中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030418

鳩佔鵲巢問題之研究與推廣

學校名稱： 高雄市立明華國民中學

作者：	指導老師：
國二 林嶸恆	廖思涵
國二 吳宸嘉	陳晏閔

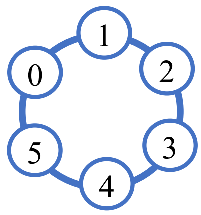
關鍵詞： 同餘、直線排列、環狀排列

摘要

科學研習月刊上有一道數學問題，將編號 1 至 5 的鵲與 1 隻鳩(編號 0)任意排成一圈，鵲媽媽由 k 號鵲開始餵，下一次順時針數 k 隻鳥後，餵第二隻 r 號鵲，再順時針數 r 隻鳥後餵第三隻，依此類推且鳩吃不到食物，我們成功找出原題不讓鳩吃到食物的解。但隨著鵲與鳩的增加，直接討論餵食順序與位置關係越趨困難，所以用鵲(n 隻)不重複餵食進行討論得出成功餵食順序，也推出鵲鳩圍成一圈的排列位置。因此，我們證明出 n 鵲 m 鳩成功餵食的有解條件，並用排列組合與對稱性算出成功餵食順序的方法數。最後，我們也改變餵食方法，採餵食後跳過不數的方式，發現成功餵食順序的方法數不會隨著鳩數增加而改變，皆為編號 1 至 n 的鵲的直線排列數 $n!$。

壹、前言

一、研究動機



我們在科學研習月刊 62 卷第 2 期中看見一個有趣的數學問題，名為「鳩佔鵲巢」，說明如下：「鳥巢裡有五隻小喜鵲，以及一隻混進來的小斑鳩。這六隻小鳥圍成一圈，小斑鳩編號是 0，接著沿著圓周五隻喜鵲順時針編號為 1、2、3、4、5。視力不好的喜鵲媽媽帶著五份食物回來，她餵食的方法相當有趣：「首先她選一隻小鳥餵食，假設這隻小鳥的編號是 k。下一隻被餵食的鳥，是由這隻鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻鳥。然後看這隻鳥的編號是多少，比如是 r，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥，就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵食到斑鳩，食量大的斑鳩會馬上把所有食物吃光。」根據以上規則，例如：鵲媽媽先從 1 號開始餵，餵食編號順序是 1→2→4→2→4；如果鵲媽媽先從 3 號開始餵，餵食編號順序是 3→0。這樣的餵食方法能否讓所有鵲皆吃到一份食物，但鳩卻吃不到呢？這引起我們的興趣，便展開一連串的研究。

二、研究問題

類型一：吃過不跳過----原始題意，$k,n,m\in\mathbb{N}$

(一) 5 鵲 1 鳩及 5 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」5 隻鵲各 1 份食物的餵食順序與圓圈上的位置。

(二) n 鵲 1 鳩及 n 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」n 隻鵲各 1 份食物的有解條件。

(三) n 鵲 m 鳩及 n 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」n 隻鵲各 1 份食物的有解條件。

(四) n 鵲 m 鳩及 n 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」n 隻鵲各 1 份食物的方法數。

(五) n 鵲 m 鳩及 kn 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」n 隻鵲各 k 份食物的有解條件。

類型二：吃過跳過----改變餵食方式，讓吃過食物的鵲「跳過不再數」，$n,m\in\mathbb{N}$。

(六) n 鵲 1 鳩及 n 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」n 隻鵲各 1 份食物的有解條件，並找出有解餵食順序的方法數。

(七) n 鵲 m 鳩及 n 份食物，找出讓鵲媽媽「成功餵食」n 隻鵲各 1 份食物的有解條件，並找出有解餵食順序的方法數。

三、名詞定義與公式

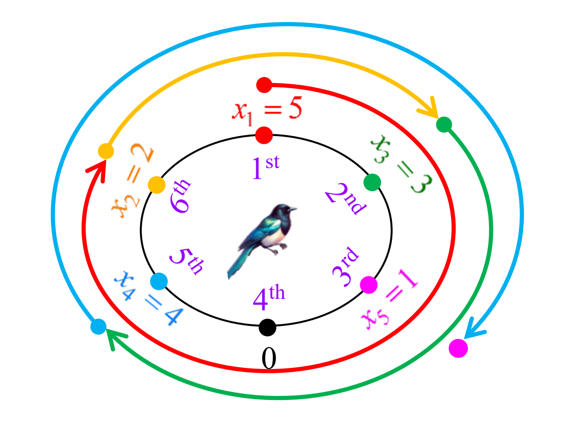
(一)有解：鵲媽媽帶回 n 份食物，能讓 n 隻鵲與 m 隻鳩圍成一圈下，n 隻鵲各吃到一份食物且鳩沒吃到食物的情況為「成功餵食」，稱為「有解」。

(二)物體不盡相異之環狀排列(參考自[2]p151)：設 u 個事物中，可分成 k 類，第 1 類有 m_1 件相同，第 2 類有 m_2 件相同，……第 k 類有 m_k 件相同，其中 $m_1+m_2+...+m_k=u$，全取作環狀排列，當 $(m_1,m_2,...,m_k)=1$，環狀排列數是 $\dfrac{(u-1)!}{m_1!m_2!...m_k!}$。

(三)同餘(參考自[3])：設 $m\neq 0$，若 $m\,|\,a-b$，即 m 整除 $a-b$，或 $a-b=km(k\in\mathbb{N})$，則稱 a 同餘於 b 模 m 記作 $a\equiv b\ (\text{mod}\ m)$。

(四) $\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ 表示 n 隻鵲「餵食順序」的編號，表示 $x_1\to x_2\to x_3\to...\to x_n$，其中 $1\le x_i\le n$，$x_i\in\mathbb{N}$ 且 $x_i\neq x_j(1\le i<j\le n)$。並令鳩的編號皆為 0。

(五)將 n 鵲 m 鳩圍成一圈有 $\dfrac{(n+m-1)!}{m!}$ 種排列數。為研究方便，我們以直線排列結果呈現，並令 x_1 位在第 1 位，x_2 在第$1+x_1$位，x_3 在第$1+x_1+x_2$ 位，……，依此類推，因位置數只有 $n+m$位，所以加完後位置數超過 $n+m$時，則必須除以 $(n+m)$ 後，取其餘數才能得知在哪個位置，若餘數為 0，則會位在第 $n+m$位。以 5 鵲 1 鳩吃過不跳過，任意圍成一圈後，其排列位置以第一隻餵食位在第 1 位，說明如下：



	鵲與鳩的排列位置					
位置	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
鵲編號	5	3	1	0	4	2

餵食順序 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\{5,2,3,4,1\}$

$x_1=5$ 在第 1 位 (1st)

$x_2=2$ 在第 1+5=6 位 (6th)

$x_3=3$ 在第 1+5+2=8 $\equiv$ 2 (mod 6) 位 (2nd)

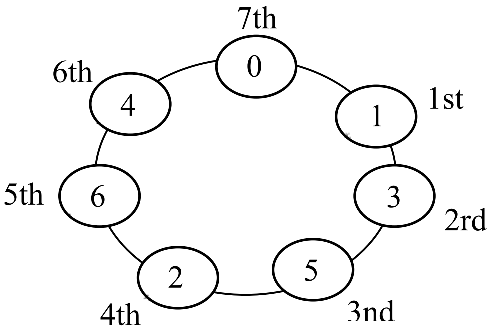
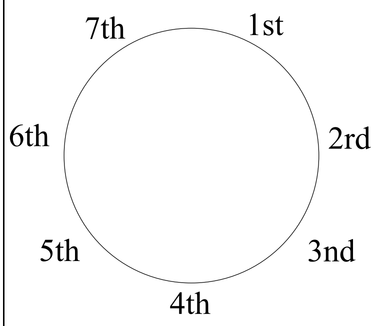
$x_4=4$ 在第 1+5+2+3=11 $\equiv$ 5 (mod 6) 位

$x_5=1$ 在第 1+5+2+3+4=15 $\equiv$ 3 (mod 6) 位

(六)將 n 種相異物(鵲)做直線排列共有 $n!$種。

四、文獻回顧

鳩佔鵲巢問題會讓人聯想到著名的約瑟夫問題，而在搜尋資料中，從全國科展第 39 屆開始至 58 屆就有許多有關約瑟夫問題的研究。他們的研究大約是這樣的：「n 個人圍成一圈依序報數，每數到特定數即自殺。規則有殺 1 留 β、殺 α 留 β、殺 α 留 1，最後求第 k 項(α：一次殺幾人；β：跳過的位置數；k：倒數第 k 個留下來的位置數)」，其中以殺 1 留 β 求第 k 項和我們的研究較為類似，但還是有些許不同，不同的地方有兩點：第一，鳩佔鵲巢是數到這隻鵲的編號，再往下數此鵲編號，此編號會變動，並不是像約瑟夫一樣皆是數到特定數字。第二，約瑟夫是報數過自殺者不會再數到，但鳩佔鵲巢問題是餵食後還是繼續要數餵過的。因這些不同處，導致研究過程與方法與約瑟夫迥異，我們將差異整理出底下的表格呈現。以 7 個位置為例：

比較	鳩佔鵲巢吃過不跳過	鳩佔鵲巢吃過跳過	約瑟夫問題
示意圖			
規則	6 鵲 1 鳩餵食順序: 3(2rd)→6(5th)→2(4th)→4(6th)→5(3nd)→1(1st) 尋找編號與位置的關係	6 鵲 1 鳩餵食順序: 3(2rd)→6(5th)→4(6th)→2(4th)→1(1st)→5(3nd) 尋找編號與位置的關係	設有 7 人，α=1，β=2 即殺 1 留 2，k=1 最後留下第 2 位的人 每 3 個 1 數，找位置
進行方式	數鵲編號，是不固定數	數鵲編號，不固定數	數固定數(α+β)
是否重複	是	否	否

貳、研究設備與器材

筆、電腦、Excel、python、java

參、研究過程與方法

類型一：吃過不跳過

研究一：*n* 鵲 1 鳩的排列位置與成功餵食順序

將 5 鵲 1 鳩的圍成一圈有 $\frac{6!}{6}=5!=120$ 種排列數，資料過於龐大，所以我們先選擇 2 鵲 1 鳩、3 鵲 1 鳩與 4 鵲 1 鳩來進行窮舉法，其排列數各有 2、6 與 $\frac{5!}{5}=4!=24$ 種，因圍成一圈下

討論不易，所以將之以直線呈現。最後整理出排列位置與餵食順序的結果，如下表格，囿於篇幅限制僅呈現成功結果，其餘位在研究日誌：

(一)2 鵲 1 鳩 (僅有 1 種排列有解，且有 2 種不同的餵食順序)

排列位置			成功餵食順序	解的個數
1st	2nd	3rd		
1	2	0	1→2、2→1	2

(二)3 鵲 1 鳩 (有 4 種不同排列有解，且分別僅有 1 種餵食順序，故共有 4 組解)

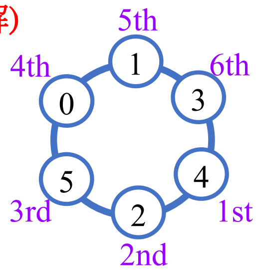
排列位置				餵食順序 (紅字為有解)	解的個數
1st	2nd	3rd	4th		
2	0	1	3	2→1→3、1→3→1、3→1→3	1
2	1	3	0	2→3→1、1→3→1、3→1→3	1
3	1	0	2	3→2→1、2→1→0	1
1	2	0	3	1→2→3、2→3→0	1

(三)4 鵲 1 鳩 (有 2 種不同排列有解，且每種排列皆有 4 種餵食順序，故共 8 組解)

排列位置					成功餵食順序	解的個數
1st	2nd	3rd	4th	5th		
1	2	3	4	0	1→2→4→3、2→4→3→1、4→3→1→2、3→1→2→4	4
2	4	1	3	0	2→1→3→4、1→3→4→2、3→4→2→1、4→2→1→3	4

由以上研究(一)~(三)發現，當鵲是 2 和 4 時，只要該排列有解，無論從哪一隻鵲開始餵食，每隻鵲必能吃到 1 份食物，但鳩吃不到。

(四) 5 鵲 1 鳩 (16 種排列有解，每種排列僅有 1 種餵食順序，故共 16 組解)



接著，隨意找出一組排列，如圖所示，鵲媽媽從 4 號開始餵，餵食順序是 4→1→3 →5→2，旁邊紫色字即是圍成一圈的位置，若是從其他隻鵲開始餵食，最後一定都會被鳩吃掉所有食物。

因此，利用餵食順序即是編號 1 到 5 的直線排列，有 5!=120 種餵食順序，再以鵲的餵食順序算出圍成一圈的排列位置來進行討論，每隻鵲所在的位置均不相同。之後以此邏輯撰寫程式來輔助思考，從中尋找餵食順序的規律。以下為 5 隻鵲成功餵食的兩組解：

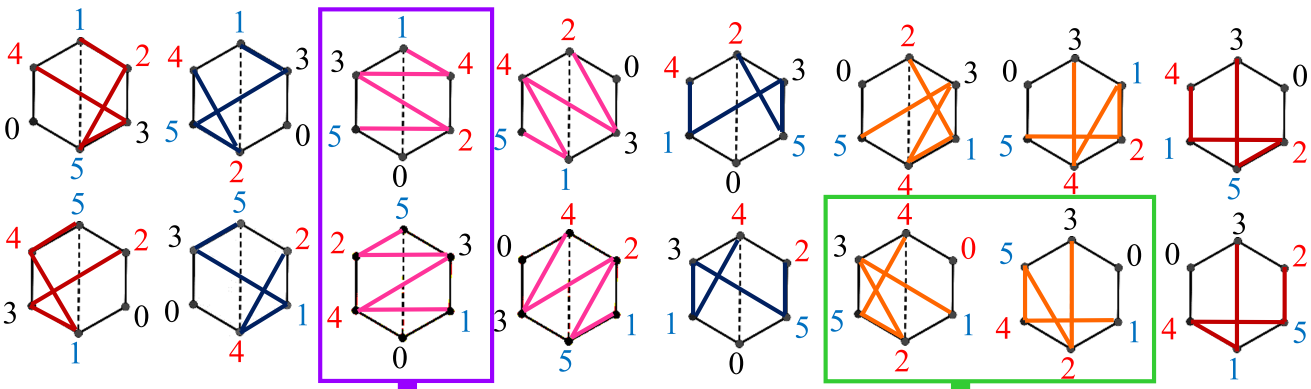
餵食順序	鵲編號	鵲所在位置	鵲編號	鵲所在位置	取 mod 6 同餘是因鵲和鳩的總數是 6
1	5	1≡1 (mod 6)	2	1≡1 (mod 6)	
2	2	1+5=6≡0 (mod 6)	3	1+2=3≡3 (mod 6)	
3	3	1+5+2=8≡2 (mod 6)	4	1+2+3=6≡0 (mod 6)	
4	4	1+5+2+3=11≡5 (mod 6)	1	1+2+3+4=10≡4 (mod 6)	
5	1	1+5+2+3+4=15≡3 (mod 6)	5	1+2+3+4+1=11≡5 (mod 6)	

最後，我們將第一隻餵食的鵲的編號放在排列位置的第 1 位，整理出 5 隻鵲 1 隻鳩的排列位置與成功餵食順序的表格，每種排列僅有 1 種餵食順序，故共 16 組解：

排列位置						成功餵食順序	排列位置						成功餵食順序
1st	2nd	3rd	4th	5th	6th		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	
1	2	3	5	0	4	1→2→5→3→4	5	2	0	1	3	4	5→4→1→3→2
1	3	0	2	5	4	1→3→5→2→4	5	2	1	4	0	3	5→3→1→4→2
1	4	2	0	5	3	1→4→3→2→5	5	3	1	0	4	2	5→2→3→4→1
2	0	3	1	5	4	2→3→4→1→5	4	0	1	2	5	3	4→5→2→3→1
2	3	5	0	1	4	2→5→3→1→4	4	2	5	0	1	3	4→1→3→5→2
2	3	1	4	5	0	2→1→4→3→5	4	2	1	5	3	0	4→3→2→5→1
3	1	2	4	5	0	3→4→1→2→5	3	0	1	2	4	5	3→2→5→4→1
3	0	2	5	1	4	3→5→2→1→4	3	2	5	1	4	0	3→1→4→5→2

由上方表格中，將此 16 種圍成一圈的結果列出，讓第一隻餵食的鵲擺在上方頂點，並將餵食順序的路徑畫線，發現餵食順序有對稱性的結果：

1. 餵食順序中，編號 15、24 不能相鄰，若將成功的餵食順序排成一圈時，可以發現編號 15 有沿著虛線對稱後交換的特性，同理 2、4 也是，而 3、0 只有對稱而已。因此，圖形中上下兩行即為以第一隻餵食的鵲為對稱軸(虛線)。
2. 餵食順序的路徑圖，若用相同顏色呈現表示圖形相同，且同顏色上下兩行的圖形為鏡射，同顏色左右兩圖為鏡射後再旋轉。



餵食順序	同色上下圖關係(鏡射)
14325	對齊餵食順序
52341	上下相加皆為 6

餵食順序	同色左右圖關係(鏡射後再旋轉)
45231	1 號鵲皆最後餵食，其餘四隻編號
32541	為順著數與倒著數

(五)6 鵲 1 鳩 (14 種排列有解，每種排列各 6 種餵食順序，故共 84 組解)

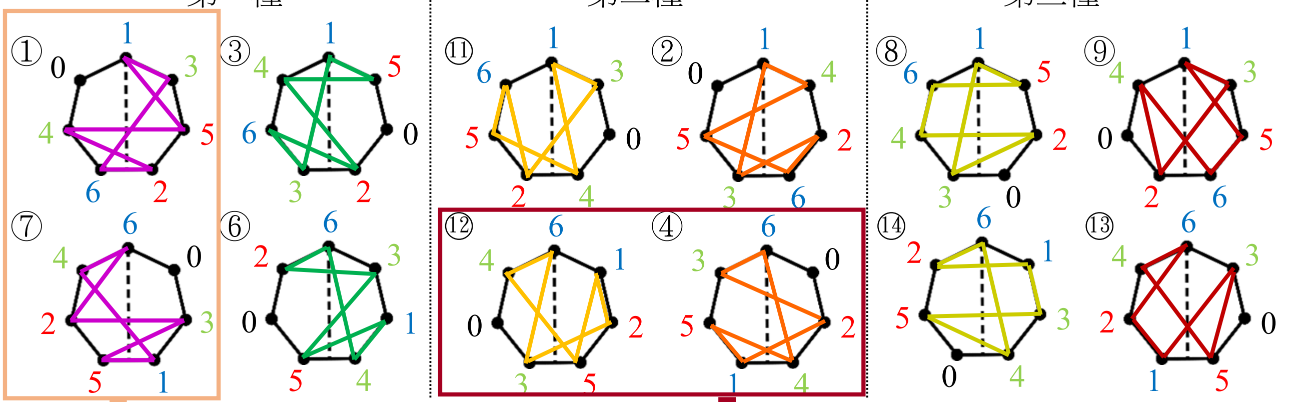
最後，找出六鵲一鳩排列有解的情況，一共 14 種排列有解，且不論從第幾號鵲開始餵食皆會成功，所以以餵食順序來說共有 14 x 6＝84 組解。

	排列位置							餵食順序	解的個數
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th		
①	1	3	5	2	6	4	0	1→3→6→2→4→5(→1→3…)	6
②	1	4	2	6	3	5	0	1→4→5→6→2→3(→1→4…)	6

	排列位置							餵食順序	解的個數
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th		
③	2	3	6	4	1	5	0	1→5→4→2→6→3(→1→5…)	6
④	2	4	1	5	3	6	0	1→5→4→6→3→2(→1→5…)	6
⑤	2	4	6	1	3	5	0	1→3→2→6→4→5(→1→3…)	6
⑥	2	6	3	1	4	5	0	1→4→6→2→3→5(→1→4…)	6
⑦	3	1	5	2	4	6	0	1→5→3→2→6→4(→1→5…)	6
⑧	3	4	6	1	5	2	0	1→5→6→4→2→3(→1→5…)	6
⑨	4	1	3	5	6	2	0	1→3→2→4→6→5(→1→3…)	6
⑩	4	1	5	2	6	3	0	1→5→4→6→2→3(→1→5…)	6
⑪	4	2	5	6	1	3	0	1→3→2→6→5→4(→1→3…)	6
⑫	4	6	1	2	5	3	0	1→2→3→6→4→5(→1→2…)	6
⑬	5	1	2	4	6	3	0	1→2→6→4→5→3(→1→2…)	6
⑭	5	2	6	1	3	4	0	1→3→5→4→6→2(→1→3…)	6

接著，將上面的成功餵食順序畫出圍成一圈後的樣貌，並繪出餵食路徑，依路徑圖案發現共有四種，解和 5 鵲 1 鳩一樣具有對稱性，我們先研究前面三種：

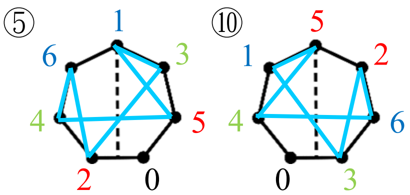
1. 餵食順序中，編號 1 和 6、2 和 5、3 和 4 不能相鄰，若將成功的餵食順序排成一圈時，可以發現編號 1 和 6 有沿著虛線對稱後交換的特性，同理 2 和 5、3 和 4 也是，而 0 只有對稱而已。因此，圖形中上下兩行即為以第一隻餵食的鵲為對稱軸(虛線)。
2. 餵食順序的路徑圖，同顏色上下兩行圖形為鏡射，同一種的左右兩圖為鏡射後再旋轉。



餵食順序	同顏色關係(鏡射)
136245	對齊餵食順序
641532	上下相加皆為 7

餵食順序	同一種圖形左右圖(先鏡射後旋轉)
645123	由 6 號鵲開始，其餘五隻編號為順著數與倒著數；從其他號碼數也一樣。
321546	

第四種：



此種路徑圖形本身就是線對稱圖形，所以餵食順序 132645 和 645132 為同一種路徑⑤；若經由旋轉，⑤的餵食順序 132645 會變成 546231，形成⑩的餵食順序

透過研究(一)~(五)中，除了餵食順序有對稱性外，也發現餵食順序可能會落入「循環餵食」的狀況，表示餵食編號的順序有一定的限制才能避免重複餵食。以下為我們討論 n 鵲 1 鳩的餵食規則：

引理 1-1：n 鵲 1 鳩圍成一圈，以餵食順序$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$而言，若彼此相鄰 s 個$(1 \le s \le n-1)$編號總和為 n+1 的倍數時，則餵食順序便自成一個循環。

證明：以餵食順序而言，假設相鄰 s 個相鄰編號的鵲為$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$，

其中 $x_i = t(1 \le t \le n, t \in \mathbb{N})$ 且 $x_i \ne x_j (1 \le i < j \le s)$

並假定 x_1 位在圍成一圈後的排列位置在第 k 位，$k \le n+1$

若 $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_s = (n+1)l$，$l \in \mathbb{N}$，

則編號 x_s 餵完後下一隻餵食的位置是

$k + x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_s = k + (n+1)l \equiv k \pmod{(n+1)}$

由假定知，環排第 k 位是編號 x_1，

那麼餵食順序便會是 $x_1 \to x_2 \to x_3 \to ... \to x_s \to x_1 \to x_2 \to ...$直至將 n 份食物餵完。

換句話說，不會每一隻鵲皆吃到食物。■

例子 1：若有 9 鵲 1 鳩，9 份食物，餵食順序中有編號 1、2、3、4 彼此相鄰，令餵食順序是 1、4、2、3，排列位置分別在 a、b、c、d 四個位置，則

(1) 從 1 號開始餵，第 2 次會餵到第 $a+1 \equiv b \pmod{10}$ 位，為 4 號。

(2) 從 4 號開始餵，第 3 次會餵到第 $a+1+4 = a+5 \equiv c \pmod{10}$ 位，為 2 號。

(3) 從 2 號開始餵，第 4 次會餵到第 $a+1+2+4 = a+7 \equiv d \pmod{10}$ 位，為 3 號。

(4) 從 3 號開始餵，第 5 次會餵到第 $a+1+2+3+4 = a+10 \equiv a \pmod{10}$ 位，為 1 號。

所以編號 1、2、3、4 號的餵食順序會成一個循環，即 1→4→2→3→1→4→2→3→1。

引理 1-2：n 鵲 1 鳩圍成一圈，在鵲媽媽餵食 n 份食物且每隻鵲皆吃到 1 份食物的前提下，以餵食順序$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$而言，若 n 為**奇數**，將鵲編號 1 至 n，則編號 $\frac{n+1}{2}$ 號的鵲不可能是最後一隻吃到食物，亦即 $x_n \ne \frac{n+1}{2}$。

證明：假設第 $\frac{n+1}{2}$ 號的鵲是最後一隻吃到食物，亦即 $x_n = \frac{n+1}{2}$，

則前面 $n-1$ 隻鵲的編號總和是

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 1+2+...+n-\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{(n-1)(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{(n+1)}$$

依據引理 1-1 來說，表示前面 $n-1$ 隻鵲餵食會形成循環，

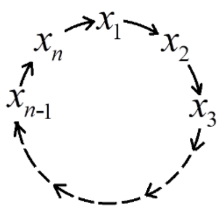
也就是說，第 $x_n = \dfrac{n+1}{2}$ 號鵲根本吃不到食物，與假設矛盾。

故得證第 $\dfrac{n+1}{2}$ 號鵲絕不可能最後一隻吃到食物。■

引理 1-3：n 鵲 1 鳩圍成一圈，n 為**偶數**，若圍成一圈的排列方式是有解的情況下，則不論從編號幾號的鵲開始餵，皆可以讓所有鵲吃到 1 份食物。

證明：因有解，表示 n 隻鵲成功餵食，令餵食順序 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$，$n$ 隻鵲編號和是

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{(n+1)}$$



依據引理 1-1 來說，表示 n 隻鵲餵食會形成循環，

亦即餵食餵食順序會如右圖所呈現的模樣。

表示 n 鵲 1 鳩的餵食順序若有解，無論從哪隻鵲開始餵食，皆能成功。■

研究二：*n* 鵲 *m* 鳩的有解餵食順序與排列位置

先研究 4 鵲 2 鳩的成功餵食情況，圍成一圈的排列數有 $\dfrac{6!}{6\times 2!}$=60 種，利用前面相同討論方式，將第一隻餵食的鵲（編號α）放在排列第一位，餵食第二隻鵲（編號β）放在排列位置的第1＋α位，餵食第三隻鵲位在排列位置的第 1+α+β位，……依此類推，加完的位置可能超過圍成一圈的位置數 $n+m$，因此，需要利用同餘來求出鵲的排列位置，且算出的位置均不能相同，以下是兩種成功餵食方式找出排列位置的過程。

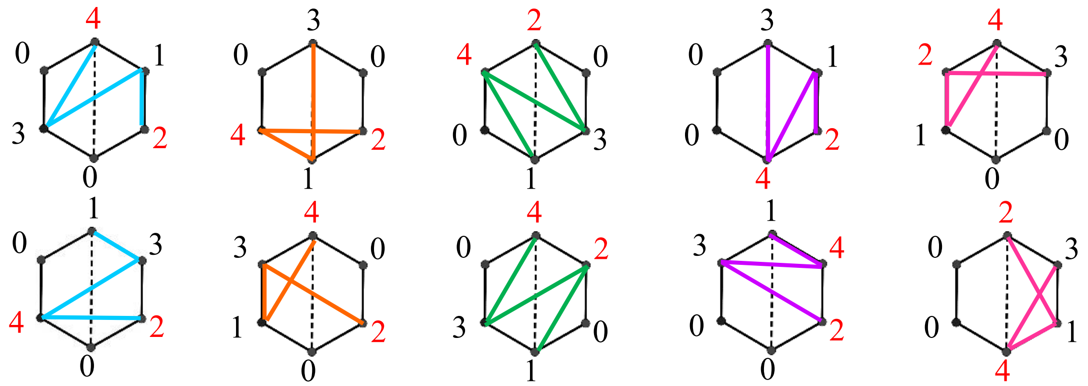
餵食順序	鵲編號	鵲所在的排列位置	鵲編號	鵲所在的排列位置	
1	3	1≡1 (mod 6)	2	1≡1 (mod 6)	取 mod 6 同餘是因鵲和鳩的總數是 6
2	1	1+3≡4 (mod 6)	3	1+2≡3 (mod 6)	
3	4	1+3+1≡5 (mod 6)	4	1+2+3=6≡0 (mod 6)	
4	2	1+3+1+4≡3 (mod 6)	1	1+2+3+4=10≡4 (mod 6)	

我們將成功餵食順序與排列位置呈現如下表格，共有 10 種成功的餵食方法：

排列位置						成功餵食順序	排列位置						成功餵食順序
1st	2nd	3rd	4th	5th	6th		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	
4	1	2	0	3	0	4→3→1→2	1	3	2	0	4	0	1→3→4→2
4	3	0	0	1	2	4→1→2→3	4	0	2	0	1	3	4→1→3→2
3	1	2	4	0	0	3→4→1→2	4	2	0	1	3	0	4→3→2→1
3	0	2	1	4	0	3→1→4→2	1	4	2	0	0	3	1→4→3→2
2	0	3	1	0	4	2→3→4→1	2	3	1	4	0	0	2→1→4→3

將此 10 種成功排列位置圍成一圈並畫出餵食路徑，發現和 1 鳩有所不同，僅能發現同

樣顏色表示路徑圖形相同，上圖可以經由虛線的鏡射對稱再旋轉得到下圖。以紫色路徑為例，餵食順序為 3412 及 1432，兩組最後一隻餵食者皆 2 號，其餘 3 隻為順著數與倒著數。



在研究 4 鵲 2 鳩成功餵食的過程中，發現它和 5 鵲 1 鳩、6 鵲 1 鳩一樣皆有對稱性，但還需要有更多的討論與證明，留待後面繼續延伸。而 n 鵲 m 鳩的餵食方式也和 n 鵲 1 鳩相同，也有可能落入「循環餵食」的狀況，所以根據引理 1-1 至 1-3 再加以擴充。

引理 2：n 鵲 m 鳩圍成一圈，以餵食順序 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ 而言，若彼此相鄰 s 個 $(1 \le s \le n-1)$ 編號總和為 $n+m$ 的倍數時，則餵食順序便自成一個循環。

證明：以餵食順序而言，假設相鄰 s 個相鄰編號的鵲為 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_s\}$，

其中 $x_i = t(1 \le t \le n, t \in \mathbb{N})$ 且 $x_i \ne x_j (1 \le i < j \le s)$

並假定 x_1 位在排列位置的第 k 位

若 $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_s = (n+m)l$，$l \in \mathbb{N}$，

則編號 x_s 餵完後下一個餵食的位置是

$$k + x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_s = k + (n+m)l \equiv k \pmod{(n+m)}$$

由假定知，第 k 位是編號 x_1，

那麼餵食順序便會是 $x_1 \to x_2 \to x_3 \to ... \to x_s \to x_1 \to x_2 \to ...$ 直至將 n 份食物餵完。

換句話說，無法每隻鵲都吃到食物。■

例子 2：若有 9 鵲 3 鳩，9 份食物，餵食順序中有編號 7、8、9 彼此相鄰，排列位置分別在 a、b、c($a \ne b \ne c$ 且 $1 \le a,b,c \le 12$)三個位置，則

(1) 從 7 號開始餵，第 2 次會餵到第 $a+7 \equiv b \pmod{12}$ 位，為 8 號。

(2) 從 8 號開始餵，第 3 次會餵到第 $a+7+8 = a+15 \equiv a+3 \equiv c \pmod{12}$ 位，為 9 號。

(3) 從 9 號開始餵，第 4 次會餵到第 $a+7+8+9 = a+24 \equiv a \pmod{12}$ 位，為 7 號。

所以編號 7、8、9 號的餵食順序會自成一個循環，即 7→8→9→7→8→9→7→…

類型二：吃過跳過

研究三： *n* 鵲 1 鳩的有解餵食順序與排列位置

原始鳩占鵲巢問題是每隻鵲和鳩無論是否吃到食物，都必須再數過一次，那如果改變餵食規則，也就是凡吃過食物的鵲，都跳過不數，那麼要怎樣排才能成功餵食呢？而這個問題就很像約瑟夫問題了，但還是有些許不同，我們先研究 3 鵲 1 鳩與 4 鵲 1 鳩的餵食情況。

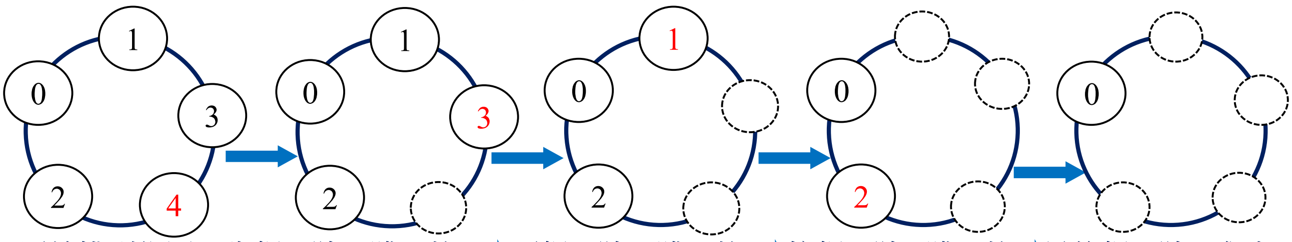
(一) 3 鵲 1 鳩 (圍成一圈有 $\frac{4!}{4}=6$ 種排列，其中 3 組排列找出 6 種成功餵食順序)

排列位置				成功餵食順序	解的個數
1st	2nd	3rd	4th		
1	2	3	0	3→2→1	1
1	3	2	0	1→3→2、3→1→2、2→1→3	3
3	1	2	0	1→2→3、2→3→1	2

(二) 4 鵲 1 鳩 (圍成一圈有 $\frac{5!}{5}=24$ 種排列，其中 16 種排列找出 24 種成功餵食順序)

排列位置					成功餵食順序	解的個數
1st	2nd	3rd	4th	5th		
1	2	3	4	0	1→2→4→3、4→3→2→1	2
1	2	4	3	0	2→3→4→1	1
1	3	2	4	0	4→2→1→3	1
1	3	4	2	0	4→3→1→2、 2→1→3→4	2
1	4	3	2	0	1→4→3→2、4→1→3→2	2
1	4	2	3	0	3→4→2→1	1
2	1	3	4	0	2→3→1→4、3→2→4→1	2
2	1	4	3	0	3→1→4→2	1
2	3	1	4	0	2→1→4→3	1
2	4	1	3	0	1→3→4→2	1
3	1	2	4	0	4→2→3→1	1
3	1	4	2	0	3→2→1→4、1→4→2→3、4→1→2→3	3
3	4	1	2	0	1→2→3→4	1
4	1	3	2	0	3→4→1→2、2→4→1→3	2
4	2	1	3	0	1→3→2→4	1
4	3	1	2	0	2→4→3→1	1

由上面 2 種情況來看，發現成功餵食的方法數恰好都是鵲數的直線排列數，這究竟是不是巧合？我們選擇其中一組成功餵食(4 鵲 1 鳩)的排列位置來討論：



原始排列位置。先餵 4 號，跳 4 格 →再餵 3 號，跳 3 格 →接餵 1 號，跳 1 格→最後餵 2 號，成功

因環狀討論不易，我們將上面的環狀展開成直線方便討論，以下表格列出 4 種成功餵食的解。因編號 4 號中間會跳過 3 個位置、編號 3 號會跳過 2 個位置、2 號會跳過 1 個位置，1 號不會，所以位置個數會有 $\underset{4隻鵲}{4} + \underbrace{3+2+1}_{跳過的位置數} + \underset{1隻鳩}{1} = \underset{共11個位置}{11}$ ，因此我們畫了 11 個位置，而原始排列共有 4+1=5 隻鳥，第 1 輪至少餵到 2 隻鵲，第 2 輪可能沒餵到（如下表最後一列），且最多要在第 3 輪全部餵完，餵完最後只留鳩(編號 0)，便能成功。下表「**黑數字**」表示有吃到食物的編號，「**紅數字**」表示跳過的編號，「**紫數字**」表示最後遺留的鳩，即**黑數字依序排列**就是成功餵食的編號順序。

位置		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	編號	4	2	0	1	3	2	0	1	2	0	
2	編號	3	4	0	2	1	4	0	1	0	1	0
3	編號	2	0	4	1	3	0	1	3	0		
4	編號	1	2	3	4	0	3	0	3	0		

第 1 輪餵食
為原始排列狀態
至少餵到 2 隻鵲，至多 3 隻

第 2 輪餵食
扣掉第 1 輪餵食個數後的排列，會餵到 0~2 隻鵲

第 3 輪餵食
扣掉第 1、2 輪餵食個數後的排列，會餵到 0~1 隻鵲

由上可知，第 1 輪**紅數字**的**編號順序**即是第 2 輪的**排列位置**，第 2 輪的**紅數字**的**編號順序**即是第 3 輪的**排列位置**。此外，4 鵲 1 鳩情況下，至多餵食 3 輪，便可將 4 鵲餵食完畢，且這 11 個位置中，恰好是 4 隻編號的直線排列組合 $4!=24$ 種，也就是餵食成功的方法數。

接著，根據以上找到的規則，嘗試 6 鵲 1 鳩的成功餵食順序，如下表格：

位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
編號	5	3	1	4	0	6	2	3	1	4	0	2	3	1	4	0	3	0	3	0		

(1) 有 $\underset{6隻鵲}{6} + \underbrace{4+5+1+0+3}_{跳過的位置數} + \underset{1隻鳩}{1} = \underset{共20個位置}{20}$ 個位置。

(2) 餵食至第 5 輪，可讓 6 隻鵲皆吃到食物。

(3) 第 1 輪共 7 隻，餵食 2 隻鵲；第 2 輪剩 $7-2=5$ 隻，餵食 1 隻鵲；第 3 輪剩 $5-1=4$ 隻鳥，餵食 2 隻鵲；第 4 輪僅剩 $4-2=2$ 隻無法餵到鵲；第 5 輪餵完最後一隻鵲餘鳩。

(4) 第 1 輪**紅數字**的**編號順序**即是第 2 輪的**排列位置**，第 2 輪的**紅數字**的**編號順序**即是第 3 輪的**排列位置**，……依此類推。

(5) 將 6 隻鵲做直線排列，再依跳過的位置數，填入上面表格，所以餵食成功的方法數有 $6!=720$ 種。

由上所述，n 鵲與 1 鳩吃過跳過的成功餵食順序方法數為 1 至 n 的直線排列數 $n!$。

研究四： *n* 鵲 *m* 鳩的有解餵食順序與排列位置

我們將研究三的鳩數增加，探討吃過跳過的 *n* 鵲 *m* 鳩的狀況，我們以 3 鵲 2 鳩與 4 鵲 2 鳩，圍成一圈的排列數各有 12 與 60 種，我們一樣使用列舉法先進行討論，僅列出成功餵食的部分，其餘位於研究日誌。

(一)3 鵲 2 鳩 (有 5 種排列位置有解，而餵食順序的方法總計共 6 種)

排列位置					成功餵食順序
1st	2nd	3rd	4th	5th	
1	2	3	0	0	3→1→2
1	2	0	3	0	1→2→3
1	0	2	0	3	3→2→1

排列位置					成功餵食順序
1st	2nd	3rd	4th	5th	
1	3	0	2	0	2→1→3
1	3	0	0	2	1→3→2 2→3→1

(二)4 鵲 2 鳩 (有 20 種排列位置有解，成功餵食的方法總共有 24 種)

排列位置						成功餵食順序
1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	
1	2	3	4	0	0	2→4→3→1
1	2	3	0	4	0	4→3→1→2
1	2	0	3	4	0	3→1→2→4
1	2	4	0	3	0	4→1→2→3
1	4	3	0	2	0	2→1→4→3
1	0	2	0	4	3	3→2→4→1
1	2	0	4	3	0	1→2→4→3
1	4	0	3	0	2	1→4→2→3
1	2	4	3	0	0	1→2→3→4 2→3→1→4
1	4	3	0	0	2	4→2→3→1 2→4→1→3

排列位置						成功餵食順序
1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	
1	3	0	0	2	4	2→1→3→4
1	3	0	2	0	4	4→2→1→3
1	3	0	2	4	0	3→4→2→1
1	3	4	0	0	2	4→1→3→2
1	4	2	3	0	0	3→1→4→2
1	4	0	0	2	3	1→4→3→2
1	4	2	0	3	0	3→4→1→2
1	4	0	2	0	3	4→3→2→1
1	3	0	0	4	2	1→3→4→2 2→3→4→1
1	3	4	0	2	0	1→3→2→4 3→2→1→4

由上面可知，鳩數增加後，能成功餵食的總方法數，還是維持著**鵲數編號的直線排列個數**，因此，我們延伸研究三的方法進行討論，發現其結果與研究三雷同。

位置		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	編號	4	0	2	0	3	1	0	2	0	1	0	0
2	編號	3	1	0	2	0	4	1	0	0	1	0	0
3	編號	2	1	4	3	0	0	1	3	0	0		
4	編號	1	2	0	4	3	0	0	3	0	0		

(1) 至多有 $\underset{\text{4隻鵲}}{4} + \underbrace{3+2+1}_{\text{跳過的位置數}} + \underset{\text{2隻鳩}}{2} = \underset{\text{共12個位置}}{12}$ 個位置。

(2) 至多餵食至第 3 輪，可讓 4 隻鵲皆吃到食物。

(3) 第 1 輪共 6 隻鳥，餵食 2~3 隻鵲；第 2 輪剩 3~4 隻鳥，餵食 0~2 隻鵲；第 3 輪餵完最後一隻鵲餘 2 隻鳩。

(4) 第 1 輪紅數字的編號順序即是第 2 輪的排列位置，第 2 輪的紅數字的編號順序即是第 3 輪的排列位置。

(5) 將 4 隻鵲做直線排列，再依跳過的位置數與 2 隻鳩，填入上面表格，得知餵食成功的方法數有 $4!=24$ 種。

接著，根據以上找到的規則，嘗試 5 鵲 3 鳩的成功餵食順序，如下表格：

位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
編號	3	2	1	5	4	0	0	0	2	1	4	0	0	0	1	0	0	0

(1) 有 $\underset{\text{5隻鵲}}{5}+\underbrace{2+4+1+3}_{\text{跳過的位置數}}+\underset{\text{3隻鳩}}{3}=\underset{\text{共18個位置}}{18}$ 個位置。

(2) 餵食至第 3 輪，可讓 5 隻鵲皆吃到食物。

(3) 第 1 輪共 8 隻，餵食 2 隻鵲；第 2 輪剩 $8-2=6$ 隻，餵食 2 隻鵲；第 3 輪剩 $6-2=4$ 隻鳥，餵完最後一隻鵲剩 3 隻鳩。

(4) 第 1 輪紅數字的編號順序即是第 2 輪的排列位置，第 2 輪的紅數字的編號順序即是第 3 輪的排列位置。

(5) 將 5 隻鵲做直線排列，再依跳過的位置數與 3 隻鳩，填入上面表格，所以餵食成功的方法數有 $5!=120$ 種。

由上所述，無論鳩有幾隻，想讓 n 隻鵲成功餵食的方法數還是 1 至 $n\,(n\in\mathbb{N})$ 的直線排列數 $n!$。

肆、研究結果與討論

依據上面的研究過程，當討論圍成一圈的「排列位置」與「餵食順序」關係時，發現當鵲與鳩的數目不斷增加時，計算越趨複雜。假定有 n 鵲 m 鳩圍成一圈，若 n 鵲的餵食順序是 $\{\underset{\text{第1隻餵食}}{x_1},\underset{\text{第2隻餵食}}{x_2},\ldots,\underset{\text{第n隻餵食}}{x_n}\}$，其中 $1\le x_i\le n$、$x_i\in\mathbb{N}$ 且 $x_i\ne x_j\,(1\le i<j\le n)$，$x_1$ 位在圍成一圈後的排列位置第 1 位，所以 x_2 在第 $1+x_1$ 位，x_3 在第 $1+x_1+x_2$ 位，……，x_n 在第 $1+\sum_{i=1}^{n-1}x_i$ 位，當位置大於 $(n+m)$ 時，則必須除以 $(n+m)$ 取餘數，若餘數為 0，表示第 $(n+m)$ 位。因此，每一個位置 $1+\sum_{i=1}^{s}x_i$ $(1\le s\le n-1)$ 除以 $(n+m)$ 的餘數均不相同。因此，當 n 與 m 越大，越增加判斷的難度。

不過，先前引理 2 有討論到循環餵食的狀況，所以決定利用引理 2 擴大討論 n 隻鵲的「餵食順序」中，以「不循環」為條件，將「成功餵食」的討論呈現於下：

一、吃過不跳過，n 鵲 1 鳩能成功餵食的方法($n \in \mathbb{N}$)

(一)當 n 為奇數時，相鄰 s 隻鵲且 $2 \le s \le n-1$ 的餵食編號和除以 $(n+1)$ 的餘數 $\neq 0$，或只出現一次餘數為 0 且為最後一數，便可成功餵食。

1. 由引理 1-2 或由引理 2 可知，奇數隻鵲 1 隻鳩時，第($\frac{n+1}{2}$)號不會是最後一隻吃到食物的鵲($x_n \neq \frac{n+1}{2}$)。所當以討論奇數隻解時，便可優先排除第($\frac{n+1}{2}$)號的鵲在最後一隻餵食的情況。

例如：5 鵲 1 鳩，餵食順序為 2→5→3→1→4，是一組成功餵食的順序，得到此解的判斷方式如下，將相鄰 2、3、4 隻鵲的編號相加的結果除以 6 的餘數，均不會是 0。又 $1+2+3+4+5=15 \equiv 3 \neq 0 \pmod 6$，因此當餵食成功時，這組餵食順序無法循環餵食。

餵食順序	2	5	3	1	4
相鄰 2 鵲	2+5=7≡1	5+3=8≡2	3+1=4	1+4=5	
相鄰 3 鵲	2+5+3=10≡4	5+3+1=9≡3	3+1+4=8≡2		
相鄰 4 鵲	2+5+3+1=11≡5	5+3+1+4=13≡1			

而餵食順序為 4→5→2→3→1，也是一組成功餵食的順序，得到此解的判斷方式如下，將相鄰 2、3、4 隻鵲的編號相加的結果除以 6，所得餘數僅出現一次 0 且編號 231 位於循環餵食的最後位置。亦即餵食 4 號、5 號鵲(未循環)之後，剩下的 3 隻鵲雖會循環餵食，但僅餵一次而已，仍舊可以讓 5 隻鵲皆吃到食物。

餵食順序	4	5	2	3	1
相鄰 2 鵲	4+5=9≡3	5+2=7≡1	2+3=5	3+1=4	
相鄰 3 鵲	4+5+2=11≡5	5+2+3=10≡4	2+3+1=6≡0		
相鄰 4 鵲	4+5+2+3=14≡2	5+2+3+1=11≡5			

(二)當 n 為偶數時，相鄰 s 隻鵲且 $2 \le s \le n-2$ 的餵食編號和除以 $(n+1)$ 的餘數 $\neq 0$ 時，可成功餵食

1. 當相鄰 $n-1$ 隻鵲的編號總和為此集合 $\{\frac{n(n+1)}{2}-1, \frac{n(n+1)}{2}-2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}-n\}$ 中的兩個數字，但這 n 個數字除以$(n+1)$的餘數為 $\{n, n-1, n-2, \ldots, 1\}$，並不會有 0，故無需像奇數隻鵲一樣判斷至相鄰 $n-1$ 隻鵲的編號總和。
2. 若餵食順序可成功，那麼此 n 隻鵲的餵食順序可自成一個循環，這 n 隻鵲的編號總和

是 $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{(n+1)}$)。也表示若有 $kn\,(k \in \mathbb{N})$ 份食物時，每吃鵲皆可吃到 k 份的食物，而鳩吃不到。

例如：6 鵲 1 鳩，餵食順序為 5→1→3→6→2→4，是一組成功餵食的順序，得到此解的判斷方式如下，將相鄰 2、3、4 隻鵲的編號相加的結果除以 7，餘數均不會是 0。此餵食順序可自成一個循環也就是 5→1→3→6→2→4→5→1→3→6→2→4→...，其圍成一圈後的排列位置均為同一種。

餵食順序	5	1	3	6	2	4
相鄰 2 鵲	5+1=6	1+3=4	3+6=9≡2	6+2=8≡1	2+4=6	
相鄰 3 鵲	5+1+3=9≡2	1+3+6=10≡3	3+6+2=11≡4	6+2+4=12≡5		
相鄰 4 鵲	5+1+3+6=15≡1	1+3+6+2=12≡5	3+6+2+4=15≡1			

若是其中兩隻改變餵食順序 5→1→3→6→4→2，此種順序無法成功餵食，因相鄰餵食的編號和出現除以 7 餘數為 0 的情況。可知真正的餵食順序會是 5→1→3→6→4→1，將無法餵到 2 號，是一組餵食失敗的順序。

餵食順序	5	1	3	6	4	2
相鄰 2 鵲	5+1=6	1+3=4	3+6=9≡2	6+4=10≡3	4+2=6	
相鄰 3 鵲	5+1+3=9≡2	1+3+6=10≡4	3+6+4=12≡5	6+4+2=12≡5		
相鄰 4 鵲	5+1+3+6=15≡1	1+3+6+4=14≡0	3+6+4+2=15≡1			

若餵食順序是 1→3→6→4→2→5，此種順序也無法成功餵食，因相鄰餵食的編號和會出現除以 7 餘數為 0 的情況。真正的餵食順序會是 2→5→2→5→2→5 或 1→3→6→4→1→3，兩種餵食循環，是一組餵食失敗的順序。

餵食順序	1	3	6	4	2	5
相鄰 2 鵲	1+3=4	3+6=9≡2	6+4=10≡3	4+2=6	2+5=7≡0	
相鄰 3 鵲	1+3+6=10≡3	3+6+4=13≡6	6+4+2=12≡5	4+2+5=11≡4		
相鄰 4 鵲	1+3+6+4=14≡0	3+6+4+2=15≡1	6+4+2+5=17≡3			

由(一)和(二)的討論可得成功的餵食編號順序，就可以藉由編號順序推得各編號圍成一圈後的排列位置，藉此推得「n 鵲 1 鳩」在吃過不跳過時，成功餵食的有解條件。

定理 1：有「n 鵲 1 鳩」在吃過不跳過時，其餵食順序是 $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$，

(1)若相鄰 s 隻鵲的編號總和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv a \neq 0 \pmod{(n+1)}$ 且 $i, n, s \in \mathbb{N}$、$2 \le s \le n-1$、$1 \le i \le n-s+1$，即能成功餵食。

(2)若相鄰 s 隻鵲的編號總和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0 \pmod{(n+1)}$ 僅一次且排列在最後，也能成功餵食。

證明：顯而易見，當考慮相鄰 s 隻鵲相鄰是否有循環餵食時，便會自動跳過鳩。

所以，相鄰 s 隻鵲編號和的範圍是

$$1+2+3+\ldots+s \le \sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \le (n-s+1)+(n-s+2)+\ldots+n$$

$$\frac{s(s+1)}{2} \le \sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \le sn-\frac{s(s-1)}{2} \text{，} 1 \le i \le n-s+1$$

(1)當 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0\left(\bmod (n+1)\right)$，已產生一次餵食循環時，

剩餘 $n-s$ 隻鵲隻編號和 $=\frac{n(n+1)}{2}-p(n+1)>0$， $p \in \mathbb{N}$ 且 $p<\frac{n}{2}$

①若 $n=2k$， $\frac{n(n+1)}{2}-[a+p(n+1)]=k(2k-1)-a-p(2k) \equiv k-a\left(\bmod\ (2k)\right)$， $k \in \mathbb{N}$

亦即，剩餘 $n-s$ 隻編號之和也會有循環餵食發生的可能；最少會有 1 隻鵲無法吃到食物。因此，**此種條件無法餵食無法成功**。

②若 $n=2k-1$， $k-a=0\left(\bmod\ (2k)\right)$， $k \in \mathbb{N}$

亦即，剩餘 $n-s$ 隻編號之和不會有循環餵食發生，因只能產生一次的餵食循環，為確保每隻鵲皆能吃到食物，此循環餵食須位於餵食順序最後。

(2)當 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv a \ne 0\left(\bmod (n+1)\right)$ （$a \in \mathbb{N}$且$1 \le a \le n$），沒有產生餵食循環時

剩餘 $n-s$ 隻鵲隻編號和 $=\frac{n(n+1)}{2}-[a+p(n+1)]>0$， $p \in \mathbb{N}$且$p<\frac{n}{2}$

①若 $n=2k$，

$$\frac{n(n+1)}{2}-[a+p(n+1)]=k(2k+1)-a-p(2k+1) \equiv -a \ne 0\left(\bmod (2k+1)\right) \text{，} k \in \mathbb{N}$$

亦即，剩餘 $n-s$ 隻編號之和均不會有循環餵食發生，故每隻鵲皆可吃到一份食物。又 n 隻鵲的編號和為 $\frac{n(n+1)}{2}=k(2k+1) \equiv 0\left(\bmod (2k+1)\right)$，表示 n 隻鵲若餵食成功，則無論從第幾號鵲開始餵，皆可以成功餵食。

②若 $n=2k-1$， $\frac{n(n+1)}{2}-[a+p(n+1)]=k(2k-1)-a-p(2k) \equiv k-a\left(\bmod (2k)\right)$， $k \in \mathbb{N}$

表示(i) $k-a \ne 0\left(\bmod (2k)\right)$ 時，剩餘 $n-s$ 隻編號之和均不會有循環餵食發生，故每隻鵲皆可吃到一份食物。(ii) $k-a=0\left(\bmod (2k)\right)$ 時，剩餘 $n-s$ 隻編號之和會有循環餵食發生，為確保每隻鵲皆能吃到食物，此循環餵食須位於餵食順序最後。

綜上所述，相鄰 s 隻鵲編號之和：$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv a \neq 0(\bmod(n+1))$ 且 $i,n,s \in \mathbb{N}$、$2 \le s \le n-1$、$1 \le i \le n-s+1$，即能成功餵食。當出現 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0\left(\bmod(n+1)\right)$ 時，此循環僅能出現一次，且位於最後才能成功餵食。■

(三)探討成功餵食順序的方法數

我們嘗試利用排列組合來找出 n 鵲 1 鳩「成功餵食順序」的方法數，為討論簡便，若第 2、3、4 號鵲是相鄰的，以(234)表示此三隻鵲為一組，排列數有 3!，依此類推。先從 4 鵲 1 鳩開始尋找。

1. 4 鵲 1 鳩有解的方法數

由定理 1 知(14)與(23)不能相鄰，利用排容原理便可求得成功餵食順序的方法數，共有 $\underbrace{4!}_{\text{餵食順序的排列數}} - \underbrace{2\times 2!\times 3!}_{(14)\text{或}(23)\text{相鄰}} + \underbrace{2\times 2\times 2}_{(14)\text{且}(23)\text{相鄰}} = 8$ 種方法。又 $\frac{4\times(4+1)}{2} = 10 \equiv 0\left(\bmod\ 5\right)$，所以共有 $8 \div 4 = 2$ 種圍成一圈時的排列有解。

2. 5 鵲 1 鳩有解的方法數

由定理 1 知(15)、(24)、(123)、(345)、(1245)不能相鄰，如果相鄰需位於排列最後，我們優先計算完全不相鄰的狀況，呈現於(1)~(4)，再計算僅 1 組相鄰且位於餵食順序的最後面，呈現於(5)：

(1)先處理(15)、(24)不相鄰的方法數，利用排容原理可得

$$\underbrace{5!}_{\text{餵食順序的排列數}} - \underbrace{2\times 2!\times 4!}_{(15)\text{或}(24)\text{相鄰}} + \underbrace{2!\times 2!\times 3!}_{(15)\text{且}(24)\text{相鄰}} = 48$$

(2)再處理(15)、(24)不相鄰下，扣除(123)、(345)相鄰的狀況

①討論餵食順序(123)○○與○○(123)的狀況 (○可填入 4 或 5 其中一數)

$$[\underbrace{3!}_{(123)\text{的排列數}} \times 2 \times 1 - \underbrace{4}_{\text{結尾是1或2只有一種排列}}] \times \underbrace{2}_{(123)\text{可放最前和最後}} \times \underbrace{2}_{\text{有}(123)(345)\text{兩種}} = 32$$

②討論餵食順序○(123)○的狀況 (○可填入 4 或 5 其中一數)

$$\underbrace{3!}_{(123)\text{排列數}} \times \underbrace{1}_{\text{剩餘兩數僅1種填法}} \times \underbrace{2}_{(123)\text{或}(345)\text{兩種}} = 12$$

③討論餵食順序(123)且(345)相鄰的狀況，表示會是(12)3(45)的情況

$$\underbrace{2!}_{(12)\text{排列數}} \times \underbrace{2!}_{(45)\text{排列數}} \times \underbrace{2}_{(12)\text{或}(45)\text{可交換}} = 8$$

(3)再處理(15)、(24)、(123)、(345)不相鄰下，扣除(1245)相鄰的狀況，所以(1245)相鄰的情況僅有 1452、1254、4521、2541 四種排列，3 可放最前面與最後面，共 8 種。

(4)合併(1)(2)(3)，共有 $48-(32+12-8)-8=4$ 種餵食成功的方法。

(5)因為 $\frac{5(5+1)}{2}=15\equiv 3\neq 0 \pmod 3$，(15)、(24)、(123)、(345)、(1245)相鄰可位於餵食順序最後，尚有 3$\boxed{1452}$、3$\boxed{1254}$、3$\boxed{4521}$、3$\boxed{2541}$、234$\boxed{15}$、432$\boxed{51}$、135$\boxed{24}$、531$\boxed{42}$、12$\boxed{534}$、21$\boxed{435}$、45$\boxed{231}$、54$\boxed{132}$，共有 12 種方法。所以合併(4)(5)共 16 種方法。

3. 6 鵲 1 鳩有解的方法數

由定理 1 知(16)、(25)、(34)、(124)、(356)、(1256)、(1346)和(2345)不能相鄰，

(1)先處理(16)、(25)、(34)不相鄰的方法數，利用排容原理可得

$$\underset{\text{餵食順序的排列數}}{6!}-\underbrace{3\times 2!\times 5!}_{(16)\text{或}(25)\text{或}(34)\text{相鄰}}+\underbrace{3\times 2!\times 2!\times 4!}_{\text{任兩組相鄰}}-\underbrace{2!\times 2!\times 2!\times 3!}_{(16)\text{且}(25)\text{且}(34)\text{相鄰}}=240$$

(2)再處理(16)、(25)、(34)不相鄰下，扣除(124)、(356)相鄰的狀況

①討論餵食順序○(124)○○與○○(124)○的狀況 (○可填入 3、5 或 6 其中一數)

$$[\underset{(124)\text{或}(356)\text{排列數}}{3!}\times\underset{\text{剩餘3空位僅有3種方法}}{3}\times\underset{(124)\text{或}(356)\text{共2種}}{2}]\times\underset{\text{2種排列位置}}{2}=72$$

②討論餵食順序(124)和(356)相鄰 (亦即(124)○○○中，○如何填入 3、5 或 6)

$$[\underset{(124)\text{或}(356)\text{排列數}}{3!}\times\underset{\text{可選擇356其中兩數的一數}}{2}\times\underset{\text{剩兩數可選}}{2}\times 1]\times\underset{(124)\text{與}(356)\text{排列數}}{2!}=48$$

合併(1)(2)，僅剩 $240-(72+48)=120$ 種方法數。

(3)最後處理(16)、(25)、(34)、(124)、(356)不相鄰下，扣除(1256)、(1346)和(2345)相鄰，且發現「(1256)且(1346)相鄰」或「(1346)且(2345)相鄰」或「(1256)且(1346)相鄰」並不會發生，故(1256)、(1346)和(2345)相鄰是屬於 3 組獨立事件。

所以僅需討論○(2156)○如何填入 3 和 4 ((1346)與(2345)雷同)

①討論餵食順序($\boxed{2}1\boxed{5}6$)的排列組合，共有 $\underset{\text{25可互換}}{2}\times\underset{\text{16可互換}}{2}\times 2=8$ 種組合

②討論 8 種組合，如：○(2156)○如何填入 3 和 4，其中 4 種組合○(1562)○、○(2651)○、○(5126)○、○(6215)○各有 2 種方法，其餘 4 種組合僅 1 種，故全部有 $(4\times 2+4)\times\underset{(1256)\text{或}(1346)\text{或}(2345)\text{共3種}}{3}=36$ 種方法數。

合併(1)(2)(3)，僅剩 $240-(72+48)-36=120-36=84$ 種成功餵食的方法數。又 $\frac{6\times(6+1)}{2}=21\equiv 0 \pmod 7$，所以共有 $84\div 6=14$ 種環狀排列有解。

透過上面的餵食順序討論，發現餵食成功的方法數是一個**複雜**的排列組合問題，我們一直找尋有無簡便的方式，截至目前，除了發現解有對稱性外，仍然還在努力當中。

二、吃過不跳過 *n* 鵲 *m* 鳩能成功餵食的方法 ($n,m\in\mathbb{N}$)

透過上面的討論，我們將鳩數增加，利用上述方法探討 *n* 鵲 *m* 鳩能成功餵食的有解條件。

(一) 以 6 鵠 2 鳩用定理 1 的方式試著討論

例如：6 鵠 2 鳩，若以 6 鵠直線排列的其中一種餵食順序為 5→1→3→6→2→4，將相鄰 2、3、4 隻鵠的編號和除以 8 所得餘數，發現有相鄰 2 隻鵠與相鄰 5 鵠的和除以 8 餘 0，卻有一組不是位於最後。

餵食順序	5	1	3	6	2	4
相鄰 2 鵠	5+1=6	1+3=4	3+6=9≡1	6+2=8≡0	2+4=6	
相鄰 3 鵠	5+1+3=9≡1	1+3+6=10≡2	3+6+2=11≡3	6+2+4=12≡4		
相鄰 4 鵠	5+1+3+6=15≡7	1+3+6+2=12≡4	3+6+2+4=15≡7			
相鄰 5 鵠	5+1+3+6+2=17≡1	1+3+6+2+4=16≡0				

因此，我們接著以圍成一圈的「排列位置」(共有 8 位)與「餵食順序」來討論，發現以原始餵食順序會產生兩隻鵠位在同一個位置上，的確無法成功餵食。若第一隻餵食的鵠依序往後順移，發現可在 2→4→5→1→3→6 與 4→5→1→3→6→2 此順序下餵食成功，如下表所呈現。

餵食順序	5	1	3	6	2	4	有解
排列位置 1	1	1+5=6	6+1=7	7+3≡2	2+6=8	8+2≡2	╳
排列位置 2		1	1+1=2	2+3=5	5+6≡3	3+2=5	╳
排列位置 3			1	1+3=4	4+6≡2	2+2=4	╳
排列位置 4				1	1+6=7	7+2≡1	╳
排列位置 5	3+4=7	7+5≡4	4+1=5	5+3=8	1	1+2=3	○
排列位置 6	1+4=5	5+5≡2	2+1=3	3+3=6	6+6≡4	1	○

最後，我們再將上面表格有成功餵食的順序 2→4→5→1→3→6，利用定理 1 的方式討論，發現相鄰 s 鵠隻編號和除以 8 皆不餘 0，表示無循環餵食狀況發生，可以讓所有鵠皆吃到一份食物。

餵食順序	2	4	5	1	3	6
相鄰 2 鵠	2+4=6	4+5=9≡1	5+1=6	1+3=4	3+6=9≡1	
相鄰 3 鵠	2+4+5=11≡3	4+5+1=10≡2	5+1+3=9≡1	1+3+6=10≡2		
相鄰 4 鵠	2+4+5+1=12≡4	4+5+1+3=13≡5	5+1+3+6=15≡7			
相鄰 5 鵠	2+4+5+1+3=15≡7	4+5+1+3+6=19≡3				

或者，4→5→1→3→6→2 發現僅在相鄰 2 鵠編號和出現 0 且為最後一數，表示 2 號鵠和 6 號鵠雖然是循環餵食，但位於最後，便可以讓所有鵠皆吃到一份食物。

餵食順序	4	5	1	3	6	2
相鄰 2 鵠	4+5=9≡1	5+1=6	1+3=4	3+6=9≡1	6+2=8≡0	
相鄰 3 鵠	4+5+1=10≡2	1+3+6=10≡2	3+6+2=11≡3	6+2+4=12≡4		
相鄰 4 鵠	5+1+3+6=15≡7	1+3+6+2=12≡4	3+6+2+4=15≡7			
相鄰 5 鵠	4+5+1+3+6=19≡3	5+1+3+6+2=17≡1				

由上方討論可得成功餵食的編號順序，就可以藉由編號順序推得各編號環狀排列的相對位置，所以我們藉此推得「n 鵲 m 鳩」在吃過不跳過時的有解條件，把定理 1 再推廣。

定理 2：有「n 鵲 m 鳩」在吃過不跳過時，其餵食順序是$\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$，$n$ 隻鵲的編號總和是$\dfrac{n(n+1)}{2}$，相鄰 s 隻鵲的編號總和是$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$且$i,n,s,m\in\mathbb{N}$、$2\le s\le n-1$、$1\le i\le n-s+1$

(1)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$時，則$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv a\ne 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$，即能成功餵食。

(2)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv a\ne 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$時，則

①$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv b\ne 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$即能成功餵食$(1\le a,b\le n+m-1)$。

②$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$僅一次且此 s 隻編號的排列位在最後，也能成功餵食。

證明：顯而易見，當考慮相鄰 s 隻鵲相鄰是否有循環餵食時，便會自動跳過鳩。

所以，

(1)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$且$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv 0\ \left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$，則

剩餘 $n-s$ 隻鵲隻編號和$=\dfrac{n(n+1)}{2}-\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv 0-0\equiv 0\ \left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$

亦即，剩餘 $n-s$ 隻編號之和也會有循環餵食發生的可能；最少會有 1 隻鵲無法吃到食物。因此，**無法無法成功餵食**。

故當$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$時，$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv a\ne 0\ \left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$才能成功餵食，也因$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$，表示 n 隻鵲若餵食成功，則無論從第幾號鵲開始餵，皆可以成功餵食。

(2)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv a\ne 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$且$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv 0\ \left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$，則

剩餘 $n-s$ 隻鵲隻編號和$=\dfrac{n(n+1)}{2}-\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv 0-a\equiv -a\ne 0$

亦即，剩餘 $n-s$ 隻編號之和不會有循環餵食發生，因最多只能產生一次的餵食循環，為確保每隻鵲皆能吃到食物，相鄰 s 隻鵲的編號須位於餵食順序最後，才能餵食成功

(3)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv a\ne 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$且$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv b\ne 0\ \left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$，則

①剩餘 $n-s$ 隻鵲隻編號和 $=\dfrac{n(n+1)}{2}-\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv a-b\neq 0\left(\bmod (n+m)\right)$

亦即，相鄰 s 隻與剩餘 $n-s$ 隻的鵲，均不會有循環餵食情況發生，故每隻鵲皆可吃到一份食物。

②剩餘 $n-s$ 隻鵲隻編號和 $=\dfrac{n(n+1)}{2}-\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv a-b=0\left(\bmod (n+m)\right)$

表示剩餘 $n-s$ 隻鵲會有循環餵食狀況發生，故為確保每隻鵲皆能吃到食物，相鄰 $n-s$ 隻鵲的編號須位於餵食順序最後，才能餵食成功。■

(二)探討成功餵食順序的方法數

我們嘗試想找出 n 鵲 m 鳩「成功餵食順序」的方法數，利用定理 2 討論 6 鵲 3 鳩的方法數。因 $\dfrac{6(6+1)}{2}=21\equiv 3\neq 0\left(\bmod\ 9\right)$，故可分兩種情況討論：

1.相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\not\equiv 0$的情況。會有(36)、(45)、(126)、(234)、(135)、(3456)、(12456)不能相鄰的情況，我們分段討論：

(1)先處理(36)、(45)不相鄰的方法數，利用排容原理可得

$$\underset{\text{餵食順序的排列數}}{6!}-\underbrace{2\times 2!\times 5!}_{\text{(36)或(45)相鄰}}+\underbrace{2!\times 2!\times 4!}_{\text{(36)且(45)相鄰}}=336$$

(2)再處理(36)、(45)不相鄰下，扣除(126)(234)(135)相鄰的狀況

①討論餵食順序(126)○○○與○○○(126)的狀況 (○可填入 3、4 或 5 其中一數，45 不相鄰) $\underset{\text{(126)的排列數}}{3!}\times\underset{\text{345填入有2種可能}}{2}\times\underset{\text{(126)可以最前和最後}}{2}=24$

②同①，討論餵食順序(234)○○○與○○○(234)的狀況 ((234)與(135)同樣)

$$\Big(\underbrace{2\times2\times1}_{\text{(234)為3或4在最後}}\times\underbrace{2\times2\times1}_{\text{○可填入的可能數}}+\underbrace{2\times1}_{\text{(234)2在最後}}\times\underset{\text{○可填入的可能數}}{3!}\Big)\times\underset{\text{2種排列位置}}{2}\times\underset{\text{(234)或(135)共2種}}{2}=112$$

③討論餵食順序○(126)○○與○○(126)○的狀況 (○可填入 3、4 或 5 其中一數，45 不相鄰) $\Big(\underset{\text{162和261}}{2}\times\underset{\text{345填入○}}{3!}+\underbrace{(3!-2)}_{\text{(126)排列扣掉162和261}}\times\underset{\text{345填入○}}{2\times2}\Big)\times\underset{\text{(126)可以有2種位置}}{2}=56$

④同③，討論餵食順序○(234)○○與○○(234)○的狀況 ((234)與(135)同樣)

$$\Big(\underset{\text{排列324或423}}{2}\times\underset{\text{○可填入的可能數}}{3}+\underbrace{(3!-2)}_{\text{(234)排列扣掉324與423}}\times\underbrace{2\times2\times1}_{\text{○可填入的可能數}}\Big)\times\underset{\text{2種排列位置}}{2}\times\underset{\text{(234)或(135)共2種}}{2}=88$$

合併①②③④可知有 24+112+56+88=280 種可能。

⑤討論(126)(234)(135)任兩組相鄰的狀況，因此會出現$(\underline{16}\boxed{234})(\underline{24}\boxed{315})(\underline{26}\boxed{135})$三種組合情況 (i)○$(\underline{16}\boxed{234})$○，5 可挑最前面○或最後面○填入，但(45)不相鄰，可得 12 種情況；(ii)○$(\underline{26}\boxed{135})$○，4 可挑最前面○或最後面○填入，但(45)不相鄰，可得

12 種情況；(iii)○(24$\boxed{315}$)○，6 可挑最前面○或最後面○填入，可得 16 種情況。總共有 12+12+16=40 種可能。

⑥討論(126)(234)(135)皆相鄰的狀況，但此種情況不會發生。

合併①~⑥可知第(2)點共有 $280-40=240$ 種情況。

(3)最後處理(36)、(45)、(126)、(234)、(135)不相鄰下，扣除(3456)相鄰的狀況，僅有 $2\times2\times2=8$ 種，有②3564①、②6534①、①3465②、②3564①、②5346①、①4356②、②5643①、②4653①這些方式，共 8 種。

(4)處理(36)、(45)、(126)、(234)、(135)、(3456)不相鄰下，扣除(12456)相鄰的狀況，其組合有 16425、14265、41256、41526、14256，共 5 種，而黃底數字可交換、綠底數字也可交換，共 $2!\times3!\times5=60$ 種組合，最後將 3 填入最前面或最後面，剔除不合的，發現總共 56 種。

因此，合併(1)(2)(3)(4)，可得相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0$ (均不為 0)的情況共有 $336-240-8-56=32$ 種。

2. 相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0$ 的情況。會有(36)、(45)、(126)、(234)、(135)、(3456)、(12456)出現在餵食順序的最後位置且僅能出現一次，我們以下分段討論。

s=2 ⇒ (36)、(45)	s=3 ⇒ (126)、(234)、(135)		s=4 ⇒ (3456)	s=5 ⇒ (12456)	
142536	165234	642135	123564	316425	352146
251436	615234	264135	125346	321465	352641
412536	156234	624135	213465	326415	356142
415236	651234	246135	214356	312465	356241
521436	561324	462315		316524	341256
524136	165324	264315		321564	341652
132645	561342	462351		326514	346152
231645	516432	426531		312564	346251
623145	651432	462531		314265	352416
132654	561432	642531		314625	352461
231654	435216			325164	341526
613254	435261			325614	341562
	534126			325146	314256
	534162			325641	314652
12 種	24 種		4 種	28 種	

將上面所有結果相加，得知 12+24+4+28=68 種。因此，由 1.和 2.的討論可得 6 鵲 3 鳩能餵食成功的總方法數共有 32+68=100 種。

經過前述討論成功餵食的方法數，就如同 n 鵲 1 鳩的一樣，**是一個編號 1~n 的直線排列中，須滿足很多條件的複雜排列組合。**不過，我們也從上面的研究過程與討論得到 n 鵲 m 鳩能成功餵食的排列性質，如以下四個性質。

性質 1：在吃過不跳過時，有「n 鵲 m 鳩」，其鵲的餵食順序是$\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，n 隻鵲的編號總和是$\dfrac{n(n+1)}{2}$，若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv c\left(\text{mod}(m+n)\right)$，$1\le c\le n$且$c\in\mathbb{N}$，則 $x_n\ne c$。也就是說，c 號鵲不會是最後一隻吃到食物的鵲。

證明：假設第 c 號的鵲是最後一隻吃到食物，亦即 $x_n=c$，

則前面 $n-1$隻鵲的編號總和是

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_i=1+2+...+n-c=\frac{n(n+1)}{2}-c\equiv c-c\equiv 0\ \left(\text{mod}(n+m)\right)$$

依據定理 2 知，表示前面 $n-1$隻鵲餵食會形成循環，

也就是說，第 $x_n=c$ 號鵲根本吃不到食物，與假設矛盾。

故得證 c 號鵲絕不可能最後一隻吃到食物。■

性質 2：「n 鵲 m 鳩」在吃過不跳過時，有一組「成功餵食順序」是$\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$，則

1. 若 $m=1$ 時，$\{n+1-x_1,\ n+1-x_2,\ n+1-x_3,...,\ n+1-x_n\}$ 會是一組成功的餵食順序。

2. (1)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\text{mod}(n+m)\right)$時，則$\{x_n,x_{n-1},x_{n-2},...,x_1\}$會是一組成功的餵食順序。

(2)若$\dfrac{n(n+1)}{2}\not\equiv 0\left(\text{mod}(n+m)\right)$時，則$\{x_{n-1},x_{n-2},...,x_1,x_n\}$會是一組成功的餵食順序。

證明：

1. 在 n 鵲 1 鳩的條件下，因$\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$是一組成功的餵食順序，

由定理 1 知必滿足下列 2 種情況之一

①相鄰 s 隻鵲編號和$\displaystyle\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv y\ne 0\ \left(\text{mod}(n+1)\right)$，$2\le s\le n-1$、$1\le i\le n-s+1$

②若相鄰 s 隻鵲編號和$\displaystyle\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv 0\ \left(\text{mod}(n+1)\right)$，僅出現一次且位於餵食順序最後。亦即

$$\{x_1,x_2,...x_{k-1},\underbrace{x_k\ ,\ x_{k+1}\ ,...,x_n}_{總和=\sum_{t=k}^{n}x_t\equiv 0(\text{mod}\,(n+1))}\}，其餘\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv z\ne 0\ \left(\text{mod}(n+1)\right)，i\ne k且s\ne n$$

此餵食順序$\{n+1-x_1,\ n+1-x_2,\ n+1-x_3,...,\ n+1-x_n\}$相鄰 s 隻鵲的編號總和為

$s(n+1)-\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0-y \equiv -y \neq 0 \pmod{(n+1)}$，若皆不為 0，滿足①；

$$\{n+1-x_1, n+1-x_2, ..., n+1-x_{k-1}, \underbrace{n+1-x_k, n+1-x_{k+1}, ..., n+1-x_n}\}$$

$$\text{總和} = (n-k+1)(n+1)-\sum_{t=k}^{n} x_t \equiv 0-0=0 \pmod{(n+1)}$$

其餘相鄰 s 隻鵲的編號和 $= s(n+1)-\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0-z=-z \neq 0 \pmod{(n+1)}$，滿足②

故 $\{n+1-x_1,\ n+1-x_2,\ n+1-x_3, ...,\ n+1-x_n\}$ 也是一組成功的餵食順序。

2. (1) 在 n 鵲 m 鳩的條件下，因 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ 是一組成功的餵食順序，

若 $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{(n+m)}$ 時，由定理 2 之 1 知必滿足

彼此相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0 \pmod{(n+m)}$，$2 \le s \le n-1$、$1 \le i \le n-s+1$

則餵食順序 $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1\}$ 之相鄰 s 隻鵲的編號和也是 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0 \pmod{(n+m)}$

故 $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1\}$ 也是一組成功的餵食順序。

(2)在 n 鵲 m 鳩的條件下，因 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ 是一組成功的餵食順序，若 $\frac{n(n+1)}{2} \not\equiv 0 \pmod{(n+m)}$ 時，由定理 2 之 2 知 必滿足相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0 \pmod{(n+m)}$，$2 \le s \le n-1$、$1 \le i \le n-s+1$；或僅有一次相鄰 s 隻鵲編號和除以 $(n+m)$ 餘數為 0 且位於餵食最後，因此餵食順序 $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ 的排列位置均不相同，如右側表格。

餵食順序	排列位置 (除以$(n+m)$之餘數)
x_1	1
x_2	$1+x_1$
x_3	$1+x_1+x_2$
$\vdots$	$\vdots$
x_{n-2}	$1+x_1+x_2+...+x_{n-3}=1+\sum_{t=1}^{n-3} x_t$
x_{n-1}	$1+x_1+x_2+...+x_{n-2}=1+\sum_{t=1}^{n-2} x_t$
x_n	$1+x_1+x_2+...+x_{n-1}=1+\sum_{t=1}^{n-1} x_t$

而 $\{x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_n\}$ 的餵食順序中，前 $n-1$ 隻由已知條件知已滿足相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0 \pmod{(n+m)}$，$2 \le s \le n-2$、$1 \le i \le n-s$。故僅需考慮倒數 2、3、4、…、$n-1$ 隻鵲的編號和，亦即 $\{x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_2, x_1, x_n\}$，

x_1+x_n ← 倒數 2 隻鵲編號和

$(x_1+x_2)+x_n$ ← 倒數 3 隻鵲編號和

$\vdots$

$(x_1+x_2+...+x_{n-2})+x_n$ ← 倒數 $n-1$ 隻鵲編號和

由已知中間 $n-2$ 隻鵲的餵食順序 $\{x_2, x_3, ..., x_{n-1}\}$ 的排列位置 $\left\{1+x_1 , 1+x_1+x_2 , ... , 1+\sum_{t=1}^{n-2} x_t\right\}$

為除以$(n+m)$之後，餘數均相異 且 小於等於 $(n+m)$ 的 $n-2$ 個數。

利用同餘運算性質 $\left\{1+x_1+(x_n-1) , 1+x_1+x_2+(x_n-1) , ... , 1+\sum_{t=1}^{n-2} x_t+(x_n-1)\right\}$ 也為除以$(n+m)$之後，餘數均相異 且 小於等於 $(n+m)$ 的 $n-2$ 個數。表示此 $n-2$ 個餘數最多僅有一次出現 0，且剛好位於餵食順序最後。

由上述討論得證 $\{x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, x_n\}$ 也為一組成功的餵食順序。■

我們將此**性質 2** 稱作成功餵食順序的**對稱性**。如果用上面的 6 鵲 3 鳩為例，成功餵食順序的方法數便可以上面的**性質 1** 與 **2** 求得成功餵食順序的方法數。亦即因 $\frac{6(6+1)}{2}=21\equiv 3(\bmod 9)$，所以 $x_6\neq 3$，可以進行分段討論，但仍須滿足(36)、(45)、(126)、(234)、(135)、(3456)、(12456)不能相鄰的狀況，若有相鄰則必僅有一組且位於餵食順序最後。得知

1. 排列方式 3○○○○○及○○○○3○，亦即 $x_1=3$ 及 $x_5=3$，各有 28 種成功方法；

　分別討論○○○○31：(3456)不相鄰，優先討論(45)擺放位置，再放 2、6，共 5 種

　　　　　○○○○32：(3456)不相鄰，優先討論(45)擺放位置，再放 1、6，共 5 種

　　　　　○○○○34：(36)(126)不相鄰，優先討論第 4 位放 1 或 2 的情況，共 6 種

　　　　　○○○○35：同上

　　　　　○○○○36：優先討論(45)擺放位置，再放 1、2，共 6 種

2. 排列方式○3○○○○及○○○3○○，亦即 $x_2=3$ 及 $x_4=3$，各有 16 種成功方法；

　分別討論○○○3○1：(36) (45)不相鄰，優先討論(45)的位置，再放 2、6，只有 2 種

　　　　　○○○3○2：(36) (45)不相鄰，優先討論(45)的位置，再放 1、6，只有 2 種

　　　　　○○○3○4：
　　　　　○○○3○5：　(126)(45)(36)不相鄰，優先討論第 5 位放 1 或 2 的情況，算出共 4 種，總共 8 種。

　　　　　○○○3○6：優先討論(45)擺放位置，再放 1、2，共 4 種。

3. 排列方式○○3○○○，亦即 $x_3=3$，有 12 種成功方法；

　討論編號 6 分別位於第 1、4、5 位，剩餘 1、2、4、5 填入可得各有 4 種，共 12 種。

因此，利用**定理 2**、**性質 1**、**性質 2**，可算出共有 28×2+16×2+12=100 種方法，計算時間明顯比直接用**定理 2** 稍快一些。

下頁表格為我們利用**定理 2**、**性質 1** 和 **2** 所列出的有解的個數的對稱，其中 8 鵲 4 鳩中

編號 1 至 8 總和 36 除以 12 餘 0，表示為循環餵食；而 8 鵲 5 鳩中，36 除以 13 餘 10 > 8 ，表示編號 1 至 n 的鵲都可以是最後一隻吃到食物。

8 鵲 2 鳩	有解個數	8 鵲 3 鳩	有解個數	8 鵲 4 鳩	有解個數	8 鵲 5 鳩	有解個數
$x_1=6$	152	$x_1=3$	348	$x_1=6$	346	$x_1=2$	495
$x_2=6$	190	$x_2=3$	304	$x_2=6$	346	$x_2=2$	565
$x_3=6$	205	$x_3=3$	251	$x_3=6$	346	$x_3=2$	550
$x_4=6$	232	$x_4=3$	246	$x_4=6$	346	$x_4=2$	548
$x_5=6$	205	$x_5=3$	251	$x_5=6$	346	$x_5=2$	550
$x_6=6$	190	$x_6=3$	304	$x_6=6$	346	$x_6=2$	565
$x_7=6$	152	$x_7=3$	348	$x_7=6$	346	$x_7=2$	495
$x_8=6$	0	$x_8=3$	0	$x_8=6$	346	$x_8=2$	492
總和	1326		2052		2768		4260

因此，利用**定理 2** 和**性質 1** 與 **2 (解的對稱性)**，可以減少一半的計算時間，可它仍是一道**複雜的排列組合問題**，我們仍在努力尋找有無更簡便的方式。不過我們有確定鳩數在多少的狀況下，成功餵食的方法數恰好是鵲的直線排列個數。

性質 3：在吃過不跳過時，有「n 鵲 m 鳩」，其鵲的餵食順序是 $\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ ，$n\in\mathbb{N}$ ，

若 $m=\frac{n(n-1)}{2}$ 時，n 隻鵲成功餵食的方法數是 $n!$，且圍成一圈的排列數是 $(n-1)!$ 。

若 $m>\frac{n(n-1)}{2}$ 時，n 隻鵲成功餵食的方法數與圍成一圈的排列數皆是 $n!$ 。

證明：(1)n 鵲 $\frac{n(n-1)}{2}$ 鳩，共有 $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n+n^2-n}{2}=\frac{n+n^2}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ 隻鳥。

n 隻鵲編號和 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\bmod(\frac{n(n+1)}{2})\right)$ ，$n\in\mathbb{N}$

依據定理 2，表示相鄰 s 隻鵲編號和=$\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\equiv a\neq 0\left(\bmod(\frac{n(n+1)}{2})\right)$，即能成功餵食

其範圍是 $\frac{s(s+1)}{2}\le\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\le sn-\frac{s(s-1)}{2}$ ，$1\le i\le n-s+1$ 且 $2\le s\le n-1$

可得 $\frac{2(2+1)}{2}\le\frac{s(s+1)}{2}\le\frac{n(n-1)}{2}<\frac{n(n+1)}{2}$ 且 $2n-1\le sn-\frac{s(s-1)}{2}\le\frac{n^2+n-2}{2}<\frac{n(n+1)}{2}$ ①

表示相鄰 s 隻鵲編號和皆不可能是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的倍數，故無需考慮編號不相鄰的問題

因此成功餵食順序的方法數即是 1 至 n 的直線排列數 $n!$，又因為 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1+2+...+n$

$\equiv 0$，表示無論從哪隻鵲開始餵皆可以成功餵食，圍成一圈的排列數是 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$。

(2) 若 $m>\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時，共有 $n+m>\dfrac{n(n+1)}{2}$ 隻鳥。

n 隻鵲編號和 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2} < n+m \Rightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} \not\equiv 0\left(\text{mod}(n+m)\right)$ ②

由定理 2 與①②知，相鄰 s 隻鵲編號和 $=\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} < n+m$ 且 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0\left(\text{mod}(n+m)\right)$，即能成功餵食，但無法循環餵食，故成功餵食順序的方法數為 n 隻鵲的直線排列數 $n!$。每一種成功餵食順序可得一種的排列位置，故圍成一圈的排列數依然是 $n!$。■

性質 4： 在吃過不跳過時，有「n 鵲 m 鳩」，其鵲的餵食順序是 $\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，若鵲媽媽有 kn 份食物($k\in\mathbb{N}$)，亦即餵食 k 個輪迴，則 n 隻鵲平均皆吃到 k 份食物時的充要條件為 $\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\text{mod}(n+m)\right)$ 且 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0\left(\text{mod}(n+m)\right)$，$2\le s\le n-1$、$1\le i\le n-s+1$。

證明：由定理 2 便可得知。■

我們經由手算與程式的輔助，得到 n 鵲 m 鳩「成功餵食順序」的方法數，如下表格。紅字和綠字表示可以讓<u>**所有鵲**</u>循環餵食，**藍字**表示鳩數 $m>\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時，餵食成功的方法數。黑字和紅字表示鳩數 $m<\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時，餵食成功的方法數。

鵲＼鳩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6
4	8	10	10	18	18	24	24	24	24	24
5	16	32	44	44	48	72	72	72	72	120
6	84	102	100	164	208	268	344	348	316	408
7	176	312	544	624	868	1048	1680	1768	1840	2144
8	624	1326	2052	2768	4260	4784	5580	9464	10880	11904
9	2368	5224	8132	14744	20872	24156	37204	44196	50784	66596
10	8380	23176	44792	83182	97428	149894	199550	260220	322008	433568

三、**吃過跳過 n 鵲 m 鳩能成功餵食的有解方法數**$(n,m\in\mathbb{N})$

我們改變了原題目的餵食規則，採餵過的鵲跳過不數，由研究過程發現，仍舊需要討論

n 鵲的「餵食順序」，便能順利求出成功餵食順序下的排列位置。

定理 3：在吃過跳過時，有「n 鵲 m 鳩」，其鵲的餵食順序是$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$，$n \in \mathbb{N}$，鵲媽媽能成功餵食的餵食順序方法數，即為編號 1 至 n 的直線排列數 $n!$，藉此推出鵲與鳩的圍成一圈後的排列位置。

說明：鵲的餵食順序是$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$，$n \in \mathbb{N}$

共可跳過$1+2+3+...+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$個位置

所以完整的餵食過程至多需要 $\underbrace{n}_{n\text{隻鵲}} + \underbrace{\dfrac{n(n-1)}{2}}_{\text{跳過的位置數}} + \underbrace{m}_{m\text{隻鳩}} = \dfrac{n(n+1)}{2}+m$個位置

假設第 1 輪餵食 y_1 隻鵲，$2 \le y_1 \le n$；第 2 輪餵食 y_2 隻鵲，$0 \le y_2 \le n-y_1$；

第 3 輪餵食 y_3 隻鵲，$0 \le y_3 \le n-(y_1+y_2)$；......第 k 輪餵食 y_k 隻鵲，$1 \le y_k \le n-\sum_{t=1}^{k-1} y_t$

令在第 k 輪($k \le n-1$)時，n 隻鵲全部餵食完畢，意即$\sum_{t=1}^{k} y_t = n$，僅留下 m 隻鳩。

第 1 輪餵食

位置	1	2	3	…	$n+m$
編號	x_1	. . .		x_2	. . .

餵食 y_1 隻鵲，剩餘 $n+m-y_1$ 隻鳥

剩餘 $n+m-y_1$ 隻鳥，進入第 2 輪餵食

位置	$n+m+1$	$n+m+2$	…	$2(n+m)-y_1$
編號	x_{y_1+1} . . .	x_{y_1+2}	. . .	

餵食 y_2 隻鵲，剩餘 $n+m-(y_1+y_2)$ 隻鳥

剩餘 $n+m-(y_1+y_2)$ 隻鳥，進入第 3 輪餵食……依此類推

位置	$2(n+m)-y_1+1$	$2(n+m)-y_1+2$	……	$3(n+m)-(2y_1-y_2)$
編號	$x_{y_1+y_2+1}$	……	$x_{y_1+y_2+2}$	……

餵食 y_3 隻鵲，剩餘 $n+m-(y_1+y_2+y_3)$ 隻鳥

剩餘 $n+m-\sum_{t=1}^{k-1} y_t$ 隻鳥，進入第 k 輪餵食(最後 1 輪)

位置	$(k-1)(n+m)-\sum_{t=1}^{k-2}(k-t-1)y_t+1$	…	$k(n+m)-\sum_{t=1}^{k-1}(k-t)y_t \le \dfrac{n(n+1)}{2}+m$
編號	$x_{y_1+y_2+...+y_{k-1}+1}$	. . . . . .	x_n

餵食 y_k 隻鵲，剩餘 m 隻鳩

因為吃過跳過的關係，只要將 n 隻鵲直線排列排好，中間插入跳過的位置數，並算出**每一輪餵食的鵲數**和**剩餘的鵲與鳩的數目**，然後將剩餘鳩填入第 k 輪，接著將第 k 輪的所有鳥的編號填入第$k-1$輪的非餵食位置，再將第$k-1$輪的所有鳥的編號填入第$k-2$輪的非餵食位置，……，依此類推，最後填入第 1 輪的非餵食位置，一定可

以成功餵食，從而得知第 1 輪圍成一圈時的原始排列。

$\boxed{\text{例}}$：7 鵲 5 鳩吃過跳過下，7 鵲其中一組餵食順序是 1→4→3→6→7→2→5(最後一隻)

(1)先計算需要的位置數，共 $7+(3+2+5+6+1)+5=29$ 位，前面 12 位是原始排列，因此排列位置是：$\underbrace{\text{14○○○3○○6○○○}}_{\text{7鵲5鳩圍成一圈的原始排列}}$‖○○7○○○○○○2○5○○○○○

(2)可知第 1 輪餵食 4 鵲，故第 2 輪剩 8 隻鳥，餵食 1 鵲剩 7 隻鳥；第 3 輪餵食最後 2 鵲餘 5 鳩，因此我們將每一輪用‖隔開。

$\underbrace{\text{14○○○3○○6○○○}}_{\text{第1輪}}$‖$\underbrace{\text{○○7○○○○○}}_{\text{第2輪}}$‖$\underbrace{\text{○2○5○○○}}_{\text{第3輪}}$‖$\underbrace{\text{○○}}_{\text{鳩}}$

(3)最後依序由最後面往前推論

i. 填入第 3 輪遺留的鳩：

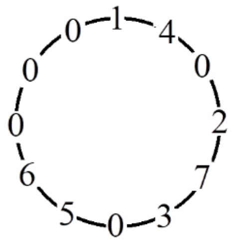
$\underbrace{\text{14○○○3○○6○○○}}_{\text{第1輪}}$‖$\underbrace{\text{○○7○○○○○}}_{\text{第2輪}}$‖$\underbrace{\text{0 2 0 5 0 0 0}}_{\text{第3輪}}$‖0 0

ii. 將第 3 輪排列，依序填入第 2 輪的○ (非餵食位置)：

$\underbrace{\text{14○○○3○○6○○○}}_{\text{第1輪}}$‖$\underbrace{\text{0 2 7 0 5 0 0 0}}_{\text{第2輪}}$‖0 2 0 5 0 0 0‖0 0

iii. 將第 2 輪排列，依序填入第 1 輪的○ (非餵食位置)：

$\underbrace{\text{1 4 0 2 7 3 0 5 6 0 0 0}}_{\text{第1輪}}$‖0 2 7 0 5 0 0 0‖0 2 0 5 0 0 0‖0 0



故可由成功餵食順序 1436725 得知圍成一圈的原始排列，如右圖所示，從編號 1 號開始餵即能成功。此外，也有撰寫程式來輔助我們的推論結果。

伍、研究結論

一、在吃過不跳過的情況下，利用不循環餵食，找出了 n 鵲 m 鳩能成功餵食的有解條件並加以推論。

(一)以餵食順序而言，若相鄰 s 隻鵲的編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0\left(\bmod (n+m)\right)$，$2\le s\le n-1$、$1\le i\le n-s+1$；抑或 $\dfrac{n(n+1)}{2} \not\equiv 0\left(\bmod (n+m)\right)$時，相鄰 s 隻鵲的編號和除以 $(n+m)$ 的餘數僅出現一次為 0 時，將相鄰 s 隻鵲的編號位於排列最後，均能成功餵食，並可藉由餵食順序推得排列位置的形式。

(二)若 $\dfrac{n(n+1)}{2} \equiv c\left(\bmod (n+m)\right)$，$1\le c\le n$且$c\in\mathbb{N}$，則 c 號鵲不會最後吃到食物。

(三)若鵲媽媽可以餵食好幾次的循環，亦即每隻鵲均可以平均吃到 k 份食物($k\ge 1$，$k\in\mathbb{N}$)，則 $\dfrac{n(n+1)}{2} \equiv 0\left(\bmod (n+m)\right)$且相鄰 s 隻鵲編號和 $\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0\left(\bmod (n+m)\right)$，

$2 \le s \le n-1$、$1 \le i \le n-s+1$，就可以連續餵食而鳩吃不到。

(四)若 $m > \frac{n(n-1)}{2}$，n 鵲 m 鳩的成功餵食順序方法數是 $n!$，圍成一圈後也可以得到 $n!$ 種的排列位置；若 $m = \frac{n(n-1)}{2}$，n 鵲 m 鳩的成功餵食順序方法數是 $n!$，而圍成一圈後只有 $(n-1)!$ 種的排列位置。

(五)因成功餵食順序具備對稱性，故當 $m < \frac{n(n-1)}{2}$ 時，可利用此特性算出成功餵食順序的方法數，可以減少許多運算時間。

二、改變餵食方法，在吃過跳過的情況下，找出了 n 鵲 m 鳩能成功餵食順序的方法數為 $n!$，並可藉由成功的餵食順序，推得 n 鵲 m 鳩圍成一圈的原始排列位置。

陸、未來展望

在研究過程中，尋找「吃過不跳過」，鳩數 $m < \frac{n(n-1)}{2}$ 的「成功餵食順序」的方法數中，隨著鵲數與鳩數的增加，其排列組合數越趨複雜，雖然有發現解的「對稱性」，但在沒有程式的輔助下還是算了很久，期望未來我們可以找到成功餵食順序的方法數的簡潔式子。

柒、參考文獻資料

1. 游森棚(2023)。森棚教官的數學題。**科學研習月刊，62**(2)，81。2023 年 9 月 15 日引自：https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=4110&print=1
2. 陳一理(2016)。**排列**。台北：建興文化
3. 許介彥(2003)。同餘的基本概念。**科學教育月刊，261**，21-27。2023 年 12 月 1 日引自：https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/62564125381784d09345bdcd/2003-261-03(21-27).pdf

捌、圖片出處

1. 本研究作品內文之喜鵲(p.2)，由第一作者利用 ChatGPT 生成。
2. 本研究作品之圖形，皆由兩位作者共同電繪完成。

【評語】030418

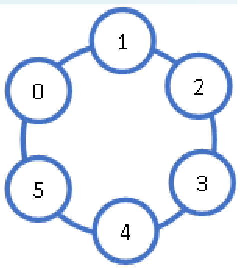
此研究源自於科學研習月刊 62-2 期中的「鳩佔鵲巢」問題。通過設計兩個不同的題型來探討餵食路徑，分別研究找出「成功餵食」n 隻喜鵲各 1 份食物的有解條件，並找出有解餵食順序的方法數。此研究成功探討喜鵲（n 隻）不重複餵食的成功餵食順序，並推出喜鵲與斑鳩圍成一圈的排列位置，進而證明出 n 隻喜鵲和 m 隻斑鳩成功餵食的有解條件，此作品在發想，分析與數學工具的運用以及獲得的成果方面皆不錯，是一件不錯的作品。文中作者們的思維的方式、各個面向的考慮及數學的推導值得嘉許。對於"吃過不跳過"有解的所有方法數雖未得到通解，但已經有一些觀察和初步結果。未來可持續研究。

作品簡報


鳩佔鵲巢問題之研究與推廣

壹、前言

我們在科學研習月刊 62 卷第 2 期中看見一個有趣的數學問題，名為「鳩佔鵲巢」，說明如下：「鳥巢裡有五隻小喜鵲，以及一隻混進來的小斑鳩。這六隻小鳥圍成一圈，小斑鳩編號是 0，接著沿著圓周五隻喜鵲順時針編號為 1、2、3、4、5。視力不好的喜鵲媽媽帶著五份食物回來，她餵食的方法相當有趣：首先她選一隻小鳥餵食，假設這隻小鳥的編號是 k。下一隻被餵食的鳥，是由這隻鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻鳥。然後看這隻鳥的編號是多少，比如是 r，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥，就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵食到斑鳩，食量大的斑鳩會馬上把所有食物吃光。」根據以上規則，例如：鵲媽媽先從 1 號開始餵，餵食編號順序是 1→2→4→2→4；如果鵲媽媽先從 3 號開始餵，餵食編號順序是 3→0。這樣的餵食方法能否讓所有鵲皆吃到一份食物，但鳩卻吃不到呢？這引起我們的興趣，便展開一連串的研究。



貳、研究問題

類型一：吃過不跳過----原始題意，有 n 份食物能讓鵲媽媽「成功餵食」每隻鵲，但鳩沒餵到。$k,n,m\in\mathbb{N}$

(一) 5 鵲 1 鳩，找出 5 隻鵲的成功餵食順序與圍成一圈上的排列位置。

(二) n 鵲 1 鳩，找出 n 隻鵲成功餵食的**有解**條件。

(三) n 鵲 m 鳩，找出 n 隻鵲成功餵食的**有解**條件。

(四) n 鵲 m 鳩，求出 n 隻鵲的**成功餵食方法數**。

(五) n 鵲 m 鳩，kn 份食物，找出 n 隻鵲各吃 k 份食物的有解條件。

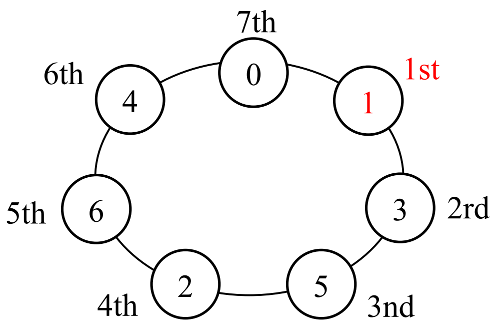
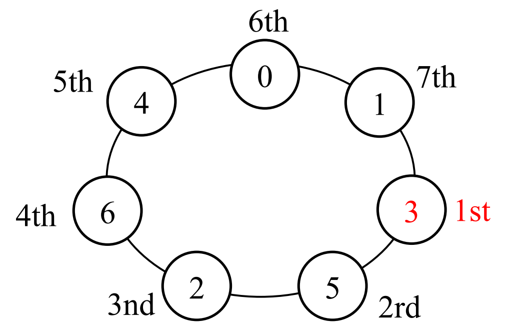
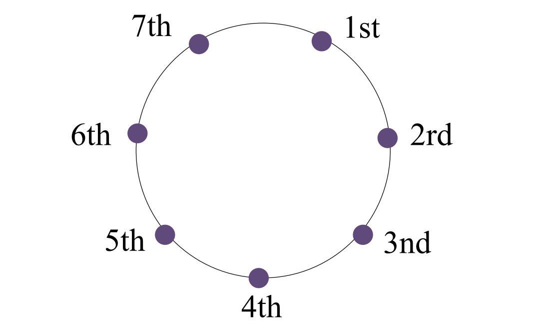
類型二：吃過跳過----改變餵食方式，讓吃過食物的鵲「跳過不再數」，$k,n,m\in\mathbb{N}$。

(六) n 鵲 1 鳩及 n 份食物，找出 n 隻鵲成功餵食的有解條件與方法數。

(七) n 鵲 m 鳩及 n 份食物，找出 n 隻鵲成功餵食的有解條件與方法數。

參、文獻回顧

鳩佔鵲巢問題與約瑟夫問題的比較差異表：

比較	鳩佔鵲巢--吃過不跳過	鳩佔鵲巢--吃過跳過	約瑟夫問題
示意圖			
規則	6 鵲 1 鳩餵食順序：1 (1st)→3 (2rd) →6 (5th)→2 (4th)→4 (6th)→5 (3nd) 尋找編號與位置的關係	6 鵲 1 鳩餵食順序：3 (1st)→6 (4th) →4 (5th)→2 (3nd)→1(7th)→5 (2rd) 尋找編號與位置的關係	設有 7 人，α=1，β=2 即殺 1 留 2，k=1 最後留下第 2 位的人 每 3 個 1 數，找位置
進行方式	數鵲編號，不固定數	數鵲編號，不固定數	數固定數(α+β)
是否重複	是	否	否

伍、名詞定義與公式

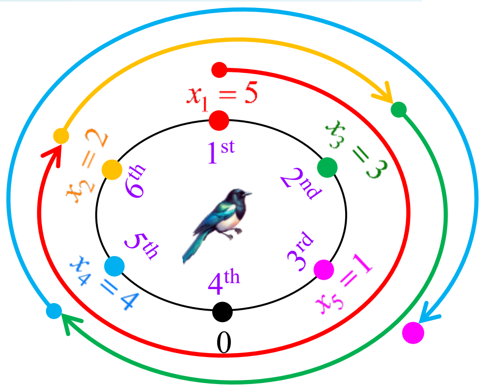
(一)有解：鵲媽媽帶回 n 份食物，能讓 n 隻鵲與 m 隻鳩圍成一圈下，n 隻鵲各吃到一份食物且鳩沒吃到食物的情況為「成功餵食」，稱為「有解」。

(二)不盡相異物環狀排列：將 n 種相異物(鵲)，m 種相同物(鳩)做環狀排列有 $\dfrac{(n+m-1)!}{m!}$ 種方法。

(三)同餘：設 $m\neq 0$，若 $m\,|\,a-b$，即 m 整除 $a-b$，或 $a-b=km$ ($k\in\mathbb{N}$)，則記作 $a\equiv b \pmod{m}$。

(四) $\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ 表示 n 隻鵲「餵食順序」的編號，其中 $1\le x_i\le n$，$x_i\in\mathbb{N}$ 且 $x_i\neq x_j\,(1\le i<j\le n)$。

並令鳩的編號皆為 0。



圖中喜鵲以 ChatGPT 生成

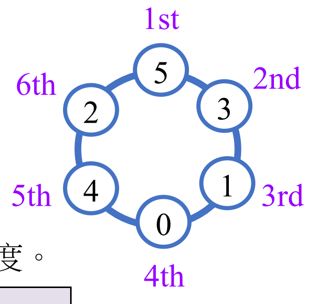
(五)將 n 鵲 m 鳩圍成一圈位置數只有 $n+m$ 位，所以加完後位置數超過 $n+m$ 時，則必須除以 $(n+m)$ 後，取其餘數。

(六)將 n 種相異物(鵲)做直線排列共有 $n!$ 種。

陸、研究過程與討論

類型一：吃過不跳過

研究一、二：n 鵲 1 鳩的有解排列位置與餵食順序



一、先用**圍成一圈的排列結果**討論餵食成功的方式 — 隨著鵲數增加，判斷難度逐漸增加

二、接著以鵲的餵食順序 $\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$，再配合**位置不重複**即為有解。

以 5 鵲 1 鳩為例，底下為其中 1 組解。共有 **16 種**餵食順序符合，不過當 n 越大，越增加判斷的難度。

餵食順序	5	2	3	4	1
位置	1≡1 (mod 6)	1+5=6≡0 (mod 6)	6+2=8≡2 (mod 6)	8+3=11≡5 (mod 6)	11+4=15≡3 (mod 6)

三、最後以鵲的餵食順序 $\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$，配合**不重複餵食**即為有解。因此，餵食順序有解，亦可找出鵲的位置。

我們從上尋找出 n 鵲 1 鳩的餵食規則：

引理 1-1：n 鵲 1 鳩餵食順序中，若彼此相鄰 s 隻($1\le s\le n-1$)編號總和為 n+1 的倍數時，則此 s 隻鵲便是一個餵食循環。

引理 1-2：若 n 為**奇數**，將鵲編號 1 至 n 號，則編號 $\dfrac{n+1}{2}$ 號的鵲不可能最後吃到食物，亦即 $x_n\neq\dfrac{n+1}{2}$。

引理 1-3：若 n 為**偶數**，且 n 鵲 1 鳩圍成一圈有解情況下，則不論從編號幾號的鵲開始餵，皆可以成功餵食。

我們將上述引理寫成**定理 1**：n 鵲 1 鳩餵食成功的有解條件

陸、研究過程與討論 （續）

定理 1：有「n 鵲 1 鳩」在吃過不跳過時，其餵食順序是$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$，

(1)若相鄰 s 隻鵲的編號總和$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \not\equiv 0 \pmod{n+1}$且$i,n,s\in\mathbb{N}$、$2\le s\le n-1$、$1\le i\le n-s+1$，即能成功餵食。

(2)若相鄰 s 隻鵲的編號總和$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \equiv 0 \pmod{n+1}$僅只一次且此 s 隻鵲的編號排列在最後，也能成功餵食。

證明：位於報告第 15~16 頁

研究三、四、五：n 鵲 m 鳩的有解排列位置與餵食順序：n 鵲 m 鳩圍成一圈，以餵食順序$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$，不重複餵食下的討論可得

引理 2：若彼此相鄰 s 隻鵲$(2\le s\le n-1)$編號總和為 $n+m$ 的倍數時，則此 s 隻鵲會產生重複餵食，形成餵食循環。

透過引理 2 的討論，我們把定理 1 再做一次推廣

定理 2：有「n 鵲 m 鳩」在吃過不跳過時，其餵食順序是$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$，$n$ 隻鵲的編號總和是$\frac{n(n+1)}{2}$，相鄰 s 隻鵲的編號總和是

$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1} \pmod{n+m}$且$i,n,s,m\in\mathbb{N}$、$2\le s\le n-1$、$1\le i\le n-s+1$

(1)若$\frac{n(n+1)}{2}\equiv 0 \pmod{n+m}$時，則$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1}\not\equiv 0 \pmod{n+m}$，即能成功餵食。

(2)若$\frac{n(n+1)}{2}\not\equiv 0 \pmod{n+m}$時，則①$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1}\not\equiv 0 \pmod{n+m}$即能成功餵食。

②$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1}\equiv 0 \pmod{n+m}$僅只一次且此 s 隻鵲編號排列於最後，也能成功餵食。

證明：位於報告第 20~21 頁

例 1：8 鵲 4 鳩，若鵲的餵食順序是$\{3,1,2,8,5,6,4,7\}$，亦即 3→1→2→8→5→6→4→7，餵食能成功嗎？

首先，8 鵲編號和$\frac{8(8+1)}{2}=36\equiv 0 \pmod{8+4}$。因此，相鄰 $s(2\le s\le 7)$ 隻鵲的編號總和除以 12 的餘數均不為 0 即可成功餵食。

3→1→2→8→5→6→4→7 相鄰 2 隻鵲編號和除以 12 的餘數分別是 4、3、10、1、11、10、11；

3→1→2→8→5→6→4→7 相鄰 3 隻鵲編號和除以 12 的餘數分別是 6、11、3、7、3、5；依此類推

相鄰 4 隻鵲編號和除以 12 餘數分別是 2、4、9、11、10；相鄰 6 隻鵲編號和除以 12 餘數分別是 1、2、8

相鄰 5 隻鵲編號和除以 12 餘數分別是 7、10、1、6；； 相鄰 7 隻鵲編號和除以 12 餘數分別是 5、9

均不為 0，此餵食順序是成功有解的。

◆經過前述討論成功的餵食順序，當鳩數$m<\frac{n(n-1)}{2}$時，發現餵食順序有 2 個重要性質：

性質 1：有 n 鵲 m 鳩，若$\frac{n(n+1)}{2}\equiv c \pmod{n+m}$且$1\le c\le n$且$c\in\mathbb{N}$，則$x_n\ne c$。

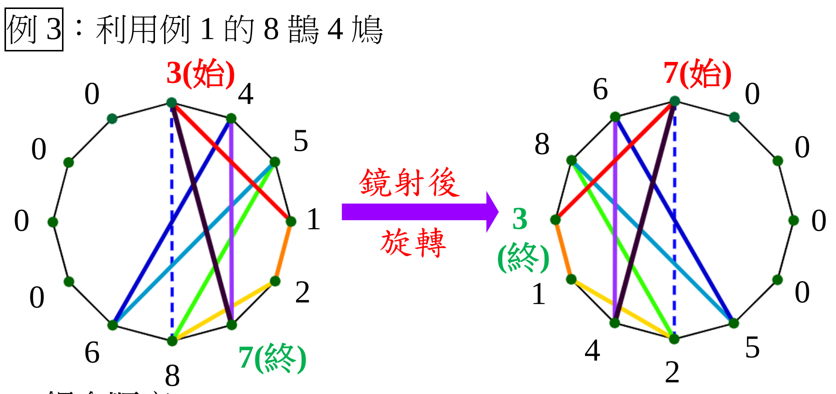
性質 2：有 n 鵲 m 鳩，且有一組「成功餵食順序」是$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$，則

1. 若 $m=1$ 時，餵食順序$\{n+1-x_1,\ n+1-x_2,\ n+1-x_3,\ldots,\ n+1-x_n\}$也能有解。

2. (1)若$\frac{n(n+1)}{2}\equiv 0 \pmod{n+m}$時，則餵食順序$\{x_n,x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_1\}$也能有解。

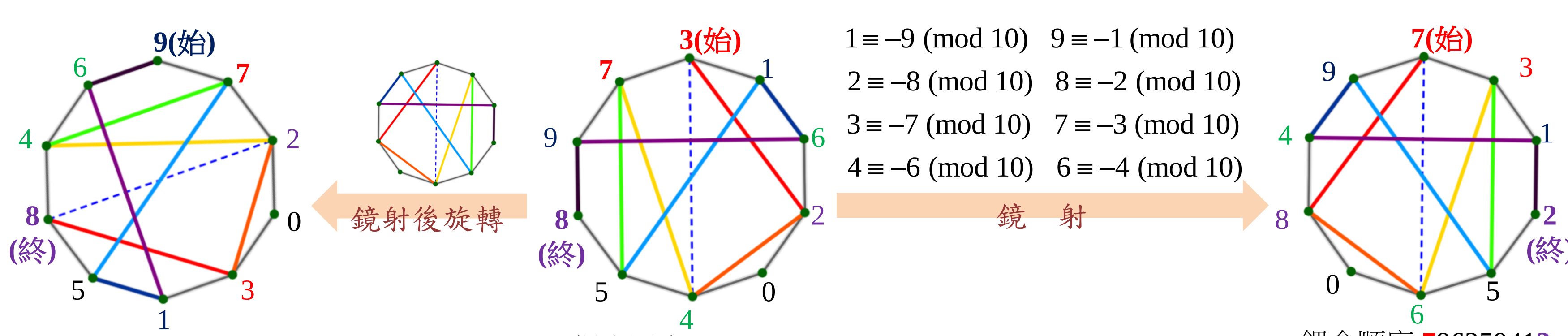
(2)若$\frac{n(n+1)}{2}\not\equiv 0 \pmod{n+m}$時，則餵食順序$\{x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_1,x_n\}$也能有解。

例 3：利用例 1 的 8 鵲 4 鳩



餵食順序 31285647　　餵食順序 74658213　46582137

例 2：9 鵲 1 鳩有一組成功餵食順序為$\{3,2,4,7,5,1,6,9,8\}$，編號和是$45\equiv 5\ne 0 \pmod{10}$



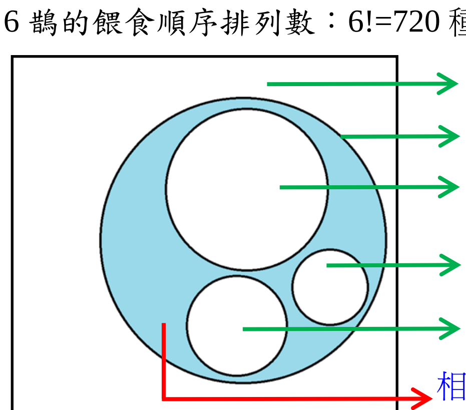
餵食順序 961574238　　餵食順序 324751698　　餵食順序 786359412

四、探討成功餵食順序的方法數-- 討論 6 鵲 3 鳩

1. 僅利用定理 2，$\frac{6(6+1)}{2}=21\equiv 3\ne 0 \pmod 9$，分兩種情況

(1)相鄰 s 隻鵲編號和$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1}\not\equiv 0 \pmod 9$的情況。會有(36)、(45)、(126)、234)、(135)、(3456)、(12456)不能相鄰的情況，我們分段討論：

6 鵲的餵食順序排列數：6!=720 種



s=2，(36)、(45)相鄰，共 384 種

s=2，(36)、(45)不相鄰，共 336 種

s=3，(126)、(234)、(135)相鄰，共 224 種

s=4，(3456)相鄰，共 24 種

s=5，(12456)相鄰，共 56 種

相鄰 s 隻鵲編號和$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1}\not\equiv 0$ (均不為 0)的情況共有$336-224-24-56=32$種。

(2)僅只一次相鄰 s 隻鵲編號和$\sum_{t=1}^{s} x_{i+t-1}\equiv 0$且出現在餵食順序最後。共 68 種。

s=2 ⇒ (36)、(45)	s=3 ⇒ (126)、(234)、(135)	s=4 ⇒ (3456)	s=5 ⇒ (12456)
12 種	24 種	4 種	28 種

將上面結果(1)&(2)相加得 6 鵲 3 鳩能成功餵食的方法數共有 32+68=100 種

2. 利用定理 2、性質 1、性質 2：$\frac{6(6+1)}{2}=21\equiv 3\ne 0 \pmod 9$

故$x_6\ne 3$，進行分段討論須滿足(36)、(45)、(126)、(234)、(135)、(3456)、(12456)不能相鄰，有相鄰必僅一組且於餵食順序最後。討論當$x_6=1,2,4,5,6$時，

(1) 3○○○○x_6及○○○○3x_6，即$x_1=3$及$x_5=3$，各有 28 種

(2)○3○○○x_6及○○○3○x_6，即$x_2=3$及$x_4=3$，各有 16 種

(3)○○3○○x_6，即$x_3=3$，有 12 種

利用定理 2、性質 1、性質 2，可算出共有 28×2+16×2+12 =100 種方法，計算時間明顯比直接用**定理 2** 稍快一些。

經過前述討論成功餵食的方法數，當鳩數$m<\frac{n(n-1)}{2}$時，是編號 1~n 的直線排列中，須滿足很多條件的複雜排列組合。

陸、研究過程與討論（續）

性質 3：若 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時，n 隻鵲成功餵食順序的方法數是 $n!$，且透過成功餵食順序得圍成一圈的排列數是 $(n-1)!$。

若 $m>\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時，n 隻鵲成功餵食順序的方法數是 $n!$，但透過成功餵食順序得圍成一圈的排列數是 $n!$。

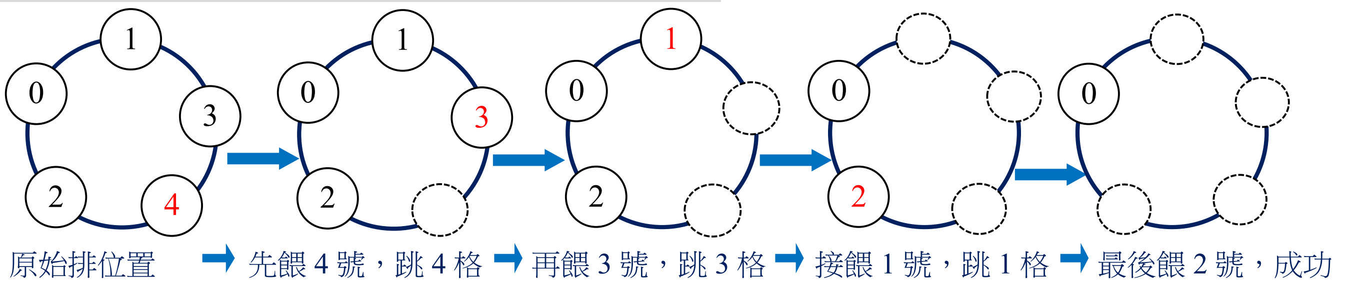
性質 4：有 n 鵲 m 鳩，鵲的餵食順序是 $\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，若鵲媽媽有 kn 份食物($k\in\mathbb{N}$)，亦即餵食 k 個循環， 則 n 隻鵲皆吃到 k 份食物的充要條件為 $\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$ 且 $\sum_{t=1}^{s}x_{i+t-1}\not\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$， $2\le s\le n-1$。

我們透過手算與程式輔助，得到 n 鵲 m 鳩**吃過不跳過**的「成功餵食順序」的方法數，如下表格。紅字和綠字表示可讓<u>**所有鵲**</u>循環餵食，藍字表示鳩數 $m>\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時餵食成功的方法數。**黑字**和紅字表示鳩數 $m<\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時餵食成功的方法數。

鵲 \ 鳩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	8	10	10	18	18	24	24	24	24	24	24	24	24	24
5	16	32	44	44	48	72	72	72	72	120	120	120	120	120
6	84	102	100	164	208	268	344	348	316	408	504	504	600	600
7	176	312	544	624	868	1048	1680	1768	1840	2144	2168	2520	2872	2520
8	624	1326	2052	2768	4260	4784	5580	9464	10880	11904	14432	15248	14536	16840
9	2368	5224	8132	14744	20872	24156	37204	44196	50784	66596	78480	87344	100112	122208
10	8380	23176	44792	83182	97428	149894	199550	260220	322008	433568	491760	581914	619048	729816

類型二：吃過跳過

研究六、七：***n* 鵲 1 鳩與 *n* 鵲 *m* 鳩的有解排列位置與餵食順序** --如下圖 (4 鵲 1 鳩)



原始排位置 ➡ 先餵 4 號，跳 4 格 ➡ 再餵 3 號，跳 3 格 ➡ 接餵 1 號，跳 1 格 ➡ 最後餵 2 號，成功

因為圍成一圈討論複雜，於是將之排成直線，根據「吃過跳過」的規則，嘗試成功餵食順序，得出定理三：

定理 3：在吃過跳過時，有「n 鵲 m 鳩」，其鵲的餵食順序是 $\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\}$，$n\in\mathbb{N}$，能成功餵食順序的方法數即為編號 1 至 n 的直線排列數 $n!$，藉此推出鵲與鳩的圍成一圈後的排列位置。

證明：位於報告第 26~27 頁

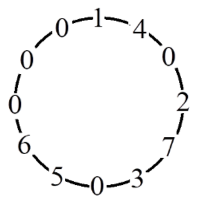
$\boxed{\text{例}}$：7 鵲 5 鳩吃過跳過下，7 鵲編號其中一組成功餵食順序 1→4→3→6→7→2→5

(1)先計算需要的位置數，至多共 $7+(3+2+5+6+1)+5=29$ 位，前面 12 位是原始圍成一圈的位置，因此排列位置是：

$\underbrace{14\bigcirc\bigcirc\bigcirc3\bigcirc\bigcirc6\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{7鵲5鳩圍成一圈的原始位置}}\,\|\,\bigcirc\bigcirc7\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc2\bigcirc5\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$

(2)第 1 輪餵食 4 鵲，故第 2 輪剩 8 隻鳥，餵食 1 鵲；第 3 輪剩 7 隻鳥，餵最後 2 鵲剩 5 鳩，因此將每一輪用‖隔開。

$\underbrace{14\bigcirc\bigcirc\bigcirc3\bigcirc\bigcirc6\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{第1輪：原始12隻}}\,\|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc7\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{第2輪：剩下8隻}}\,\|\,\underbrace{\bigcirc2\bigcirc5\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{第3輪：剩下7隻}}\,\|\,\underbrace{\bigcirc\ \bigcirc}_{\text{鳩}}$



(3)最後依序由最後面往前推論

i. 填入第 3 輪遺留的鳩：$\underbrace{14\bigcirc\bigcirc\bigcirc3\bigcirc\bigcirc6\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{第1輪}}\,\|\,\underbrace{\bigcirc\bigcirc7\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{第2輪}}\,\|\,\underbrace{0\ 2\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0}_{\text{第3輪}}\,\|\,0\ 0$

ii. 將第 3 輪排列，依序填入第 2 輪的○ (非餵食位置)：$\underbrace{14\bigcirc\bigcirc\bigcirc3\bigcirc\bigcirc6\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{第1輪}}\,\|\,\underbrace{0\ 2\ 7\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0}_{\text{第2輪}}\,\|\,0\ 2\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0\,\|\,0\ 0$

iii. 將第 2 輪排列，依序填入第 1 輪的○ (非餵食位置)：$\underbrace{1\ 4\ 0\ 2\ 7\ 3\ 0\ 5\ 6\ 0\ 0\ 0}_{\text{第1輪：即原始排列位置}}\,\|\,0\ 2\ 7\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0\,\|\,0\ 2\ 0\ 5\ 0\ 0\ 0\,\|\,0\ 0$

故可由餵食順序得知成功餵食的位置，從編號 1 號開始餵即能成功。此外，也有撰寫程式來輔助我們的推論結果。

柒、研究結論

一、在「吃過不跳過」的情況下，利用不重複餵食，找出了 n 鵲 m 鳩能成功餵食的有解條件並加以推論。

(一)以餵食順序而言，若相鄰 s 隻鵲的編號和皆不為 $n+m$ 的倍數 ($2\le s\le n-1$)；抑或 $\dfrac{n(n+1)}{2}\not\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ (n+m)\right)$ 且相鄰 s 隻鵲的編號和為 $n+m$ 的倍數僅出現一次且此 s 隻鵲的編號位於排列最後，才能成功餵食，並可藉由餵食順序推得圍成一圈後的位置。

(二)若 $\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv c\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$ 且 $1\le c\le n$ 且 $c\in\mathbb{N}$，則第 c 號鵲不會最後吃到食物。

(三)若鵲媽媽可以餵食好幾次的循環，亦即每隻鵲均可以吃到 k 份食物($k\ge1$，$k\in\mathbb{N}$)，則 $\dfrac{n(n+1)}{2}\equiv 0\left(\mathrm{mod}(n+m)\right)$ 且相鄰 s 隻鵲的編號和除以 $n+m$ 餘數均不為 0，就可以循環餵食而鳩吃不到。

(四)若 $m>\dfrac{n(n-1)}{2}$，n 鵲 m 鳩的成功餵食順序方法數是 $n!$，圍成一圈後也可以得到 $n!$ 種的排列位置；

若 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}$，n 鵲 m 鳩的成功餵食順序方法數是 $n!$，但圍成一圈後可以得到 $(n-1)!$ 種的排列位置。

(五)因成功餵食順序具備對稱性，故當 $m<\dfrac{n(n-1)}{2}$ 時，利用此特性算出成功餵食順序的方法數，可減少許多運算時間。

二、改變餵食方法，在「吃過跳過」的情況下，找出了 n 鵲 m 鳩能成功餵食的方法數為 $n!$，並可藉由餵食順序推得 n 鵲 m 鳩的有解位置。

捌、未來展望

在研究過程中，尋找「吃過不跳過」，鳩數 $m<\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的「成功餵食順序」的方法數中，隨著鵲數與鳩數的增加，其排列組合越趨複雜，雖然有發現解的「對稱性」，但在沒有程式的輔助下還是算了很久，期望未來我們可以找到成功餵食順序方法數的簡潔式子。

玖、參考資料

1. 游森棚(2023)。森棚教官的數學題。**科學研習月刊**，**62**(2)，81。
2. 陳一理(2016)。**排列**。台北：建興文化。 3. 許介彥(2003)。同餘的基本概念。**科學教育月刊**，**261**，21-27。

以上圖形皆為作者自行繪製