中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

探究精神獎

030420

鳩佔鵲巢

學校名稱：　新北市立福營國民中學

作者：	指導老師：
國二 楊振寧	李昱德

關鍵詞：　鳩佔鵲巢、同餘、餵食順序

摘要

「鳩佔鵲巢」的題目中將喜鵲餵食的規則寫了出來，我們列出不同的狀態後確實找到所有答案，接著我們進一步將「鳩佔鵲巢」題目進行擴充，使題目中五隻喜鵲擴充到所有正整數，我們發現餵食的順序可以同餘來計算，進而研究找出其所有的答案，之後又加以研究總共吃到的喜鵲數量。

壹、 前言

一、 研究動機

我們從科學研習雙月刊森棚教官數學題中發現鳩佔鵲巢的題目，經討論我們覺得有發展性，題目(游森棚[1])如下：

> 鳥窩裡有五隻小喜鵲，以及一隻混進來的小斑鳩。這六隻小鳥圍成一圈，小斑鳩編號是 0，接著沿著圓周五隻喜鵲順時針座號為 1,2,3,4,5。
>
> 視力不好的喜鵲媽媽帶著五份食物回來，她餵食的方法相當有趣：首先她選一隻小鳥餵食，假設這隻小鳥的座號是 k。下一隻被餵食的鳥是由這隻鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻鳥。然後看這隻鳥的編號是多少（比如說是 r），再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵食到斑鳩，食量大的斑鳩會馬上把所有食物吃光。
>
> 因此，如果一開始喜鵲媽媽選了 0 號斑鳩，那這樣所有小喜鵲都要餓肚子了。如果一開始喜鵲媽媽選了 2 號小鳥餵食，則會有兩隻小喜鵲吃到食物，餵食順序是
>
> $$2 \to 4 \to 2 \to 4 \to 2$$
>
> 如果一開始喜鵲媽媽選了 3 號小鳥餵食，則只有這隻小喜鵲吃到食物，因為餵食順序是
>
> $$3 \to 0$$
>
> 1. 喜鵲媽媽要從幾號小鳥開始餵，會讓最多小喜鵲吃到食物？
> 2. 承上題，吃最多份食物的小喜鵲吃了幾份食物？
> 3. 你能不能幫五隻小喜鵲的位置排一個順序，使得喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，會讓五隻小喜鵲都吃到食物，但是小斑鳩沒吃到？

我們發現餵食的順序是以同餘來計算，餵的第 n 隻之編號為餵的第 $n-1$ 隻的編號再加上第 $n-1$ 隻的編號並除以總隻數的餘數，也就是餵的第 $n-1$ 隻的編號乘以 2 再除以總隻數的餘數，因此我們可以得到餵的第 n 隻之編號為餵的第 1 隻的編號乘以 2^{n-1} 再除以總隻數的餘數，如**引理 1**，並接續作了延伸探討。

引理 1 設共有 r 隻小鳥，且每隻小鳥編號順時針依序排列，若鳥媽媽從第 a_1 號開始餵，則餵食第 n 次時餵到的是編號 a_n 的小鳥，其中 $a_n \equiv a_1 \times 2^{n-1} (\mathrm{mod}\, r)$ 且 $0 \leq a_n < r$。

證明.

我們用數學歸納法來證明這個引理。

1. 當 $n = 1$ 時，$a_n = a_1 = a_1 \times 2^{1-1}$，故 $a_n \equiv a_1 \times 2^{1-1} (\mathrm{mod}\, r)$，滿足數學歸納法的第一個條件。
2. 假設當 $n = t$ 時此引理成立，也就是說餵食第 t 次時餵到的是編號 a_t 的小鳥，其中 $a_t \equiv a_1 \times 2^{t-1} (\mathrm{mod}\, r)$ 。
3. 則當 $n = t + 1$ 時，鳥媽媽前一次餵食的編號為 a_t 的小鳥，依照餵食的規則，鳥媽媽第 $t + 1$ 次餵食會再往後數 a_t 的小鳥，也就是編號為 a_{t+1} 的小鳥，其中 $a_{t+1} \equiv a_t + a_t (\mathrm{mod}\, r)$，也就是說 $a_{t+1} \equiv 2 \times a_t (\mathrm{mod}\, r)$，又 $2 \times a_t \equiv 2 \times a_1 \times 2^{t-1} (\mathrm{mod}\, r)$，也就是說 $2 \times a_t \equiv a_1 \times 2^{(t+1)-1} (\mathrm{mod}\, r)$，故 $a_{t+1} \equiv a_1 \times 2^{(t+1)-1} (\mathrm{mod}\, r)$，則滿足數學歸納法的第二個條件。
4. 依照數學歸納法，我們已經完成此引理的證明。 ■

二、 研究目的

本研究有以下六個研究目的。

1. 探討當總隻數為奇數，且順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…時，吃到食物的喜鵲隻數的最大值，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數。
2. 探討當總隻數為奇數，且順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…時，從不同號碼開始餵食餵到的小喜鵲隻數，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數。
3. 探討當總隻數為偶數，且順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…時，吃到食物的喜鵲隻數的最大值，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數。
4. 探討當總隻數為偶數，且順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…時，從不同號碼開始餵食餵到的小喜鵲隻數，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數。
5. 找出當總隻數為偶數，且吃到食物的喜鵲隻數為最大值時的排序法。
6. 找出當總隻數為奇數，且吃到食物的喜鵲隻數為最大值時的排序法。

三、 名詞解釋

1. $a (\mathrm{mod}\, m) = b$ 表示 a 除以 m 的餘數為 b。
2. $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ 表示 a 除以 m 的餘數和 b 除以 m 的餘數相等。

定義 1(潘丞洞、潘丞彪[3]) $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow m \mid (a - b)$。

貳、 研究設備及器材

一、電腦

二、scratch 軟體

三、Excel 軟體

四、GeoGebra 經典版 5

參、 研究過程或方法

本研究所有圖片皆由指導老師指導後，作者使用 GeoGebra 經典 5 版軟體繪製。

圖 1 為本研究的研究脈絡圖。

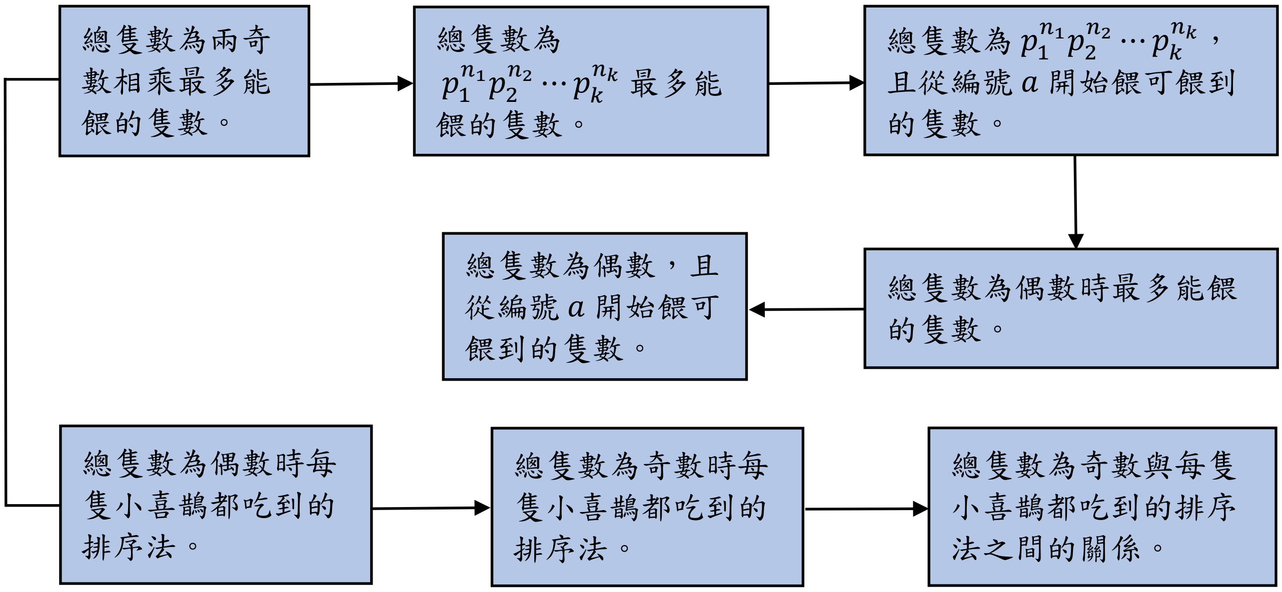

圖 1 研究脈絡圖

肆、 研究結果

設總隻數為 r 時，最多餵到 s 隻小喜鵲，且在各條件及排列順序下吃到最多份的小喜鵲吃到了 u 份。

首先我們想知道在順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…時，若固定某一個 r 的情況下，究竟從哪隻鳥開始餵可以使吃到的小喜鵲最多，而在嘗試的過程中，若 r 非常小可能會使數列很短，不容易看到第一隻餵食編號不同之間的差異，所以我們找了一些數字不那麼小，但又不是我們無法算的數字做嘗試，底下我們舉例說明。

(1) $r=9$ 時，我們從不同的小喜鵲開始餵食會餵到的數列如表 1，我們用空格將重複餵食的小鳥隔開，並發現當 r 是奇數時，餵食編號數列總是會從一開始就有循環，且我們也發現當第一隻餵食編號改變為 k 時，餵食數列僅僅就是將第一隻餵食編號為 1 時的餵食編號數列乘上 k 除以總隻數的餘數而已，例如第一隻餵食編號改為 3 時，餵食編號數列是將 1,2,4,8,7,5,1,2 乘上 3 再除以總隻數的餘數，也就是 3,6,3,6,3,6,3,6，因此原本從 1 號開始餵食的數列循環再乘上 k 以後，僅有可能讓循環變短或保持長度，不可能讓循環變長，所以若要讓小喜鵲被餵到最多隻，我們僅需要討論第一隻餵食編號為 1 號時的情形。

表 1　總隻數 $r=9$ 時從不同的小喜鵲開始餵食的餵食順序

第一隻餵食編號	餵食編號依序排列之數列
1	1,2,4,8,7,5 ,1,2
2	2,4,8,7,5,1 ,2,4
3	3,6,3,6,3,6 ,3,6
4	4,8,7,5,1,2 ,4,8
5	5,1,2,4,8,7 ,5,1
6	6,3,6,3,6,3 ,6,3
7	7,5,1,2,4,8 ,7,5
8	8,7,5,1,2,4 ,8,7

(2) $r=12$ 時，我們從不同的小喜鵲開始餵食會餵到的數列如表 2，我們用空格將重複餵食的小鳥隔開，並發現當 r 是偶數時情況並不像奇數時單純，偶數時不是所有餵食數列都從頭開始循環，而這從奇偶性去思考我們很快就想通了。

表 2　總隻數 $r=12$ 時從不同的小喜鵲開始餵食的餵食順序

第一隻餵食編號	餵食編號依序排列之數列
1	1,2,4,8 ,4,8,4,8,4,8,4
2	2,4,8 ,4,8,4,8,4,8,4,8
3	3,6,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0
4	4,8 4,8,4,8,4,8,4,8,4
5	5,10,8,4 ,8,4,8,4,8,4,8
6	6,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0,0
7	7,2,4,8 ,4,8,4,8,4,8,4
8	8,4 ,8,4,8,4,8,4,8,4,8
9	9,6,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0
10	10,8,4 ,8,4,8,4,8,4,8,4
11	11,10,8,4 ,8,4,8,4,8,4,8

在觀察過 r 的奇偶差異後，我們認為當 r 是奇數時較為單純，因此我們將從 r 為奇數的情況開始研究。

一、 當 r 為奇數，且依照順序為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…

由於從 1 號開始餵可以讓最多隻小喜鵲吃到，首先我們嘗試算出在不同的 r 值時，從 1 號開始餵的 s 值為何，令我們驚喜的是我們發現 $2^s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$ 好像成立且 2^s 後會不停循環，我們透過 scratch 算出更多的 r 都符合，如表 3，底下我們將證明此現象。

表 3　總隻數 r 為奇數時的餵食順序及 s 的值

r 的值	餵食數列	s 的值	$2^s \equiv 1(\mathrm{mod}\ r)$
$r=3$	$1,2$	$s=2$	$2^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$
$r=5$	$1,2,2^2=4,2^3(\mathrm{mod}\ 5)=3$	$s=4$	$2^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5)$
$r=7$	$1,2,2^2=4,2^3(\mathrm{mod}\ 7)=1,2^4(\mathrm{mod}\ 7)=2,$ $2^5(\mathrm{mod}\ 7)=4,2^6(\mathrm{mod}\ 7)=1$	$s=3$	$2^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$
$r=9$	$1,2,2^2=4,2^3(\mathrm{mod}\ 9)=8,2^4(\mathrm{mod}\ 9)=7,$ $2^5(\mathrm{mod}\ 9)=5,\ 2^6(\mathrm{mod}\ r)=1,\ 2^7(\mathrm{mod}\ 9)=2$	$s=6$	$2^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 9)$
$r=11$	$1,2,2^2=4,2^3=8,2^4(\mathrm{mod}\ 11)=5,$ $2^5(\mathrm{mod}\ 11)=10,\ 2^6(\mathrm{mod}\ 11)=9,\ 2^7(\mathrm{mod}\ 11)=7,$ $2^8(\mathrm{mod}\ 11)=3,\ \ 2^9(\mathrm{mod}\ 11)=6$	$s=10$	$2^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$
$r=13$	$1,2,2^2=4,2^3=8,2^4(\mathrm{mod}\ 13)=3,2^5(\mathrm{mod}\ 13)=6,$ $2^6(\mathrm{mod}\ 13)=12,\ 2^7(\mathrm{mod}\ 13)=11,$ $2^8(\mathrm{mod}\ 13)=9,\ \ 2^9(\mathrm{mod}\ 13)=5,$ $2^{10}(\mathrm{mod}\ 13)=10,\ \ 2^{11}(\mathrm{mod}\ 13)=7$	$s=12$	$2^{12} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$
$r=15$	$1,2,2^2=4,2^3=8,2^4(\mathrm{mod}\ 15)=1,$ $2^5(\mathrm{mod}\ 15)=2,\ 2^6(\mathrm{mod}\ 15)=4,\ 2^7(\mathrm{mod}\ 15)=8,$ $2^8(\mathrm{mod}\ 15)=1,\ \ 2^9(\mathrm{mod}\ 15)=2,$ $2^{10}(\mathrm{mod}\ 15)=4,\ \ 2^{11}(\mathrm{mod}\ 15)=8,$ $2^{12}(\mathrm{mod}\ 15)=1,\ \ 2^{13}(\mathrm{mod}\ 15)=2$	$s=4$	$2^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 15)$

定理 1 若 r 為奇數且從 1 號開始餵，則 $2^s \equiv 1(\mathrm{mod}\ r)$。

證明.

已知 s 為可以餵到最多的小喜鵲數量，所以 $2^s(\mathrm{mod}\ r)$ 必定與前面餵食的小鳥重複。我們假設 $2^s(\mathrm{mod}\ r)$ 不是與第 1 隻重複，而是與第 i 隻重複，則 $2^s \equiv 2^i(\mathrm{mod}\ r)$，由於 $\gcd(2,r)=1$，我們可以將同餘式兩邊同除以 2^i 得到 $2^{s-i} \equiv 1(\mathrm{mod}\ r)$，這表示在第 $(s-i+1)$ 次餵食時就已經重複，此與 s 的定義矛盾，因此 $2^s \equiv 1(\mathrm{mod}\ r)$ 必定成立。

■

在**定理 1** 中我們證明了當 r 為奇數時，餵食第一次重複的小鳥必定是 1 號，因此必定會從頭開始循環。接著我們還是想了解不同 r 值之間 s 值的關係，我們用 scratch 將不同 r 值下的 s 值算出並列為表 4，由於 s 的值是由 r 的值決定，為了後續說明方便我們將 s 寫為函數 $s(r)$ 的形式。表 4 中我們發現如果 $r=r_1\times r_2$，其中 $\gcd(r_1,r_2)=1$，則 $s(r)=\mathrm{lcm}\big(s(r_1),s(r_2)\big)$，例如：$45=9\times 5$，$s(45)=12=\mathrm{lcm}(6,4)=\mathrm{lcm}\big(s(9),s(5)\big)$，底下我們將完整證明。

表 4 r 值為 100 以內的奇數時 $s(r)$ 的值

r	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$s(r)$	2	4	3	6	10	12	4	8	18	6	11	20	18	28	5
r	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
$s(r)$	10	12	36	12	20	14	12	23	21	8	52	20	18	58	60
r	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91
$s(r)$	6	12	66	22	35	9	20	30	39	54	82	8	28	11	12
r	93	95	97	99											
$s(r)$	10	36	48	30											

定理 2 若 $r = r_1 \times r_2$，其中 $\gcd(r_1, r_2) = 1$，則 $s(r) = \mathrm{lcm}\big(s(r_1), s(r_2)\big)$。

證明.

令 $l = \mathrm{lcm}\big(s(r_1), s(r_2)\big)$。由**定理 1**，我們已知 $2^{s(r)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$、$2^{s(r_1)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_1)$、$2^{s(r_2)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_2)$。由 $r = r_1 r_2$ 可知 $2^{s(r)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_1 r_2)$，其中 r_1 與 r_2都是奇數，換成整除式為 $r_1 r_2 \mid 2^{s(r)} - 1$，拆開得到 $r_1 \mid 2^{s(r)} - 1$、$r_2 \mid 2^{s(r)} - 1$，換回同餘式為 $2^{s(r)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_1)$、$2^{s(r)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_2)$，而經過**定理 1** 的證明後我們知道總隻數為奇數時，餵食數列會從頭開始就循環，因此 $s(r_1) \mid s(r)$、$s(r_2) \mid s(r)$，故 $l \mid s(r)$。

接著我們證明 $2^l \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$，因為 $2^{s(r_1)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_1)$、$s(r_1) \mid l$，所以 $2^l \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_1)$，同理 $2^l \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r_2)$，寫成整除式得到 $r_1 \mid 2^l - 1$、$r_2 \mid 2^l - 1$，又因為 $\gcd(r_1, r_2) = 1$，所以 $r_1 r_2 \mid 2^l - 1$，也就是說$2^l \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$。

由以上兩段證明可得 $s(r) = l = \mathrm{lcm}\big(s(r_1), s(r_2)\big)$

■

透過**定理 2** 的證明，我們也發現不只可以將 r 拆成兩個互質的數相乘，其實要拆成多個也可以，例如 $r = 315 = 9 \times 5 \times 7$ 時，我們可以用兩次**定理 2** 找來拆分 $s(r)$，$s(9 \times 5 \times 7) = \mathrm{lcm}\big(s(9 \times 5), s(7)\big) = \mathrm{lcm}\Big(\mathrm{lcm}\big(s(9), s(5)\big), s(7)\Big) = \mathrm{lcm}\big(s(9), s(5), s(7)\big)$。所以我們可以將 r 做質因數分解，便可以將 $s(r)$ 做拆分了。另外針對吃最多份食物的份數 u，我們也做了分析。

定理 3 若 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 為相異的奇質數，則

$$s(r)=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right) \text{ 且 } u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right\rceil。$$

證明.

針對 $s(r)=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$ 的部分，我們對 k 做數學歸納法。

1. 當 $k=1$ 時，顯然成立。
2. 假設當 $k=t$ 時成立，即 $s(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}p_t^{n_t})=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_t^{n_t})\right)$。
3. 當 $k=t+1$ 時，由**定理 2**，$s(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}p_{t+1}^{n_{t+1}})=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}),s(p_{t+1}^{n_{t+1}})\right)$，因 $k=t$ 時成立，所以 $s(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t})=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_t^{n_t})\right)$，故 $s(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}p_{t+1}^{n_{t+1}})=\operatorname{lcm}\left(\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_t^{n_t})\right),s(p_{t+1}^{n_{t+1}})\right)=$ $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_t^{n_t}),s(p_{t+1}^{n_{t+1}})\right)$，成立。
4. 由數學歸納法，$s(r)=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$ 成立。

接下來我們證明 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ 時，$u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right\rceil$，因為 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1$ 是食物的總份數，而餵養時，每 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$ 份循環一次，所以除以 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$，如果沒有剛好循環完，代表有幾隻多吃到，所以就加 1，也就是天花板函數的定義，故 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right\rceil$。

■

研究至此，當總隻數 r 為任意的奇數的情況，我們可以先將 r 做標準分解，並找出其 s 與 u 較簡單的運算模式。接著我們更好奇當總隻數 r 為奇數時，若我們不從 1 號小喜鵲開始餵，則是否可以找到 s 與 u 的值。透過 scratch 的幫忙，我們發現從 k 號小喜鵲開始餵時，若 k 與 r 互質，則 s 與 u 的值與從 1 號小喜鵲開始餵時的值一樣，我們彙整後如表 5，表中第一列為從一號開始餵的數列，第二列為從 k 號開始餵的數列，而若第二列的前 s 個數有同餘的，那麼由於互質可以消去 k，則回變成第一列的前 s 個數有同餘的，因此矛盾。其代數證明如**定理 4**。

表 5 r 為奇數時從 1 號開始餵與從與 r 互質的數開始餵的餵食數列

從 1 號 開始餵	1	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^{s-1}	$2^s \equiv 1 \pmod r$
從 k 號開始餵 （k 與 r 互質）	k	$2\times k$	$2^2\times k$	$2^3 \times k$	$\cdots$	$2^{s-1}\times k$	$2^s \times k \equiv k \pmod r$

定理 4 若 $r = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 皆為相異奇質數，且 $\gcd(a,r)=1$，則當第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，與從第 1 隻開始餵的結果一樣共可餵到 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$ 隻小喜鵲且 $u = \left\lceil \frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)} \right\rceil$。

證明.

由**定理 3** 我們知道若從第 1 隻開始餵，則前 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$ 隻不會重複餵食，所以對於任意 $0 \le i < j < \operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$，$2^i \not\equiv 2^j \pmod r$，且由**定理 1** 我們知道 $2^{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)} \equiv 1 \pmod r$。

底下我們證明當從第 a 隻開始餵食時前 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$ 不會重複餵食，若重複餵食，則存在$0 \le \bar{i} < \bar{j} < \operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$ 使得 $a \times 2^{\bar{i}} \equiv a \times 2^{\bar{j}} \pmod r$，由於 $\gcd(a,r)=1$、$\gcd(2,r)=1$，我們可以將同餘式兩邊同除以 $a\times 2^{\bar{i}}$ 得到 $2^{\bar{j}-\bar{i}} \equiv 1 \pmod r$，這與前面矛盾，故從第 a 隻開始餵時前 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$ 次不會重複餵食。另外因 $2^{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)} \equiv 1 \pmod r$，兩邊同乘以 a 得 $a \times 2^{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)} \equiv a \pmod r$，這表示若再餵下一次會重複餵到第一次餵食的小喜鵲。

接下來我們證明第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時 $u = \left\lceil \frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)} \right\rceil$，因為 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1$ 是食物的總份數，而餵養時每 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$ 份循環一次，所以除以 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)$，如果沒有剛好循環完，代表有幾隻多吃到，所以就加 1，也就是天花板函數的定義，故 $u = \left\lceil \frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}), s(p_2^{n_2}), \cdots, s(p_k^{n_k})\right)} \right\rceil$。

■

在**定理 4** 的證明中我們知道，只要從與 r 互質的數開始餵食，結果都與從 1 號開始餵食的相同。接著我們想探討如果從不互質的數開始餵食，則是否可以找出餵到的小喜鵲數量及 u 的值。我們假設總隻數為 r 隻，從第 dk 隻開始餵，其中 $\gcd(dk,r)=d$，我們發現這樣的餵食數列跟總隻數為 $\frac{r}{d}$ 隻從第 k 隻開始餵的餵食數列相對應，如表 6，第三列只是將第二列的同餘式連同模全部乘以 d 而已，而在**定理 4** 中我們也知道第一列與第二列的結論相同，詳細代數證明如**定理 5**。

表 6 r 為奇數時從 1 號開始餵與從與 r 互質的數開始餵的餵食數列

從 1 號 開始餵	1	2	2^2	$\cdots$	2^{s-1}	$2^s\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ \frac{r}{d}\right)$
從 k 號開始餵 （k 與 r 互質）	k	$2\times k$	$2^2\times k$	$\cdots$	$2^{s-1}\times k$	$2^s\times k\equiv k\left(\mathrm{mod}\ \frac{r}{d}\right)$
從 dk 號開始餵 且 $\gcd(dk,r)=d$	dk	$2\times dk$	$2^2\times dk$	$\cdots$	$2^{s-1}\times dk$	$2^s\times dk\equiv dk(\mathrm{mod}\, r)$

定理 5 若 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 皆為相異奇質數，且 $\gcd(a,r)=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，則當第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數為

$\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 且

$$u=\left\lfloor\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\right\rfloor。$$

證明.

由**定理 3** 我們知道當總隻數為 $p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k}$ 時，若從第 1 隻開始餵，則前 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 隻不會重複餵食，所以對於任意

$0\le i<j<\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$，

$2^i\not\equiv 2^j\left(\mathrm{mod}\, p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k}\right)$，且由**定理 1** 我們知道

$2^{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k}\right)$。

令 $a=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\times q$，其中 $\gcd(q,r)=1$。

我們先證明當從第 a 隻開始餵食時前 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 不會重複餵食，若重複餵食，則存在 $0\le\bar{i}<\bar{j}<\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 使得 $a\times 2^{\bar{i}}\equiv a\times 2^{\bar{j}}\left(\mathrm{mod}\, p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，由於 $\gcd(2,r)=1$，我們可以代換 a 並將同餘式兩邊同除以 $q\times 2^{\bar{i}}$ 得到 $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\times 2^{\bar{j}-\bar{i}}\equiv p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\left(\mathrm{mod}\ p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，換成整除式

為 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k} \mid p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\times 2^{\bar{j}-\bar{i}} - p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，兩邊同除以 $p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$ 得 $p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k} \mid 2^{\bar{j}-\bar{i}}-1$，再換回同餘式 $2^{\bar{j}-\bar{i}}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k}\right)$，這與前面矛盾，故從第 a 隻開始餵時前 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 次不會重複餵食。

另外因 $2^{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k}\right)$，兩邊同乘以 a 得 $a\times 2^{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\equiv a\left(\mathrm{mod}\, p_1^{n_1-m_1}p_2^{n_2-m_2}\cdots p_k^{n_k-m_k}\right)$，這表示若再餵下一次會重複餵到第一次餵食的小喜鵲。

接下來我們證明第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\right\rceil$，因為 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1$ 是食物的總份數，而餵養時每 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 份循環一次，所以除以 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$，如果沒有剛好循環完，代表有幾隻多吃到，所以就加 1，也就是天花板函數的定義，故 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\right\rceil$。

■

經過前面的研究，總隻數為奇數的部分我們首先探討了從 1 號小喜鵲開始餵的狀況，接著證明了從與 r 互質的小喜鵲開始餵的狀況會與從 1 號小喜鵲開始餵的狀況一樣，有 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 隻小喜鵲可以吃到，且 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\right\rceil$。最後是從與 r 不互質的小喜鵲開始餵食時的狀況，我們也算出可餵到 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 隻小喜鵲且此時 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\right\rceil$。

二、 當 r 為偶數，且依照順序為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲⋯

探討過 r 為奇數的情況後，我們也想試著了解看看當 r 為偶數時會有甚麼現象，經過 scratch 的幫忙，我們把 r 為奇數與偶數的 s 值列出來如表 7，我們發現當 r 變為兩倍時 s 的值就加 1，為了更仔細的了解奇數與偶數的關係，我們在表 8 中以 $r = 2^2 \times 5$ 與 $r = 5$ 為例觀察餵食數列，我們發現將 $r = 5$ 的餵食數列乘以 2^2 後，恰好會是 $r = 2^2 \times 5$ 的餵食數列之循環部分，底下我們將證明這個性質，及找出 $s(r)$ 與 u 的值。

表 7 r 為奇數與偶數之間的關係

r	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$s(r)$	2	4	3	6	10	12	4	8	18	6	11	20	18	28	5
r	6	10	14	18	22	26	30	34	38	43	46	50	54	58	62
$s(r)$	3	5	4	7	11	13	5	9	19	7	12	21	19	29	6
r	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61
$s(r)$	10	12	36	12	20	14	12	23	21	8	52	20	18	58	60
r	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122
$s(r)$	11	13	37	13	21	15	13	24	22	9	53	21	19	59	61
r	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91
$s(r)$	6	12	66	22	35	9	20	30	39	54	82	8	28	11	12
r	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170	174	178	182
$s(r)$	7	13	67	23	36	10	21	31	40	55	83	9	29	12	13
r	93	95	97	99											
$s(r)$	10	36	48	30											
r	186	190	194	198											
$s(r)$	11	37	49	31											

表 8 $r = 2^2 \times 5$ 與 $r = 5$ 間的關係

$r = 2^2 \times 5 = 20$	1	2	4	8	16	12	4	8	16	12	⋯
$r = 5$	1	2	4	3							

定理 6 若 $r=2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，則 $s(r)=\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)+n$ 且

$$u=\left\lceil\frac{2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-n}{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\right\rceil。$$

證明.

由**定理 3** 我們知道當總隻數為 $p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ 時，若從第 1 隻開始餵，則前 $\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 隻不會重複餵食，且由**定理 1** 我們知道 $2^{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，所以對於任意 $0\le i<j<\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$，$2^i\not\equiv 2^j\left(\operatorname{mod} p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，我們全部連同模同乘上 2^n，得到 $2^{n+i}\not\equiv 2^{n+j}\left(\operatorname{mod} 2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，這告訴我們當 $r=2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ 時，第 $n+1$ 到第 $n+\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 次餵食並不會重複餵食，也就是表 8 中 $r=2^2\times 5$ 的循環部分不重複。而在第 1 到第 n 次餵食時因 $1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}$ 都小於 r，所以前 n 次不會重複餵食。

再來我們證明前 n 次及第 $n+1$ 到第 $n+\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 次餵食不會重複。

假設 $2^{\bar{i}}\equiv 2^{\bar{j}}\left(\operatorname{mod} 2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，其中 $0\le\bar{i}<n$、$n\le\bar{j}<\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$，將同餘式連同模除以 $2^{\bar{i}}$ 得 $1\equiv 2^{\bar{j}-\bar{i}}\left(\operatorname{mod} 2^{n-\bar{i}}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，這違反了奇偶性，故矛盾。

綜合上面的證明，我們知道前 $n+\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 次餵食不會重複，而由前面我們已知 $2^{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\equiv 1\left(\operatorname{mod} p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，將同餘式連同模同乘 2^n 得 $2^{n+\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\equiv 2^n\left(\operatorname{mod} 2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，

這表示第 $n+\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)+1$ 次餵食與第 $n+1$ 次重複，

故 $s(r)=\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)+n$。

接下來我們證明 $r=2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ 時 $u=\left\lceil\frac{2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-n}{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\right\rceil$，因為 $2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1$ 是食物的總份數，而餵食數列的前 n 樣不循環後面每 $\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 份循環一次，所以除以

$\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right), s\left(p_2^{n_2}\right), \cdots, s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$，如果沒有剛好循環完，代表有幾隻多吃到，所以就加 1，也就是天花板函數的定義，故 $u=\left\lceil\frac{2^n p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}-1-n}{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right), s\left(p_2^{n_2}\right), \cdots, s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\right\rceil$。

■

定理 6 中我們成功證明了 r 為偶數與奇數之間的關係，也藉此找出 $s(r)$ 與 u 的值了，接著與 r 為奇數時一樣我們很好奇當 r 為偶數時從與 r 不互質的數開始餵會有甚麼結果，綜合**定理 5**、**6** 我們猜測與且 $\gcd(a,r)$、n 有關，透過 scratch 我們觀察了 $r=2^3\times 3\times 5^2$ 從 $2\times 3^2\times 5=$ 90 號開始餵($\gcd(a,r)=2\times 3\times 5=30$)及 $r=3^{1-1}\times 5^{2-1}$ 從 1 號開始餵，發現他們之間有關係。

表 9　$r=2^3\times 3\times 5^2$、$r=2^2\times 5$ 與 $r=5$ 之間的關係

$r=2^3\times 3\times 5^2$	90	180	360	120	240	480	360	120	240	480	360	…
$\uparrow \times\gcd(a,r)$ $(\times 30)$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$	$\uparrow\times 30$		
$r=2^2\times 5$	3	6	12	4	8	16	12	4	8	16	12	…
	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$	$\uparrow\times 3$		
$r=2^2\times 5$	1	2	4	8	16	12	4	8	16	12	4	…
$\uparrow\times 2^2$	$\nearrow\times 2^2$	$\nearrow\times 2^2$	$\nearrow\times 2^2$	$\nearrow\times 2^2$								
$r=5$	1	2	4	3								

表 9 中第一列為 $r=2^3\times 3\times 5^2$ 從 90 號開始餵的情形，我們連同 r 與數列除以最大公因數 30 得到第二列，因此得到第二列的首項為 3，此時 3 會與 r 互質，因此我們可以將數列除以 3 得到第三列，接著如先前的表 8 可以得到表 9 的第四列，故共可以餵到 $s(5)+2$ 隻小喜鵲，一般化證明如**定理 7**。

定理 7 若 $r=2^n p_1^{n_1} p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 皆為相異奇質數，且

$d=\gcd(a,r)=2^{\overline{m}} p_1^{\overline{m_1}} p_2^{\overline{m_2}}\cdots p_k^{\overline{m_k}}$，則當第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數為 $\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right), s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right), \cdots, s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$ 且

$$u=\left\lceil\frac{2^n p_1^{n_1} p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right), s\left(p_2^{n_2-m_2}\right), \cdots, s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)+n-\overline{m}}\right\rceil。$$

證明.

令 $a=2^m p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\times q$，其中 $\gcd(q,2p_1p_2\cdots p_k)=1$。

若前 $\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$ 有重複餵食，必定存在

$0\le i<j<\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$，使得

$a\times 2^i\equiv a\times 2^j \left(\operatorname{mod} 2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}\right)$，將同餘式連同模同除以 d 得到

$$2^{m-\overline{m}}p_1^{m_1-\overline{m_1}}p_2^{m_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{m_k-\overline{m_k}}\times q\times 2^i\equiv 2^{m-\overline{m}}p_1^{m_1-\overline{m_1}}p_2^{m_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{m_k-\overline{m_k}}\times q\times 2^j$$
$$\left(\operatorname{mod} 2^{n-\overline{m}}p_1^{n_1-\overline{m_1}}p_2^{n_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)$$

又因為 $d=\gcd(a,r)$，所以

$\gcd\left(2^{m-\overline{m}}p_1^{m_1-\overline{m_1}}p_2^{m_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{m_k-\overline{m_k}},2^{n-\overline{m}}p_1^{n_1-\overline{m_1}}p_2^{n_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)=1$，且

$\gcd(q,2p_1p_2\cdots p_k)=1$，故可將同於式兩邊同除以 $2^{m-\overline{m}}p_1^{m_1-\overline{m_1}}p_2^{m_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{m_k-\overline{m_k}}\times q$，得到 $2^i\equiv 2^j\left(\operatorname{mod} 2^{n-\overline{m}}p_1^{n_1-\overline{m_1}}p_2^{n_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)$，這與**定理 6** 矛盾，因此前

$\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$ 沒有重複餵食。

另外因 $2^{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}}\equiv 1\left(\operatorname{mod} 2^{n-\overline{m}}p_1^{n_1-\overline{m_1}}p_2^{n_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)$，

兩邊連同模同乘以 $2^{\overline{m}}$ 得

$2^{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}}\times 2^{\overline{m}}\equiv 2^{\overline{m}}\left(\operatorname{mod} 2^{n}p_1^{n_1-\overline{m_1}}p_2^{n_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)$，再將

兩邊同乘以$2^{m-\overline{m}}p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}\times q$ 得到

$2^{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}}\times a\equiv a\left(\operatorname{mod} 2^{n}p_1^{n_1-\overline{m_1}}p_2^{n_2-\overline{m_2}}\cdots p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)$，這表示

第 $\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}+1$ 次重複餵食了。

接下來我們證明第一隻餵食第 a 號小喜鵲時 $u=\left\lceil\dfrac{2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}}\right\rceil$，

因為 $2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1$ 是食物的總份數，而餵養時每

$\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$ 份循環一次，所以除以

$\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$，如果沒有剛好循環完，代表有幾隻

多吃到，所以就加 1，也就是天花板函數的定義，故

$$u=\left\lceil \frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}} \right\rceil。$$

■

現在不管總隻數為何，當順時針依序為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…時，我們都可以找出最多可以餵到的喜鵲隻數及最多吃到的份數，且即使不從一號開始餵，我們也找出了可以餵到的喜鵲隻數及最多吃到的份數。接下來我們將探討何種排序可以使吃到的小喜鵲最多。

三、 當 r 為偶數，吃到的小喜鵲最多的排序法

當 r 為偶數時，經過我們不斷嘗試，我們找到了一種較為規律的排序方式使每一隻小喜鵲都吃的到食物，舉例如圖 2 與圖 3。我們發現將奇數依序排在左邊，偶數排在右邊時從 0 號的對面開始餵可以讓全部小喜鵲都吃到，且餵食時奇偶交互餵食，每兩次餵食恰好繞一圈又多一隻，可以接到下一組奇偶餵食。

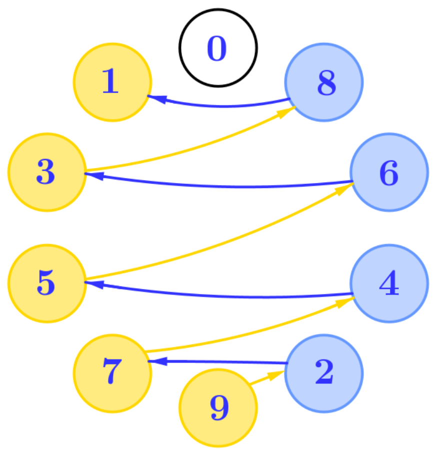

圖 2 $r=2k=10$ 時的一種排序

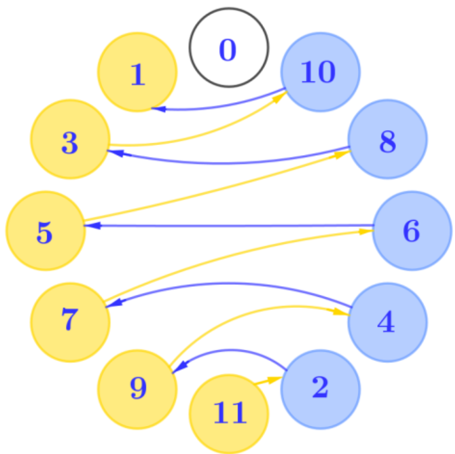

圖 3 $r=2k=12$ 時的一種排序

為了證明這種排序法可以讓每一隻小喜鵲都吃到，我們在**定理 8** 將排序法寫為通式，以代數方法表示小鳥編號，並證明恰好每隻小喜鵲吃到一份，不重複餵食也不餵到小斑鳩。

定理 8 若 $r=2k$ 時，則 $s=2k-1$。

證明.

我們找到了一種排列方式可以餵到所有的小喜鵲，座號排列方式如圖 4。

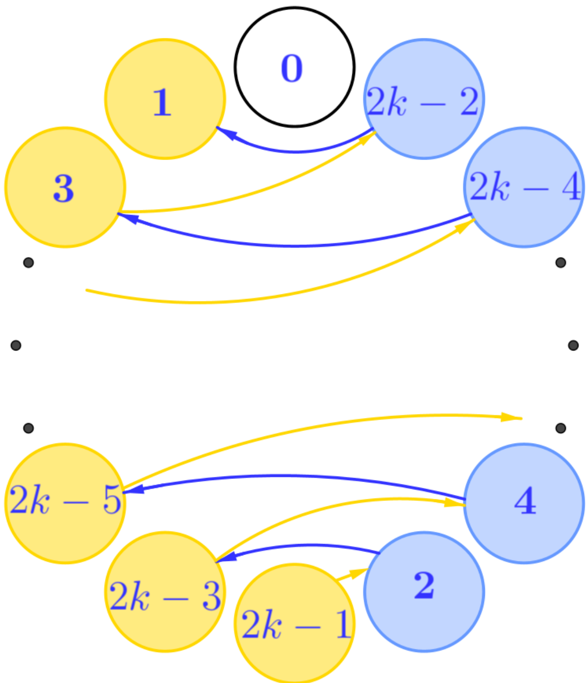

圖 4 r 為偶數時的一種排序法

為了方便說明，我們把排列規則類似地方的數字編成同一個區塊，而 t 為小鳥位置，並把小鳥座號的數字以 t 表示，如表 10。

表 10 $r=2k$ 時將小鳥位置以 t 表示的一種排序方式

<table>
<tr><td rowspan="2">小鳥位置</td><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>k</td><td>$k+1$</td><td>$k+2$</td><td>$k+3$</td><td>$\cdots$</td><td>$2k$</td></tr>
<tr><td colspan="9">t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">小鳥座號</td><td>$2k-1$</td><td>$2k-3$</td><td>$\cdots$</td><td>1</td><td>0</td><td>$2k-2$</td><td>$2k-4$</td><td>$\cdots$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="4">$2k-2t+1$</td><td></td><td colspan="4">$4k-2t+2$</td></tr>
</table>

底下我們將證明從第 $2k-2$ 號開始餵恰好每隻小喜鵲都吃到一份，不重複餵食也不會餵到小斑鳩。

1. 在表 10 左半部分，當 $t=1$ 到 $(k-1)$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為
   $t+(2k-2t+1)=2k-t+1$，將 $t=1$ 到 $(k-1)$ 帶入可以發現恰好對應到表 10 中右半段小鳥位置的 $(2k)$ 到 $(k+2)$，如圖 5。
2. 在表 10 右半部分，當 $t=(k+2)$ 到 $(2k)$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為
   $t+(4k-2t+2)\equiv 4k-t+2\equiv 2k-t+2(\bmod 2^n{p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\cdots{p_k}^{n_k})$，
   將 $t=(k+2)$ 到 $(2k)$ 帶入可發現恰好對應到表 10 左半段小鳥位置的 k 到 2，如圖 6。

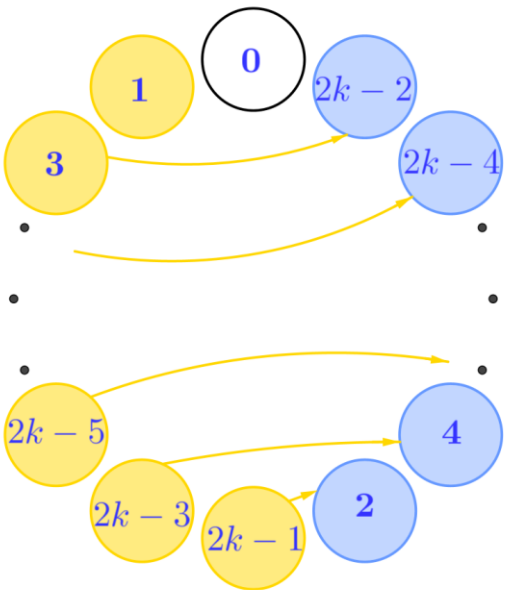

圖 5 r 為偶數時左半部分的餵食順序

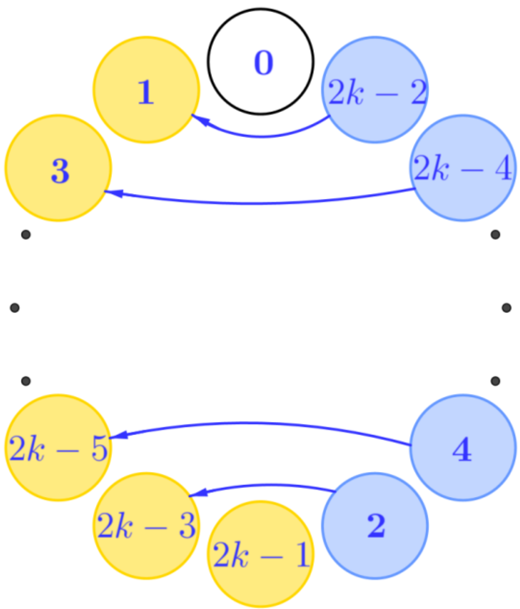

圖 6 r 為偶數時右半部分的餵食順序

由上面可得知除了 0 號、1 號，每個座號都有跳到對應的位置而且都不會重複，且從小鳥座號為 $2k-2$ 開始餵，可以讓每一隻小喜鵲吃到，故 $s=2k-1$。

■

在**定理 8** 裡我們證明當 r 為 $2k$ 時，則 $s=2k-1$，再來就要探討 r 為奇數時的情況。

四、 當r為奇數，吃到的小喜鵲最多的排序法

我們將奇數部分我們本來也嘗試要用偶數時的方法，但是過幾次後發現沒辦法成功，因此我們嘗試尋找新方法，當$r = 17$時我們找到了一種排序方法如圖 7，我們在 0 右邊填上$r - 3 = 14$，0 對面偏左填上 1，1 右邊填上$r - 1 = 16$，1 左邊填上$r - 2 = 15$，剩餘左側部分由上而下依序填上偶數部份，右側部分則兩兩填上奇數，我們發現這樣的填法從任意一隻小喜鵲開始餵都可以讓每隻小喜鵲吃到一份。接著我們以此方法嘗試了$r = 19$時發現行不通，而在$r = 21$時又可以，在$r = 23$時不行，在$r = 25$時又可以，因此我們推測此方法僅在$r = 4k + 1$形式時才對，因此針對$r = 4k + 3$形式時我們另外再多找一種排序法。

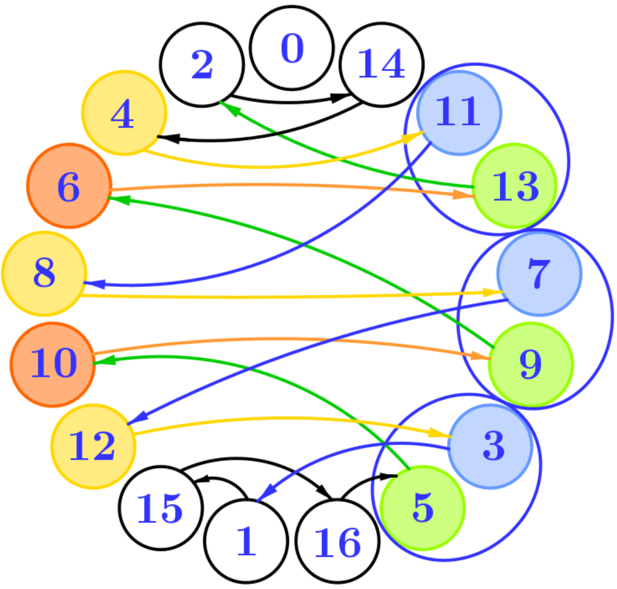

圖 7 $r = 4k + 1 = 17$時的一種排序

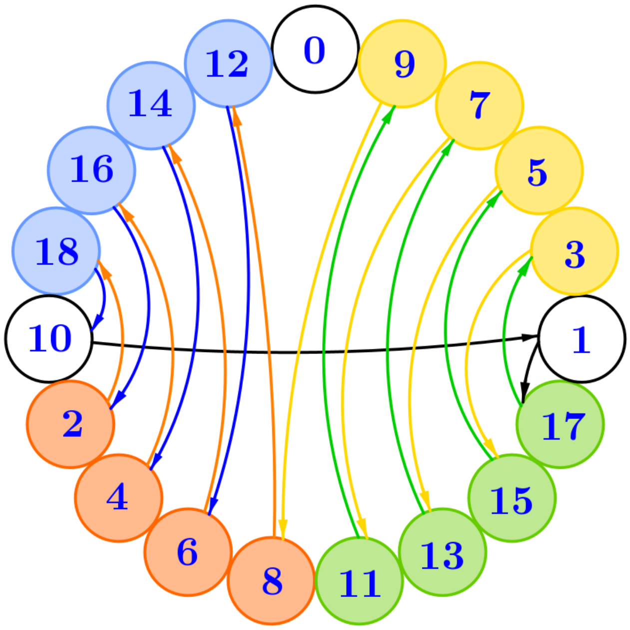

圖 8 $r = 4k + 3 = 19$時的一種排序

在$r = 4k + 3$形式時我們也找到了一種排序法，例如圖 8 是$r = 19$時的排序法，首先在最上方填上 0，右半邊的正中間填上 1，左半邊的正中間填上$\frac{r+1}{2}$，再來右上區域由小到大依序逆時針填入奇數，剩餘的奇數依序逆時針填在右下區域，接著左下區域由小到大依序逆時針填入偶數數，剩餘的偶數依序逆時針填在左上區域。我們發現此排序法從任意一隻小喜鵲開始餵都可以讓每隻小喜鵲吃到一份。底下我們將把這兩種排序法用通式表示，以代數方法表示小鳥編號，並證明恰好每隻小喜鵲吃到一份，不重複餵食也不餵到小斑鳩。

定理 9 若 $r=4k+1$ 時，則 $s=4k$。

證明.

我們首先將上面的排序法寫為一般式如圖 9，而為了證明每隻小喜鵲都可以吃到，我們必須將圖 9 中不同區域做分類，因此我們把圖 9 轉為表 11，其中由於排版關係列為五列，在表 11 中我們把排列規則類似地方的數字編成同一個區塊，而 t 為小鳥位置，並把小鳥座號的數字以 t 表示，底下我們將利用表 11 來證明每隻小喜鵲皆能吃到食物。

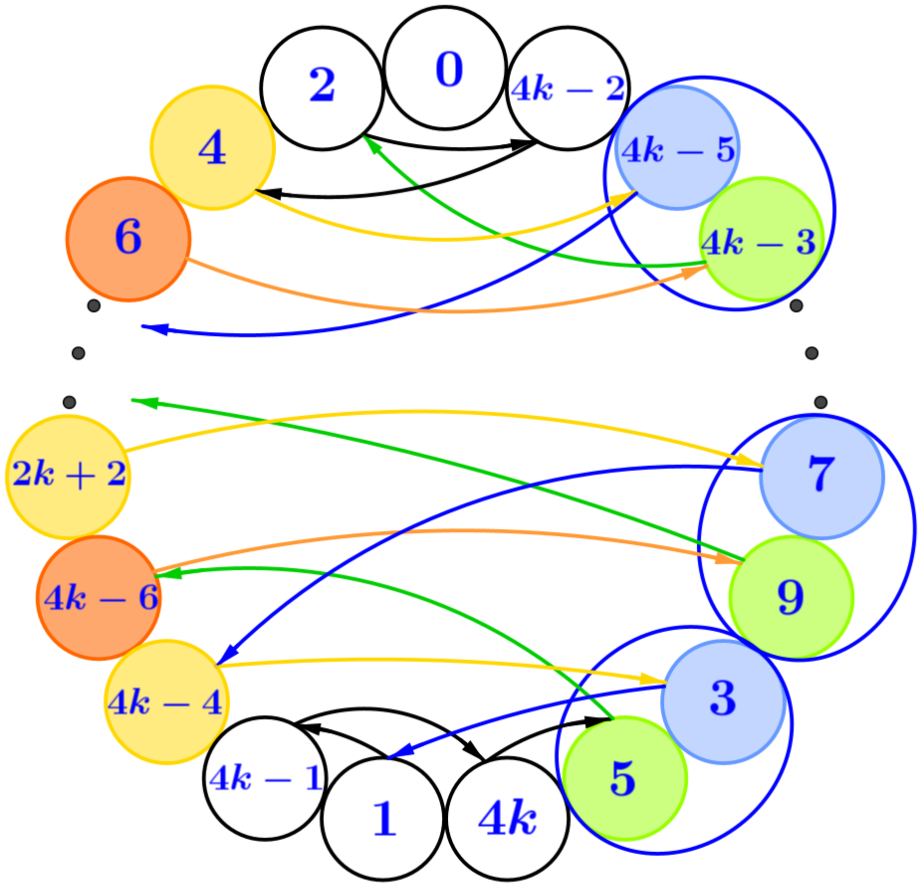

圖 9 $r=4k+1$ 時的一種排序

表 11　$r=4k+1$ 時將小鳥位置以 t 表示的一種排序方式

第一列	小鳥位置	1	2	3	4	$\cdots$
		t				
	小鳥座號	1	$4k-1$	$4k-4$	$4k-6$	$\cdots$
				$4k-2t+2$	$4k-2t+2$	$\cdots$
第二列	小鳥位置	$2k-3$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$
		t				
	小鳥座號	8	6	4	2	0
		$4k-2t+2$	$4k-2t+2$	$4k-2t+2$		
第三列	小鳥位置	$2k+2$	$2k+3$	$2k+4$	$2k+5$	$2k+6$
		t				
	小鳥座號	$4k-2$	$4k-5$	$4k-3$	$4k-9$	$4k-7$
			$8k-2t+1$		$8k-2t+1$	$8k-2t+5$
第四列	小鳥位置	$\cdots$	$4k-7$	$4k-6$	$4k-5$	$4k-4$
		t				
	小鳥座號	$\cdots$	15	17	11	13
		$\cdots$	$8k-2t+1$	$8k-2t+5$	$8k-2t+1$	$8k-2t+5$
第五列	小鳥位置	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k$	$4k+1$
		t				
	小鳥座號	7	9	3	5	$4k$
		$8k-2t+1$	$8k-2t+5$	$8k-2t+1$	$8k-2t+5$	

底下我們將證明只要從任意一隻小喜鵲開始餵，恰好每隻小喜鵲都吃到一份，不重複餵食也不會餵到小斑鳩。

1. 當餵到表 11 中黃色區域時，此時 $t=3,5,7,9,\cdots,(2k-1)$，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+(4k-2t+2)=4k-t+2$，將 $t=3,5,7,9,\cdots,(2k-1)$ 帶入可以發現下一隻餵食的恰好對應到表 11 中藍底色小鳥位置的 $(4k-1)$ 到 $(2k+3)$，如圖 10。

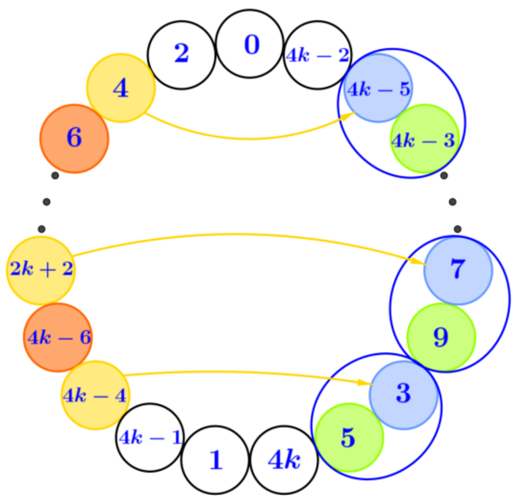

圖 10　$r=4k+1$ 時黃底色的餵食順序

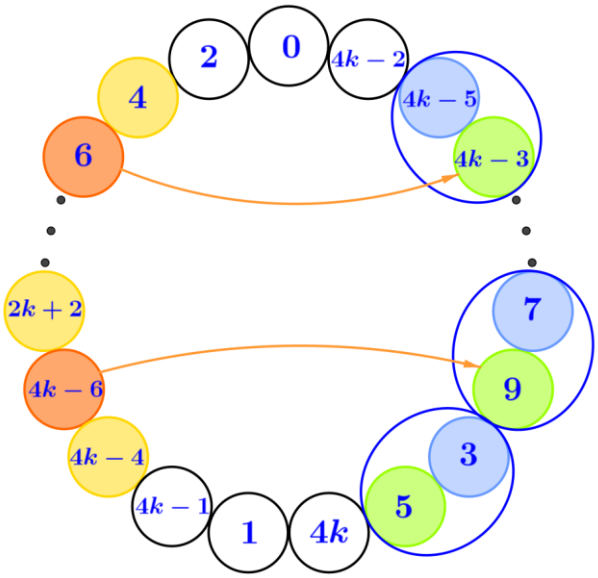

圖 11 $r = 4k + 1$ 時橘底色的餵食順序

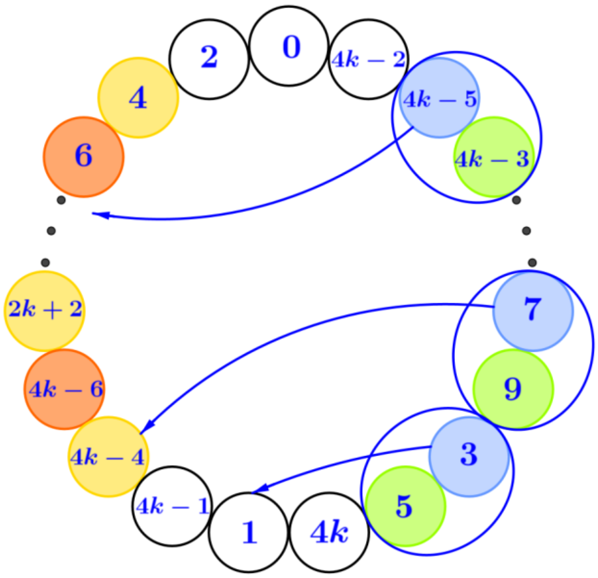

圖 12 $r = 4k + 1$ 時藍底色的餵食順序

2. 當餵到表 11 中橘色區域時，此時 $t = 4,6,8,10,\cdots,(2k-2)$，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t + (4k - 2t + 2) = 4k - t + 2$，恰好對應到表 11 中綠底色小鳥位置的 $(4k-2)$ 到 $(2k+8)$，如圖 11。
3. 當餵到表 11 中藍色區域時，此時 $t = (2k+3),(2k+5),\cdots,(4k-3)$，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t + (8k - 2t + 1) \equiv 8k - t + 1 \equiv 4k - t$，恰好對應到表 11 中灰底色小鳥位置的 $(2k-3)$ 到 3。還剩餘的一組藍底色為 $t = 4k - 1$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t + (8k - 2t + 1) \equiv 8k - t + 1 \equiv 1$，如圖 12。
4. 當餵到表 11 中綠色區域時，此時 $t = (2k+6),(2k+8),\cdots,(4k)$，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t + (8k - 2t + 5) \equiv 4k - t + 4$，恰好對應到表 11 中灰底色小鳥位置的$(2k-2)$ 到 4。還剩餘的一組綠底色為 $t = 2k + 4$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t + (4k - 3) \equiv 2k$，如圖 13。

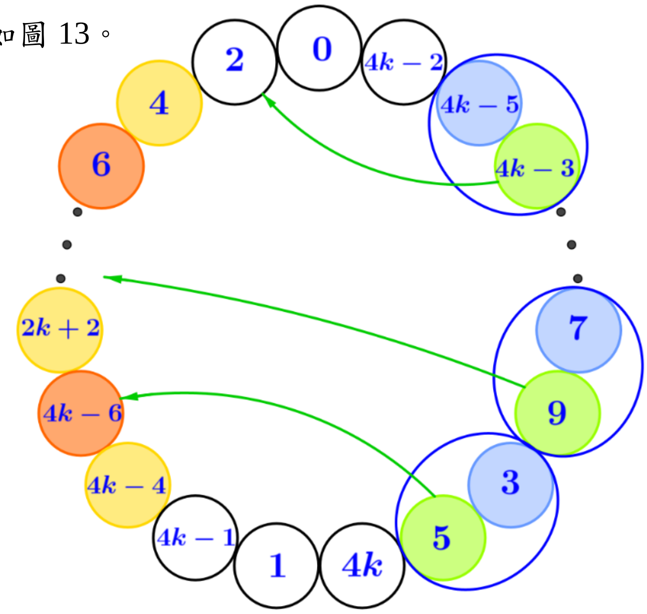

圖 13 $r = 4k + 1$ 時綠底色的餵食順序

5. 其餘為白底部分下一隻餵食的也可以依序算出其位置，如圖 14。

當 $t=1$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為$1+1=2$。

當 $t=2$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $2+(4k-1)=4k+1$。

當 $t=2k$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+2\equiv 2k+2$。

當 $t=2k+2$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為

$[t+(4k-2)](\mathrm{mod}\ 4k+1)=2k-1$。

當 $t=4k+1$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為$(t+4k)(\mathrm{mod}\ 4k+1)=4k$，恰好對應到表 11 中綠底色小鳥位置的$(4k)$。

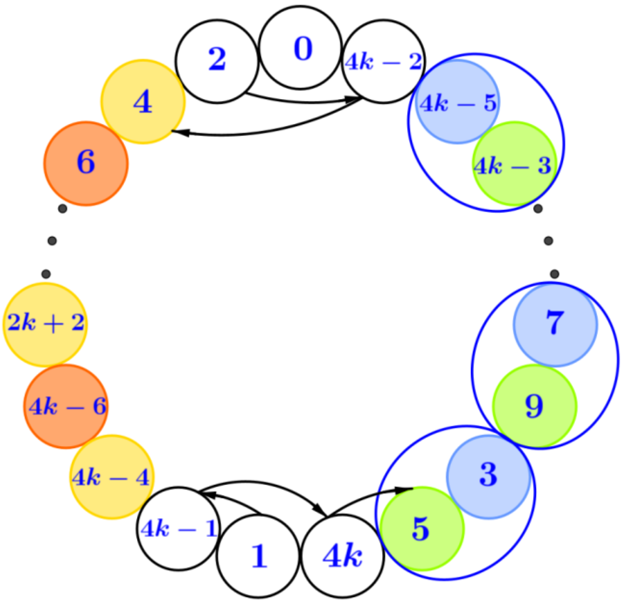

圖 14　$r=4k+1$ 時白底色的餵食順序

經過整理後由上面的運算可得知每個非零座號都有跳到對應的位置而且都不會重複，且只要不從小斑鳩開始餵都可以讓每一隻小喜鵲吃到，故 $s=4k$。

■

定理 10 若 $r=4k+3$ 時，則 $s=4k+2$。

證明.

一樣的我們先將上面的排序法寫為一般式如圖 15，而為了證明每隻小喜鵲都可以吃到，我們必須將圖 15 中不同區域做分類，因此我們把圖 15 轉為表 12，其中由於排版關係列為四列，在表 12 中我們把排列規則類似地方的數字編成同一個區塊，而 t 為小鳥位置，並把小鳥座號的數字以 t 表示，底下我們將利用表 12 來證明每隻小喜鵲皆能吃到食物。

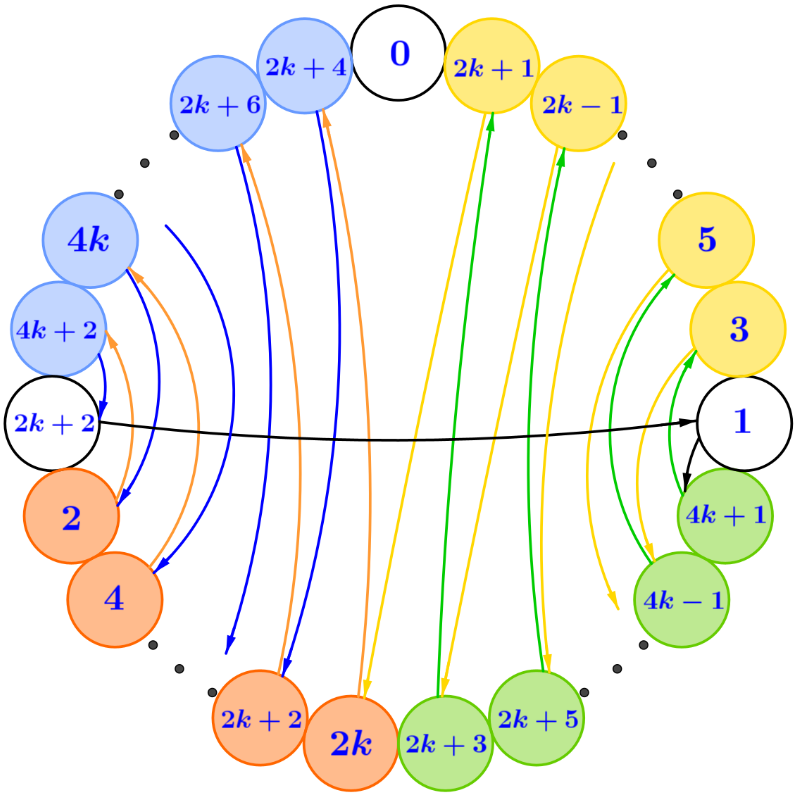

圖 15　$r = 4k + 3$ 時的一種排序

表 12　$r = 4k + 3$ 時將小鳥位置以 t 表示的一種排序方式

<table>
<tr><td rowspan="4">第一列</td><td rowspan="2">小鳥位置</td><td>1</td><td>2</td><td>$\cdots$</td><td>k</td><td>$k+1$</td></tr>
<tr><td colspan="5">t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">小鳥座號</td><td>$2k+1$</td><td>$2k-1$</td><td>$\cdots$</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="4">$2k-2t+3$</td><td>$2k-2t+3$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">第二列</td><td rowspan="2">小鳥位置</td><td>$k+2$</td><td>$k+3$</td><td>$\cdots$</td><td>$2k+1$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">t</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">小鳥座號</td><td>$4k+1$</td><td>$4k-1$</td><td>$\cdots$</td><td>$2k+3$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">$6k-2t+5$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">第三列</td><td rowspan="2">小鳥位置</td><td>$2k+2$</td><td>$2k+3$</td><td>$\cdots$</td><td>$3k+1$</td><td>$3k+2$</td></tr>
<tr><td colspan="5">t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">小鳥座號</td><td>$2k$</td><td>$2k-2$</td><td>$\cdots$</td><td>2</td><td>$2k+2$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$6k-2t+4$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">第四列</td><td rowspan="2">小鳥位置</td><td>$3k+3$</td><td>$3k+4$</td><td>$\cdots$</td><td>$4k+2$</td><td>$4k+3$</td></tr>
<tr><td colspan="5">t</td></tr>
<tr><td rowspan="2">小鳥座號</td><td>$4k+2$</td><td>$4k$</td><td>$\cdots$</td><td>$2k+4$</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="4">$10k-2t+8$</td><td></td></tr>
</table>

底下我們將證明只要從任意一隻小喜鵲開始餵，恰好每隻小喜鵲都吃到一份，不重複餵食也不會餵到小斑鳩。

1. 當餵到表 12 中黃色區域時，前面 $t=1$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $[t+(2k-2t+3)](\mathrm{mod}\ 4k+3)=2k+2$，恰好對應到表 12 中橘底色小鳥位置的 $(2k+2)$；而後面 $t=2$ 到 k 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+(2k-2t+3)=2k-t+3$，將 $t=2$ 到 k 帶入可以發現恰好對應到表 12 中綠底色小鳥位置的 $(2k+1)$ 到 $(k+3)$，如圖 16。

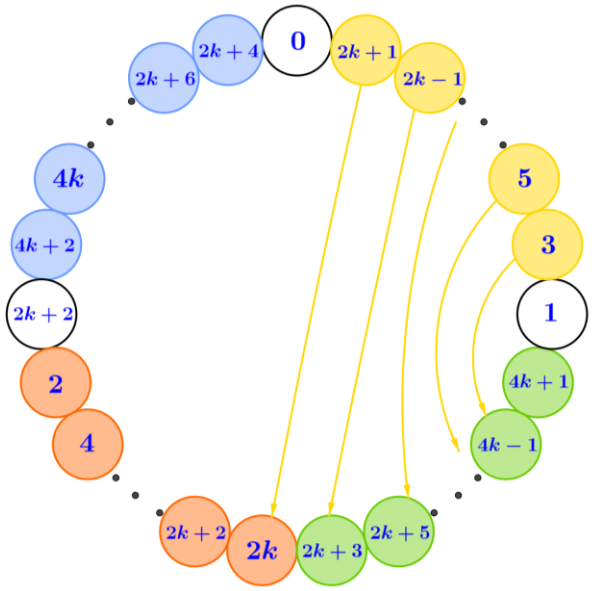

圖 16　$r=4k+3$ 時黃底色的餵食順序

2. 當餵到表 12 中綠色區域時，此時 $t=(k+2)$ 到 $(2k+1)$，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+(6k-2t+5)=6k-t+5$，將 $t=(k+2)$ 到 $(2k+1)$ 帶入可以發現恰好對應到表 12 中灰底色小鳥位置的 k 到 1，如圖 17。

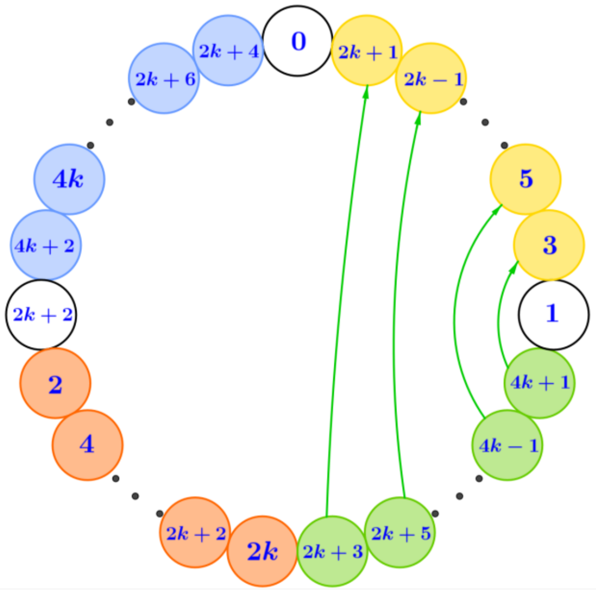

圖 17　$r=4k+3$ 時綠底色的餵食順序

3. 當餵到表 12 中橘色區域時，此時 $t=(2k+2)$ 到 $(3k+1)$，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+(6k-2t+4)=6k-t+4$，將 $t=(2k+2)$ 到 $(3k+1)$ 帶入可以發現恰好對應到表 12 中藍底色小鳥位置的 $(4k+2)$ 到 $(3k+3)$，如圖 18。

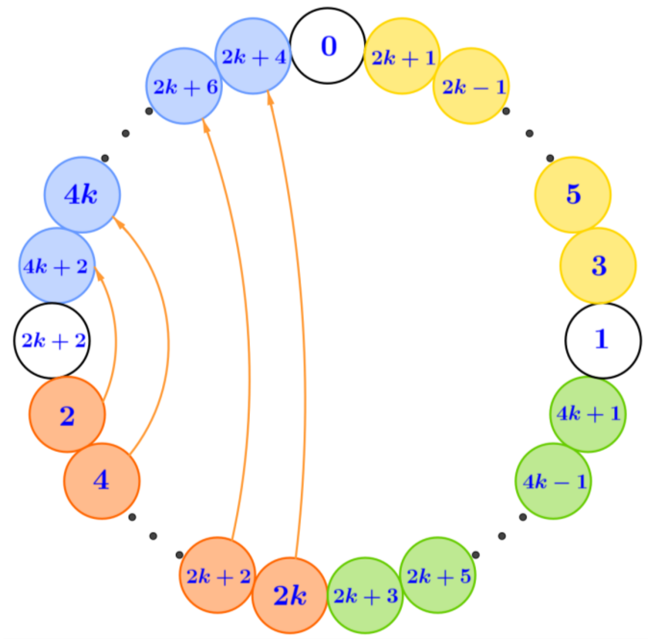

圖 18　$r=4k+3$ 時橘底色的餵食順序

4. 當餵到表 12 中藍色區域時，前面 $t=3k+3$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $[t+(10k-2t+8)](\mathrm{mod}\ 4k+3)=(3k+2)$；而後面 $t=(3k+4)$ 到 $(4k+2)$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+(10k-2t+8)=10k-t+8$，將 $t=(3k+4)$ 到 $(4k+2)$ 帶入可以發現恰好對應到表 12 中橘底色小鳥位置的 $(3k+1)$ 到 $(2k+3)$，如圖 19。

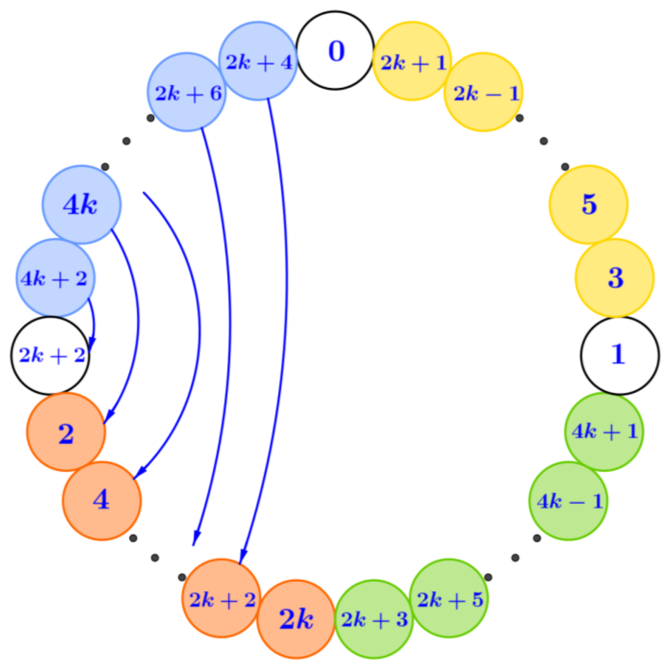

圖 19　$r=4k+3$ 時藍底色的餵食順序

5. 其餘為白底部分下一隻餵食的也可以依序算出其位置，如圖 20。

當 $t=k+1$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+1\equiv k+2$。

當 $t=3k+2$ 時，鳥媽媽下一隻餵食的小鳥位置為 $t+(2k+2)\equiv k+1$。

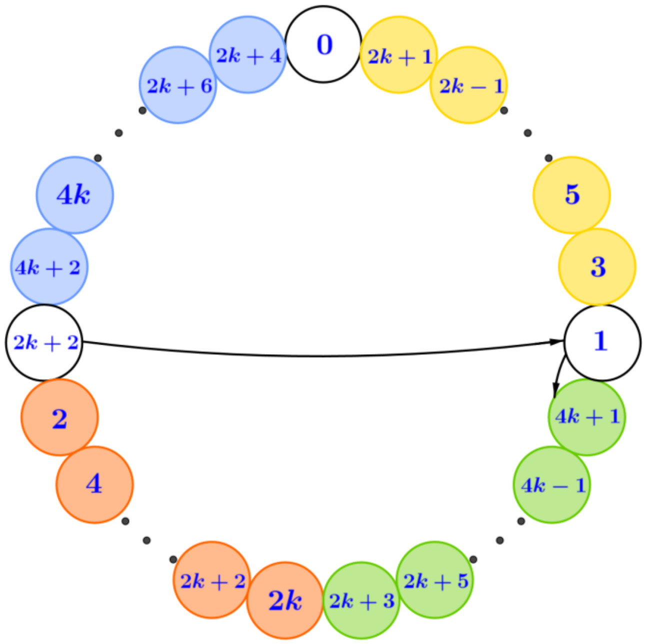

圖 20　$r=4k+3$ 時白底色的餵食順序

由上面可得知每個非零座號都有跳到對應的位置而且都不會重複，且只要不從小斑鳩開始餵都可以讓每一隻小喜鵲吃到，故 $s=4k+2$。

■

經過總隻數為奇數與偶數的探討後，我們知道不管總隻數為何，我們都找到了一種排列方法，使得所有小喜鵲皆吃的到食物。且我們找到了總隻數為奇數時的排列法不管從哪一隻小喜鵲開始餵，都可以讓每隻小喜鵲吃到。

五、 其餘性質

在上面尋找排列方式的過程中，我們發現可以透過已知的排列方式做調整，並找到不同的編號排序來讓所有小喜鵲吃到食物，方式如下。

定理 11 若小鳥總隻數為 r，且順時針小鳥編號 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ 是一個可以讓所有小喜鵲都吃到食物的排列，則順時針小鳥編號 $(r-a_r), (r-a_{r-1}), (r-a_{r-2}), \cdots, (r-a_1)$ 也是一個可以讓所有小喜鵲都吃到食物的排列。

證明.

表 13　不同排列法的延伸示意

向右 a_i

$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$
$\cdots$	$(r-a_i)$	$\cdots$	$(r-a_j)$	$\cdots$

向左 $(r-a_i)$

在表 13 中，在第一列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ 的排序中，若鳥媽媽餵食了編號 a_i 的小鳥後下一隻餵食的小鳥編號將向右數 a_i 隻小鳥，我們假設為編號 a_j；而在第二列中我們先用 r 來減掉第一列來排序為$(r-a_1), (r-a_2), (r-a_3), \cdots, (r-a_r)$，因為上下兩數相加皆為 r，所以若從 $(r-a_i)$ 往左數 $(r-a_i)$ 隻恰好也會是編號 a_j 的小鳥。接著我們將第二列倒序，如此一來兩列都是向右數了，因此也可以得知此定理是成立的。

■

我們除了找到了這種有點像互補型的排列法外，在尋找排列法的過程中我們也發現了一些不餵食到小斑鳩且每隻小喜鵲都能吃到的性質。

定理 12 若總隻數 r 為奇數，且在某種排法下可以讓所有小喜鵲都吃到，則在此種排序法下，不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到。

證明.

假設已知可以讓所有小喜鵲都吃到的餵食順序為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{r-1}$，則因為

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{r-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (r-1) = \frac{r(r-1)}{2} = r \times \frac{r-1}{2}$ 是 r 的倍數，所以若我們多準備一份食物，則餵食完 a_{r-1} 後會餵到 a_1；也就是說，當從 $a_i \neq a_1$ 開始餵時，餵食順序為 $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_{r-1}, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}$，所以不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到。

■

定理 13 若在某一種排法下，不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到，則總隻數 r 必為奇數。

證明.

假設其中一種可以讓所有小喜鵲都吃到的餵食順序為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{r-1}$，則若從 a_2 開始餵時，餵食順序必為 $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{r-1}, a_1$，所以若我們多準備一份食物，則餵食過程中共往後數 $\frac{r(r-1)}{2}$ 隻鳥，且因為恰好是整數圈，故 $\frac{r(r-1)}{2}$ 是 r 的倍數，故 $\frac{r-1}{2}$ 是整數，則 r 是奇數。

■

伍、 討論

一、 本研究先從總隻數為奇數且順時針依序排列的情形開始探討，並將總隻數以乘法拆分後，找出 $s(r)$、u；接著也探討了從不同號碼開始餵的情形，並找出可餵到小喜鵲的隻數和此情形下可吃的最多份數 u。

二、 第二部分則研究總隻數為偶數且順時針依序排列的情形開始探討，並將總隻數以乘法拆分後，找出 $s(r)$、u；接著也探討了從不同號碼開始餵的情形，並找出可餵到小喜鵲的隻數和此情形下可吃的最多份數 u。

三、 第三部分無論總隻數為奇數或偶數，我們找出了一種排列方式使每一隻小喜鵲都可以吃到食物，且其中總隻數為奇數時的排列法不管從哪一隻小喜鵲開始餵，都可以讓每隻小喜鵲吃到。

四、 接著我們在前一部份的研究過程中發現了關於「不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到」與「總隻數為奇數」之間的關係。

陸、 結論

一、　當按照號碼排列且 $r={p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\cdots{p_k}^{n_k}$ 為奇數時，

$s(r)=\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)$ 且 $u=\left[\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\right]$。

二、　當 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ 奇數，且 $\gcd(a,r)=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，則第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數為 $\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)$ 且

$u=\left[\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)}\right]$。

三、　當按照號碼排列且 $r=2^n{p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\cdots{p_k}^{n_k}$ 為偶數時，

$s(r)=\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)+n$ 且 $u=\left[\frac{2^np_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-n}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1}\right),s\left(p_2^{n_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k}\right)\right)}\right]$。

四、　當 $r=2^np_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，且 $d=\gcd(a,r)=2^{\overline{m}}p_1^{\overline{m_1}}p_2^{\overline{m_2}}\cdots p_k^{\overline{m_k}}$，則第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數為

$\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-\overline{m_1}}\right),s\left(p_2^{n_2-\overline{m_2}}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-\overline{m_k}}\right)\right)+n-\overline{m}$ 且

$u=\left[\frac{2^np_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s\left(p_1^{n_1-m_1}\right),s\left(p_2^{n_2-m_2}\right),\cdots,s\left(p_k^{n_k-m_k}\right)\right)+n-\overline{m}}\right]$。

五、　無論 r 為何，都有一種排列可以讓每隻小喜鵲吃到，且總隻數為奇數時的排列法不管從哪一隻小喜鵲開始餵，都可以讓每隻小喜鵲吃到。

六、　若總隻數 r 為奇數，且在某種排法下可以讓所有小喜鵲都吃到，則在此種排序法下，不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到。

七、　在某一種排法下，若不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到，則總隻數 r 必為奇數。

柒、 參考文獻資料

[1]　游森棚(2023)。特約專欄〈森棚教官數學題——鳩佔鵲巢〉，**科學研習月刊**，62-2。

[2]　Joseph H. S.(2014). *A Friendly Introduction to Number Theory*. Pearson Education.

[3]　潘丞洞、潘丞彪(2002)。簡明數論。台北市：九章，頁 100。

【評語】030420

作者專注在原始問題的深入分析，因此能利用數論中的同餘工具而得到一些明確的公式，是一件有意思的作品。作者先實驗找出一些結果，再透過觀察歸納分析其關係，找出通式並加以證明。本作品採取規律排列，探討可吃到食物的鵲數量，以及吃到最多食物的鵲他吃到的份數，另外也探討出讓所有鵲都能吃到的方法。前面的排列應較為規律，故比較能得出完整的公式。整體而言，思考的方式及證明的過程值得肯定。延伸的創意就相對較少是較可惜的。此為個人作品，作者展現出相當的數學能力，未來若能繼續堅持探索的精神，必定會有豐富的成果。

作品簡報

鳩佔鵲巢

壹、研究動機

我們從科學研習雙月刊森棚教官數學題中發現鳩佔鵲巢的題目，內容如下：

例:如果一開始喜鵲媽媽選了2號小鳥餵食，則會有兩隻小喜鵲吃到食物，
餵食順序是 $2\rightarrow4\rightarrow2\rightarrow4\rightarrow2$。

例:如果一開始喜鵲媽媽選了3號小鳥餵食，則只有這隻小喜鵲吃到食物，
因為餵食順序是 $3\rightarrow0$。

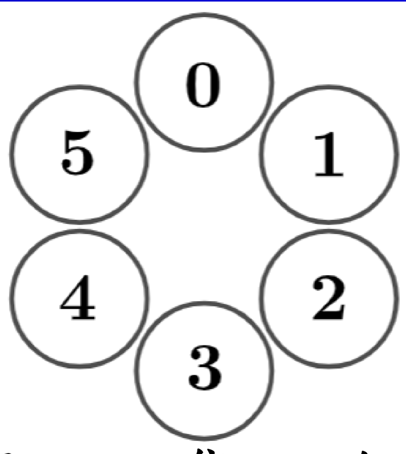

圖1 一隻斑鳩與五隻小喜鵲的排序

我們發現餵食順序是以同餘來計算，餵第 n 隻的編號為餵第 $n-1$ 隻的編號加上第 $n-1$ 隻的編號再除以總隻數的餘數，也就是餵第 $n-1$ 隻的編號乘以 2 再除以總隻數的餘數，因此餵第 n 隻的編號為餵第 1 隻的編號乘以 2^{n-1} 再除以總隻數的餘數。

貳、研究目的

1.探討當總隻數為奇數，且順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲⋯時，吃到食物的喜鵲隻數的最大值，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數；且若從不同號碼開始餵食，餵到的小喜鵲隻數，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數。

2.探討當總隻數為偶數，且順時針依序排列為 0 號斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲⋯時，吃到食物的喜鵲隻數的最大值，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數；且若從不同號碼開始餵食，餵到的小喜鵲隻數，及此時吃最多份食物的喜鵲吃到的份數。

3.分別討論當總隻數為偶數與奇數，使吃到食物的喜鵲隻數為最大值時的排序法。

參、研究結果

設總隻數為 r 時，最多餵到 $s(r)$ 隻小喜鵲，且在各條件及排列順序下，吃到最多份的小喜鵲吃到了 u 份。經過試驗後發現 r 為奇數與偶數有所不同，結果如表1、2，其中空格將重複餵食的鳥隔開。

表1 總隻數 $r=9$ 時的餵食順序

第一隻餵食編號	餵食編號依序排列之數列
1	1,2,4,8,7,5 ,1,2
2	2,4,8,7,5,1 ,2,4
3	3,6 ,3,6,3,6,3,6
4	4,8,7,5,1,2 ,4,8
5	5,1,2,4,8,7 ,5,1
6	6,3 ,6,3,6,3,6,3
7	7,5,1,2,4,8 ,7,5
8	8,7,5,1,2,4 ,8,7

表2 總隻數 $r=12$ 時的餵食順序

第一隻餵食編號	餵食編號依序排列之數列
1	1,2,4,8 ,4,8,4,8,4,8,4
2	2,4,8 ,4,8,4,8,4,8,4,8
3	3,6,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0
4	4,8 4,8,4,8,4,8,4,8,4
5	5,10,8,4 ,8,4,8,4,8,4,8
6	6,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0,0
7	7,2,4,8 ,4,8,4,8,4,8,4
8	8,4 ,8,4,8,4,8,4,8,4,8
9	9,6,0 ,0,0,0,0,0,0,0,0
10	10,8,4 ,8,4,8,4,8,4,8,4
11	11,10,8,4 ,8,4,8,4,8,4,8

一、當 r 為奇數，且依照順序為 0 號為斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲⋯

定理1. 若 r 為奇數且從 1 號開始餵，則 $2^s\equiv1(\mathrm{mod}\ r)$。

定理2. 若 $r=r_1\times r_2$ 為奇數，其中 $\gcd(r_1,r_2)=1$，則 $s(r)=\mathrm{lcm}\big(s(r_1),s(r_2)\big)$。

定理3. 若 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 為相異的奇質數，則 $s(r)=\mathrm{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$ 且

$$u=\left[\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right]。$$

定理4. 若 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 為相異奇質數，且 $\gcd(a,r)=1$，則當第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，與從第 1 號開始餵的結果一樣，共可餵到小喜鵲隻數為 $\mathrm{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$ 且

$$u=\left[\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right]。$$

表3 r 為奇數時從 1 號開始餵及從與 r 互質的數開始餵的餵食數列

從 1 號開始餵	1	2	2^2	2^3	⋯	2^{s-1}	$2^s\equiv1(\mathrm{mod}\ r)$
從 a 號開始餵（a 與 r 互質）	a	$2\times a$	$2^2\times a$	$2^3\times a$	⋯	$2^{s-1}\times a$	$2^s\times a\equiv a(\mathrm{mod}\ r)$

定理5. 若 $r=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 為相異奇質數，且 $\gcd(a,r)=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，則當第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲隻數為 $\mathrm{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)$ 且

$$u=\left[\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\mathrm{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)}\right]。$$

表4 r 為奇數時從 1 號開始餵與從與 r 互質的數開始餵的餵食數列

從 1 號開始餵	1	2	2^2	⋯	2^{s-1}	$2^s\equiv1\left(\mathrm{mod}\ \frac{r}{d}\right)$
從 $\frac{a}{d}$ 號開始餵（$\frac{a}{d}$ 與 $\frac{r}{d}$ 互質）	$\frac{a}{d}$	$2\times\frac{a}{d}$	$2^2\times\frac{a}{d}$	⋯	$2^{s-1}\times\frac{a}{d}$	$2^s\times\frac{a}{d}\equiv\frac{a}{d}\left(\mathrm{mod}\ \frac{r}{d}\right)$
從 a 號開始餵且 $\gcd(a,r)=d$	a	$2\times a$	$2^2\times a$	⋯	$2^{s-1}\times a$	$2^s\times a\equiv a(\mathrm{mod}\ r)$

二、當 r 為偶數，且依照順序為 0 號為斑鳩、1 號喜鵲、2 號喜鵲…

定理6. 若 $r=2^n p_1^{n_1} p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，則 $s(r)=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)+n$ 且 $u=\left\lceil\frac{2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-n}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right\rceil$。

表5 r 為奇數與偶數之間的關係

r	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$s(r)$	2	4	3	6	10	12	4	8	18	6	11	20	18
r	2×3	2×5	2×7	2×9	2×11	2×13	2×15	2×17	2×19	2×21	2×23	2×25	2×27
$s(r)$	3	5	4	7	11	13	5	9	19	7	12	21	19
r	$2^2\times3$	$2^2\times5$	$2^2\times7$	$2^2\times9$	$2^2\times11$	$2^2\times13$	$2^2\times15$	$2^2\times17$	$2^2\times19$	$2^2\times21$	$2^2\times23$	$2^2\times25$	$2^2\times27$
$s(r)$	4	6	5	8	12	14	6	10	20	8	13	22	20

表6 $r=2^2\times5$ 與 $r=5$ 間的關係

$r=2^2\times5=20$	1	2	4	8	16	12	4	8	16	12	…
$\times 2^2$ $r=5$	1	2	4	3							

定理7. 若 $r=2^n p_1^{n_1} p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$，其中 p_i 皆為相異奇質數，且 $d=\gcd(a,r)=2^m p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，則當第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數為 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)+n-m$ 且

$u=\left\lceil\frac{2^n p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-(n-m)}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)}\right\rceil$。

表7 $r=2^3\times3\times5^2$、$r=2^2\times5$ 與 $r=5$ 之間的關係

$r=2^3\times3\times5^2$ $\times\gcd(a,r)$	90	180	360	120	240	480	360	120	240	480	360	…
$(\times 30)$ $r=2^2\times5$	3	6	12	4	8	16	12	4	8	16	12	…
$r=2^2\times5$	1	2	4	8	16	12	4	8	16	12	4	…
$\times 2^2$ $r=5$	1	2	4	3								

三、當 r 為偶數，吃到的小喜鵲最多的排序法

定理8. 若 $r=2k$ 時，則 $s=2k-1$、$u=1$。

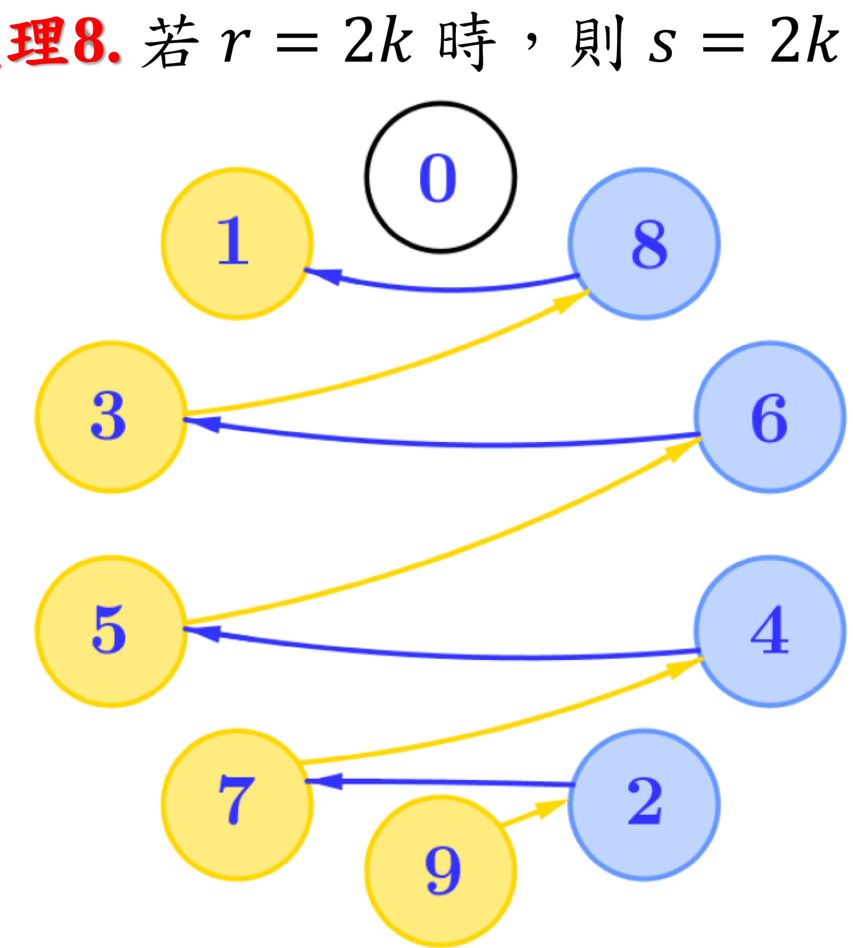

圖2 $r=2k=10$ 時的一種排序

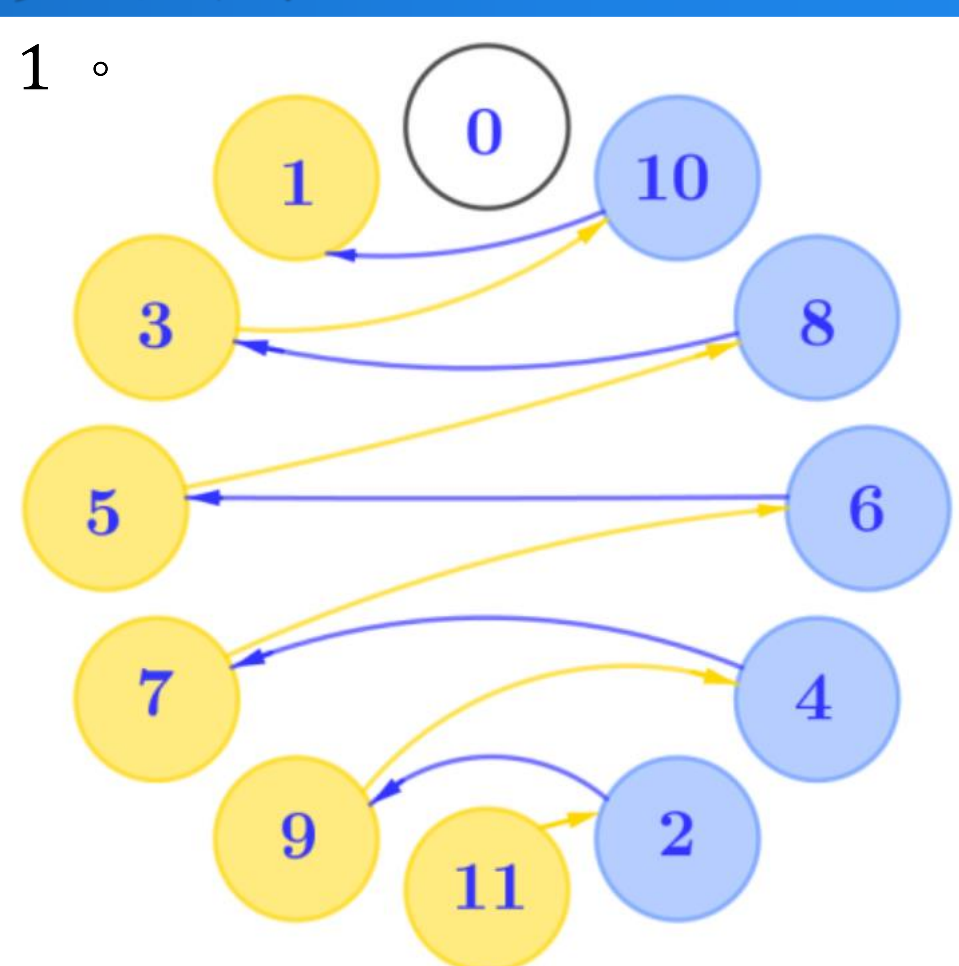

圖3 $r=2k=12$ 時的一種排序

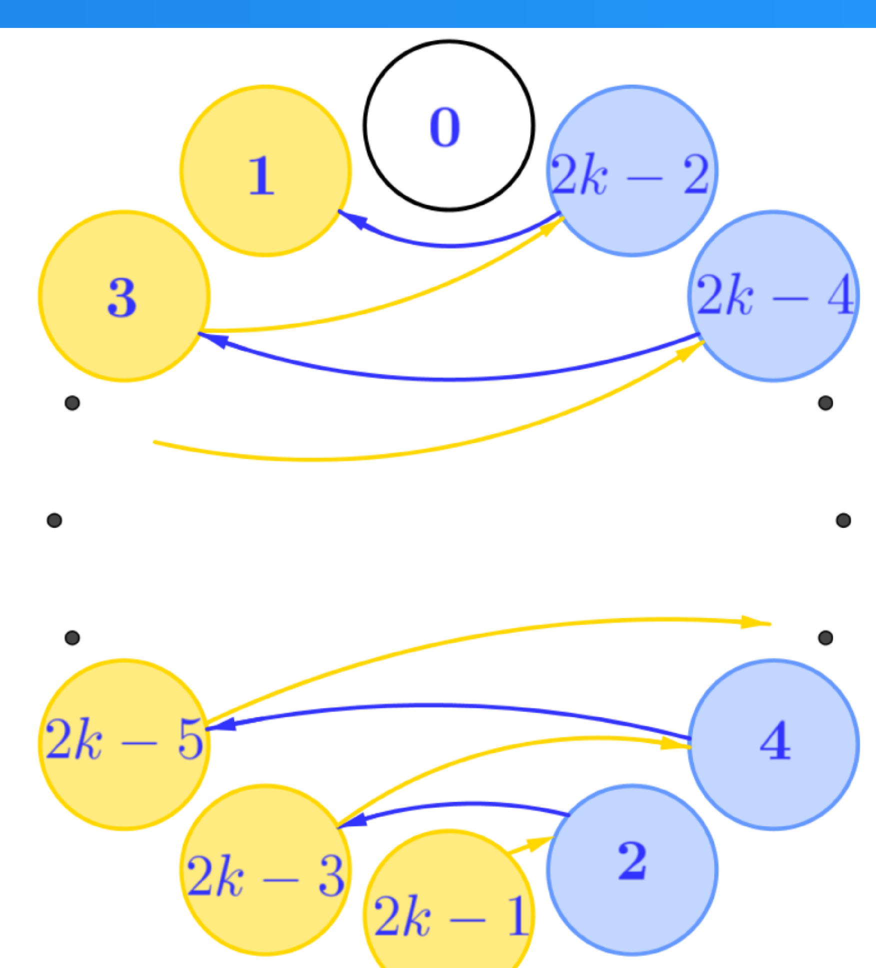

圖4 r 為偶數時的一種排序法

四、當 r 為奇數，吃到的小喜鵲最多的排序法

我們將奇數部分分為 $4k+1$、$4k+3$ 兩類來探討。

定理9. 若 $r=4k+1$ 時，則 $s=4k$、$u=1$。

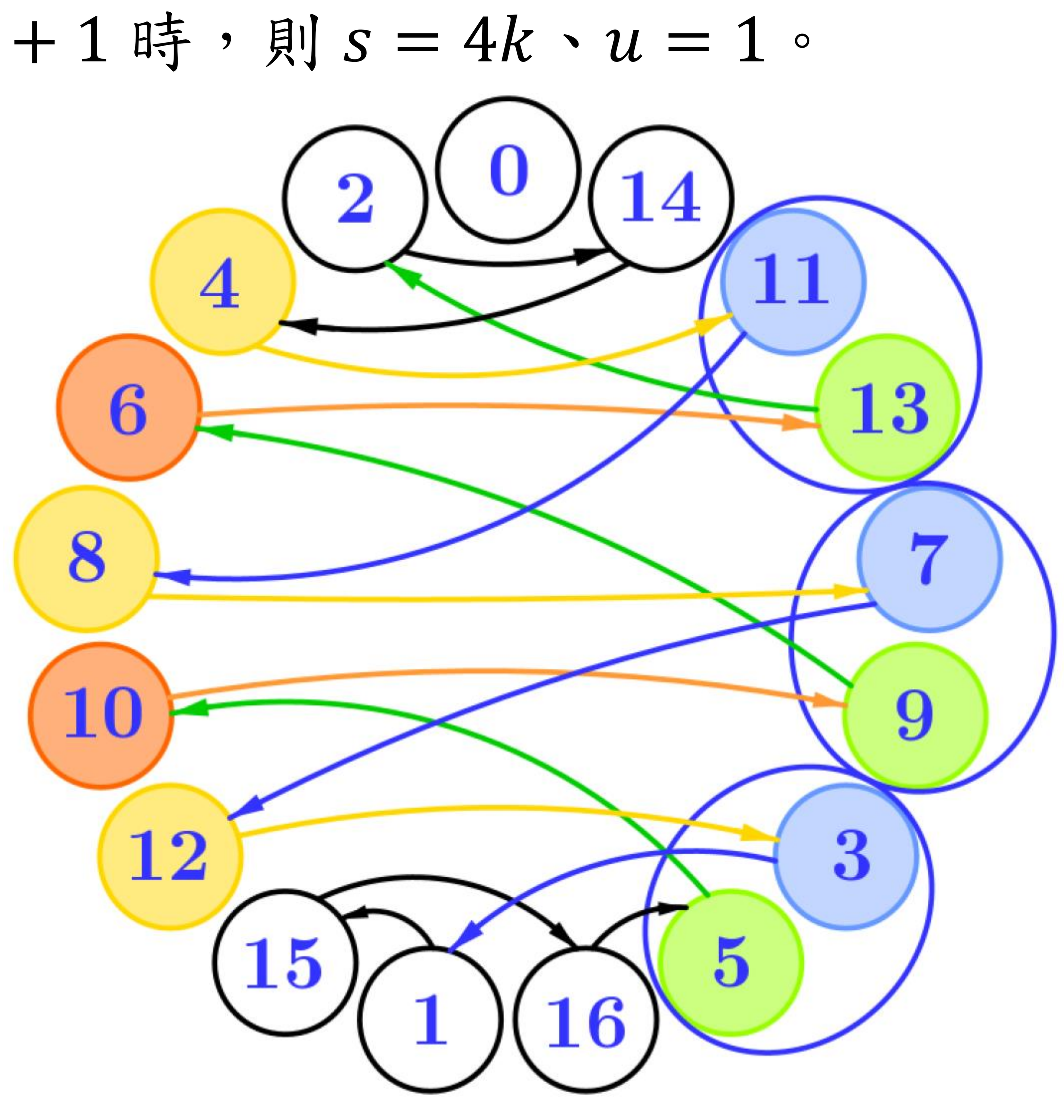

圖5 $r=4k+1=17$ 時的一種排序

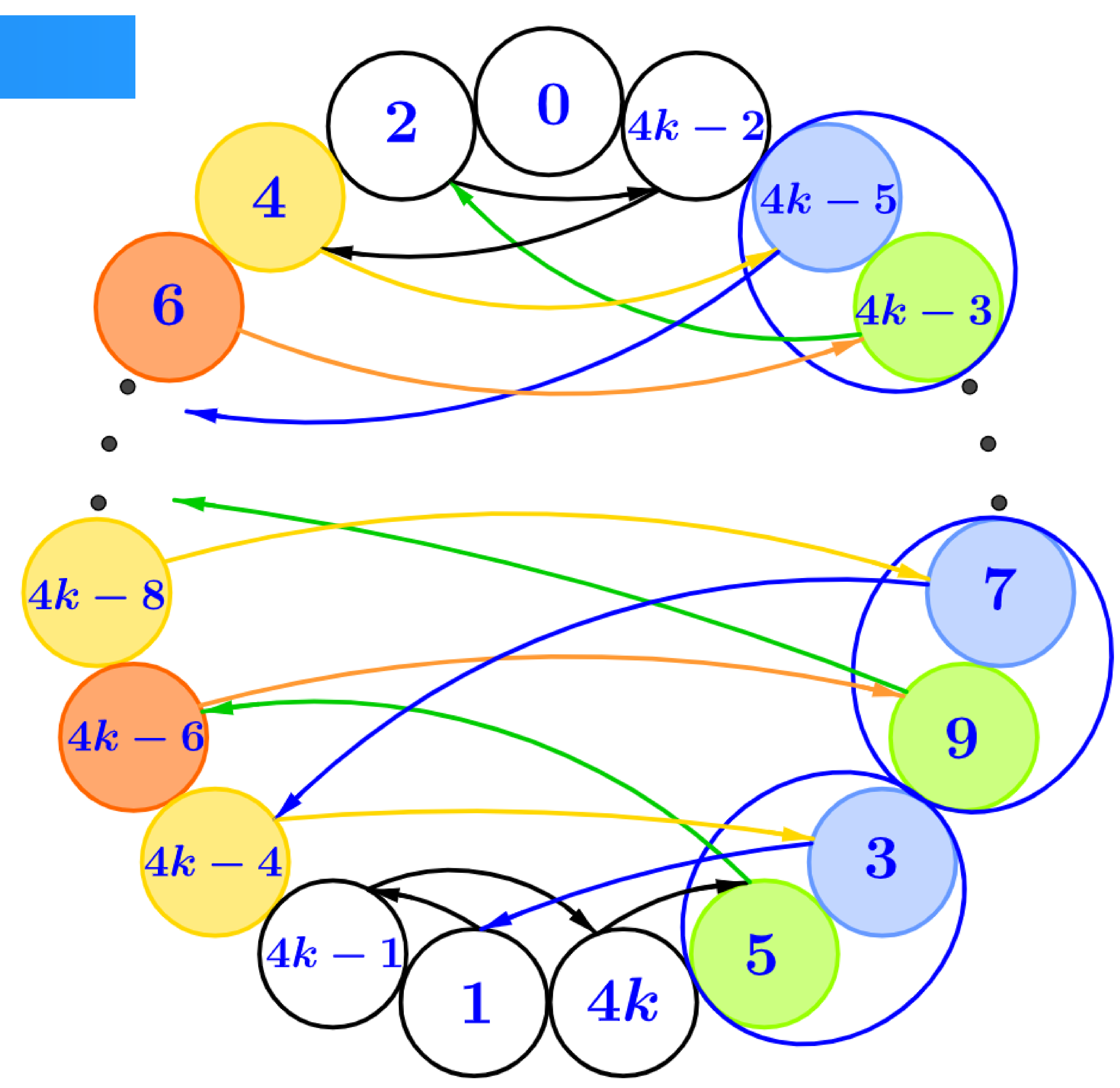

圖6 $r=4k+1$ 時的一種排序

定理10. 若 $r=4k+3$ 時，則 $s=4k+2$、$u=1$。

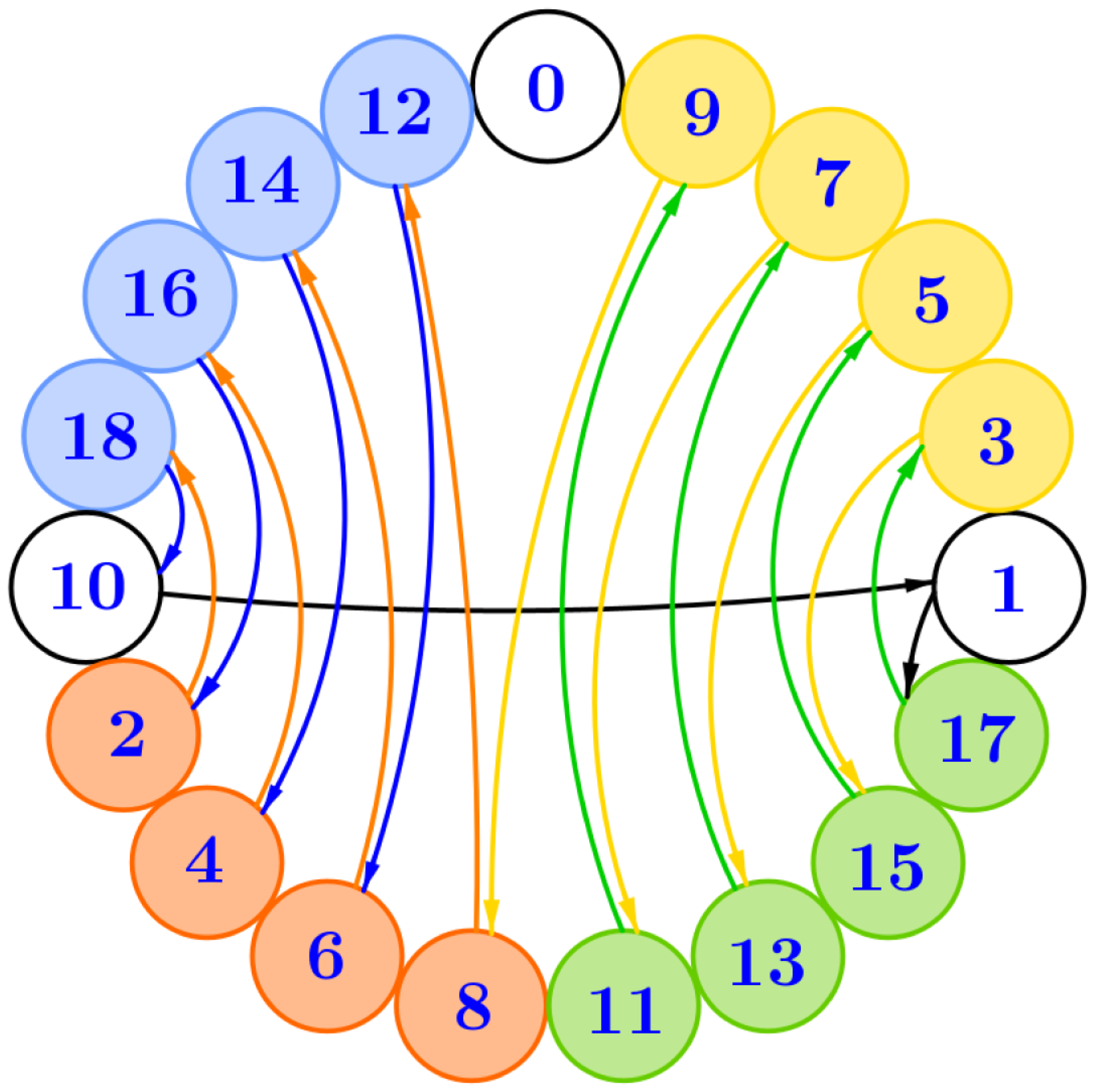

圖7　$r=4k+3=19$ 時的一種排序

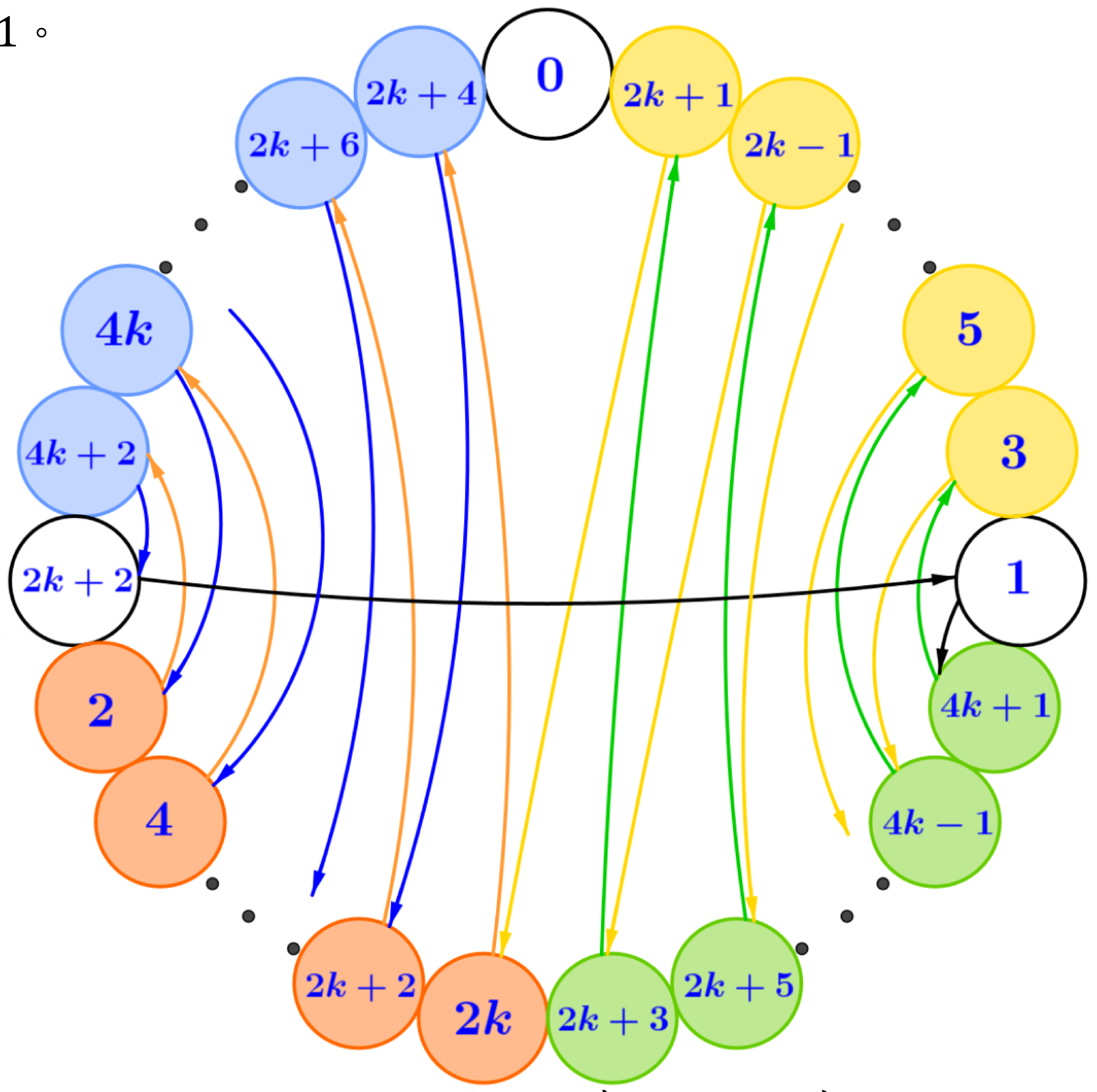

圖8　$r=4k+3$ 時的一種排序

五、其餘性質

定理11. 若小鳥總隻數為 r，且順時針小鳥編號 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是一個可以讓所有小喜鵲都吃到食物的排列，則順時針小鳥編號 $(r-a_r),(r-a_{r-1}),\cdots,(r-a_1)$ 也是一個可以讓所有小喜鵲都吃到食物的排列。

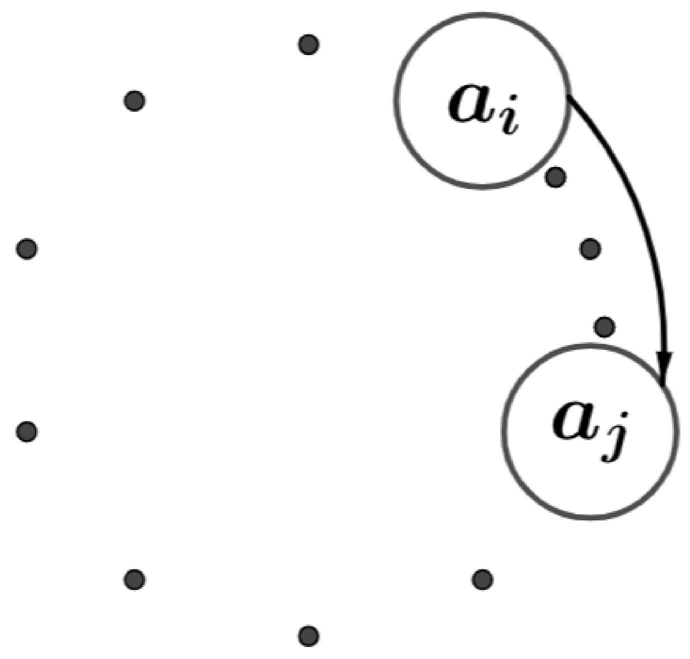

圖9　順時針轉 a_i 隻

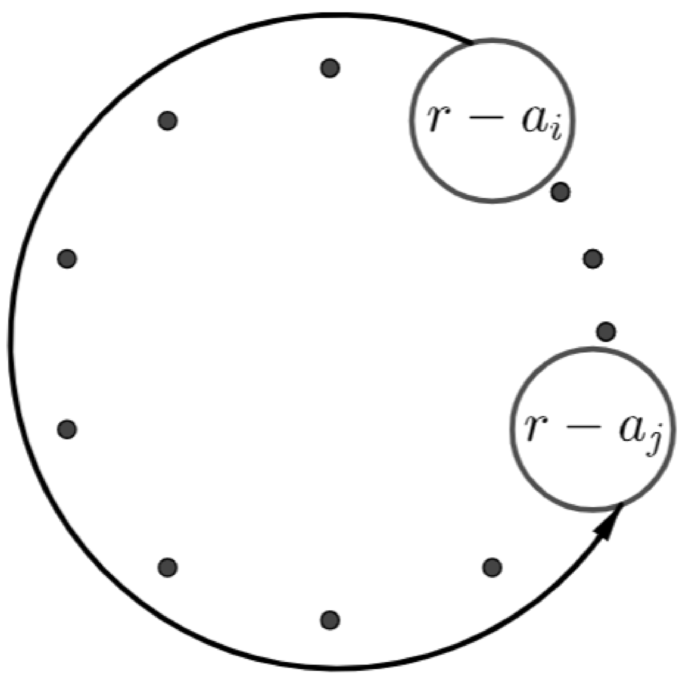

圖10　逆時針轉 $r-a_i$ 隻

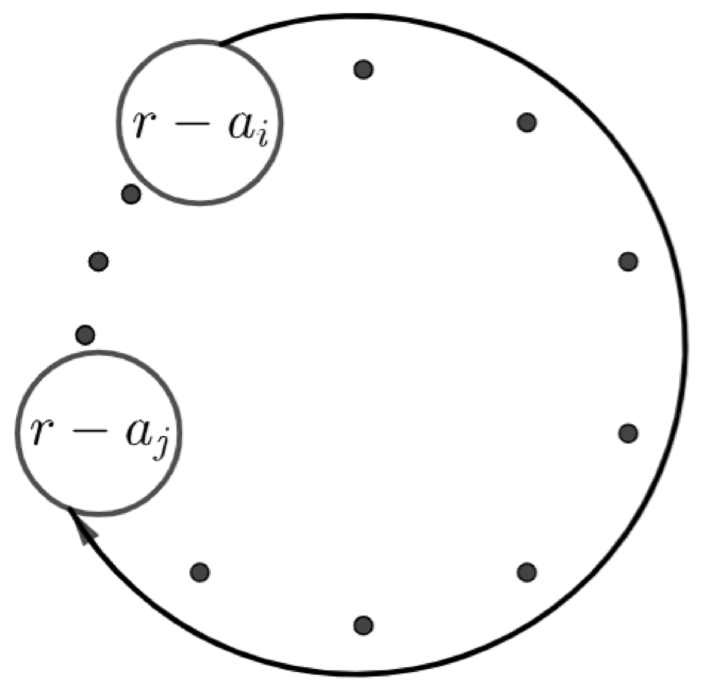

圖11　對稱後為順時針轉 $r-a_i$ 隻

定理12. 若總隻數 r 為奇數，且在某種排法下可以讓所有小喜鵲都吃到，則在此種排序法下，不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到。

定理13. 若在某種排法下，不管從哪隻小喜鵲開始餵食都能讓所有小喜鵲吃到，則總隻數 r 必為奇數。

證明. 假設其中一種可以讓所有小喜鵲都吃到的餵食順序為 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{r-1}$，則若從 a_2 開始餵時，餵食順序必為 $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_{r-1},a_1$，所以若我們多準備一份食物，則餵食過程中共往後數 $\frac{r(r-1)}{2}$ 隻鳥，且因為恰好是整數圈，故 $\frac{r(r-1)}{2}$ 是 r 的倍數，故 $\frac{r-1}{2}$ 是整數，則 r 是奇數。

肆、結論與討論

一、當按照號碼排列且 $r={p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\cdots{p_k}^{n_k}$ 為奇數時

1. $s(r)=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)$ 且 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right\rceil$。
2. 若 $\gcd(a,r)=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，則第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數為 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)$ 且 $u=\left\lceil\frac{p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)}\right\rceil$。

二、當按照號碼排列，$r=2^n{p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\cdots{p_k}^{n_k}$ 時

1. $s(r)=\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)+n$ 且 $u=\left\lceil\frac{2^np_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-n}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1}),s(p_2^{n_2}),\cdots,s(p_k^{n_k})\right)}\right\rceil$。
2. 若 $\gcd(a,r)=2^mp_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，則第一隻餵食的為第 a 號小喜鵲時，共可餵到小喜鵲的隻數 $\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)+n-m$ 且 $u=\left\lceil\frac{2^np_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}-1-(n-m)}{\operatorname{lcm}\left(s(p_1^{n_1-m_1}),s(p_2^{n_2-m_2}),\cdots,s(p_k^{n_k-m_k})\right)}\right\rceil$。

三、當不要求順時針依序編號時

無論總隻數 r 為何，都有一種排列法可以讓每隻小喜鵲都吃到。

四、其餘性質

1. 若總隻數為 r，且順時針編號 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r$ 是一個可以讓所有小喜鵲都吃到食物的排列，則順時針編號 $(r-a_r),(r-a_{r-1}),(r-a_{r-2}),\cdots,(r-a_1)$ 也是一個可以讓所有小喜鵲都吃到食物的排列。
2. 若總隻數 r 為奇數，且在某種排法下可以讓所有小喜鵲都吃到，則在此種排序法下，不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到。
3. 在某一種排法下，若不管從哪隻小喜鵲開始餵食都可以讓所有小喜鵲吃到，則總隻數 r 必為奇數。

伍、主要參考資料

[1] 游森棚(2023)。特約專欄〈森棚教官數學題──鳩佔鵲巢〉，**科學研習月刊**，62-2。
[2] Joseph H. S.(2014). *A Friendly Introduction to Number Theory*. Pearson Education.
[3] 潘丞洞、潘丞彪(2002)。簡明數論。台北市：九章，頁100。

本研究所有圖片皆由指導老師指導後，作者使用GeoGebra經典5版軟體繪製。