

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國中組 數學科

佳作

030421

以三角形各邊生成共頂點正多邊形圖形性質之  
研究

學校名稱： 高雄市立五福國民中學

作者：  國一 劉子睿  國二 蔡育哲  國二 鄭又瑜	指導老師：  余尚芸  歐志昌
---	-----------------------------

關鍵詞： 共頂點正多邊形、框架角、軌跡

# 以三角形各邊生成共頂點正多邊形圖形性質之研究

## 摘要

本研究源於競賽之幾何問題，將其動態化與一般化得到三角形各邊同向生成正多邊形頂點與頂點連線特定的圖形不變性。本研究證明出：

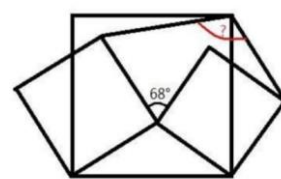
一、兩外延正  $n$  邊形與框架正  $n$  邊形同相對位置的頂點(分別為  $B_i$ 、 $C_i$ 、 $A_i$ )，與三角形可動頂點  $K$  恆形成平行四邊形  $B_iA_iC_iK$ ，此為形成不變性之關鍵。

二、當三角形可動頂點之角度為定值  $\theta$ ，則框架角分別為  $180 + \frac{180}{n} - \theta$  及  $180 - \frac{180}{n} - \theta$  度。

三、三角形可動頂點  $K$  移動過程中，兩外延正多邊形中以  $K$  為起點分別依順時鐘與逆時鐘依序對應之頂點會形成  $(n-1)$  組的以底邊中垂線為對稱軸之軌跡，並與  $K$  點軌跡形狀相同、大小分別為框架正  $n$  邊形第  $i-3$  或  $i-4$  對角線長度倍數的圖形(若  $i-3$ 、 $i-4 \leq 0$ ，則為 1 倍)。

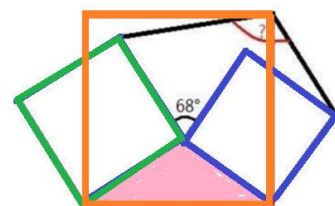
## 壹、前言

偶然在一個營隊解題活動，對右圖這個數學競賽的問題感興趣，問題中要求角度，答案是 113 度，整個問題中沒有提到正方形的大小，左右兩個正方形形成夾角 68 度的位置也不是唯一，卻能形成？角度的不變性，真是神奇！



3個正方形, 試求角?為何

仔細觀察發現三個正方形(橘□、綠□、藍□)乃由一任意三角形(粉紅色)的三邊(橘、綠、藍)生成，其中 68 度角位置是一個位置可變動的點。後續為研究方便，將三角形可變動位置的頂點稱為「三角形可動頂點」，橘色固定不變動的正方形命為「框架正方形」、其餘兩個命為「外延正方形」(詳見名詞解釋)，嘗試利用 GGB 直接操作，探索幾個圖形間的關係—改變形狀、角度、共頂點的位置等等，嘗試找出不同正多邊形頂點與頂點、和角度之間微妙的關係與變化，開始一系列的研究，並提出嚴謹的證明。



3個正方形, 試求角?為何

據此，嘗試寫出研究問題為：

- 一、探討以三角形各邊生成共頂點正多邊形時，在什麼條件下會存在什麼圖形性質。
- 二、探討三角形可動頂點在不同直線上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質。
- 三、探討三角形可動角為任意固定角度時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質。
- 四、探討三角形可動頂點在不同函數上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質。

## 貳、研究設備與解釋名詞

### 一、研究設備:GGB

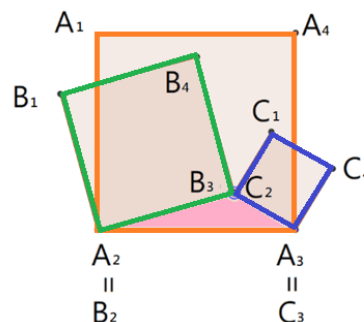
### 二、解釋名詞:

#### (一) 框架正 $n$ 邊形:

本研究中由 $\triangle$ 某一底邊生成，固定不變不動的正  $n$  邊形，稱為「**框架正  $n$  邊形**」。

如右圖正方形  $A_1A_2A_3A_4$  為框架正方形(橘色 $\square$ )，本研究中一般的代號為  $A_1A_2\dots A_n$ ，此不變動的底邊

命為  $\overline{A_2A_3}$ ，邊長為  $a$ ，其中頂點  $A_2$ 、 $A_3$  位置固定不動。 $A_2$  為原點  $(0,0)$ ， $A_3$  為  $(a,0)$ 。



#### (二) 外延正 $n$ 邊形:

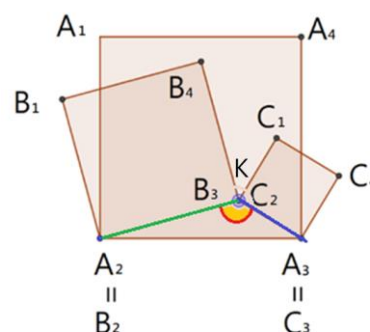
本研究中三角形除底邊外的 2 邊，往外延伸生成的 2 個正  $n$  邊形(綠色 $\square$ 、藍色 $\square$ )，其中一個頂點與框架正  $n$  邊形的其中一個頂點為共頂點；且這 2 個正  $n$  邊形兩兩間也會有一個頂點是共頂點，這 2 個正  $n$  邊形大小會跟著彼此共頂點位置變動而變動，稱為「**外延正  $n$  邊形**」。

如右上圖正方形  $B_1B_2B_3B_4$  及  $C_1C_2C_3C_4$  為外延正方形，其中  $A_2$  和  $B_2$  共頂點、 $A_3$  和  $C_3$  共頂點及  $B_3$  和  $C_2$  共頂點，本研究中一般外延正  $n$  邊形的代號為  $B_1B_2\dots B_n$  及  $C_1C_2\dots C_n$ ，邊長分別為  $b$ 、 $c$ 。

#### (三) 三角形可動頂點:

外延正  $n$  邊形兩兩間有一個頂點是共頂點，為本研究中三角形**位置可變動**的點，稱之為「 **$\triangle$ 可動頂點**」。

如圖  $B_1B_2B_3B_4$  及  $C_1C_2C_3C_4$  為外延正方形， $B_3$  和  $C_2$  共頂點，稱為  $\triangle$ 可動頂點，令為  $K$ 。



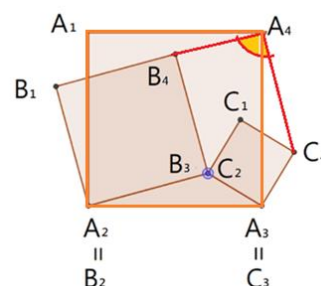
#### (四) 三角形可動角:

共頂點與可動頂點連線為 2 邊，形成一個以  $\triangle$ 可動頂點

為頂點的可變動角度，稱為「 **$\triangle$ 可動角**」，如右上圖  $\angle B_2KC_3$ ，命為  $\theta$ ，而原競賽題給的角度則  $\angle B_4KC_1 = 360^\circ - \theta -$  正  $n$  邊形內角角度的 2 倍。

#### (五) 框架角:

為研究方便，外延正  $n$  邊形的第  $i$  個頂點與框架正  $n$  邊形的第  $i$  頂點連線為 2 邊，一個以框架正  $n$  邊形  $i$  個頂點為頂點的對應角，稱為「**第  $i$  個框架角**」，如圖  $\angle B_4A_4C_4$  為第 4 個框架角。



## 參、研究過程

### 一、文獻探討

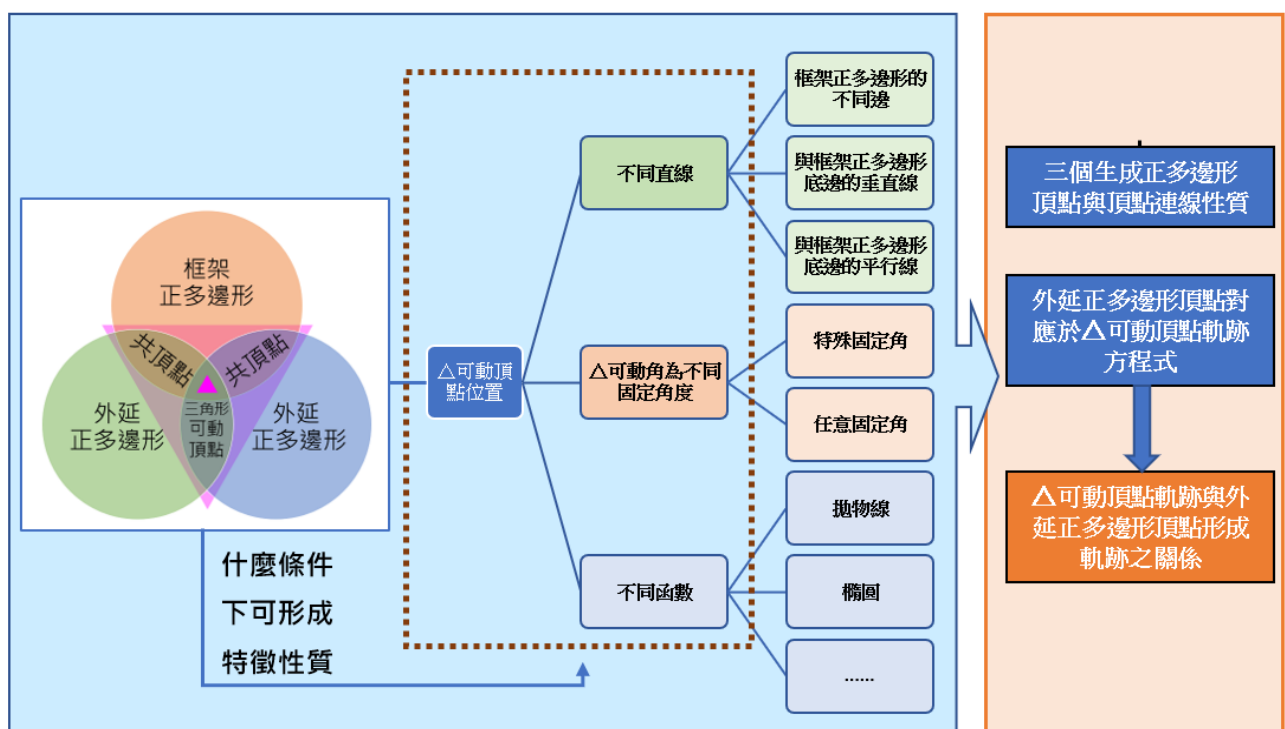
因為歷屆科展研究正多邊形的內容非常多，羅列於本研究可能相關文獻如下：

序	作品名稱(屆次/組別)	相關研究內容與啟發
1	正多邊形內接指定內角三角形之研究 (第 58 屆全國高中組)	<p><b>相關</b>：1. 正多邊形內接指定內角三角形之定點存在性與面積極值。 2. 自創出一種內接指定內角三角形的作圖法，並推導出定點 <math>K</math> 之三線性座標。最後推廣至正多邊形。</p> <p><b>啟發</b>：本研究可動角為任意固定角地作圖法。</p>

2	正多邊形下探討 <i>Sperner</i> 引理之延伸性質 (第 60 屆全國高中組)	<b>相關</b> ： <i>Sperner</i> 引理用於將問題假設為在任意正多邊形下，在多邊形內部放入點後進行三角化，在三角化的過程中若其中三角形分別為 1、2、3，則命名為公正三角形，對此成功探討出在不同正多邊形下公正三角形個數的狀況，並進行一些特例整理。 <b>啟發</b> ：觀察原競賽問題圖形間關係，將三個正多邊形中三邊三角化，後續由此三角形生成三個正多邊形，繼續研究。
3	破解軌跡—凸多邊形頂點與邊之連線交點軌跡之探討 (第 51 屆高雄市國中組)	<b>相關</b> ：研究凸多邊形連續兩個頂點與相隔 $k$ 個邊的鄰邊動點連線之交點有何特性。發現正方形頂點與相隔一個邊的鄰邊中點連線，對相鄰的兩個頂點作相同的步驟，所得之兩線交角恰為 90 度，將結果推廣至正多邊形。 <b>啟發</b> ：對於探討正多邊形在角度條件下得到許多圖形特徵不變性，並推導出軌跡方程式。
4	等比例線段下保角圖形之特徵探討 (2022 年台灣國際科學展覽會)	<b>相關</b> ：該研究由文中文獻[1]的一道題目進行發想。改變原題目中正方形條件，考慮等長線段的特徵，再推廣到菱形。並在矩形與平行四邊形中，將「等長線段」這個條件改為「等比例線段」討論其保角特徵。 <b>啟發</b> ：由正方形推廣至正多邊形，對於探討正多邊形在條件下得到圖形特徵，如角度不變性。
5	利用 <i>GSP</i> 看三角形眾心軌跡。 (第 50 屆高雄市高中組)	<b>相關</b> ：利用 <i>GSP</i> 操作，探討五心在三角形變動時形成之軌跡。 <b>啟發</b> ：利用 <i>GGB</i> 操作，由探討正多邊形與不同函數圖形之關係，在條件下得到圖形特徵，推導出軌跡方程式。

不管是哪一個研究都是在正多邊形圖形變化下得到特定的關係與規律，本研究亦是探討正多邊形在不同條件下的規律，但對於其他文獻之研究內容卻完全不同，據此，開始了我們的研究。

## 二、研究架構

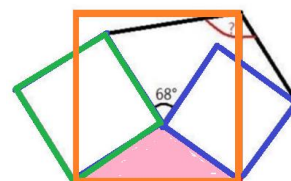


## 肆、研究結果

### 原前言中問題之思考、推廣與探討

由原問題解決過程，發現形成？角度的不變性跟正方形大小無關，而是和圖形頂點是否形成平行四邊形有關，進一步觀察圖形間關係。

**觀察：**根據從前言的問題觀察發現，三個正方形(橘□、綠□、藍□)乃由一任意三角形的三邊(橘、綠、藍)生成，分別為框架正方形、2個外延正方形。



3個正方形, 試求角?為何

**好奇：**在上面的情況下，也就是以三角形各邊生成共頂點正多邊形時，三個生成正方形如何排列可能會產生前言問題的特徵或性質？

### 研究一、探討以三角形各邊生成共頂點正多邊形時，在什麼條件下會存在什麼圖形性質

**思考：**若令單一邊生成可分逆時針為正向、順時針為反向，則 $\triangle$ 的3邊生成3個正方形有8種類型(依框架、左外延、右外延正方形為正正正、反正正、.....)，

進一步仿照原問題，針對這些類型，嘗試3個正方形(框架正方形、左外延正方形、右外延正方形)各取1個不同頂點(除底邊上的點)搭配「三角形可動頂點」，探討可能形成平行四邊形的情况。

**發現：**可能形成平行四邊形的情况有8種，如下表：

#### 類型 1—三正(正、正、正)

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_4C_1K$	$B_1A_4C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	○	○	×	×	×	×	×	×

#### 類型 2—兩正一反(反、正、正)

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_4C_1K$	$B_1A_4C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	×	×	×	×	×	×	×	×

#### 類型 3—兩正一反(正、正、反)

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_4C_1K$	$B_1A_4C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	○(換順序)	×	×	×	×	×	×	×

#### 類型 4—兩反一正(反、正、反)

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_4C_1K$	$B_1A_4C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	×	○(換順序)	×	×	×	×	×	×



**類型 5—兩正一反(正、反、正)**

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_1C_1K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	×	○(換順序)	×	×	×	×	×	×

**類型 6—兩反一正(反、反、正)**

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_1C_1K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	○(換順序)	×	×	×	×	×	×	×

**類型 7—兩反一正(正、反、反)**

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_1C_1K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	×	×	×	×	×	×	×	×

**類型 8—三反(反、反、反)**

頂點	$B_1A_1C_1K$	$B_4A_4C_4K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_1K$	$B_4A_4C_1K$	$B_1A_1C_1K$	$B_1A_1C_4K$	$B_4A_4C_4K$
圖形								
平行四邊形	○	○	×	×	×	×	×	×

**觀察:** ① 上表類型 2、7 皆顯示無法形成平行四邊形。

② 類型 4、5 形成兩個對應全等△，若是照不同順序 ( $B_4A_4KC_4$ ) **可能可以** 形成平行四邊形，再探討類型 4、5 任意△三邊生成正五、六邊形時，發現**不會** 形成平行四邊形，如圖

③ 類型 3、6 形成兩個對應全等△，若照不同順序 ( $B_1A_1KC_1$ ) **可能可以** 形成平行四邊形，進一步探討類型 3、6 任意△三邊生成正五、六邊形時，發現**不會** 形成平行四邊形，如右上圖。

類型	類型 4— 生成正五邊形	類型 4— 生成正六邊形	類型 5— 生成正五邊形	類型 5— 生成正六邊形
各個第 4 頂點及△可動頂點連接				
形成平行四邊形	×	×	×	×
類型	類型 4— 生成正五邊形	類型 4— 生成正六邊形	類型 5— 生成正五邊形	類型 5— 生成正六邊形
各個第 4 頂點及△可動頂點連接				
形成平行四邊形	×	×	×	×

④ 由任意△三邊皆正向或皆反向的生成正方形時(類型 1、8)，在 *GGB* 的操作下 3 個正方形第 4 頂點與△可動頂點(即  $B_4A_4C_4K$ ) 會形成平行四邊形，如上表所對應的類型(類型 1、8)。進一步探討任意△三邊皆正向或皆反向的生成正五、六邊形時，的確可能形成平行四邊形，如圖 *GGB* 操作得到的情況。

類型	類型 8— 生成五邊形	類型 8— 生成六邊形
各個第 4 頂點及△可動頂點連接		
平行四邊形	○	○

**發現:**僅有類型 1、8 會形成平行四邊形，且框架角與可動角間似乎存在關係。

類型 3、4、5、6 的平行四邊形可能是四邊形的特殊情況；類型 3、6 連第 1 頂點及類型 4、5 連第 4 頂點時，會形成平行四邊形，但無法在 5 以上邊形形成平行四邊形。

**結果:**經 GGB 操作，任意△三邊皆正向或皆反向的生成正方形時，即框架正方形及外延正方形皆正向或皆反向時，三個正方形第 4 頂點與△可動頂點可形成平行四邊形，框架角依△可動角改變。

故研究二、三、四先植基於【類型 1—任意△三邊皆正向生成正多邊形】條件，嚴謹證明是否形成平行四邊形，及角度不變性，及相關性質。

後續討論【類型 8—任意△三邊皆反向生成正多邊形】是否也和類型 1 一樣，性質成立。

**過程:**「外延正多邊形」位置變動的關鍵是「三角形可動頂點」，

嘗試利用 GGB，從三角形可動頂點放置在不同特性的位置上進行操作，

先從**特例**或**極端值**處理，

① △可動頂點所在的△退化成一線段，此相當於△可動頂點位置在框架正多邊形的第 2 邊上，是否形成上述性質？

①\_1 觸發本研究將△可動頂點放置在「框架正多邊形的不同邊上」進行探討。

①\_2 若△可動頂點縱向移動，相當於「框架正多邊形底邊的垂直線」上移動，

①\_3 若三角形可動頂點橫向移動，相當於在「框架正多邊形底邊的平行線」上移動，這樣是否形成什麼性質？

②③再操作形成任意固定角度，將△可動頂點「與共頂點形成不同的固定角度」、或放在「不同函數」等位置時，觀察△可動頂點移動，外延正多邊形頂點跟著移動後的圖形性質與軌跡。

在【類型 1—任意△三邊皆正向生成正多邊形】條件下，將△可動頂點放置在「框架正多邊形的不同直線上」進行探討：

## 研究二、探討其中兩個生成正多邊形三角形可動頂點在不同直線上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質

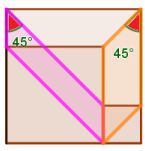
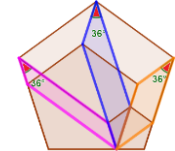
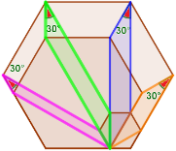
(一)當△可動頂點所在的△退化成一線段，是否形成研究一之圖形性質？

△可動頂點所在的△退化成一線段，

此相當於框架正多邊形固定，兩外延正多邊形△可動頂點在框架正多邊形的第 2 邊時，兩外延正多邊形上各個頂點對應於△可動頂點時之圖形性質，得到結果如下：

**發現:**在 GGB 中不管三角形可動頂點  $K$  在正  $n$  邊形第 2 邊上的位置如何，

①  $B_1A_1C_1K$  (粉紅色)、 $B_4A_4C_4K$  (橘色)、 $B_5A_5C_5K$  (藍色)、...  
 $B_nA_nC_nK$  恆為平行四邊形

	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	$n$
示意圖				...	...
$B_nA_nC_n$	$45^\circ$	$36^\circ$	$30^\circ$	...	...

(以正五邊形第 4 頂點為例，如下，其餘證明詳見手稿。)

**證明:**  $\because A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 、 $C_1C_2C_3C_4C_5$  為正五邊形

$\overline{C_4K}$  為右外延正多邊形之對角線

$$\therefore \angle KC_4A_4 = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ, \text{ 又 } \angle B_4A_4C_4 = 36^\circ$$

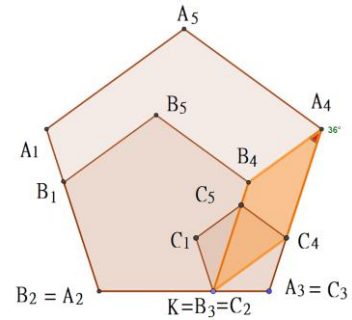
$\therefore B_4A_4C_4K$  是平行四邊形

② 三個正 4、5、6、...、 $n$  邊形中

$$\angle B_1A_1C_1, \angle B_4A_4C_4, \angle B_5A_5C_5, \dots, \angle B_nA_nC_n$$

$$\text{分別為 } 45^\circ, 36^\circ, 30^\circ, \dots, \frac{180^\circ}{n}$$

( $\angle B_nA_nC_n$  為框架正多邊形之對角線與邊夾角)。



**推導：**如右上圖，證明三角形生成正五邊形頂點連線  $\angle B_4A_4C_4 = 36^\circ$ ，

$\angle B_4A_4C_4$  為  $\overline{A_2A_4}$  與  $\overline{A_2A_3}$  的夾角， $\overline{A_2A_4}$  為框架正五邊形之對角線

而  $\overline{A_2A_3}$  為正五邊形之一邊， $\angle B_4A_4C_4 = 36^\circ$ ，

$$\text{一般式推導: } \angle B_4A_4C_4 = \frac{180 - (180 - \frac{360}{n})^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{n}$$

③ 不管哪種邊形，三角形可動頂點在框架正多邊形第 2 邊上，左右兩個外延正多邊形的第 1、4、...、 $n$  頂點對應於  $\Delta$  可動頂點形成軌跡是一線段。

	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	$n$
軌跡示意圖				...	...

其中左外延正多邊形軌跡是深色線段、右外延正多邊形軌跡是淺色線段，藍、綠、橘、紫色分別是第 1、4、5、6.....頂點軌跡，對應軌跡方程式如下表：

軌跡第幾頂點	左外延正多邊形	右外延正多邊形
1	$y = -\cot \frac{360^\circ ax}{n}$	$y = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n} ax}{-\cos \frac{360^\circ}{n} a - a} + \frac{\sin \frac{360^\circ}{n} a}{\cos \frac{360^\circ}{n} a + a}$
4	$y = (\sin \frac{360^\circ}{n} ax + a) / (\cos \frac{360^\circ}{n} a)$	$y = \cot \frac{360^\circ ax}{n} - a$
5	$y = \frac{(-\cos \frac{360^\circ}{n} + \cos \frac{180^\circ}{n}) ax}{\sin \frac{180^\circ}{n} + \sin \frac{360^\circ}{n}}$	$y = \frac{(-\cos \frac{360^\circ}{n} + \cos \frac{180^\circ}{n} - a) ax}{\sin \frac{180^\circ}{n} + \sin \frac{360^\circ}{n}} - a$
6	$y = -\cot \frac{360^\circ ax}{n}$	$y = (\cos \frac{360^\circ}{n} ax) / (\sin \frac{360^\circ}{n} - a)$
...	...	...

【以正五邊形第 4 頂點為例說明】(其餘正多邊形推導詳見手稿)

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正五邊形，分別為框架正五邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，外延正五邊形  $B_1B_2B_3B_4B_5$ 、 $C_1C_2C_3C_4C_5$ ，其中  $B_3$ 、 $C_2$  共頂點是  $\Delta$  可動頂點位於框架正五邊形的第 2 邊  $A_2A_3$  上，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正五邊形大小變化，則

① 左外延正多邊形軌跡為深綠色線段  $A_2A_4$ ；② 右外延正多邊形軌跡為淺綠色線段  $A_3A_4$

**證明：**① 左外延正多邊形軌跡(深綠線段)推導過程：

此線段起點與終點為  $A_2(0,0)$  及  $A_4(a + a \sin 72^\circ, a \cos 72^\circ)$



設  $\overline{A_2A_4}$  直線方程式為  $y = mx + t$

得 2 式  $\begin{cases} 0 = 0x + t & \dots\dots\dots(1) \\ \cos 72^\circ a = m(a + \sin 72^\circ a)x + t & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$

(2)-(1)  $y = \frac{a + \sin 72^\circ a}{\cos 72^\circ a} x + t, t = 0$

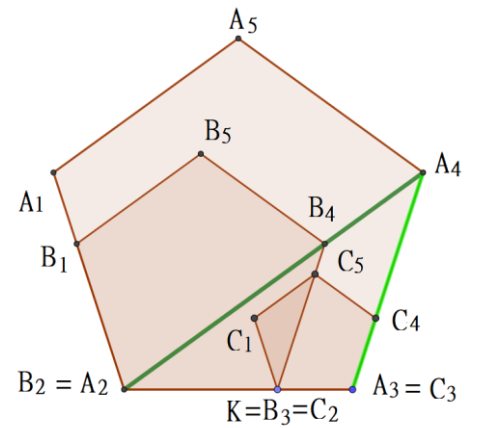
$$y = \frac{a + \sin 72^\circ a x}{\cos 72^\circ a}$$

② 右外延正多邊形軌跡(淺綠線段)推導過程:  
 此線段起點與終點為  $A_3(a, 0)$   
 及  $A_4(a + \sin 72^\circ a, \cos 72^\circ a)$

得 2 式  $\begin{cases} 0 = amx + t & \dots\dots\dots(3) \\ \cos 72^\circ a = m(a + \sin 72^\circ a)(x + t) & \dots\dots\dots(4) \end{cases}$

(4)-(3)  $\cos 72^\circ a = am \sin 72^\circ x, y = \cot 72^\circ ax + t, t = -a \Rightarrow y = \cot 72^\circ ax - a$

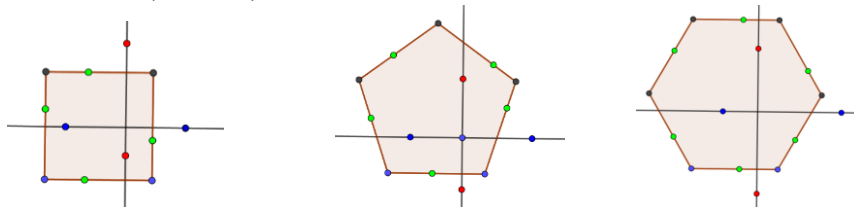
④ 第 2、3 頂點因外延正多邊形與框架多邊形頂點分別重合，故無法形成平行四邊形，也無法形成角度。至此第 2、3 頂點後續不再討論。



接著，討論在  $\Delta$  可動頂點放置在「框架正多邊形的不同邊上」的情況。

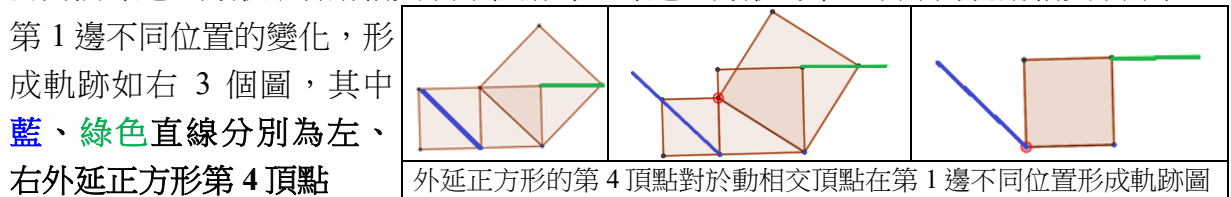
(二) 將  $\Delta$  可動頂點放置在「框架正多邊形的不同邊上」，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質？

首先，嘗試將兩外延正多邊形  $\Delta$  可動頂點放在框架正多邊形的邊上(綠色點)、平行線上(藍色點)、垂直線上(紅色點)，以框架正方形、框架正五、六邊形為例如下圖



將  $\Delta$  可動頂點放置在「框架正多邊形的第 1 邊上」，探討外延正  $n$  邊形各個頂點產生的規律

$\because$  前言中競賽問題中的題幹圖形角度為框架正方形、兩個外延正方形的第 4 頂點，故仍以正方形的第 4 頂點為第一個討論的條件(後續研究內容表示也以第 4 頂點為主)發現外延正方形的第 4 頂點會隨  $\Delta$  可動頂點位置變動而改變，似乎移動的軌跡也有規律當兩個外延正方形跟著動相交頂點移動時，外延正方形的第 4 頂點對於動相交頂點在第 1 邊不同位置的變化，形成軌跡如右 3 個圖，其中



對應於  $\Delta$  可動頂點之軌跡圖形。

下面仿照研究二(一)逐一探討正 5、6、7 邊形的情况：

1.  $\triangle$ 可動頂點在框架正多邊形第 1 邊，外延正多邊形第 4 頂點對應於 $\triangle$ 可動頂點的規律  
將結果部分呈現在下表：

	正方形	正五邊形	正六邊形	正七邊形	...
示意圖 1					...
$\angle B_4A_4C_4$	$\theta + 45^\circ$	$\theta + 72^\circ$	$\theta + 90^\circ$	$\theta + 720^\circ / 7$	...
形成軌跡示意圖					...

**發現：**①若  $\angle B_4KC_4 = \theta$ ，則在三個正 4、5、6、7 邊形形成  $\angle B_4A_4C_4$  分別為  $\theta + 45^\circ$ 、 $\theta + 72^\circ$ 、 $\theta + 90^\circ$ 、 $\theta + \frac{720^\circ}{7}$ 。

②  $B_4A_4C_4K$  恆為平行四邊形(上表中黃色四邊形)

③不管哪一種邊形，三角形可動頂點在框架正多邊形第 1 邊上，左右兩個外延正多邊形的第 4 頂點對應於三角形可動頂點形成軌跡是一線段。

2.  $\triangle$ 可動頂點在框架正多邊形第 1 邊，外延正多邊形第 1 頂點對應於 $\triangle$ 可動頂點的規律  
將結果部分呈現在下表：

	正方形	正五邊形	正六邊形	正七邊形	...
示意圖 1					...
$\angle B_1A_1C_1$	$\theta + 45^\circ$	$\theta + 72^\circ$	$\theta + 90^\circ$	$\theta + 720^\circ / 7$	...
形成軌跡示意圖					...

3.  $\triangle$ 可動頂點在框架正多邊形第 1 邊，外延正多邊形第 5 頂點對應於 $\triangle$ 可動頂點的規律  
將結果部分呈現在下表：

	正方形	正五邊形	正六邊形	正七邊形	...
示意圖 1	只有 4 個頂點，故第 5 頂點不予討論				...
$\angle B_5A_5C_5$	×	$\theta + 72^\circ$	$\theta + 90^\circ$	$\theta + 720^\circ / 7$	...
形成軌跡示意圖	×				...

**發現：**在 GGB 中不管三角形可動頂點  $K$  在第一邊上的位置如何，

- ①  $B_1A_1C_1K$ 、 $B_4A_4C_4K$ 、 $B_5A_5C_5K$  所形成的圖形都是平行四邊形(下頁證明此性質正確)
- ② 若  $\angle B_4KC_1 = \theta$ ，則在三個正 4、5、6、7 邊形形成  $\angle B_1A_1C_1$ 、 $\angle B_4A_4C_4$ 、 $\angle B_5A_5C_5$  分別為  $\theta + 45^\circ$ 、 $\theta + 72^\circ$ 、 $\theta + 90^\circ$ 、 $\theta + \frac{720^\circ}{7}$  (雖然這些角度每種邊形的公式一樣，但得到此結果的過程卻不同，後面依序推導此公式)
- ③ 不管哪一種邊形，三角形可動頂點在框架正多邊形第 1 邊上，左右兩個外延正多邊形的第 1、4、5 頂點對應於三角形可動頂點形成軌跡是一線段。

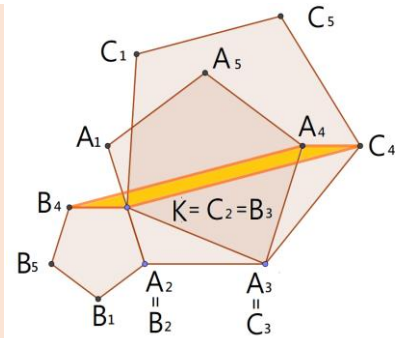
接續，逐一嚴謹證明上述發現之圖形性質

**性質-正多邊形第 1 邊第 4 頂點圖形性質**

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正  $n$  邊形，分別為框架正多邊形  $A_1A_2\dots A_n$ ，外延正多邊形  $B_1B_2\dots B_n$ 、 $C_1C_2\dots C_n$ ，其中  $B_2$ 、 $C_2$  共頂點是  $\Delta$  可動頂點位於框架正多邊形的第 1 邊  $\overline{A_1A_2}$  上，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則

①  $\Delta A_2A_3K \cong \Delta A_4A_3C_4$ ；②  $B_4A_4C_4K$  是平行四邊形

③  $\angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_1 + \frac{180(n-3)^\circ}{n}$



【以正五邊形為例說明】

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正五邊形，分別為框架正多邊形  $A_1A_2\dots A_5$ ，外延正多邊形  $B_1B_2\dots B_5$ 、 $C_1C_2\dots C_5$ ，其中  $B_3$ 、 $C_2$  共頂點是  $\Delta$  可動頂點位於框架正五邊形的第 1 邊  $\overline{A_1A_2}$  上，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正五邊形大小變化，則

①  $\Delta A_2A_3K \cong \Delta A_4A_3C_4$ ；②  $B_4A_4C_4K$  是平行四邊形③  $\angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_1 + 45^\circ$

**證明：**①  $\because A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 、 $C_1C_2C_3C_4C_5$  是正五邊形，

$\therefore$  在  $\Delta A_2A_3K$  與  $\Delta A_4A_3C_4$  中

$$\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}, \overline{KA_3} = \overline{C_4C_3}$$

$$\begin{aligned} \angle A_2A_3K &= \angle A_2A_3A_4 - \angle KA_3A_4 \\ &= 108^\circ - \angle KA_3A_4 = \angle KA_3C_4 - \angle KA_3A_4 = \angle A_4A_3C_4 \end{aligned}$$

$\rightarrow \Delta A_2A_3K \cong \Delta A_4A_3C_4$  (SAS)

②  $\therefore \overline{A_2K} = \overline{A_4C_4}$  (對應邊相等)，又  $\overline{B_4K} = \overline{A_2K}$  ( $B_1B_2\dots B_5$  是正五邊形)

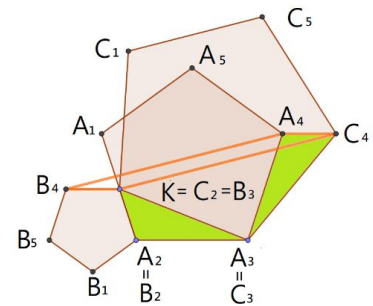
$\therefore \overline{B_4K} = \overline{A_4C_4}$  .....①，又  $\angle A_2KA_3 = \angle A_4C_4A_3$

$$\angle B_4KC_4 + \angle A_4C_4K = (360^\circ - 108^\circ - \angle A_2KA_3 - 36^\circ) + (\angle A_4C_4A_3 - 36^\circ) = 180^\circ \dots\dots ②$$

由①②  $\rightarrow B_4A_4C_4K$  是平行四邊形(一雙對邊相等且平行)

$$\rightarrow \angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_1 + 108^\circ - 36^\circ = \angle B_4KC_1 + 72^\circ$$

$$\text{(一般式推導： } \angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_1 + (180 - \frac{360^\circ}{n}) - \frac{180}{n} = \angle B_4KC_1 + \frac{180(n-3)^\circ}{n} \text{)}$$



原以為第 1、5 頂點的性質與第 4 頂點性質雷同，可以此類推，仔細觀察圖形後，發現證明及推導過程不同，證明如下：

**性質-正多邊形第 1 邊第 1 頂點圖形性質**

條件與前述正多邊形第 1 邊第 4 頂點性質相同，則

- ①  $\triangle \Delta B_1 A_2 A_1 \cong \triangle \Delta A_3 A_2 K$  ; ②  $B_1 A_1 C_1 K$  是平行四邊形
- ③  $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_4 K C_1 + \frac{180(n-3)}{n}^\circ$

【以正五邊形為例說明】

條件與前述正多邊形第 1 邊第 4 頂點性質相同

- ①  $\triangle \Delta B_1 A_2 A_1 \cong \triangle \Delta A_3 A_2 K$  ; ②  $B_1 A_1 C_1 K$  是平行四邊形
- ③  $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_4 K C_1 + 72^\circ$

證明:

①  $\because A_1 A_2 A_3 A_4 A_5, B_1 B_2 B_3 B_4 B_5, C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$  是正五邊形，

$\therefore$  在  $\triangle \Delta B_1 A_2 A_1$  與  $\triangle \Delta A_3 A_2 K$  中(兩個綠色的  $\triangle$ )

$$\overline{B_1 A_2} = \overline{B_1 B_2} = \overline{B_2 B_3} = \overline{A_2 K}, \overline{A_1 A_2} = \overline{A_2 A_3},$$

$$\angle B_1 A_2 B_1 = 108^\circ = \angle A_2 A_3 K \rightarrow \triangle \Delta B_1 A_2 A_1 \cong \triangle \Delta A_3 A_2 K$$

②  $\therefore \overline{A_1 B_1} = \overline{K A_3}$  (對應邊相等)，

又  $\overline{B_3 A_3} = \overline{C_2 C_3} = \overline{C_1 K}$  ( $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$  是正五邊形)

$$\therefore \overline{A_1 B_1} = \overline{C_1 K} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\angle B_1 A_1 A_2 = \angle K A_3 A_2$$

又  $\angle B_1 A_1 A_2 = \angle K A_3 A_2$  (對應角相等)，

$$180^\circ - \angle C_1 K A_2 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$\angle C_1 K A_1 + \angle A_2 K A_3 = \angle K A_3 A_2 + \angle A_2 K A_3 = 72^\circ$$

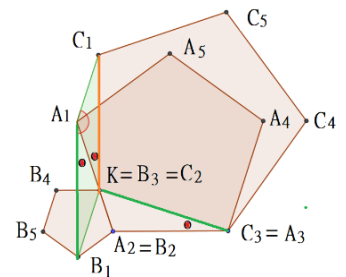
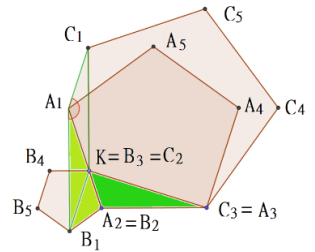
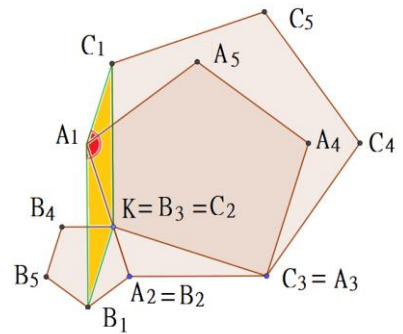
$$\therefore \angle C_1 K A_1 = \angle K A_3 A_2 \rightarrow \angle C_1 K A_1 = \angle K A_3 A_2 = \angle B_1 A_1 A_2$$

由①②  $\rightarrow B_1 A_1 C_1 K$  是平行四邊形(一雙對邊相等且平行)

③  $\angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_4 K C_1 + 72^\circ$

$$= \angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_4 K C_1 + 108^\circ (\text{內角}) - 36^\circ = \angle B_4 K C_1 + 72^\circ$$

$$(\text{一般式推導: } \angle B_1 A_1 C_1 = \angle B_4 K C_1 + (180^\circ - \frac{360^\circ}{n}) - \frac{180^\circ}{n} = \angle B_4 K C_1 + \frac{180^\circ(n-3)}{n})$$



**性質-正多邊形第 1 邊第 5 頂點圖形性質**

條件與前述正多邊形第 1 邊第 4 頂點性質相同，則

- ①  $\triangle \Delta C_2 A_2 A_3 \cong \triangle \Delta C_4 A_4 A_3, \triangle \Delta B_1 A_2 A_3 \cong \triangle \Delta C_4 A_4 A_5, \triangle \Delta B_1 C_3 C_2 \cong \triangle \Delta A_5 C_4 C_5$
- ②  $B_5 A_5 C_5 K$  是平行四邊形
- ③  $\angle B_5 A_5 C_5 = \angle B_4 K C_1 + \frac{180^\circ(n-3)}{n}$

【以正五邊形為例說明】條件與正多邊形第 1 邊第 4 頂點性質相同

①  $\triangle \Delta C_2 A_2 A_3 \cong \triangle \Delta C_4 A_4 A_3, \triangle \Delta B_1 A_2 A_3 \cong \triangle \Delta C_4 A_4 A_5, \triangle \Delta B_1 C_3 C_2 \cong \triangle \Delta A_5 C_4 C_5$

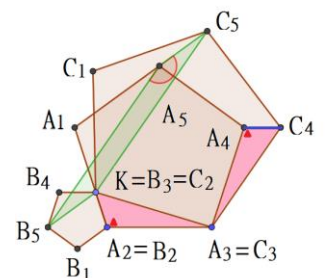
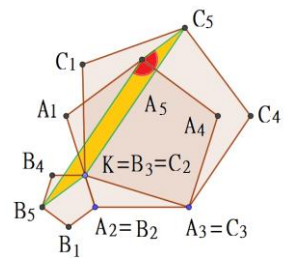
②  $B_5 A_5 C_5 K$  是平行四邊形； ③  $\angle B_5 A_5 C_5 = \angle B_4 K C_1 + \frac{180^\circ(n-3)}{n}$

證明:

①  $\because A_1 A_2 A_3 A_4 A_5, B_1 B_2 B_3 B_4 B_5, C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$  是正五邊形，

在  $\triangle \Delta C_2 A_2 A_3, \triangle \Delta C_4 A_4 A_3$

$$\therefore \overline{A_2 A_3} = \overline{A_3 A_4}, \angle A_2 C_3 C_2 = \angle A_4 C_3 C_4, \overline{C_2 C_3} = \overline{C_3 C_4}$$



$$\therefore \Delta C_2 A_2 A_3 \cong \Delta C_4 A_4 A_3 \text{ (SAS)}$$

在  $\Delta B_1 A_2 A_3$  ,  $\Delta C_4 A_4 A_3$  中

$$\overline{A_2 C_2} = \overline{A_4 C_4} \text{ , } \angle C_2 A_2 A_3 = \angle C_4 A_4 A_3 = 108^\circ \text{ ,}$$

$$\angle B_1 A_2 A_3 = 144^\circ = \angle A_5 A_4 C_4$$

$$\therefore \overline{B_1 A_2} = \overline{A_2 C_2} = \overline{A_4 C_4} \text{ , } \overline{A_2 A_3} = \overline{A_4 A_5} \text{ ,}$$

$$\angle B_1 A_2 A_3 = \angle A_5 A_4 A_4 = 144^\circ$$

$$\therefore \Delta B_1 A_2 A_3 \cong \Delta C_4 A_4 A_5 \text{ (SAS)}$$

在  $\Delta B_1 C_3 C_2$  ,  $\Delta A_5 C_4 C_5$  中 ,

$$\overline{B_1 A_3} = \overline{C_4 A_5} \text{ , } \angle A_2 A_3 B_1 = \angle A_4 A_5 C_4 \text{ ,}$$

$$\text{設 } \angle A_2 A_3 B_1 = \angle A_4 A_5 C_4 = x^\circ$$

$$\angle A_4 C_4 C_5 = 36^\circ - x^\circ \text{ ,}$$

$$\angle A_5 C_4 A_4 = 72^\circ - y^\circ \text{ ,}$$

$$\angle A_5 C_4 C_5 = x^\circ + y^\circ = \angle A_5 C_4 C_2$$

$$\overline{B_1 A_3} = \overline{C_4 A_5} \text{ , } \overline{C_2 C_3} = \overline{C_4 C_5}$$

$$\therefore \Delta B_1 C_3 C_2 \cong \Delta A_5 C_4 C_5 \text{ (SAS)}$$

$$\textcircled{2} \overline{B_1 C_2} = \overline{B_5 C_2} = \overline{A_5 C_5} \text{ , } \angle B_1 C_2 C_3 = \angle A_5 C_5 C_4$$

$$\text{設 } \angle B_1 C_2 C_3 = \angle A_5 C_5 C_4 = z^\circ \text{ , } \angle A_5 C_5 C_2 = z^\circ - 72^\circ$$

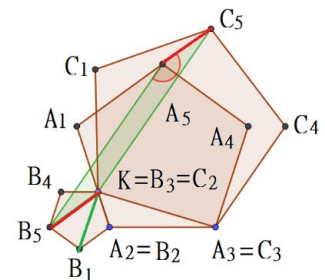
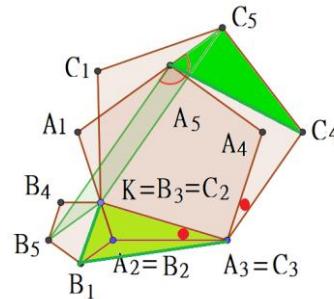
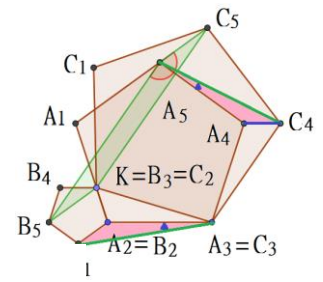
$$\angle B_5 C_2 C_5 = 252^\circ - z^\circ \text{ ; } \angle B_5 C_5 C_2 + \angle B_5 C_2 C_5 = 180^\circ$$

$$\therefore \overline{A_5 C_5} \parallel \overline{B_5 K} \text{ ; } \therefore \text{四邊形 } B_5 A_5 C_5 K \text{ 為平行四邊形}$$

$$\textcircled{3} \angle B_5 A_5 C_5 = \angle B_5 K C_5$$

$$= \angle B_4 K C_1 + 108^\circ (\text{內角}) - 36^\circ = \angle B_4 K C_1 + 72^\circ$$

$$(\text{一般式推導 : } \angle B_5 A_5 C_5 = \angle B_4 K C_1 + (180^\circ - \frac{360^\circ}{n}) - \frac{180^\circ}{n} = \angle B_4 K C_1 + \frac{180^\circ(n-3)}{n})$$



### 性質-正多邊形第 1 邊第 4 頂點軌跡方程式

④  $B_4$  對應於動點  $K$  形成軌跡為直線  $L$

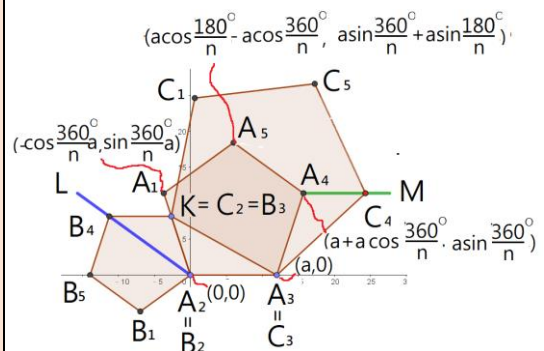
$$\text{軌跡方程式為 } y = ax \cot \frac{180^\circ(n-1)^\circ}{n} \text{ ,}$$

$$\text{其中 } -2a(\cos 180^\circ - \frac{180^\circ(n-1)^\circ}{n})^2 \leq x \leq 0$$

⑤  $C_4$  對應於動點  $K$  形成軌跡為直線  $M$

$$\text{軌跡方程式為 } y = a \sin \frac{90^\circ(n-1)}{n} \text{ , 其}$$

$$\text{中 } a + a \cos \frac{90^\circ(n-1)}{n} \leq x \leq 2a + a \cos \frac{90^\circ(n-1)}{n}$$



【以正五邊形為例說明】

④  $B_4$  對應於動點  $K$  形成軌跡為直線  $L$

$$\text{軌跡方程式為 } y = ax \cot 144^\circ \text{ , 其中 } -2a(\cos 36^\circ)^2 \leq x \leq 0$$

正  $n$  邊形的推導為

$$B_4 \text{ 對應於動點 } K \text{ 形成軌跡為直線 } L \text{ 軌跡方程式為 } y = a \sin \frac{360^\circ}{n} x + a \cos \frac{360^\circ}{n} \text{ ,}$$

$$\text{其中 } -2a \cos \frac{90^\circ(n-1)}{n} \leq x \leq 0$$



$C_4$  對應於動點  $K$  形成軌跡為直線  $M$

軌跡方程式為  $y = a \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a$ ，其中  $a + a \cos 72^\circ \leq x \leq 2a + a \cos 72^\circ$

下表分別是外延正  $n$  邊形第 1 邊第 1、4、5、6.....頂點軌跡，對應軌跡方程式如下表：

軌跡 第幾頂點	左外延正多邊形	右外延正多邊形
1	$y = \cot \frac{180^\circ}{n} ax$	$y = \cot \frac{90^\circ}{n} ax$
4	$y = \sin \frac{360^\circ}{n} ax$	$y = a \sin \frac{360^\circ}{n} x + a \cos \frac{360^\circ}{n}$
5	$y = 0$	$y = \cot \frac{270^\circ}{n} ax$
...	...	...

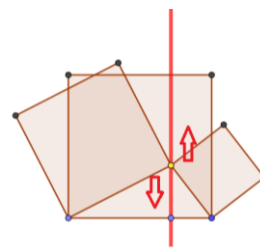
將  $\Delta$  可動頂點放置在「**框架正多邊形的第 3 邊上**」，探討外延正  $n$  邊形各個頂點產生的規律

接續， $\Delta$  可動頂點在**框架正多邊形的第 3 邊**時，兩外延正多邊形上**各個頂點**對應於  $\Delta$  可動頂點時之相關規律也跟第 1 邊同理如下(細節證明推導詳見研究日誌。)

正 $n$ 邊形	4	5	6	...	$n$
示意圖				...	...
$\angle B_n A_n C_n$	$\theta + 45^\circ$	$\theta + 72^\circ$	$\theta + 90^\circ$	...	

若  $\Delta$  可動頂點縱向移動(如右圖)，相當於「**框架正多邊形底邊的垂直線**」上移動，此時會怎樣?

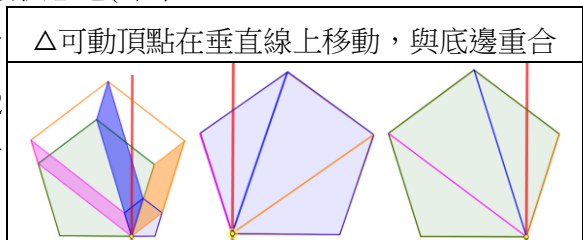
**(三) 將  $\Delta$  可動頂點放置在「**框架正多邊形底邊的垂直線**」，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質?**



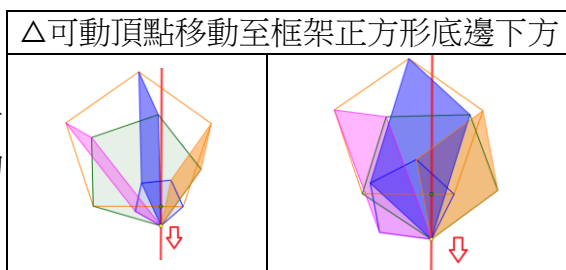
誠如前述，以第 4 頂點為代表，其餘各個頂點討論詳見手稿。

**發現：**1. 當  $\Delta$  可動頂點在垂直線上移動，與框架正方形底邊(即第 2

邊)重合時，結果與第 2 邊結果相同。特別注意：當  $\Delta$  可動頂點在垂直線上移動至第 2 邊  $A_2$  或  $A_3$  端點，框架正多邊形會分別和右外延正多邊形或(藍色正  $\blacklozenge$ )左外延正多邊形重合(綠色正  $\blacklozenge$ )，此時**平行四邊形退化成一線段**(粉、藍、橘)，此線段為**對角線**。



2. 當  $\Delta$  可動頂點移動至框架正方形底邊下方，均會形成第  $i$  個框架角之不變性，且 3 個生成正多邊形第  $i$  個頂點會與垂直線上  $\Delta$  可動頂點形成平行四邊形。

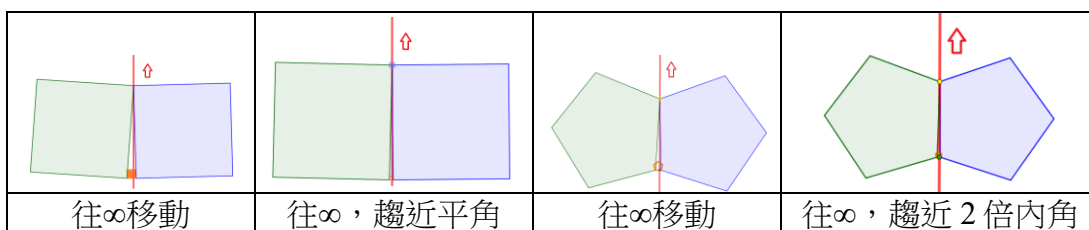


3. 當  $\Delta$  可動頂點移動至框架正多邊形底邊上方無窮遠處，則

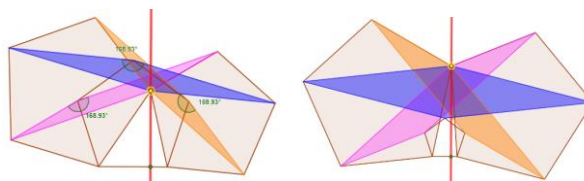
❶ 2 外延正多邊形趨近無限大，框架正多邊形趨近一個點

❷ 2 外延正多邊形的第 2 邊(底邊)趨近  $360 - \frac{720}{n}$  度角(趨近正  $n$  邊形 2 倍內角)，值得

特別注意的是當外延正方形時會趨近 180 度平角。



❸ 當  $\Delta$  可動頂點移動至框架正多邊形底邊上方內部(下左圖)或外部(下右圖)，均會形成第  $i$  個框架角之不變性，且 3 個生成正多邊形第  $i$  個頂點會與垂直線上  $\Delta$  可動頂點形成平行四邊形。如下圖分別是正五邊形第 1、4、5 頂點與垂直線上  $\Delta$  可動頂點形成的平行四邊形(粉色、橘色、藍色平行四邊形)。



❹ 左右外延正  $n$  邊形第 1、4、5、.....頂點軌跡方程式如下(推導過程詳見手稿)

軌跡 第幾頂點	左外延正多邊形	右外延正多邊形
1	$y = \frac{ax}{2} \times \frac{\tan \frac{270^\circ}{n}}{\cot \frac{270^\circ}{n}}$	$y = \frac{ax}{2} \times \frac{\cot \frac{270^\circ}{n} + \cos \frac{360^\circ}{n} - a}{\tan \frac{270^\circ}{n} - \sin \frac{360^\circ}{n}}$
4	$y = \frac{ax}{2} \times \frac{\tan \frac{270^\circ}{n}}{\cot \frac{270^\circ}{n} - a}$	$y = \frac{ax}{2} \times \frac{\cot \frac{270^\circ}{n} - \cos \frac{360^\circ}{n} - a}{\tan \frac{270^\circ}{n} - \sin \frac{360^\circ}{n}}$
5	$y = \frac{ax}{2} \times \frac{\cot \frac{270^\circ}{n} - \cos \frac{360^\circ}{n} - a}{\tan \frac{270^\circ}{n} - \sin \frac{360^\circ}{n}}$	$y = \frac{ax}{2} \times \frac{\cot \frac{270^\circ}{n} - \cos \frac{360^\circ}{n}}{\tan \frac{270^\circ}{n} - \sin \frac{360^\circ}{n}}$
...	.....	.....

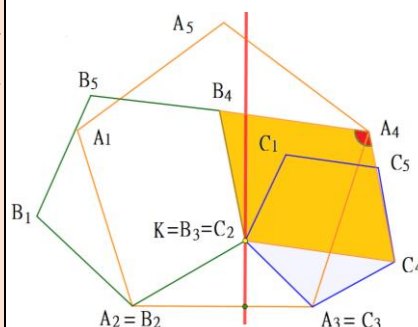
接續，以【 $\Delta$ 可動頂點在垂直線上，以外延正  $n$  邊形第 4 頂點】為例，描述及嚴謹證明上述發現之圖形性質

**性質-正多邊形垂直線第 4 頂點圖形性質**

$\Delta A_2 A_3 K$  生成 3 個正  $n$  邊形，分別為框架正多邊形  $A_1 A_2 \dots A_n$ ，外延正多邊形  $B_1 B_2 \dots B_n$ 、 $C_1 C_2 \dots C_n$ ，其中  $B_3$ 、 $C_2$  共頂點是  $\Delta$  可動頂點位於框架正多邊形的底邊  $A_2 A_3$  的垂直線上，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則

❶  $\Delta A_2 A_3 K \cong \Delta A_4 A_3 C_4$ ；❷  $B_4 A_4 C_4 K$  是平行四邊形

❸  $\angle B_4 A_4 C_4 = \angle B_4 K C_4 + 180^\circ - \frac{540^\circ}{n}$



【以正五邊形為例說明】

$\Delta A_2 A_3 K$  生成 3 個正五邊形，分別為框架正五邊形  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ ，外延正五邊形  $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ ， $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$ ，其中  $B_3$ 、 $C_2$  共頂點是  $\Delta$  可動頂點，位於框架正多邊形底邊  $A_2 A_3$  垂直線上，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則

①  $\Delta A_2 A_3 K \cong \Delta A_4 A_3 C_4$ ；②  $B_4 A_4 C_4 K$  是平行四邊形；③  $\angle B_4 A_4 C_4 = \angle B_4 K C_4 + 72^\circ$

證明：①  $\because A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 、 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ 、 $C_1 C_2 C_3 C_4 C_5$  是正五邊形，

$\therefore$  在  $\Delta A_2 A_3 K$  與  $\Delta A_4 A_3 C_4$  中

$$\overline{A_2 A_3} = \overline{A_3 A_4}, \overline{KA_3} = \overline{C_4 C_3},$$

$$\angle A_2 A_3 K = \angle A_2 A_3 A_4 - \angle KA_3 A_4 = 108^\circ - \angle KA_3 A_4$$

$$= \angle KA_3 C_4 - \angle KA_3 A_4 = \angle A_4 A_3 C_4$$

$$\therefore \Delta A_2 A_3 K \cong \Delta A_4 A_3 C_4$$

②  $\because \overline{A_2 K} = \overline{A_4 C_4}$  (對應邊相等)，

又  $\overline{B_4 K} = \overline{A_2 K}$  ( $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$  是正五邊形)，

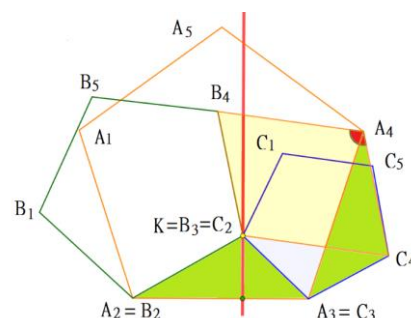
$$\therefore \overline{B_4 K} = \overline{A_4 C_4}, \text{ 又 } \angle A_2 K A_3 = \angle A_4 C_4 K$$

$$\angle B_4 K C_4 + \angle A_4 C_4 A_3 = (360^\circ - 108^\circ - \angle A_2 K A_3 - 36^\circ) + (\angle A_4 C_4 K - 36^\circ) = 180^\circ$$

$B_4 A_4 C_4 K$  是平行四邊形

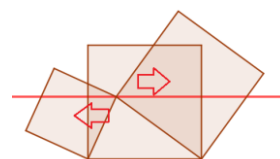
③  $\angle B_4 A_4 C_4 = \angle B_4 K C_4 + 108^\circ - 36^\circ = \angle B_4 K C_4 + 72^\circ$

$$\text{(一般式推導： } \angle B_4 A_4 C_4 = \angle B_4 K C_4 + 180 - \frac{540^\circ}{n} \text{)}$$



若  $\Delta$  可動頂點橫向移動，相當於「框架正多邊形底邊的平行線」上移動，此時會怎樣？

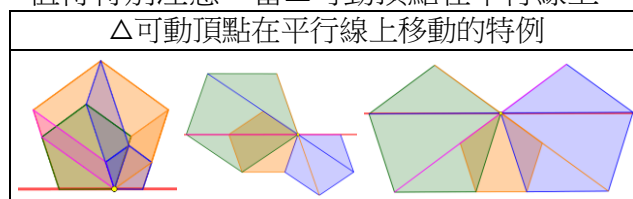
(四) 將  $\Delta$  可動頂點放置在「框架正多邊形底邊的平行線」，以三角形各成共頂點正多邊形之圖形性質



誠如前述，以第 4 頂點為代表，其餘各個頂點討論詳見手稿。

發現：1. 當  $\Delta$  可動頂點在平行線上移動，與框架正方形各邊重合時，與

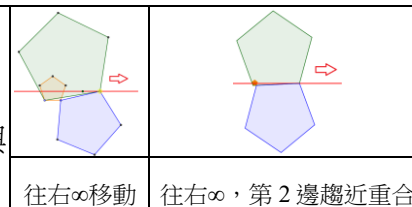
各邊結果相同(以第 2 邊示例，如右圖)。值得特別注意：當  $\Delta$  可動頂點在平行線上移動至框架正多邊形各邊頂點重合，此時平行四邊形退化成一線段(粉、藍、橘)分別為對角線。



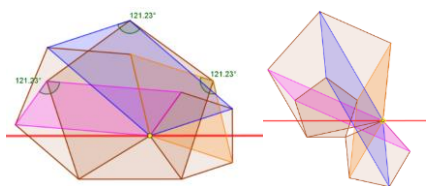
2. 當  $\Delta$  可動頂點移動至框架正多邊形左或右方無窮遠處，則：

① 2 外延正多邊形趨近無限大，框架正多邊形趨近一點

② 2 外延正多邊形的第 2 邊趨近重合，框架正多邊形與其中一外延正多邊形其中兩邊重合。

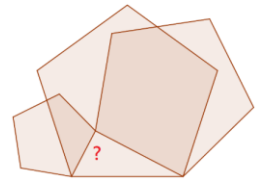


③ 當  $\Delta$  可動頂點移動至框架正多邊形底邊上方內部(下左圖)或外部(下右圖)，均會形成第  $i$  個框架角之不變性，且 3 個生成正多邊形第  $i$  個頂點會與垂直線上  $\Delta$  可動頂點形成平行四邊形。如右圖分別是正五邊形第 1、4、5 頂點與垂直線上  $\Delta$  可動頂點形成的平行四邊形(粉、橘、藍)。



★  $\Delta$  可動頂點在平行線上以三角形各邊生成共頂點正多邊形性質證明與垂直線證明雷同，詳見手稿內容。

透過研究二，可得知當框架正多邊形固定，兩外延正多邊形三角形可動頂點在不同直線上時，兩外延正多邊形上各個頂點對應於三角形可動頂點時會有特定的規律性，外延正多邊形頂點對應於三角形可動頂點時會形成線段軌跡；若回到原研究的問題，將原問題做了一個角度的轉換，



三角形可動頂點在與共頂點連線形成特定角度(即右圖中?角度=△可動角)時，探討會形成什麼性質？

### 研究三、探討三角形可動角為任意固定角度時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質

(一)△可動角(=∠B<sub>2</sub>KC<sub>3</sub>)為特殊 90、60、45、120 度角時，兩外延正多邊形上第 1、4、5、6 頂點對應於△可動頂點時的規律

整理圖形表格如下：

圖	角度	90	60	45	120	...	框架角(度)
正方形						...	...
∠B <sub>n</sub> A <sub>n</sub> C <sub>n</sub>		135°	165°	180(形成一線段) 沒有平行四邊形	105°	...	(360-90×2-θ)+45
正 5 邊形						...	...
∠B <sub>n</sub> A <sub>n</sub> C <sub>n</sub>		126°	156°	171°	165°	...	(360-108×2-θ)+72
正 6 邊形						...	...
∠B <sub>n</sub> A <sub>n</sub> C <sub>n</sub>		120°	150°	96°	90°	...	(360-120×2-θ)+90

**發現：**1.兩外延正  $n$  邊形與框架正多邊形第  $i$  頂點，會和兩外延正多邊形的三角形可動頂點形成平行四邊形

【以正五邊形(夾角為 90) 第 4 頂點為例說明】

△A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>K 生成 3 個正五邊形，分別為框架正五邊形 A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>A<sub>4</sub>A<sub>5</sub>，外延正五邊形 B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>B<sub>3</sub>B<sub>4</sub>B<sub>5</sub>、C<sub>1</sub>C<sub>2</sub>C<sub>3</sub>C<sub>4</sub>C<sub>5</sub>，其中 B<sub>3</sub>、C<sub>2</sub> 共頂點是△可動頂點，令其為 K，令△可動角為 90 度，且 A<sub>2</sub>、B<sub>2</sub> 重合，A<sub>3</sub>、C<sub>3</sub> 重合，不管 3 個正多邊形大小變化 ① △A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>K ≅ △A<sub>4</sub>A<sub>3</sub>C<sub>4</sub> ② B<sub>4</sub>A<sub>4</sub>C<sub>4</sub>K 是平行四邊形

**證明：**① ∵ A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>A<sub>4</sub>A<sub>5</sub>、B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>B<sub>3</sub>B<sub>4</sub>B<sub>5</sub>、C<sub>1</sub>C<sub>2</sub>C<sub>3</sub>C<sub>4</sub>C<sub>5</sub> 是正五邊形，

∴ 在 △A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>K 與 △A<sub>4</sub>A<sub>3</sub>C<sub>4</sub> 中， $\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$ ， $\overline{KA_3} = \overline{C_4C_3}$ ，

$\angle A_2A_3K = \angle A_2A_3A_4 - \angle KA_3A_4 = 108^\circ - \angle KA_3A_4$

$= \angle KA_3C_4 - \angle KA_3A_4 = \angle A_4A_3C_4$

∴ △A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>K ≅ △A<sub>4</sub>A<sub>3</sub>C<sub>4</sub>

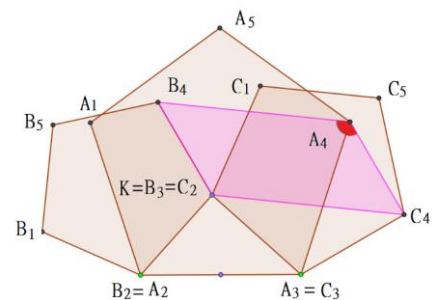
② ∴  $\overline{A_2K} = \overline{A_4C_4}$  (對應邊相等)，

又  $\overline{B_4K} = \overline{A_2K}$  (B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>B<sub>3</sub>B<sub>4</sub>B<sub>5</sub> 是正五邊形)，

∴  $\overline{B_4K} = \overline{A_4C_4}$ ，又  $\angle A_2KA_3 = \angle A_4C_4K$

$\angle B_4KC_4 + \angle A_4C_4A_3 = (360^\circ - 108^\circ - \angle A_2KA_3 - 36^\circ) + (\angle A_4C_4K - 36^\circ) = 180^\circ$

→ B<sub>4</sub>A<sub>4</sub>C<sub>4</sub>K 是平行四邊形





2.兩外延正 4、5、6 邊形第  $i$  頂點與框架正多邊形第  $i$  頂點形成固定框架角分別為  $(360-90 \times 2-\theta)+45$ 、 $(360-108 \times 2-\theta)+72$ 、 $(360-120 \times 2-\theta)+90$  度

3.兩外延正  $n$  邊形第  $i$  頂點與框架正多邊形第  $i$  頂點形成固定框架角為  $180 + \frac{180}{n} - \theta$  度，其

中  $\theta = \angle B_2KC_3$  (為  $\Delta$  可動角)

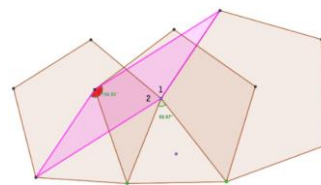
**說明：**∵兩外延正  $n$  邊形與框架正多邊形第  $i$  頂點，會和兩外延正多邊形的三角形可動頂點可形成平行四邊形

∴框架角 =  $\angle B_iKC_i$  (平行四邊形對角相等)

$$= \angle 1 + \angle 2$$

$$= (360 - \text{正 } n \text{ 邊形內角} \times 2 - \theta)$$

$$+ \text{正 } n \text{ 邊形內角} - 180^\circ - (180 - \frac{360}{n})^\circ \div 2 = (180 + \frac{180}{n} - \theta)^\circ$$



**結果：**除第 2、3 頂點因共用無法形成角度及平行四邊形，

①兩外延正多邊形與框架正多邊形第  $i$  個頂點，會和兩外延正多邊形的三角形可動頂點形成平行四邊形

②兩外延正  $n$  邊形第  $i$  頂點與框架正多邊形第  $i$  頂點形成固定框架角為  $(180 + \frac{180}{n} - \theta)^\circ$

度，其中  $\theta = \angle B_2KC_3$ ，而原競賽題給的角度為  $\angle B_4KC_1 = 360^\circ - \theta - \text{正 } n \text{ 邊形內角}$  角度的 2 倍，則和可動角同理，可形成固定框架角。

③當三角形可動角為  $\frac{180}{n}$  度時，兩外延正多邊形與框架正多邊形第  $i$  個頂點，會和兩外延正多邊形的三角形可動頂點原形成之平行四邊形退化成一線段。

**(二)  $\Delta$  可動角 (=  $\angle B_2KC_3$ ) 為特殊 90、60、45、120 度角時，兩外延正多邊形上第 1、4、5、6 頂點對應於  $\Delta$  可動頂點時的軌跡**

不管哪一種邊形，三角形可動頂點與共頂點連線形成 90、45、60、120 度，左右兩個外延正多邊形的第 1、4、5、.....、 $n$  頂點對應於三角形可動頂點形成軌跡是一**特定角度圓弧**。(如下表)

	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	$n$
90 度軌跡 示意圖				...	...
軌跡	180 度半圓	180 度半圓	180 度半圓		
60 度軌跡 示意圖				...	...
軌跡	240 度圓弧	240 度圓弧	240 度圓弧	...	...
45 度軌跡 示意圖				...	...
軌跡	270 度圓弧	270 度圓弧	270 度圓弧	...	...
120 度軌跡 示意圖				...	...
軌跡	120 度圓弧	120 度圓弧	120 度圓弧	...	...
...	...	...	...	...	...
$\theta$	$(360 - 2\theta)$ 度圓弧	$(360 - 2\theta)$ 度圓弧	$(360 - 2\theta)$ 度圓弧	...	



其中左外延正多邊形軌跡是深色直線、右外延圖形軌跡是淺色直線，藍、綠、橘、紫色分別是第 1、4、5、6.....頂點軌跡。進一步推出以正  $n$  邊形，形成角度  $\theta$  各頂點軌跡對應為  $(x-h)^2 + (x-k)^2 = r^2$

對應頂點	圓心	半徑	軌跡起點	軌跡終點
$\Delta$ 可動頂點	$(\frac{a}{2}, a \tan \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2})^2 + 1}$	(0,0)	(a,0)
左_1	$(-a \tan \frac{\theta}{2}, a \cot \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2})^2 + (\cot \frac{\theta}{2})^2}$	(0,0)	$(a + a \cos \frac{360^\circ}{n}, a)$
右_1	$(a + \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \frac{a}{2} \tan \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2})^2 + (\cot \frac{\theta}{2})^2}$	$(a + a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$	(a,0)
左_4	$(-\frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \frac{a}{2} \tan \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(-\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2})^2}$	(0,0)	$(-a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$
右_4	$(a + \frac{a}{2} \tan \frac{\theta}{2}, \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2})^2}$	$(-a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$	(a,0)
左_5	$(-a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$	$a \sqrt{(\sin \frac{360^\circ}{n})^2 + (\cos \frac{360^\circ}{n})^2}$	(0,0)	$(a + a(\cos \frac{360^\circ}{n} - \cos \frac{180^\circ}{n}), a(\sin \frac{360^\circ}{n} + \sin \frac{180^\circ}{n}))$
右_5	$(a + a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$	$a \sqrt{(\sin \frac{360^\circ}{n})^2 + (\cos \frac{360^\circ}{n})^2}$	$(a + a(\cos \frac{360^\circ}{n} - \cos \frac{180^\circ}{n}), a(\sin \frac{360^\circ}{n} + \sin \frac{180^\circ}{n}))$	(a,0)
...	...	...	...	...

再操作形成任意固定角度，將 $\Delta$ 可動頂點放置在「不同函數」位置時，觀察 $\Delta$ 可動頂點移動，外延正多邊形頂點跟著移動後的圖形性質與軌跡。

### 研究四、探討三角形可動頂點在不同函數上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質

#### (一)將 $\Delta$ 可動頂點放置在「拋物線」上，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質？

將 $\Delta$ 可動頂點放置在「拋物線」上，

不失一般性令拋物線過框架正多邊形的底邊兩點，

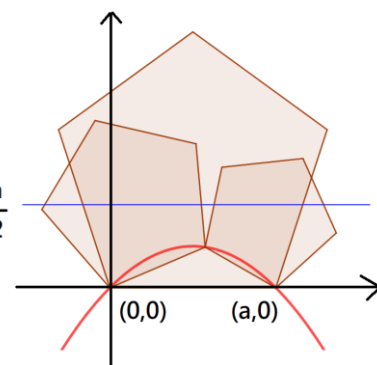
焦點  $F$  為底邊中點  $(\frac{a}{2}, 0)$ ，拋物線的準線為與底邊平行，

且與焦點等距  $\frac{a}{2}$  的直線  $L: y - \frac{a}{2} = 0$ ，

形成紅色曲線是 $\Delta$ 可動頂點  $K(x,y)$  過底邊兩點之拋物線

$$\because d(K, L) = \overline{KF} ,$$

$$\text{可得 } \left| y - \frac{a}{2} \right| = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - 0)^2} , \text{ 拋物線方程式為 } y = -\frac{x^2}{a} + x , \text{ 正焦弦長} = a .$$



**發現：** $\Delta$ 可動頂點放置在「拋物線」上時，仍維持框架角之不變性，及三個生成正多邊形第

$i$  頂點與  $\Delta$  可動頂點連線恆為平行四邊形，如圖， $B_1A_1C_1K$  (粉)  $B_4A_4C_4K$  (橘)、 $B_5A_5C_5K$  (藍)、...、 $B_nA_nC_nK$  恆為平行四邊形(與第 1 邊同理)

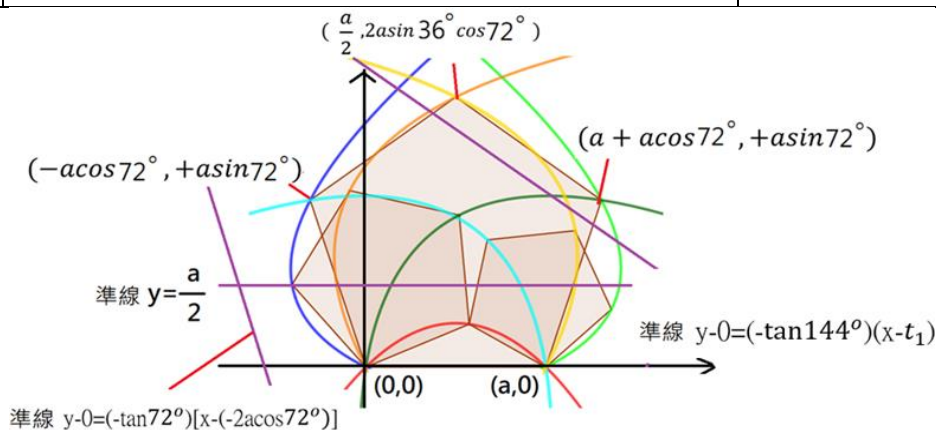
	正方形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	$n$
平行四邊形及框架角圖				...	...

下表圖示中左外延正多邊形軌跡是深色直線、右外延圖形軌跡是淺色直線，藍、綠、橘、紫色分別是第 1、4、5、6.....頂點軌跡。

正方形軌跡	正 5 邊形軌跡	正 6 邊形軌跡	...
			...

左右外延正五邊形第 1、4、5 頂點軌跡方程式為  $d(K, L) = \overline{KF}$

軌跡 第幾頂點	準線 $L$	$F$ 焦點 $(x_i, y_i)$
左-1(深藍)	$y - 0 = (-\tan 72^\circ)[x - (-2a \cos 72^\circ)]$	$(-\frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
右-1(淺藍)	$y - 0 = (\tan 144^\circ)(x - t_1)$	$(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
左-4(深綠)	$y - 0 = (\tan 144^\circ)(x - t_1)$	$(\frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
右-4(淺綠)	$y - 0 = \tan 72^\circ(x - (a + 2a \cos 72^\circ))$	$(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
左-5(深橘)	$y - 0 = (\tan 72^\circ)(x - t_5)$	$(\frac{a}{4}, a \sin 36^\circ \cos 72^\circ)$
右-5(淺橘)	$y - 0 = (\tan 72^\circ)(x - t_6)$	$(\frac{3a}{4}, a \sin 36^\circ \cos 72^\circ)$



拋物線軌跡第 1 頂點示意圖

★左右外延正  $n$  邊形第 1、4、.....頂點一般化軌跡方程式為  $d(K, L) = \overline{KF}$ ，詳見研究日誌。

(二) 將△可動頂點放置在「橢圓」上，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質？

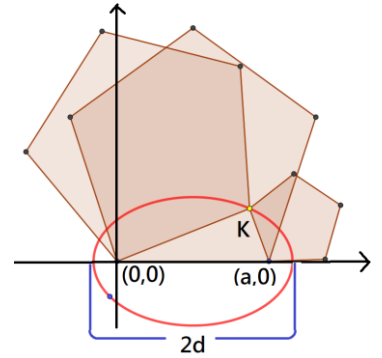
此時不失一般性△可動頂點  $K(x, y)$  在一橢圓上(紅色曲線)

令橢圓長軸長為  $2d$ ，其中  $d > \frac{a}{2}$

橢圓的兩焦點  $F_1、F_2$  為框架正多邊形的底邊兩點分別為

$(0,0)、(a,0)$ ， $\overline{F_1F_2} = a$ ，→橢圓方程式為

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = 2d, 2d > a$$



**發現：**△可動頂點放置在「橢圓」上時，仍維持框架角之不變性，

及三個生成正多邊形第  $i$  頂點與△可動頂點連線恆為平行四邊形，如右圖：

$B_1A_1C_1K$  (粉)、 $B_4A_4C_4K$  (橘)、  
 $B_5A_5C_5K$  (藍)、...  $B_nA_nC_nK$  恆  
為平行四邊形(與第 1 邊同理)

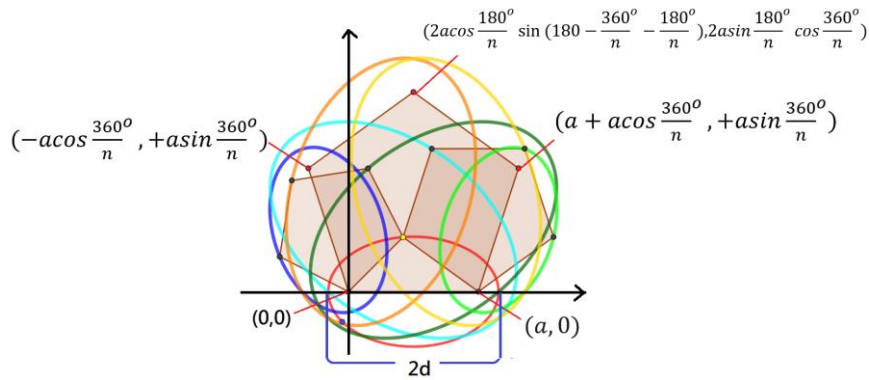
	正方形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	$n$
平行四邊形及框架角示意圖				...	...

右圖示中左外延正多邊形軌跡是深色直線、右外延圖形軌跡是淺色直線，藍、綠、橘、紫色分別是第 1、4、5、6.....頂點軌跡。

正方形軌跡	正 5 邊形軌跡	正 6 邊形軌跡	...
			...

進一步推得左右外延正  $n$  邊形第 1、4、5 頂點軌跡方程式為

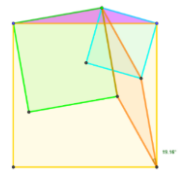
軌跡 第幾頂點	外延正多邊形
左-1	$\sqrt{(x + a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2d, 2d > a$
右-1	$\sqrt{(x + a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, 2d > a$
左-4	$\sqrt{(x - a - a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, 2d > a$
右-4	$\sqrt{(x - a - a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2d, 2d > a$
左-5	$\sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (y - 2a \cos \frac{360^\circ}{n} \sin \frac{180^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, 2d > a$
右-5	$\sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - 2a \cos \frac{360^\circ}{n} \sin \frac{180^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, 2d > a$
.....	.....
左- $n$	$\sqrt{(x + a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2d, 2d > a$
右- $n$	$\sqrt{(x + a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, 2d > a$



## 伍、討論

從研究過程與結果得知，任意△三邊皆正向生成正多邊形時，造成框架角不變性及軌跡圖形性質的**關鍵是「三個正多邊形的第*i*頂點與△可動頂點形成平行四邊形**」。

故【**類型 8—任意△三邊皆反向生成正多邊形**】條件下，先**嚴謹證明「三個正多邊形的第*i*頂點與△可動頂點形成平行四邊形**」，再推導框架角公式，並最後探討兩外延正多邊形第*i*頂點，對應於△可動頂點之軌跡圖形。



### 討論一、探討以三角形各邊同反向生成正*n*邊形，是否可形成特定的圖形性質？

若  $\angle B_4KC_4 = \angle C_4A_4B_4 = x^\circ$ ， $\angle B_2KC_3 = \theta$ ，以 GGB 嘗試正*n*邊形各個結果如下：

	正方形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	<i>n</i>
示意圖				...	...
$\angle C_nA_nB_n$	$135^\circ - \theta$	$144^\circ - \theta$	$150^\circ - \theta$	...	$180^\circ - 180^\circ / n - \theta$

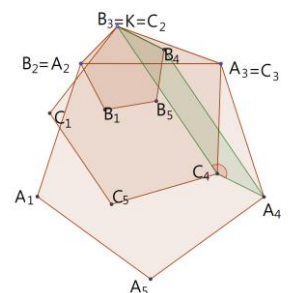
**發現：1.**【**類型 8—任意△三邊皆反向生成正多邊形**】條件下，「**三個正多邊形第*i*頂點與△可動頂點形成平行四邊形**」。即  $B_1A_1C_1K$  (粉紅色)、 $B_4A_4C_4K$  (橘色)、 $B_5A_5C_5K$  (藍色)、...  $B_nA_nC_nK$  恆為平行四邊形(以正五邊形第 4 頂點為例如下，其餘詳見手稿。)

#### 任意△三邊皆反向生成正多邊形第 4 頂點圖形性質

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正 *n* 邊形，分別為框架正多邊形  $A_1A_2...A_n$ ，外延正多邊形  $B_1B_2...B_n$ 、 $C_1C_2...C_n$ ，其中  $B_3$ 、 $C_2$  共頂點，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則 ①  $B_4A_4C_4K$  是平行四邊形；②  $\angle C_4A_4B_4 = 180 - \frac{180}{n} - \angle B_2KC_3$

【以正五邊形為例說明】

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正五邊形，分別為框架正五邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，外延正五邊形  $B_1B_2B_3B_4B_5$ 、 $C_1C_2C_3C_4C_5$ ，其中  $B_3$ 、 $C_2$  共頂點是△可動頂點位於框架正五邊形的第 2 邊  $A_2A_3$  上方，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正五邊形大小變化，則



①  $B_4A_4C_4K$  是平行四邊形；②  $\angle C_4A_4B_4 = 180 - \frac{180}{n} - \angle B_2KC_3$

證明：①  $\overline{A_4A_3} = \overline{A_2A_3}$  ,  $\overline{C_4C_3} = \overline{C_2C_3}$

設  $\angle B_2C_3C_4 = x^\circ$  則  $\angle C_4C_3A_4 = \angle KC_3B_2 = 90^\circ - x \therefore \Delta C_3C_3A_4 \cong \Delta KC_3B_2$  (SAS)

$C_3C_4A_4 = \angle B_2KC_3 = y^\circ$  , 則  $\angle A_4C_4K = (360 - 36 - y)^\circ$  ,  $\angle B_4KC_4 = (y - 36 - 108)^\circ$

$\therefore \angle A_4C_4K + \angle B_4KC_4 = 180^\circ \rightarrow B_4A_4C_4K$  是平行四邊形

②  $\angle C_4A_4B_4 = 144^\circ - \angle B_2KC_3$  , 假設  $\angle B_4KC_4 = \angle C_4A_4B_4 = x^\circ$  108° (內角)

$= \angle B_4KC_1 + x + 36 \angle B_4KC_1 = 360 - 108 \times 2 - \angle B_2KC_3$

$108 = 360 - 108 \times 2 - \angle B_2KC_3 + x + 36 \therefore x = 144 - \angle B_2KC_3$

一般式推導:  $\angle C_4A_4B_4 = 180 - \frac{180}{n} - \angle B_2KC_3$

2. 【類型 8—任意△三邊皆反向生成正多邊形】如同類型 1，以三角形各邊生成正  $n$  邊形， $\therefore$  反向生成， $\therefore$  三角形可動頂點無法放置在框架正多邊形不同邊上。

而△可動頂點與兩外延正多邊形第  $i$  頂點形成固定角或放置在不同函數—直線、拋物線、橢圓上時，兩外延正多邊形上各個頂點對應於△可動頂點會形成圓弧、直線、拋物線、橢圓軌跡。部份結果舉隅如下，下表圖示中左、右外延正多邊形軌跡分別是深、淺色直線，藍、綠、橘、紫色分別是第 1、4、5、6.....頂點軌跡：

A. 三角形可動頂點與兩外延正多邊形第  $i$  頂點形成固定角  $\theta$  (以 90、120 度為例)

	正方形	正五邊形	正六邊形	...	$n$
90				...	...
軌跡	半圓	半圓	半圓	...	半圓
120				...	...
軌跡	120 度圓弧	120 度圓弧	120 度圓弧	...	...
...	...	...	...	...	...
$\theta$	$360 - 2\theta$ 度圓弧	$360 - 2\theta$ 度圓弧	$360 - 2\theta$ 度圓弧	...	$360 - 2\theta$

B. 三角形可動頂點放置在不同函數—垂直線、拋物線、橢圓

軌跡	正方形	正五邊形	正六邊形	...	$n$
垂直線				...	...
拋物線				...	...
橢圓				...	...



**討論二、探討 8 種不同類型，從框架、左右外延正多邊形各取不同頂點 (不取三角形可動頂點)，是否可形成特定的圖形性質?**

之前會形成特定的圖形性質是與平行四邊形相關，故從 8 種不同類型的框架、左右外延正方形各取不同頂點，但不取三角形可動頂點做 4 點連線，是否會形成四邊形，舉例如下：

類型	1	2	3	4	5	6	7	8
頂點	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$	$A_1A_2B_4C_1$
圖形								

是不是每種類型，框架、左右外延正多邊形各取不同頂點(不取三角形可動頂點)，都會像上表一樣頂點可以形成平行四邊形?

【以類型 3 為例】(其餘類型詳見研究日誌)

**發現：**列出頂點連線所有情況有 91 種，其中紅框為可形成平行四邊形共 7 種

**說明：**取 2 個  $A$  為頂點  $6 \times 3 \times 3 = 54$  種、取 2 個  $B$  為頂點:  $3 \times 4 \times 3 = 36$  種、

取 2 個  $C$  為頂點:  $3 \times 4 \times 3 = 36$  種、以上可能情況共有 106 種；

其中  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合，故扣掉 15 種，剩餘 91 種可能組合。

至於取 3 個  $A$  或  $B$  或  $C$ ，則不需討論，除非第 4 取點也為相同(4 個  $A$  或  $B$  或  $C$ )，才能形成平行四邊形，但此情況也無法在 5 以上邊形形成。

頂點	$A_1A_2B_1C_1$
圖形	

頂點	$A_1A_2B_1C_4$	$A_1A_2B_1C_3$	$A_1A_2B_1C_2$	$A_1A_2B_1C_1$	$A_1A_2B_4C_4$	$A_1A_3B_1C_1$	$A_1A_3B_1C_2$	$A_1A_3B_2C_1$	$A_1A_3B_2C_4$	$A_1A_3B_4C_1$
圖形										
頂點	$A_1A_3B_4C_4$	$A_1A_4B_1C_1$	$A_1A_4B_1C_3$	$A_1A_4B_1C_4$	$A_1A_4B_2C_1$	$A_1A_4B_2C_3$	$A_1A_4B_2C_4$	$A_1A_4B_4C_1$	$A_1A_4B_4C_3$	$A_1A_4B_4C_4$
圖形										
頂點	$A_2A_3B_1C_1$	$A_2A_3B_1C_4$	$A_2A_3B_4C_1$	$A_2A_3B_4C_4$	$A_2A_4B_1C_1$	$A_2A_4B_1C_3$	$A_2A_4B_1C_4$	$A_2A_4B_4C_1$	$A_2A_4B_4C_3$	$A_2A_4B_4C_4$
圖形										
頂點	$A_3A_4B_1C_1$	$A_3A_4B_1C_4$	$A_3A_4B_2C_1$	$A_3A_4B_2C_4$	$A_3A_4B_4C_1$	$A_3A_4B_4C_4$	$B_1B_2A_1C_1$	$B_1B_2A_1C_3$	$B_1B_2A_1C_4$	$B_1B_2A_3C_1$
圖形										
頂點	$B_1B_2A_3C_4$	$B_1B_2A_4C_1$	$B_1B_2A_4C_3$	$B_1B_2A_4C_4$	$B_1B_4A_1C_1$	$B_1B_4A_1C_3$	$B_1B_4A_1C_4$	$B_1B_4A_2C_1$	$B_1B_4A_2C_3$	$B_1B_4A_2C_4$
圖形										
頂點	$B_1B_4A_3C_1$	$B_1B_4A_3C_4$	$B_1B_4A_4C_1$	$B_1B_4A_4C_3$	$B_1B_4A_4C_4$	$B_2B_4A_1C_1$	$B_2B_4A_1C_3$	$B_2B_4A_1C_4$	$B_2B_4A_3C_1$	$B_2B_4A_3C_4$
圖形										

頂點	$B_2B_4A_4C_1$	$B_2B_4A_4C_3$	$B_2B_4A_4C_4$	$C_1C_3A_1B_1$	$C_1C_3A_1B_2$	$C_1C_3A_1B_4$	$C_1C_3A_2B_1$	$C_1C_3A_2B_4$	$C_1C_3A_4B_1$	$C_1C_3A_4B_2$
圖形										
頂點	$C_1C_3A_4B_4$	$C_1C_4A_1B_1$	$C_1C_4A_1B_2$	$C_1C_4A_1B_4$	$C_1C_4A_2B_1$	$C_1C_4A_2B_4$	$C_1C_4A_3B_1$	$C_1C_4A_3B_2$	$C_1C_4A_3B_4$	$C_1C_4A_4B_1$
圖形										
頂點	$C_1C_4A_4B_2$	$C_1C_4A_4B_4$	$C_3C_4A_1B_1$	$C_3C_4A_1B_2$	$C_3C_4A_1B_4$	$C_3C_4A_2B_1$	$C_3C_4A_2B_4$	$C_3C_4A_4B_1$	$C_3C_4A_4B_2$	$C_3C_4A_4B_4$
圖形										

發現類型 4 與類型 5 能形成平行四邊形的情況僅有 6 種(如下，其餘不成立的圖形詳見手稿)

**結果:**根據 GGB 操作得知(所有圖形詳見研究日誌)

- ① 類型 1 和 8 從框架、左右外延正方形各取不同頂點的組合，跟研究一的類型 4、5 雷同，部分頂點( $A_1A_3B_1C_4$ )會形成平行四邊形，但在生成五邊形時下無法形成形成平行四邊形。

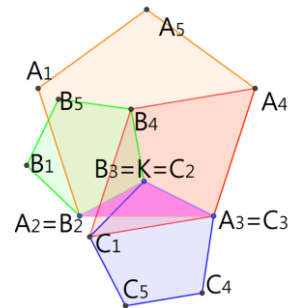
頂點	$A_1A_4B_2C_3$	$A_3A_4B_4C_1$	$B_2B_4A_4C_1$	$C_1C_3A_4B_4$	$A_2A_4B_1C_4$	$A_1A_2B_4C_1$
類型 4						
類型 5						

- ② 類型 2 和 7 不管從框架、左右外延正方形各取不同頂點的組合，都無法形成平行四邊形， $\because$ 兩外延正多邊形同向，但與框架正多邊形相反。
- ③ 類型 3、4、5、6 從框架、左右外延正方形各取不同頂點的組合可形成平行四邊形，類型 3、6 有 7 種、類型 4 和 5 各有 6 種，可組成平行四邊形的頂點不盡相同，且在任意正  $n$  邊形狀況下可以形成。
- ④  $A_1A_4B_2C_3$  為框架正多邊形的 4 個點，因此只在生成正方形時會形成平行四邊形，但框架角與  $\theta' (= \angle A_2A_3K)$  沒有關係，故在生成五邊形時無法形成平行四邊形。
- ⑤ 當框架角與  $\theta' (= \angle A_2A_3K)$  有關係時，此才能在生成五邊形時形成平行四邊形。

【下面以類型 3— $B_4A_4A_3C_1$  為平行四邊形之證明為例】

**性質-第 3 類型正多邊形圖形性質**

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正  $n$  邊形，分別為框架正多邊形  $A_1A_2 \dots A_n$ ，外延正多邊形  $B_1B_2 \dots B_n$ 、 $C_1C_2 \dots C_n$ ，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則



- ①  $\Delta A_2A_3K \cong \Delta B_4KC_1$
- ②  $B_4A_4A_3C_1$  是平行四邊形
- ③  $\angle B_4A_4A_3 = \theta' (= \angle A_2A_3K) + 45^\circ$

【以正五邊形為例說明】

$\Delta A_2A_3K$  生成 3 個正  $n$  邊形，分別為框架正多邊形  $A_1A_2 \dots A_n$ ，外延正多邊形  $B_1B_2 \dots B_n$ 、 $C_1C_2 \dots C_n$ ，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則

- ①  $\Delta A_2A_3K \cong \Delta B_4KC_1$ ；
- ②  $B_4A_4A_3C_1$  是平行四邊形；
- ③  $\angle B_4A_4A_3 = \angle A_2A_3K + 45^\circ$

**證明:** ①  $\because A_1A_2A_3A_4A_5, B_1B_2B_3B_4B_5, C_1C_2C_3C_4C_5$  是正五邊形，  
 $\therefore$  在  $\Delta A_2A_3K$  與  $\Delta B_4KC_1$  中， $\overline{A_2K} = \overline{KB_4}$ ， $\overline{KC_1} = \overline{C_2C_3}$ ，  
 設  $\angle A_2KC_1 = x$ ， $\angle A_2KA_3 = \angle B_4KC_1 = x^\circ + 108^\circ \rightarrow \Delta A_2A_3K \cong \Delta B_4KC_1$  (SAS)  
 ②  $\therefore \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4} = \overline{B_4C_1}$  (對應邊相等)，  
 設  $\angle A_2A_3K = y^\circ$ ， $\angle B_4C_1A_3 = y + 36^\circ$ ，  
 $\angle KA_3C_1 = 108^\circ + 36^\circ - y \therefore \angle KA_3C_1 + \angle B_4C_1A_3 = 180^\circ$   
 $\rightarrow B_4A_4C_4K$  是平行四邊形(一雙對邊相等且平行)  
 ③  $\angle B_4A_4A_3 = \angle A_2A_3K + 45^\circ$   
 $\Delta A_2A_3K \cong \Delta B_4KC_1$ ，所以  $\angle B_4C_1K = \angle A_2A_3K$ ，  
 且  $\angle B_4C_1A_3 = \angle B_4C_1K + 45^\circ$  (對角線)，  
 又  $\angle B_4C_1A_3 = \angle B_4A_4A_3$ ， $\angle B_4A_4A_3 = \angle A_2A_3K + 45^\circ$   
 (一般式推導： $\angle B_4A_4A_3 = \theta' + \frac{180^\circ}{n}$ ，其中  $\theta' = \angle A_2A_3K$ )

★發現類型 5 和類型 3 角度公式相同為  $\angle B_4A_4A_3 = \theta' + \frac{180^\circ}{n}$ ，但與類型 4、6 角度公式不同，類型 4、6 角度公式為  $\angle B_4A_4A_3 = \frac{180^\circ}{n} - \theta'$ ，其中  $\theta' = \angle A_2A_3K$ 。

**證明:** 第 4、6 類型角度公式  $\angle B_4A_4A_3 = 45^\circ - \angle A_2A_3K$

$\Delta A_2A_3K \cong \Delta B_4KC_1$ ，所以  $\angle B_4C_1K = \angle A_2A_3K$ ，且  $\angle B_4C_1A_3 = 45^\circ - \angle B_4C_1K$  (對角線)，又  
 $\angle B_4C_1A_3 = \angle B_4A_4A_3$ ， $\angle B_4A_4A_3 = 45^\circ - \angle A_2A_3K$   
 (一般式推導： $\angle B_4A_4A_3 = \frac{180^\circ}{n} - \theta'$ ，其中  $\theta' = \angle A_2A_3K$ )

### 討論三、探討以三角形各邊同向生成正 $n$ 邊形， $\Delta$ 可動頂點軌跡與外延正多邊形頂點對應於 $\Delta$ 可動頂點形成軌跡間之關係

從研究二、三的軌跡圖形發現， $\Delta$  可動頂點軌跡和外延正多邊形頂點對應於  $\Delta$  可動頂點形成軌跡間似乎有密切的關係，仔細探討兩者間形狀、位置、大小之差別，以同正向生成正五邊形第 1、4 頂點為例：

#### ■左外延正五邊形第 1 頂點

形狀	$\Delta$ 可動頂點軌跡	線段(紅色)	圓弧(紅色)	拋物線(紅色)	橢圓(紅色)
	第 1 頂點軌跡	線段(深藍色)	圓弧(深藍色)	拋物線(深藍色)	橢圓(深藍色)
圖示					
位置	旋轉中心	框架正 $n$ 邊形第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形第 2 頂點
	旋轉方向/角度	逆時針 108 度	逆時針 108 度	逆時針 108 度	逆時針 108 度
大小	倍數(原 $\Delta$ 可動頂點軌跡)	1 倍	1 倍	1 倍	1 倍

■右外延正五邊形第 1 頂點

形狀	△可動頂點軌跡	線段(紅色)	圓弧(紅色)	拋物線(紅色)	橢圓(紅色)
	第 1 頂點軌跡	線段(淺藍色)	圓弧(淺藍色)	拋物線(淺藍色)	橢圓(淺藍色)
	圖示				
位置	旋轉中心	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點
	旋轉方向/角度	順時針 36 度	順時針 36 度	順時針 36 度	順時針 36 度
大小	倍數(原△可動頂點軌跡)	$2 \cos 36^\circ$ 倍	$2 \cos 36^\circ$ 倍	$2 \cos 36^\circ$ 倍	$2 \cos 36^\circ$ 倍

■左外延正五邊形第 4 頂點

形狀	△可動頂點軌跡	線段(紅色)	圓弧(紅色)	拋物線(紅色)	橢圓(紅色)
	第 1 頂點軌跡	線段(深綠色)	圓弧(深綠色)	拋物線(深綠色)	橢圓(深綠色)
	圖示				
位置	旋轉中心	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點
	旋轉方向/角度	順時針 36 度	順時針 36 度	順時針 36 度	順時針 36 度
大小	倍數(原△可動頂點軌跡)	$2 \cos 36^\circ$ 倍	$2 \cos 36^\circ$ 倍	$2 \cos 36^\circ$ 倍	$2 \cos 36^\circ$ 倍

■右外延正五邊形第 4 頂點

形狀	△可動頂點軌跡	線段(紅色)	圓弧(紅色)	拋物線(紅色)	橢圓(紅色)
	第 1 頂點軌跡	線段(淺綠色)	圓弧(淺綠色)	拋物線(淺綠色)	橢圓(淺綠色)
	圖示				
位置	旋轉中心	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點
	旋轉方向/角度	逆時針 108 度	逆時針 108 度	逆時針 108 度	逆時針 108 度
大小	倍數(原△可動頂點軌跡)	1 倍	1 倍	1 倍	1 倍

結果：

對應	外延正 $n$ 邊形	第 1 頂點 左	第 1 頂點 右	第 4 頂點 左	第 4 頂點 右	...	第 $i$ 頂點 左	第 $i$ 頂點 右
	形狀	△可動頂點軌跡	函數圖形	函數圖形	函數圖形	函數圖形	...	函數圖形
位置	第 1 頂點軌跡	同樣 函數圖形	同樣 函數圖形	同樣 函數圖形	同樣 函數圖形	...	同樣 函數圖形	同樣 函數圖形
	旋轉中心	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點	...	框架正 $n$ 邊形 第 2 頂點( $i$ 是奇數) 第 3 頂點( $i$ 是偶數)	框架正 $n$ 邊形 第 3 頂點( $i$ 是奇數) 第 2 頂點( $i$ 是偶數)

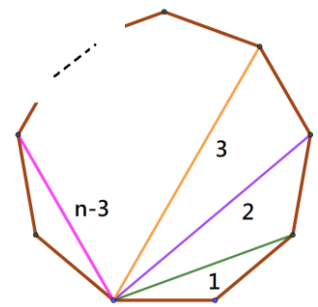
	旋轉方向	逆時針	順時針	順時針	逆時針	...	逆時針( $i$ 是奇數) 順時針( $i$ 是偶數)	順時針( $i$ 是奇數) 逆時針( $i$ 是偶數)
	旋轉角度	$180 - \frac{360}{n}$ 度 (正 $n$ 邊形 內角角度)	$\frac{180}{n}$ 度	$\frac{180}{n}$ 度	$180 - \frac{360}{n}$ 度 (正 $n$ 邊形 內角角度)	...	底邊與第 $i-3$ 對 角線夾角 (若 $i \leq 0$ , 則為正 $n$ 邊形內角角度)	底邊與第 $i-3$ 對 角線夾角 (若 $i \leq 0$ , 則為正 $n$ 邊形內角角度)
	起終點	框架正 $n$ 邊形之第 2、1 頂點	框架正 $n$ 邊形之第 1、3 頂點	框架正 $n$ 邊形之第 1、3 頂點	框架正 $n$ 邊形之第 2、1 頂點	...	框架正 $n$ 邊形 第 2、1 頂點( $i$ 是奇數) 第 1、3 頂點( $i$ 是偶數)	框架正 $n$ 邊形 第 1、3 頂點( $i$ 是奇數) 第 2、1 頂點( $i$ 是偶數)
大小	大小(原 $\Delta$ 可動頂點 軌跡)	1 倍	$2\cos\frac{180^\circ}{n}$ 倍 (框架正 $n$ 邊 形第 $n-3$ 對角 線長度倍數)	$2\cos\frac{180^\circ}{n}$ 倍 (框架正 $n$ 邊 形第 1 對角線 長度倍數)	1 倍	...	框架正 $n$ 邊形第 $i-3$ 對角線長度倍數 (若 $i-3 \leq 0$ , 則為 1 倍)	框架正 $n$ 邊形第 $i-4$ 對角線長度倍數 (若 $i-4 \leq 0$ , 則為 1 倍)

備註: 圖中綠、紫、橘、.....、粉色分別代表正  $n$  邊形第 1、2、3、.....、 $n-3$  條對角線。

由上表結果綜合得到:

1.  $\Delta$ 可動頂點放置在不同函數時, 左外延正多邊形上第  $i$  頂點對應於  $\Delta$

可動頂點, 當  $i$  為奇數或偶數分別會以框架正  $n$  邊形第 2 或 3 頂點為旋轉中心, 旋轉底邊與第  $i-3$  對角線夾角(若  $i \leq 0$ , 則為正  $n$  邊形內角角度), 形成與原三角形可動頂點軌跡形狀相同、大小縮放為**框架正  $n$  邊形第  $i-3$  對角線長度倍數的函數圖形軌跡**(若  $i-3 \leq 0$ , 則為 1 倍), 其中第 1 對角線最接近相鄰兩邊的對角線。



① 左外延正  $n$  邊形第 1 頂點軌跡為以框架正  $n$  邊形第 2 頂點為中心, 原等大小  $\Delta$  可動頂點軌跡, 逆時針旋轉  $180 - \frac{360}{n}$  度(正  $n$  邊形內角角度), 起終點分別為框架正  $n$  邊形之第 2、1 頂點。

② 左外延正  $n$  邊形第 4 頂點軌跡為以框架正  $n$  邊形第 3 頂點為中心, 原  $\Delta$  可動頂點軌跡放大  $2\cos\frac{180^\circ}{n}$  (框架正  $n$  邊形第 1 對角線長度倍數), 順時針旋轉  $\frac{180^\circ - (180^\circ - \frac{360^\circ}{n})}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ , 起終點分別為框架正  $n$  邊形之第 1、3 頂點。

2.  $\Delta$ 可動頂點放置在不同函數時, 右外延正多邊形上第  $i$  頂點對應於  $\Delta$  可動頂點, 當  $i$  為奇數或偶數分別會以框架正  $n$  邊形第 3 或 2 頂點為旋轉中心, 旋轉底邊與第  $i-3$  對角線夾角(若  $i \leq 0$ , 則為正  $n$  邊形內角角度), 形成與原三角形可動頂點軌跡形狀相同、大小縮放為**框架正  $n$  邊形第  $i-4$  對角線長度倍數的函數圖形軌跡**(若  $i-4 \leq 0$ , 則為 1 倍), 其中第 1 對角線最接近相鄰兩邊的對角線。

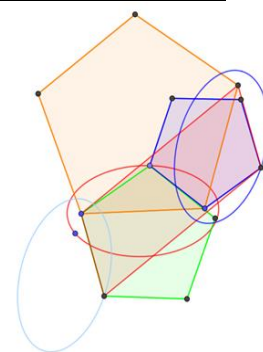
① 右外延正  $n$  邊形第 1 頂點軌跡為以框架正  $n$  邊形第 3 頂點為中心, 原  $\Delta$  可動頂點軌跡放大  $2\cos\frac{180^\circ}{n}$  (框架正  $n$  邊形第 1 對角線長度倍數), 順時針旋轉  $\frac{180^\circ - (180^\circ - \frac{360^\circ}{n})}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ , 起終點分別為框架正  $n$  邊形之第 1、3 頂點。



- ②右外延正  $n$  邊形第 4 頂點軌跡為以框架正  $n$  邊形第 2 頂點為中心，原等大小  $\triangle$  可動頂點軌跡，逆時針旋轉  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$  (正  $n$  邊形內角角度)，起終點分別為框架正  $n$  邊形之第 2、1 頂點。

### 討論四、探討以三角形各邊同向生成正 $n$ 邊形，各取正多邊形不同頂點形成平行四邊形，兩外延正多邊形頂點軌跡對應於 $\triangle$ 可動頂點形成軌跡間之關係

仿照討論 3，探討各類型會形成平行四邊形情況下，會產生的軌跡圖形性質，以**類型 3 正多邊形兩外延正多邊形軌跡與可動頂點的關係**為例 (右圖以正五邊形示例圖)，得到**結果**(證明詳見手稿)：



$\triangle A_2A_3K$  生成 3 個正  $n$  邊形，分別為框架正多邊形  $A_1A_2\dots A_n$ ，外延正多邊形  $B_1B_2\dots B_n$ 、 $C_1C_2\dots C_n$ ，令其為  $K$ ，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則

- ①外延正多邊形軌跡會形成與可動頂點軌跡相同的圖形
- ②放大倍率為 1 倍

其餘類型 4、5、6 正多邊形兩外延正多邊形軌跡與可動頂點的關係亦相同。

## 陸、結論

一、以三角形各邊生成正  $n$  邊形，僅**同正向**或**同反向**可形成生成正多邊形頂點與頂點連線**特定的圖形不變性**。

二、以三角形各邊**同向**生成正  $n$  邊形，得到三個生成正多邊形頂點與頂點連線：

(一)兩外延正  $n$  邊形與框架正  $n$  邊形同相對位置的頂點(分別為  $B_i$ 、 $C_i$ 、 $A_i$ )，與三角形可動

頂點  $K$  恆形成平行四邊形  $B_iA_iC_iK$ 。當三角形可動角為  $\frac{180}{n}$  度時，兩外延正多邊形與框

架正多邊形第  $i$  個頂點，和三角形可動頂點原形成之平行四邊形**退化成一線段**。

(二)當三角形可動角為任意固定角  $\theta(= \angle B_2KC_3)$ ，

①以三角形各邊**同正向**生成兩外延正  $n$  邊形第  $i$  頂點與框架正多邊形第  $i$  頂點形成固定

框架角，恆為  $180 + \frac{180}{n} - \theta$  度。

②以三角形各邊**同反向**生成兩外延正  $n$  邊形第  $i$  頂點與框架正多邊形第  $i$  頂點形成固定

框架角，恆為  $180 - \frac{180}{n} - \theta$  度。

(三)三角形可動頂點放置在**不同函數—直線、拋物線、橢圓**上時，兩外延正多邊形上各個頂點對應於三角形可動頂點會形成**直線、拋物線、橢圓軌跡**。其中正向生成正多邊形時，三角形可動頂點放在框架正多邊形邊上會形成**線段軌跡**。

如：三角形可動頂點放置在橢圓  $\sqrt{(x^2 + y^2)} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2d$  上時，左外延正  $n$  邊形

$$\text{第 4 頂點會形成橢圓軌跡 } \sqrt{\left(x - a - a \cos \frac{360^\circ}{n}\right)^2 + \left(y - a \sin \frac{360^\circ}{n}\right)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, \quad 2d > a。$$

(四) 當三角形可動角為**任意固定角  $\theta$** ，除第 2、3 頂點，以三角形**同向**各邊生成兩外延正  $n$  邊形的各個頂點對應於三角形可動頂點形成軌跡，恆為一**特定角度  $360-2\theta$  圓弧**。

(五) 三角形可動頂點**放置在不同函數**時，左外延正多邊形上第  $i$  頂點對應於三角形可動頂點，當  $i$  為奇數或偶數分別會以框架正  $n$  邊形第 2 或 3 頂點為旋轉中心，形成與原三角形可動頂點軌跡**形狀相同、大小縮放為框架正  $n$  邊形第  $i-3$  對角線長度倍數的函數圖形軌跡(若  $i-3 \leq 0$ ，則為 1 倍)**，其中第 1 對角線最接近相鄰兩邊的對角線。

(六) 三角形可動頂點**放置在不同函數**時，右外延正多邊形上第  $i$  頂點對應於三角形可動頂點，當  $i$  為奇數或偶數分別會以框架正  $n$  邊形第 3 或 2 頂點為旋轉中心，形成與原三角形可動頂點軌跡**形狀相同、大小縮放為框架正  $n$  邊形第  $i-4$  對角線長度倍數的函數圖形軌跡(若  $i-4 \leq 0$ ，則為 1 倍)**，其中第 1 對角線最接近相鄰兩邊的對角線。

(七) 三角形可動頂點  $K$  移動過程中，兩外延正多邊形中以  $K$  為起點分別依**順時鐘與逆時鐘**依序對應之頂點會形成  $(n-1)$  組的**以底邊中垂線為對稱軸之軌跡**，並與  $K$  點軌跡**形狀相同**、大小分別為框架正  $n$  邊形第  $i-3$  或  $i-4$  對角線長度倍數的圖形(若  $i-3$ 、 $i-4 \leq 0$ ，則為 1 倍)。

三、當三角形**非全同向**生成正  $n$  邊形時，各取其特定頂點亦會在頂點連線形成平行四邊形時，產生圖形角度不變關係：

(一) 外延正  $n$  邊形頂點軌跡旋轉後與三角形可動頂點軌跡**相同**。

(二) 類型 5 和類型 3 角度公式相同為  $\angle B_4 A_4 A_3 = \theta' + \frac{180^\circ}{n}$ ，

(三) 類型 4、6 角度公式為  $\angle B_4 A_4 A_3 = \frac{180^\circ}{n} - \theta'$ ，其中  $\angle A_2 A_3 K = \theta'$ 。

## 柒、參考文獻

### 一、參考資料

- 1.丁祥峰、黃薇瑄、柯政宏(2018)。正多邊形內接指定內角三角形之研究。第 58 屆中華民國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。
- 2.李哲宇(2011)。破解軌跡－凸多邊形頂點與邊之連線交點軌跡之探討。第 51 屆高雄市國中組數學科第二名。
- 3.吳思巧(2010)。利用 *GSP* 看三角形眾心軌跡。第 50 屆高雄市高中組數學科第二名。
- 4.陳昱丞、李珮筠、洪暉涵(2020)。正多邊形下探討 *Sperner* 引理之延伸性質。第 60 屆中華民國中小學科展高中組數學科科展作品說明書。
- 5.嚴才勝、蔡宗翰(2022)。等比例線段下保角圖形之特徵探討。2022 年臺灣國際科學展覽會數學科作品說明書。

### 二、圖片說明

本作品說明書中所有圖形及圖片由作者親自繪製。

## 【評語】 030421

以三角形三邊各二方向作正  $n$  邊形對於"可動頂點"的變化情形作一番探討，將其動態化與一般化得到三角形各邊同向生成正多邊形頂點與頂點連線特定的圖形不變性。作品絕大部分是以觀察為主，運用的數學難度不高，但內容詳盡，對於各種產生的情況均能考慮並證明，是一個用心的作品。得到的幾何的不變量有一些小結果，整體也算完整。後段討論分組的想法很不錯。"可動頂點"在不同函數上的情形，可再多予著墨，應可得到更多的性質。

## 作品簡報



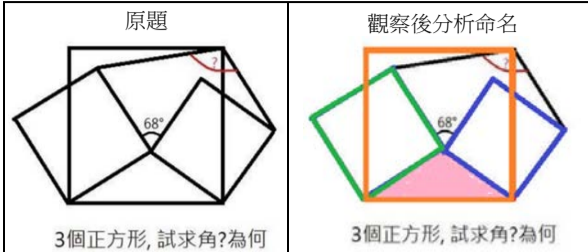
The image features a dark blue horizontal band with white and yellow text. The corners of the band are decorated with intricate geometric wireframe patterns in shades of pink, purple, and blue, including spheres and polyhedrons.

以三角形各邊生成共頂點  
正多邊形圖形性質之研究

# 壹、前言

對下圖競賽問題感興趣，問題中要求 $\theta$ 角度，答案是  $113^\circ$ ，**整個問題中沒有提到正方形的大小**，左右兩個正方形形成**夾角  $68^\circ$  度的位置也不是唯一**，卻能形成？角度的不變性，真是神奇！

觀察發現三個正方形(橘口、綠口、藍口)乃由一任意 $\Delta$ (粉紅色)的三邊(橘、綠、藍)生成，其中  $68^\circ$  度角位置是一個位置

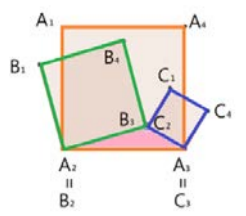


可變動的點，將此點稱為「 $\Delta$ 可動頂點」，橘色固定不變動的正方形命為「**框架正方形**」、其餘兩個命為「**外延正方形**」(詳見解釋名詞)，嘗試利用 GGB 嘗試找出不同正多邊形頂點與頂點、和角度之間的關係，並提出證明。據此，**研究目的**：

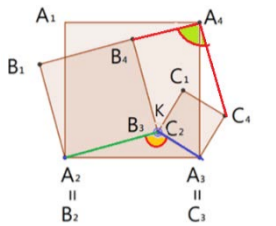
- 一、探討以三角形各邊生成共頂點正多邊形時，在什麼條件下會存在什麼圖形性質。
- 二、探討三角形可動頂點在不同直線上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質。
- 三、探討三角形可動角為任意固定角度時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質。
- 四、探討三角形可動頂點在不同函數上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質。

# 貳、名詞解釋

**框架正  $n$  邊形**：由 $\Delta$ 某一底邊生成，固定不變動的正  $n$  邊形，稱為「**框架正  $n$  邊形**」。橘色口為框架正方形，命為  $A_1A_2\dots A_n$ ，不變動的底邊命為  $A_2A_3$ ，邊長為  $a$ ，其中頂點  $A_2$ 、 $A_3$  位置固定不動。 $A_2$  為原點  $(0,0)$ ， $A_3$  為  $(a,0)$ 。



**外延正  $n$  邊形**： $\Delta$ 除底邊外的 2 邊，往外延伸生成的 2 個正  $n$  邊形(綠色口、藍色口)，其中 1 個頂點與框架正  $n$  邊形的頂點共頂點；且這 2 個正  $n$  邊形兩兩有 1 共頂點，並隨彼此共頂點位置變動而變動，稱為「**外延正  $n$  邊形**」。如上圖  $A_2$  和  $B_2$ 、 $A_3$  和  $C_3$ 、 $B_3$  和  $C_2$  分別共頂點，外延正  $n$  邊形的代號為  $B_1B_2\dots B_n$  及  $C_1C_2\dots C_n$ 。

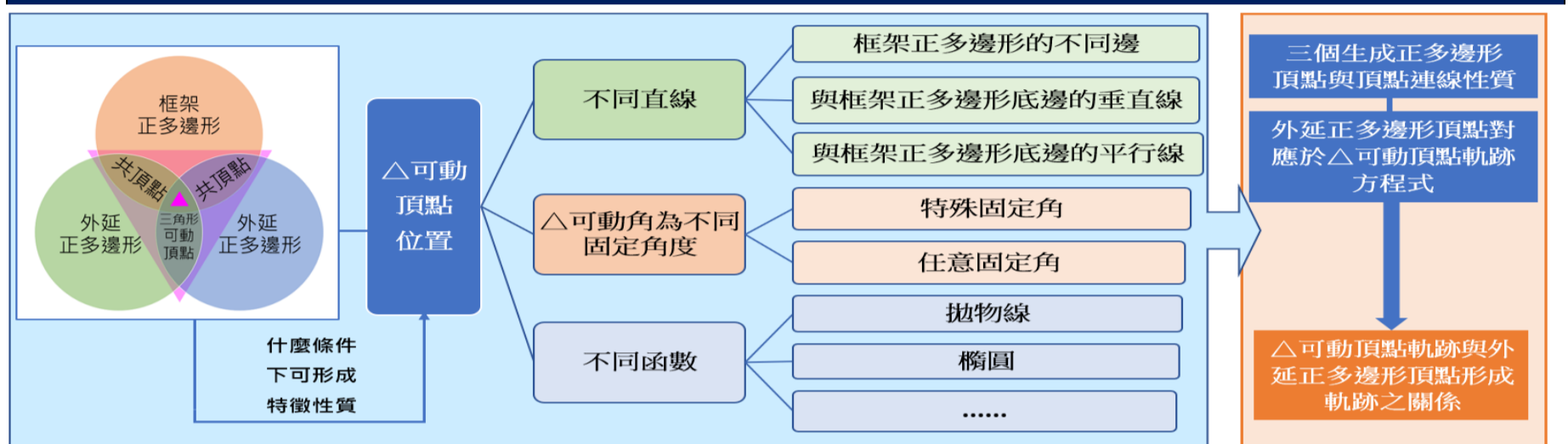


**$\Delta$ 可動頂點**：外延正  $n$  邊形兩兩有一共頂點，為「 $\Delta$ 可動頂點」，令為  $K$ 。 $B_3$  和  $C_2$  共頂點為  $\Delta$ 可動頂點  $K$ 。

**$\Delta$ 可動角**：共頂點與可動頂點連線為 2 邊，形成以  $\Delta$ 可動頂點為頂點的可變動角度，為「 $\Delta$ 可動角」，如圖為  $\angle B_2KC_3$  命為  $\theta$ 。

**框架角**：外延正  $n$  邊形的第  $i$  個頂點與框架正  $n$  邊形的第  $i$  頂點連線為 2 邊，一個以框架正  $n$  邊形第  $i$  個頂點為頂點的對應角，稱為「**第  $i$  個框架角**」，如圖為  $\angle B_4A_4C_4$  為第 4 個框架角。

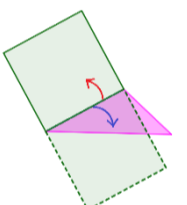
# 參、研究架構



# 肆、研究過程與結果

## 一、探討以三角形各邊生成共頂點正多邊形時，在什麼條件下會存在什麼圖形性質

**思考**：若令單一邊生成可分逆時針為正向、順時針為反向(如右圖)，則 $\Delta$ 的 3 邊生成 3 個正方形有 8 種類型(依框架、左外延、右外延正方形為正正正、反正正、...)，利用 GGB 嘗試 3 個正方形各取 1 個不同頂點(除底邊上的點) 搭配「 $\Delta$ 可動頂點」，探討可能形成平行四邊形的情況(所有情況詳見作品說明書)。



以原問題「取 3 個正方形的各個第 4 頂點及  $\Delta$ 可動頂點連接」為例，可能形成平行四邊形的情況有 4 種，如下表

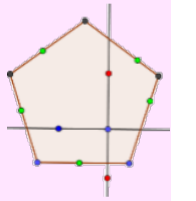
類型	1	2	3	4	5	6	7	8	類 4—生成五邊形	類 5—生成五邊形	類 8—生成五邊形
各個第 4 頂點及三角形可動頂點連接											
形成平行四邊形	○	×	×	?	?	×	×	○	×	×	○

**結果**：經 GGB 操作，任意 $\Delta$ 三邊皆正向或皆反向的生成正方形時，三個正方形第 4 頂點與  $\Delta$ 可動頂點可形成平行四邊形，框架角依  $\Delta$ 可動角度改變。

研究二、三、四先植基於【**類型 1—任意 $\Delta$ 三邊皆正向生成正多邊形**】條件，嚴謹證明是否形成平行四邊形、角度不變性及相關性質。再討論【**類型 8—任意 $\Delta$ 三邊皆反向生成正多邊形**】是否也和類型 1 一樣，性質成立。**過程**：

「**外延正多邊形**」位置變動的關鍵是「**三角形可動頂點**」，將三角形可動頂點放置在不同特性的位置，先從**特例**或**極端值**處理，

- ①  $\Delta$ 可動頂點所在的 $\Delta$ 退化成一線段，此相當於  $\Delta$ 可動頂點位置在**框架正多邊形的第 2 邊上**，是否形成上述性質？
  - ①\_1 觸發本研究將  $\Delta$ 可動頂點放置在「**框架正多邊形的不同邊上**」進行探討。
  - ①\_2 若  $\Delta$ 可動頂點縱向、橫向移動，相當於「**框架正多邊形底邊的垂直線、平行線**」上移動，會形成什麼性質？
- ② 再操作形成任意固定角度，將  $\Delta$ 可動頂點「**與共頂點形成不同的固定角度**」。
- ③ 放在「**不同函數**」等位置時，觀察  $\Delta$ 可動頂點移動，外延正多邊形頂點跟著移動後的圖形性質與軌跡。



## 二、探討其中兩個生成正多邊形三角形可動頂點在不同直線上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質

將  $\Delta$ 可動頂點放置在「**框架正多邊形的不同邊、垂直線、平行線上**」探討，以第 1 邊第 4 頂點為例說明，其餘詳見作品說明書

$\Delta$ 可動頂點在**框架正多邊形第 1 邊**，外延正多邊形**第 4 頂點**對應於  $\Delta$ 可動頂點的規律，將結果部分呈現在下表：

	正方形	正五邊形	正六邊形	正七邊形
示意圖				
框架角	$(\theta+45)^\circ$	$(\theta+72)^\circ$	$(\theta+90)^\circ$	$(\theta+720/7)^\circ$
形成軌跡示意圖				

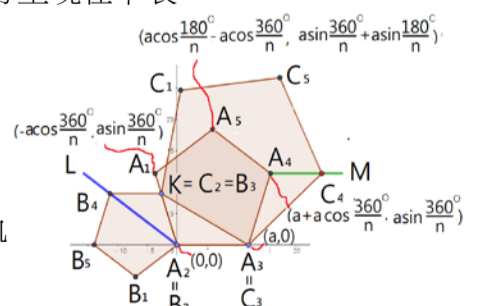
正多邊形第 1 邊第 4 頂點軌跡方程式

①  $B_4$  對應於動點  $K$  形成軌跡為直線  $L$

② 其中  $-2a(\cos[180^\circ - \frac{180^\circ(n-1)}{n}])^2 \leq x \leq 0$

③  $C_4$  對應於動點  $K$  形成軌跡為直線  $M$  軌跡方程式為  $y = a \sin[\frac{90^\circ(n-1)}{n}]$ ，

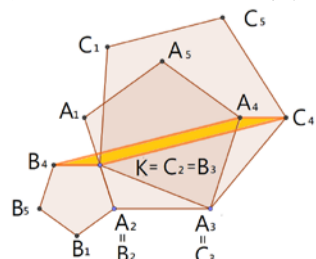
其中  $a + a \cos[\frac{90^\circ(n-1)}{n}] \leq x \leq 2a + a \cos[\frac{90^\circ(n-1)}{n}]$



**發現**：①  $B_4A_4C_4K$  恆為**平行四邊形**；② 左右外延正多邊形的第 4 頂點對應於  $\Delta$ 可動頂點形成軌跡是一**線段**。

嚴謹證明上述發現之圖形性質-正多邊形第 1 邊第 4 頂點圖形性質

$\Delta A_2 A_3 K$  生成 3 個正  $n$  邊形，分別為框架正多邊形  $A_1 A_2 \dots A_n$ ，外延正多邊形  $B_1 B_2 \dots B_n$ 、 $C_1 C_2 \dots C_n$ ，其中  $K$  是  $\Delta$ 可動頂點位於框架正多邊形的第 1 邊  $A_1 A_2$  上，且  $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合、不管 3 個正多邊形大小變化，則 ①  $\Delta A_2 A_3 K \cong \Delta A_4 A_3 C_4$ ；②  $B_4 A_4 C_4 K$  是平行四邊形



③  $\angle B_4 A_4 C_4 = \angle B_4 K C_4 + \frac{180^\circ(n-3)}{n}$

第 1 邊第 1、4、... 頂點軌跡方程式

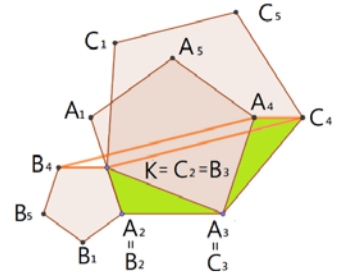
	左外延正多邊形	右外延正多邊形
1	$y = a x \cot \frac{180^\circ}{n}$	$y = a x \cot \frac{90^\circ}{n}$
4	$y = a x \sin \frac{360^\circ}{n}$	$y = a x \cot \frac{90^\circ(n-2)}{n}$
5	$y = 0$	$y = a x \cot \frac{270^\circ}{n}$



【以正五邊形為例說明】 $\triangle A_2A_3K$  生成 3 個正五邊形，分別為框架正五邊形  $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，外延正五邊形  $B_1B_2B_3B_4B_5$ 、 $C_1C_2C_3C_4C_5$ ， $\triangle$  可動頂點  $K$  位於框架正五邊形的第 1 邊  $A_1A_2$  上， $A_2$ 、 $B_2$  重合， $A_3$ 、 $C_3$  重合，不管 3 個正五邊形大小變化，則

- ①  $\triangle A_2A_3K \cong \triangle A_4A_3C_4$ ；②  $B_4A_4C_4K$  是平行四邊形；③  $\angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_4 + 72^\circ$

證明：①  $\because A_1A_2A_3A_4A_5$ 、 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 、 $C_1C_2C_3C_4C_5$  是正五邊形， $\therefore$  在  $\triangle A_2A_3K$  與  $\triangle A_4A_3C_4$  中， $\overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$ ， $\overline{KA_3} = \overline{C_4C_3}$ ， $\angle A_2A_3K = \angle A_2A_3A_4 - \angle KA_3A_4 = 108^\circ - \angle KA_3A_4 = \angle KA_3C_4 - \angle KA_3A_4 = \angle A_4A_3C_4 \Rightarrow \triangle A_2A_3K \cong \triangle A_4A_3C_4$  (SAS)



②  $\because \overline{A_2K} = \overline{A_4C_4}$  (對應邊相等)，又  $\overline{B_4K} = \overline{A_2K}$  ( $B_1B_2B_3B_4B_5$  是正五邊形)  $\therefore \overline{B_4K} = \overline{A_4C_4}$  ..... ①  
又  $\angle A_2KA_3 = \angle A_4C_4A_3$ ， $\angle B_4KC_4 + \angle A_4C_4K = (360^\circ - 108^\circ - \angle A_2KA_3 - 36^\circ) + (\angle A_4C_4A_3 - 36^\circ) = 180^\circ$  ..... ②  
由 ①②  $\Rightarrow B_4A_4C_4K$  是平行四邊形 (一雙對邊相等且平行)

$\Rightarrow \angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_4 + 108^\circ$  (內角)  $- 36^\circ = \angle B_4KC_4 + 72^\circ$ ，(一般式推導  $\angle B_4A_4C_4 = \angle B_4KC_4 + [(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}) - \frac{180^\circ}{n}] = \angle B_4KC_4 + \frac{180^\circ(n-3)}{n}$ )

**三、探討三角形可動角為任意固定角度時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質**

■  $\triangle$  可動角為特殊 90、45 度角時 (更多特殊角見說明書)，兩外延正多邊形上第 1、4、5、6 頂點對應於  $\triangle$  可動頂點時的規律，嚴謹證明詳見作品說明書

角度	正方形	正 5 邊形	正 6 邊形	...
90°				...
$\angle B_iA_iC_i$	135°	126°	120°	...
45°				...
$\angle B_iA_iC_i$	180° (形成一線段)	171°	165°	...
框架角	$(360-90 \times 2 - \theta) + 45^\circ$	$(360-108 \times 2 - \theta) + 72^\circ$	$(360-120 \times 2 - \theta) + 90^\circ$	...

結果：除第 2、3 頂點因共用無法形成角度及平行四邊形，  
① 兩外延與框架正多邊形第  $i$  個頂點和兩外延正多邊形的  $\triangle$  可動頂點形成平行四邊形  
② 兩外延正  $n$  邊形第  $i$  頂點與框架正多邊形第  $i$  頂點形成固定框架角為  $(180 + \frac{180}{n} - \theta)^\circ$  度，其中  $\theta = \angle B_2KC_3$ ，而原競賽題給的角度為  $\angle B_4KC_4 = 360^\circ - \theta^\circ - \text{正 } n \text{ 邊形內角}$  角度的 2 倍，則和可動角同理，可形成固定框架角。  
③ 當三角形可動角為  $\frac{180}{n}$  度時，兩外延正多邊形與框架正多邊形第  $i$  個頂點，會和兩外延正多邊形的三角形可動頂點原形成之平行四邊形退化成一線段。

■ 以正  $n$  邊形，形成角度  $\theta^\circ$  各頂點軌跡對應為  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

■  $\triangle$  可動頂點與共頂點連線形成 90、45 度，兩外延正多邊形第 1、4、5、... 頂點對應於  $\triangle$  可動頂點形成軌跡是特定角度圓弧

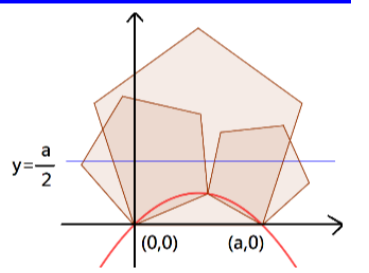
	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...
90 度軌跡示意圖				...
軌跡	180 度半圓	180 度半圓	180 度半圓	...
45 度軌跡示意圖				...
軌跡	270 度圓弧	270 度圓弧	270 度圓弧	...
...	...	...	...	...
$\theta^\circ$	$(360-2\theta)$ 度圓弧	$(360-2\theta)$ 度圓弧	$(360-2\theta)$ 度圓弧	...

對應頂點	圓心	半徑	軌跡起點	軌跡終點
$\triangle$ 可動頂點	$(\frac{a}{2}, \frac{a \tan \frac{\theta}{2}}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2})^2 + 1}$	(0,0)	(a,0)
左_1	$(-\frac{a \tan \frac{\theta}{2}}{2}, \frac{a \cot \frac{\theta}{2}}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2})^2 + (\cot \frac{\theta}{2})^2}$	(0,0)	$(a + a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$
右_1	$(a + \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \frac{a}{2} \tan \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\cot \frac{\theta}{2})^2 + (\tan \frac{\theta}{2})^2}$	$(a + a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$	(a,0)
左_4	$(-\frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \frac{a}{2} \tan \frac{\theta}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(-\cot \frac{\theta}{2})^2 + (\tan \frac{\theta}{2})^2}$	(0,0)	$(-a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$
右_4	$(\frac{a \tan \frac{\theta}{2}}{2} + a, \frac{a \cot \frac{\theta}{2}}{2})$	$\frac{a}{2} \sqrt{(\tan \frac{\theta}{2})^2 + (\cot \frac{\theta}{2})^2}$	$(-a \cos \frac{360^\circ}{n}, a \sin \frac{360^\circ}{n})$	(a,0)
...	...	...	...	...

**四、探討三角形可動頂點在不同函數上時，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質**

(一) 將三角形可動頂點放置在「拋物線」上，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質？

令拋物線過框架正多邊形的底邊兩點，焦點  $F$  為底邊中點  $(\frac{a}{2}, 0)$ ，拋物線的準線為與底邊平行，且與焦點等距  $\frac{a}{2}$  的直線  $L$ ：  
 $y - \frac{a}{2} = 0$ ，形成紅色曲線是  $\triangle$  可動頂點  $K(x,y)$  底邊兩點之拋物線； $\because d(K, L) = \overline{KF}$ ，可得  $|y - \frac{a}{2}| = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + (y - 0)^2}$ ，  
拋物線方程式為  $y = -\frac{x^2}{a} + x$ ，正焦距長 =  $a$ 。

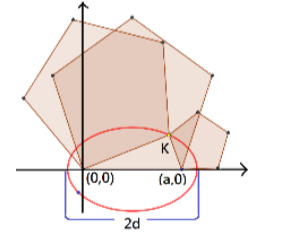


發現：維持框架角之不變性，及三個生成正多邊形第  $i$  頂點與  $\triangle$  可動頂點連線恆為平行四邊形，如下圖， $B_1A_1C_1K$  (粉紅色)、 $B_4A_4C_4K$  (橘色)、...、 $B_nA_nC_nK$  恆為平行四邊形 (與第 1 邊同理可證)

	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	左右外延正五邊形第 1、4、5 頂點軌跡方程式為 $d(K, L) = \overline{KF}$
平行四邊形及框架角示意圖				...	準線 $L$
軌跡				...	$F$ 焦點 $(x_i, y_i)$
					左-1 (深藍) $y=0 = (-\tan 72^\circ)(x - (-2a \cos 72^\circ))$ $(-\frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
					右-1 (淺藍) $y=0 = (-\tan 144^\circ)(x - t_1)$ $(\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
					左-4 (深綠) $y=0 = (\tan 144^\circ)(x - t_4)$ $(\frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
					右-4 (淺綠) $y=0 = \tan 72^\circ [(x - (a + 2a \cos 72^\circ))]$ $(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos 72^\circ, \frac{a}{2} \sin 72^\circ)$
					左-5 (深橘) $y=0 = (\tan 72^\circ)(x - t_5)$ $(\frac{a}{4}, a \sin 36^\circ \cos 72^\circ)$
					右-5 (淺橘) $y=0 = (-\tan 72^\circ)(x - t_6)$ $(\frac{3a}{4}, a \sin 36^\circ \cos 72^\circ)$
					拋物線軌跡第一頂點示意圖

(二) 將三角形可動頂點放置在「橢圓」上，以三角形各邊生成共頂點正多邊形之圖形性質？

$\triangle$  可動頂點  $K(x,y)$  在一橢圓上 (紅色曲線)，令橢圓長軸長為  $2d$ ，其中  $d > \frac{a}{2}$ ，橢圓的兩焦點  $F_1, F_2$  為框架正多邊形的底邊兩點分別為  $(0,0)$ 、 $(a,0)$ ， $\overline{F_1F_2} = a \Rightarrow$  橢圓方程式為  $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = 2d$ ， $2d > a$



發現： $\triangle$  可動頂點放置在「橢圓」上時，仍維持框架角之不變性，及三個生成正多邊形第  $i$  頂點與  $\triangle$  可動頂點連線恆為平行四邊形，如右圖， $B_1A_1C_1K$  (粉紅色)、 $B_4A_4C_4K$  (橘色)、 $B_5A_5C_5K$  (藍色)、...、 $B_nA_nC_nK$  恆為平行四邊形 (與第 1 邊同理可證)

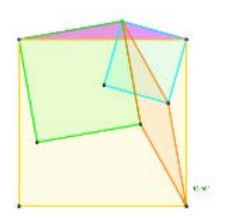
	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	左右外延正 $n$ 邊形第 4 頂點軌跡方程式 (其餘詳見作品說明書)
平行四邊形及框架角示意圖				...	橢圓軌跡第 1 頂點示意圖
軌跡				...	左-4 (深綠) $\sqrt{(x - a - a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = 2d, 2d > a$
					右-4 (淺綠) $\sqrt{(x + a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 2d, 2d > a$
					...
					$\sqrt{(x + a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 2d, 2d > a \rightarrow$ 左 $n$ 軌跡
					$\sqrt{(x - a \cos \frac{360^\circ}{n})^2 + (y - a \sin \frac{360^\circ}{n})^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} = 4d \cos \frac{360^\circ}{n}, 2d > a \rightarrow$ 右 $n$ 軌跡

**伍、討論**

任意  $\triangle$  三邊皆正向生成正多邊形時，造成框架角不變性及軌跡圖形性質的關鍵是「三個正多邊形的第  $i$  頂點與  $\triangle$  可動頂點形成平行四邊形」。故【類型 8—任意  $\triangle$  三邊皆反向生成正多邊形】條件下，先嚴謹證明「三個正多邊形的第  $i$  頂點與  $\triangle$  可動頂點形成平行四邊形」，再推導框架角公式，再探討兩外延正多邊形第  $i$  頂點，對應於  $\triangle$  可動頂點之軌跡圖形。

討論一、探討以三角形各邊同反向生成正  $n$  邊形，是否可形成特定的圖形性質？

若  $\angle B_4KC_4 = \theta$ ，【類型 8—任意  $\triangle$  三邊皆反向生成正多邊形】如同類型 1，以  $\triangle$  各邊生成正  $n$  邊形， $\therefore$  反向生成， $\therefore \triangle$  可動頂點無法放置在框架正多邊形不同邊上。而  $\triangle$  可動頂點與兩外延正多邊形第  $i$  頂點形成固定角或放置在不同函數—直線、拋物線、橢圓上時，兩外延正多邊形上各個頂點對應於  $\triangle$  可動頂點會形成圓弧、直線、拋物線、橢圓軌跡。部份結果舉隅如下，下表圖示中左、右外延正多邊形軌跡分別是深、淺色直線，藍、綠、橘、紫分別是第 1、4、5、6..... 頂點軌跡 (接下頁)：





	正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	$n$		正 4 邊形	正 5 邊形	正 6 邊形	...	任意△三邊皆反向生成正多邊形第 4 頂點圖形性質
示意圖				...	$\angle B_n A_n C_n = (180 - \frac{180}{n} - \theta)^\circ$	垂直線				...	△A <sub>2</sub> A <sub>3</sub> K 生成 3 個正 n 邊形為框架正多邊形 A <sub>1</sub> A <sub>2</sub> ...A <sub>n</sub> ，外延正多邊形 B <sub>1</sub> B <sub>2</sub> ...B <sub>n</sub> 、C <sub>1</sub> C <sub>2</sub> ...C <sub>n</sub> ，則
90°				...	半圓	拋物線				...	① B <sub>4</sub> A <sub>4</sub> C <sub>4</sub> K 是平行四邊形
120°				...	120° 圓弧	橢圓				...	② $\angle B_4 A_4 C_4 = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n} - \angle B_2 K C_3$ (其他頂點以此類推，證明詳見作品說明書)

**討論二、探討 8 種不同類型，從框架、左右外延正多邊形各取不同頂點(不取三角形可動頂點)，是否可形成特定的圖形性質？**

- ① 類型 1 和 8 從框架、左右外延正方形各取不同頂點的組合，跟研究一的類型 4、5 雷同，部分頂點(A<sub>1</sub>A<sub>3</sub>B<sub>1</sub>C<sub>4</sub>)會形成平行四邊形，但在生成正五邊形時，無法形成平行四邊形。
- ② 類型 2 和 7 不管取什麼點，都無法形成平行四邊形。
- ③ 類型 3、4、5、6 從框架、左右外延，多邊形各取不同頂點的組合可形成平行四邊形，類型 3、6 有 7 種、類型 4 和 5 各有 6 種，可組合成平行四邊形的頂點不全相同。
- ④ 當**框架角與  $\theta'$ ( $=\angle A_2 A_3 K$ ) 有關係時，此才能在生成五邊形時形成平行四邊形**。(所有完整內容與討論詳見作品說明書與手稿)

**討論三、探討以三角形各邊同向生成正 n 邊形，三角形可動頂點軌跡與外延正多邊形頂點對應於三角形可動頂點形成軌跡間之關係**

探討兩者軌跡間形狀、位置、大小之差別，以同正向生成正五邊形第 1、4 頂點為例

		左外延正五邊形第 1 頂點				右外延正五邊形第 1 頂點			
形狀	圖示 △可動頂點軌跡線段紅色 左、右第 1 頂點軌跡線段深、淺藍								
位置	旋轉中心	框架正 n 邊形第 2 頂點				框架正 n 邊形第 3 頂點			
	旋轉方向/角度	逆時針 108 度				順時針 36 度			
大小	倍數	1 倍				2cos36° 倍			
		左外延正五邊形第 4 頂點				右外延正五邊形第 4 頂點			
形狀	圖示 △可動頂點軌跡線段紅色 左、右第 4 頂點軌跡線段深、淺綠								
位置	旋轉中心	框架正 n 邊形第 3 頂點				框架正 n 邊形第 2 頂點			
	旋轉方向/角度	順時針 36 度				逆時針 108 度			
大小	倍數	2cos° 倍				1 倍			

**結果：**

對應	外延正 n 邊形	第 1 頂點	第 1 頂點	第 4 頂點	第 4 頂點	...	第 i 頂點	第 i 頂點
		左	右	左	右	...	左	右
形狀	△可動頂點軌跡	函數圖形	函數圖形	函數圖形	函數圖形	...	函數圖形	函數圖形
	第 1 頂點軌跡	同樣函數圖形	同樣函數圖形	同樣函數圖形	同樣函數圖形	...	同樣函數圖形	同樣函數圖形
位置	旋轉中心	框架正 n 邊形第 2 頂點	框架正 n 邊形第 3 頂點	框架正 n 邊形第 3 頂點	框架正 n 邊形第 2 頂點	...	框架正 n 邊形第 2 頂點(i 是奇數)；第 3 頂點(i 是偶數)	框架正 n 邊形第 3 頂點(i 是奇數)；第 2 頂點(i 是偶數)
	旋轉方向	逆時針	順時針	順時針	逆時針	...	逆時針(i 是奇數)；順時針(i 是偶數)	順時針(i 是奇數)；逆時針(i 是偶數)
	旋轉角度	$(180 - \frac{360}{n})^\circ$	$\frac{180}{n}^\circ$	$\frac{180}{n}^\circ$	$(180 - \frac{360}{n})^\circ$	...	底邊與第 i-3 對角線夾角 (若 i-3 ≤ 0，則為正 n 邊形內角角度)	底邊與第 i-3 對角線夾角 (若 i-3 ≤ 0，則為正 n 邊形內角角度)
大小	起終點	框架正 n 邊形之第 2、1 頂點	框架正 n 邊形之第 1、3 頂點	框架正 n 邊形之第 1、3 頂點	框架正 n 邊形之第 2、1 頂點	...	框架正 n 邊形第 2、1 頂點(i 是奇數)；第 1、3 頂點(i 是偶數)	框架正 n 邊形第 1、3 頂點(i 是奇數)；第 2、1 頂點(i 是偶數)
大小	大小(原△可動頂點軌跡)	1 倍	2cos $\frac{180^\circ}{n}$ 倍	2cos $\frac{180^\circ}{n}$ 倍	1 倍	...	框架正 n 邊形第 i-3 對角線長度倍數 (若 i-3 ≤ 0，則為 1 倍)	框架正 n 邊形第 i-4 對角線長度倍數 (若 i-4 ≤ 0，則為 1 倍)

另外，△A<sub>2</sub>A<sub>3</sub>K 生成 3 個正 n 邊形，分別為框架正多邊形 A<sub>1</sub>A<sub>2</sub>...A<sub>n</sub>，外延正多邊形 B<sub>1</sub>B<sub>2</sub>...B<sub>n</sub>、C<sub>1</sub>C<sub>2</sub>...C<sub>n</sub>，令其為 K，且 A<sub>2</sub>、B<sub>2</sub> 重合，A<sub>3</sub>、C<sub>3</sub> 重合，不管 3 個正多邊形大小變化，則**類型 3、4、5、6 正多邊形兩外延正多邊形軌跡與可動頂點的關係**  
 ① 外延正多邊形軌跡會形成與可動頂點軌跡相同的圖形；② 放大倍率為 1 倍。

**陸、結論**

- 一、以三角形各邊生成正 n 邊形，僅同正向或同反向可形成生成正多邊形頂點與可動頂點連線特定的圖形不變性。
- 二、以三角形各邊同向生成正 n 邊形，得到三個生成正多邊形頂點與可動頂點連線：
  - (一) 兩外延正 n 邊形與框架正 n 邊形同相對位置的頂點(分別為 B<sub>i</sub>、C<sub>i</sub>、A<sub>i</sub>)，與三角形可動頂點 K 恆形成平行四邊形 B<sub>i</sub>A<sub>i</sub>C<sub>i</sub>K。當三角形可動角為(180/n)度時，兩外延與框架正多邊形第 i 個頂點，和△可動頂點原形成之平行四邊形退化成一線段。
  - (二) 當三角形可動角為任意固定角  $\theta$ ( $=\angle B_2 K C_3$ )，以三角形各邊同正向、同反向生成兩外延正 n 邊形第 i 頂點與框架正多邊形第 i 頂點形成固定框架角，分別恆為  $180^\circ + (180^\circ/n) - \theta'$ 、 $180^\circ - (180^\circ/n) - \theta'$ 。
  - (三) 三角形可動頂點放置在不同函數—直線、拋物線、橢圓上時，兩外延正多邊形上各個頂點對應於三角形可動頂點會形成直線、拋物線、橢圓軌跡。其中正向生成正多邊形時，三角形可動頂點放在框架正多邊形邊上會形成線段軌跡。
  - (四) 當三角形可動角為任意固定角  $\theta'$ ，除第 2、3 頂點，以三角形同向及反向各邊生成兩外延正 n 邊形的各個頂點對應於三角形可動頂點形成軌跡，恆為一特定角度(360-2 $\theta$ )度的圓弧。
  - (五) 三角形可動頂點放置在不同函數時，左外延正多邊形上第 i 頂點對應於三角形可動頂點，當 i 為奇數或偶數分別會以框架正 n 邊形第 2 或 3 頂點為旋轉中心，形成與原三角形可動頂點軌跡形狀相同、大小縮放為框架正 n 邊形第 i-3 對角線長度倍數的函數圖形軌跡(若 i-3 ≤ 0，則為 1 倍)，其中第 1 對角線最接近相鄰兩邊的對角線。
  - (六) 三角形可動頂點放置在不同函數時，右外延正多邊形上第 i 頂點對應於三角形可動頂點，當 i 為奇數或偶數分別會以框架正 n 邊形第 3 或 2 頂點為旋轉中心，形成與原三角形可動頂點軌跡形狀相同、大小縮放為框架正 n 邊形第 i-4 對角線長度倍數的函數圖形軌跡(若 i-4 ≤ 0，則為 1 倍)，其中第 1 對角線最接近相鄰兩邊的對角線。
  - (七) 三角形可動頂點 K 移動時，兩外延正多邊形中以 K 為起點分別依順時針與逆時針依序對應之頂點會形成(n-2)組的以底邊中垂線為對稱軸之軌跡，並與 K 點軌跡形狀相同、大小分別為框架正 n 邊形第 i-3 或 i-4 對角線長度倍數的圖形(若 i-3、i-4 ≤ 0，則為 1 倍)。
- 三、當三角形非同向生成正 n 邊形時，各取特定頂點(不含可動頂點)亦會在頂點連線形成平行四邊形時，產生圖形角度不變關係：
  - (一) 外延正 n 邊形頂點軌跡旋轉後與三角形可動頂點軌跡相同；(二) 類型 5 和類型 3 角度公式相同為  $\angle B_4 A_4 A_3 = \theta' + (180/n)^\circ$ ；
  - (三) 類型 4、6 角度公式為  $\angle B_4 A_4 A_3 = (180/n)^\circ - \theta'$ ，其中  $\angle A_2 A_3 K = \theta'$ 。

**柒、參考文獻**

1. 丁祥峰、黃薇瑩、柯政宏(2018)。正多邊形內接指定內角三角形之研究。第 58 屆全國中小學科展高中組數學科展作品說明書。  
 2. 李哲宇(2011)。破解軌跡—凸多邊形頂點與邊之連線交點軌跡之探討。第 51 屆高雄市中區數學科第二名。  
 3. 吳思巧(2010)。利用 GSP 看三角形重心軌跡。第 50 屆高雄市高中組數學科第二名。  
 4. 陳昱丞、李珮筠、洪曉涵(2020)。正多邊形下探討 Sperner 引理之延伸性質。第 60 屆全國中小學科展高中數學科展作品說明書。  
 5. 嚴才勝、蔡宗翰(2022)。等比例線段下保角圖形之特徵探討。2022 年臺灣國際科學展覽會數學科作品說明書。

◆ 本研究所有圖片由作者自行繪製。