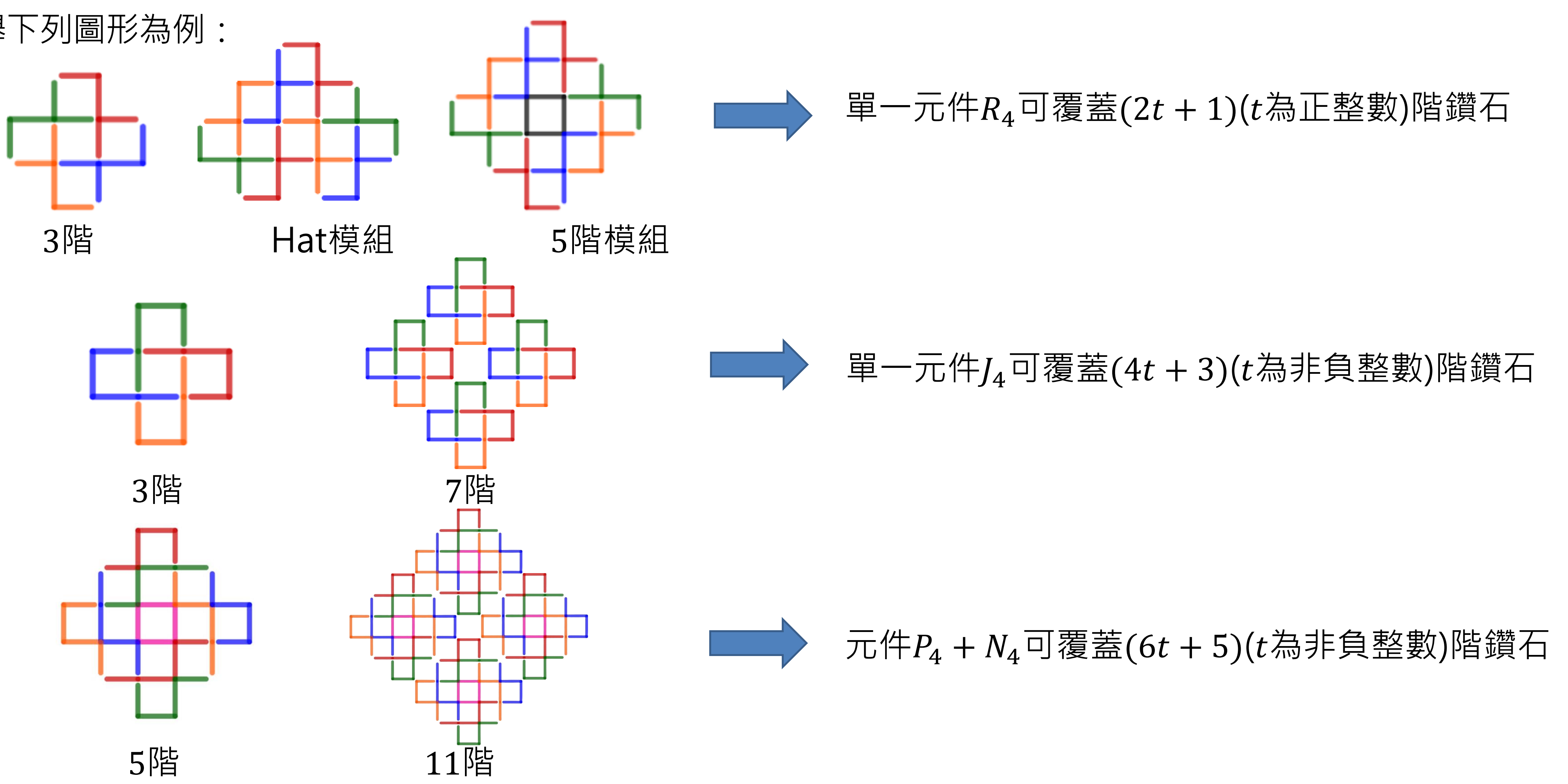


圖31 將Hat模組合併3階、5階模組組成9階圖形，再透過9階圖形擴展成 $(4t+5)$ 階圖形

舉下列圖形為例：



肆、結論

一、二棒可覆蓋的網格圖形：**[(x)代表無解情形、(v)代表有解情形、空白代表未找出合理解釋]**

表1 矩形、阿茲特克鑽石的單一元件解、兩種元件1：1混合解之延伸圖形(註：鑽石沒有偶數階)

	L_2	I_2	L_2+I_2
矩形	$n \times n$ (v)	(x)	$4n \times 4n$ (v) $(4n+1) \times (4n+1)$ (x) $(4n+2) \times (4n+2)$ (x) $(4n+3) \times (4n+3)$ (v)
鑽石	$(2t+1)$ 階(v)	(x)	$(2t+1)$ 階(v)

二、三棒可覆蓋的網格圖形：

表2 矩形、阿茲特克鑽石的單一元件解之延伸圖形

單一	I_3	L_3	T_3	N_3	U_3
矩形	(x)	(x)	$6n \times 6n$ (v) $(6n+1) \times (6n+1)$ (x) $(6n+2) \times (6n+2)$ (v) $(6n+3) \times (6n+3)$ (x) $(6n+4) \times (6n+4)$ (x) $(6n+5) \times (6n+5)$ (x)	(x)	$6n \times 6n$ (x) $(6n+1) \times (6n+1)$ (x) $(6n+2) \times (6n+2)$ (x) $(6n+3) \times (6n+3)$ (v) $(6n+4) \times (6n+4)$ (x) $(6n+5) \times (6n+5)$ (v)
鑽石	(x)	(x)	(x)	$(6t+5)$ 階(v)	$(6t+5)$ 階(v)

三、四棒可覆蓋的網格圖形：

表3 矩形、阿茲特克鑽石的的單一元件解之延伸圖形

	I_4	L_4	H_4		
矩形	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$(4n+1) \times (4n+1)$ (x) $(4n+2) \times (4n+2)$ (x)		
鑽石(階)	$(2t+1)$ (x)	$(2t+1)$ (x)	$(4t+3)$ (v) $(4t+1)$ (x)		
	Y_4	J_4	N_4		
矩形	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)		
鑽石(階)	$(2t+1)$ (x)	$(4t+3)$ (v) $(4t+1)$ (x)	$(2t+1)$ (x)		
	T_4	W_4	O_4	V_4	Z_4
矩形	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)
鑽石(階)	$(2t+1)$ (x)	$(4t+1)$ (x) $(4t+3)$ (v)	$(2t+1)$ (v)	$(2t+1)$ (x)	$(2t+1)$ (x)
	F_4	P_4	R_4	X_4	U_4
矩形		$2n \times 2n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)	$n \times n$ (x)
鑽石(階)	$(4t+1)$ (x)	$(4t+1)$ (x) $(4t+3)$ (v)	$(4t+1)$ (x) $(4t+3)$ (v)	$(2t+1)$ (x)	$(2t+1)$ (x)

伍、參考文獻

[1] Donald E. Knuth, "Dancing Links(2000)p.16-20
 [2] Alfred Wassermann-Covering the Aztec Diamond with One-sided Tetrasticks ExtendedVersion(2000)
 [3] 高文山-美麗的拼圖The most Beautiful Solution,2001

註：本研究兩種元件混和解的成果放在書面資料內，作品說明書及海報中照片及圖片均為作者自製。