中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030417

雙偶幻方之研究與破解

學校名稱：臺東縣立東海國民中學

作者：	指導老師：
國二 蔡鈞存 國二 鄭羽軒	鄭聿翔

關鍵詞：雙偶幻方、矩陣法、Σ

雙偶幻方之研究與破解

摘要

本研究主要在探討**雙偶幻方**的解法，我們一開始使用**數列交叉擴展法**來解雙偶幻方，但後來發現這個方法受到兩個數一組的限制，所以只適用於2^n階幻方。為了能涵蓋更多的雙偶幻方，我們試著把改變數字交叉擴展法並與**羅伯法**結合，創造出一個可以破解所有雙偶幻方的解法，並進行一般式的證明，最後利用**斜排特性**構造出更多種 4n 階幻方解法。

壹、前言

一、研究動機

我們在國小上數學課時接觸到了幻方，發現幻方裡的每個數字彷彿像被安排好似的有某種神奇規律，之後在解幻方時發現不同階的幻方都有不太一樣的規律，所以上網查了有關幻方的文獻資料，發現大多數的幻方都已經找到破解的方法，唯獨雙偶幻方到目前為止都還沒有統一的規律，我們對此感到好奇，於是開始研究幻方的構造，並嘗試利用不同的方法來破解雙偶幻方。

二、研究目的

（一）將單階幻方倍數矩陣的斜排特性推廣到雙偶幻方倍數矩陣。

（二）結合羅伯法與矩陣法中倍數矩陣的特性創造出新的 4n 階幻方解法並驗證其正確性。

（三）利用倍數矩陣斜排特性找出更多種 4n 階幻方組合並驗證其正確性。

三、名詞釋義

（一）幻方：幻方是一個$n \times n$的方陣，以不重複的方式填入 1 到n^2的正整數，使得方陣中各直行、橫列、以及兩條斜對角線上的數字加總皆相同，此時，我們稱此幻方為 n 階幻方。

（二）幻方線和值：直行、橫列、以及兩條斜對角線上的數字加總相同的值，其值為

$$\frac{(1+n^2)n^2}{2n}$$

（三）幻方分類：

1. 奇階幻方：n 為奇數的幻方。
2. 單偶幻方：n 為 2 的倍數且非 4 的倍數的幻方。
3. 雙偶幻方：n 為 4 的倍數的幻方。

四、文獻探討

本作品先介紹已知文獻所提常見奇階幻方構造法「羅伯法」與「矩陣法」分述如下：

（一）羅伯法：

1. 以五階為例：

步驟一：將 1 填入第一列的中間。

步驟二：依序往右上填下一個數，如果超出幻方上方，則填到那一行最下方；如果超出右方，則填到那一列最左方。

		1		

		1		
	5			
4				
				3
			2	

圖 1-1：**羅伯法**五階步驟一至二

步驟三：重複步驟二，如果右上方有數或是超出幻方後不屬於幻方內的任何一行或列，就填到上一個數的下方。

		1	8	
	5	7		
4	6			
10				3
			2	9

		1	8	15
	5	7	14	
4	6	13		
10	12			3
11			2	9

17		1	8	15
	5	7	14	16
4	6	13	20	
10	12	19		3
11	18		2	9

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

圖 1-2：**羅伯法**五階步驟三

（二）矩陣法：

《乾坤大挪移---數獨 VS 幻方》 (林品慶、黃治綱、李名弘)

此作品中作者是將幻方拆成兩個矩陣去做，分別為**倍數矩陣**和**餘數矩陣**。我們發現作者製作矩陣皆是由**數獨**的方法去排列對角線與直行橫列，這樣能讓所有數字**分散排列**，並且每排**線和值**也會相同，文獻中也提到一種幻方**不一定是唯一解**。我們從中延伸出**矩陣法**並定義其名詞（以 n 階幻方為例）。

1. **倍數矩陣**：數字 0~n-1 製成的方陣，滿足每條線線和值為$\frac{n^2-n}{2}$。
2. **餘數矩陣**：數字 1~n 製成的方陣，滿足每條線線和值為$\frac{n^2+n}{2}$。
3. **幻方形成規則**：n×倍數矩陣+餘數矩陣。
4. **製作矩陣**：必須先填入對角線，再以數獨的方式填入其他數字。

5. 以三階幻方為例

（1）**三階倍數矩陣：**

步驟一：填入對角線，左上至右下為 1、1、1；右上至左下為 2、1、0。

步驟二：填入那一排或列所缺的數。

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 2 \\ \hline & 1 & \\ \hline 0 & & 1 \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$$

圖 2-1：**矩陣法**三階倍數矩陣步驟一至二

（2）**三階餘數矩陣：**

步驟一：填對角線，左上至右下為 1、2、3，右上至左下為 2、2、2（與倍數矩陣方向相反，以避免重複）。

步驟二：以數獨方式填入剩餘的數。

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & 2 \\ \hline & 2 & \\ \hline 2 & & 3 \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline\end{array}$$

圖 2-2：**矩陣法**三階餘數矩陣步驟一至二

（3）合成幻方（**3 × 倍數矩陣 + 餘數矩陣**）：

$$3 \times \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} + \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} = \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{array}$$

圖 2-3：**矩陣法**三階合成幻方

五、本研究方向：從上述文獻得知，因為奇階幻方可以利用簡單的「羅伯法」破解， 因此我們的研究著重於**雙偶幻方**構造法。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦

參、研究過程及方法

一、將單階幻方倍數矩陣的斜排特性推廣到雙偶幻方倍數矩陣。

根據文獻探討，我們發現奇階倍數矩陣的其中一條對角線皆為 0~n-1 的中間數（例如 3 階倍數矩陣的其中一條對角線是 1、1、1），但文獻中並沒有提到偶階幻方中間數的解法，因此我們推測可以利用 0~n-1 的「中間兩數」來製作矩陣，所以我們創造出了對角線分割法。

（一）四階（對角線分割法）：

1. 四階倍數矩陣：

步驟一：其中一條對角線依序填入 2 和 1（0 到 3 的中間兩數）。

步驟二：另一條對角線填入 3 和 0（最大數與最小數）。

步驟三：將這個四階矩陣切分成四個二階矩陣，填入對角線另一方的數。

2			
	2		
		1	
			1

2			3
	2	3	
	0	1	
0			1

2	1	0	3
1	2	3	0
3	0	1	2
0	3	2	1

圖 3-1：**對角線分割法**四階倍數矩陣步驟一至三

2. 四階餘數矩陣：

步驟一：取最大與最小數為一組（1、4）填入其中一條對角線，填兩次。

步驟二：另一條的對角線則取中間兩數為一組（2、3），填兩次。

步驟三：切分成四個二階矩陣，填入原本四階幻方另一邊對角線的數（順序必須相反，以避免重複）。

1			
	4		
		1	
			4

1			2
	4	3	
	2	1	
3			4

1	3	4	2
2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4

圖 3-2：**對角線分割法**四階餘數矩陣步驟一至三

3. 四階幻方（4 × 倍數矩陣 + 餘數矩陣）：

$$4\times\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{matrix} = \begin{matrix} 9 & 7 & 4 & 14 \\ 6 & 12 & 15 & 1 \\ 16 & 2 & 5 & 11 \\ 3 & 13 & 10 & 8 \end{matrix}$$

圖 3-3：**對角線分割法**四階合成幻方

這樣能確保在這些小矩陣中，直行與橫列不重複，且每直行、每橫列和每斜排的和都一樣。

（二）八階（對角線分割法）：

八階幻方是由四個四階幻方所拼成的，因此我們利用四階幻方的方法延伸到八階。

1. 八階倍數矩陣：

步驟一：其中一條對角線填入 4 和 3（0 到 7 的中間兩數）。

步驟二：另一條對角線填入 7 和 0（最大數與最小數）。

步驟三：接著切分成四個四階矩陣，每條對角線皆填入原本八階幻方對角線另一邊的數。

步驟四：再分成四個二階矩陣，每條對角線填入與原數相鄰的數（不能與原本在倍數矩陣內的數重複）。

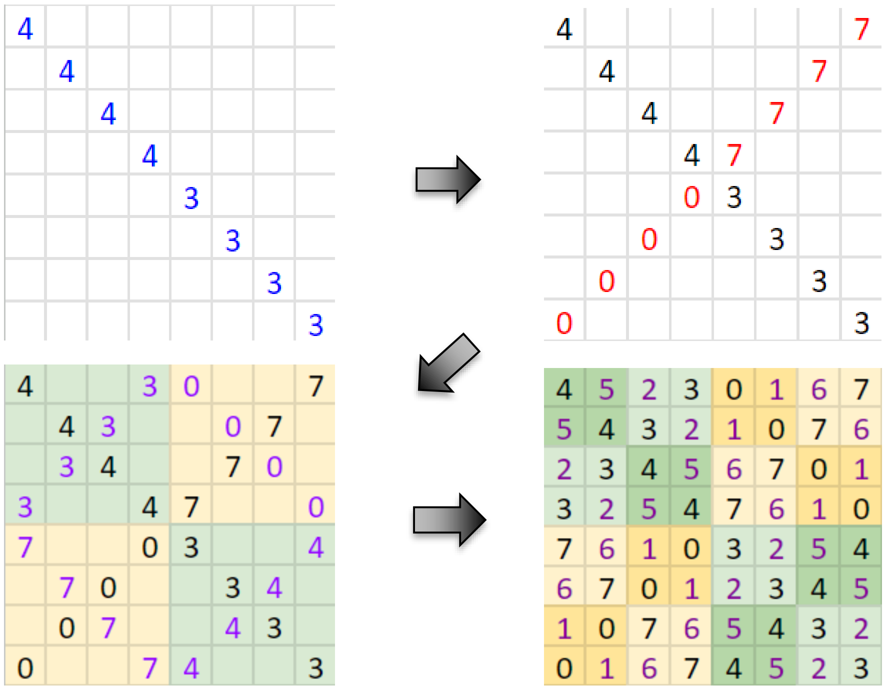


圖 4-1：**對角線分割法**八階倍數矩陣步驟一至四

2. 八階餘數矩陣：

步驟一：取最大與最小兩數為一組（1、2、7、8），填入其中一條對角線，填兩次。

步驟二：另一條的對角線則取中間四數為一組（3、4、5、6），填兩次。

步驟三：分成四個四階矩陣，對角線填入與原本對角線不同的另一組數（順序必須相反）。

步驟四：再細分分成四個二階矩陣，對角線填入左或右相鄰的數。

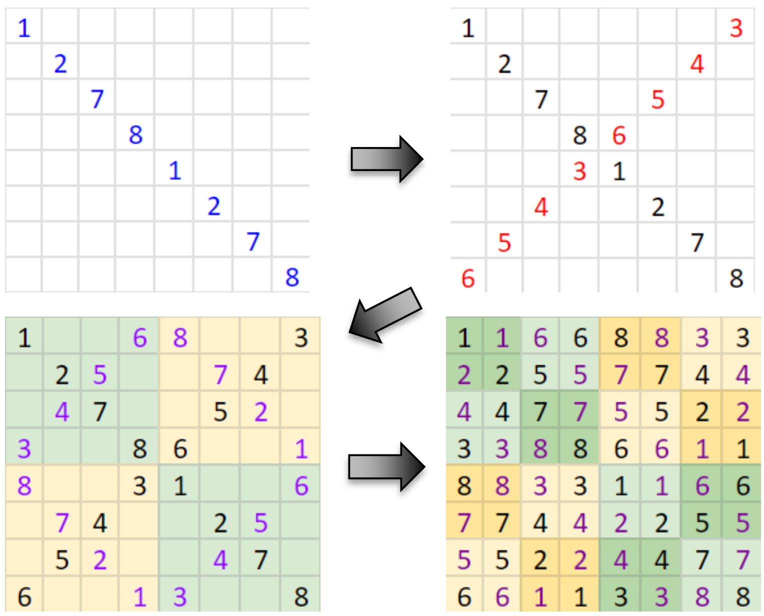


圖 4-2：**對角線分割法**八階餘數矩陣步驟一至四

3. 八階幻方（**8 × 倍數矩陣 + 餘數矩陣**）：

8×

4	5	2	3	0	1	6	7
5	4	3	2	1	0	7	6
2	3	4	5	6	7	0	1
3	2	5	4	7	6	1	0
7	6	1	0	3	2	5	4
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
0	1	6	7	4	5	2	3

+

1	1	6	6	8	8	3	3
2	2	5	5	7	7	4	4
4	4	7	7	5	5	2	2
3	3	8	8	6	6	1	1
8	8	3	3	1	1	6	6
7	7	4	4	2	2	5	5
5	5	2	2	4	4	7	7
6	6	1	1	3	3	8	8

=

33	41	22	30	8	16	51	59
42	34	29	21	15	7	60	52
20	28	39	47	53	61	2	10
27	19	48	40	62	54	9	1
64	56	11	3	25	17	46	38
55	63	4	12	18	26	37	45
13	5	58	50	44	36	31	23
6	14	49	57	35	43	24	32

圖 4-3：**對角線分割法**八階合成幻方

（三）八階（數列交叉擴展法）：

我們試著將**對角線分割法**推廣到一般項並證明，但當階數越大時，規律會變得越複雜且不容易表示，因此我們從對角線分割法中找到另一個更簡單也較有規律性的方法，我們稱之為數列交叉擴展法，為了方便表示我們將倍數與餘數矩陣分成十六個區域，並定義這十六個區域（如圖 5）。

倍數矩陣

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

餘數矩陣

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

圖 5：十六個區域分配圖

1. 八階倍數矩陣：

步驟一： 將 0~7 分成四組依序填入 **C➔B➔A➔D 區的第一列。**

步驟二：每兩數一組，交叉填入下一排，形成四個二階的矩陣。

步驟三：每兩個二階矩陣一組，交叉填入下兩排，形成兩個四階矩陣，八階倍數矩陣的上半部即完成。

步驟四：下半部第一排填入與第一排順序完全顛倒的數。

步驟五：重複步驟二~三，即能完成八階倍數矩陣的下半部。

步驟六：將上半部與下半部合併，就能合成一個八階倍數矩陣。

A區		B區		C區		D區	
4	5	2	3	0	1	6	7

（步驟一）

J區		K區		L區		I區	
7	6	1	0	3	2	5	4

（步驟四）

A區		B區		C區		D區	
4	5	2	3	0	1	6	7
5	4	3	2	1	0	7	6

（步驟二）

J區		K區		L區		I區	
7	6	1	0	3	2	5	4
6	7	0	1	2	3	4	5

（步驟五）

4	5	2	3	0	1	6	7
5	4	3	2	1	0	7	6
2	3	4	5	6	7	0	1
3	2	5	4	7	6	1	0

（步驟三）

7	6	1	0	3	2	5	4
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
0	1	6	7	4	5	2	3

（步驟五）

4	5	2	3	0	1	6	7
5	4	3	2	1	0	7	6
2	3	4	5	6	7	0	1
3	2	5	4	7	6	1	0
7	6	1	0	3	2	5	4
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
0	1	6	7	4	5	2	3

（步驟六）

圖 6-1：**數列交叉擴展法**八階倍數矩陣步驟一至六

2. 八階餘數矩陣：

步驟一：將 1~8 分成四組填入依序填入 **a➔e➔m➔i** 區的第一行，規律分別是**由上至下➔由下至上➔由上至下➔由下至上**。

步驟二：同一列的數向右複製一次。

步驟三：a、e 區的數字複製到 k、o 區；i、m 區的數字則複製到 c、g 區，即完成一半的八階餘數矩陣。

a	1
區	2
e	4
區	3
i	8
區	7
m	5
區	6

a	1	1
區	2	2
e	4	4
區	3	3
i	8	8
區	7	7
m	5	5
區	6	6

1	1		8	8	
2	2		7	7	
4	4		5	5	
3	3		6	6	
8	8		1	1	
7	7		2	2	
5	5		4	4	
3	3		6	6	

圖 6-2：**數列交叉擴展法**八階餘數矩陣步驟一至三

步驟四：最後一行上半部與下半部**個別**填入與第一行完全顛倒的數（以避免重複）。

步驟五：同一列的數向左複製一次。

步驟六：d、h 區的數字複製到 j、n 區；l、p 區的數字則複製到 b、f 區，即能完成另一半的八階餘數矩陣。

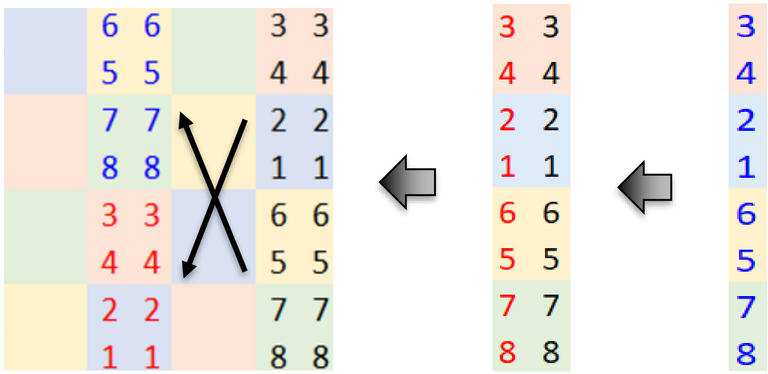


圖 6-3：**數列交叉擴展法**八階餘數矩陣步驟四至六

步驟七：將兩個一半的八階餘數矩陣疊合在一起，就能完成八階餘數矩陣。

1	1	6	6	8	8	3	3
2	2	5	5	7	7	4	4
4	4	7	7	5	5	2	2
3	3	8	8	6	6	1	1
8	8	3	3	1	1	6	6
7	7	4	4	2	2	5	5
5	5	2	2	4	4	7	7
6	6	1	1	3	3	8	8

圖 6-4：**數列交叉擴展法**八階餘數矩陣步驟七

3. 八階幻方（**8 × 倍數矩陣 + 餘數矩陣**）：

$$8\times\begin{matrix}4&5&2&3&0&1&6&7\\5&4&3&2&1&0&7&6\\2&3&4&5&6&7&0&1\\3&2&5&4&7&6&1&0\\7&6&1&0&3&2&5&4\\6&7&0&1&2&3&4&5\\1&0&7&6&5&4&3&2\\0&1&6&7&4&5&2&3\end{matrix}+\begin{matrix}1&1&6&6&8&8&3&3\\2&2&5&5&7&7&4&4\\4&4&7&7&5&5&2&2\\3&3&8&8&6&6&1&1\\8&8&3&3&1&1&6&6\\7&7&4&4&2&2&5&5\\5&5&2&2&4&4&7&7\\6&6&1&1&3&3&8&8\end{matrix}=\begin{matrix}33&41&22&30&8&16&51&59\\42&34&29&21&15&7&60&52\\20&28&39&47&53&61&2&10\\27&19&48&40&62&54&9&1\\64&56&11&3&25&17&46&38\\55&63&4&12&18&26&37&45\\13&5&58&50&44&36&31&23\\6&14&49&57&35&43&24&32\end{matrix}$$

圖 6-5：**數列交叉擴展法**八階合成幻方

（四）十二階（數列交叉擴展法）：

1. 十二階倍數矩陣：

步驟一：將 0~11 由小到大分成 4 組，並按照四個區域的規律填第一排。

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11

圖 7：**數列交叉擴展法**十二階倍數矩陣步驟一

十二階倍數矩陣的第一排每個區域為三個數字，無法利用兩數一組交叉往下填，因此這個方法並不適用於十二階幻方。

（五）十六階（數列交叉擴展法）：

1. 十六階倍數矩陣：

步驟一：將 0~15 由小到大分成 4 組，依照 **C➔B➔A➔D** 區的順序填入第一列。

步驟二：每兩數一組，交叉填入下一排，形成八個二階的矩陣。

步驟三：每兩個二階矩陣一組，交叉填入下兩排，形成四個四階矩陣。

步驟四：每兩個四階矩陣一組，交叉填入下四排，形成兩個八階矩陣，十六階倍數矩陣上半部即完成。

步驟五：下半部第一排填入與第一排順序完全顛倒的數。

步驟六：重複步驟二~四，即能完成十六階倍數矩陣下半部。

步驟七：將上半部與下半部合併，就能合成一個十六階倍數矩陣。

8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15

（步驟一）

15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8

（步驟五）

8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15
9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14

（步驟二）

15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8
14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9

（步驟六）

8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15
9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14
10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12

（步驟三）

15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8
14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9
13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10
12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

（步驟六）

8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15
9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14
10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3
5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2
6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1
7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0

（步驟四）

15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8
14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9
13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10
12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5
1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6
0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7

（步驟六）

8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15
9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14
10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3
5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2
6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1
7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0
15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8
14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9
13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10
12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5
1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6
0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7

（步驟七）

圖 8-1：**數列交叉擴展法**十六階倍數矩陣步驟一至七

2. 十六階餘數矩陣：

步驟一：將 1~16 由小到大分成 4 組，依序填入 **a➔e➔m➔i** 區，規律分別是**由上至下➔由下至上➔由上至下➔由下至上**。

步驟二：同一列的數向右複製三次。

步驟三：a、e 區複製的數字到 k、o 區；i、m 區的數字則複製到 c、g 區，即完成一半的十六階餘數矩陣。

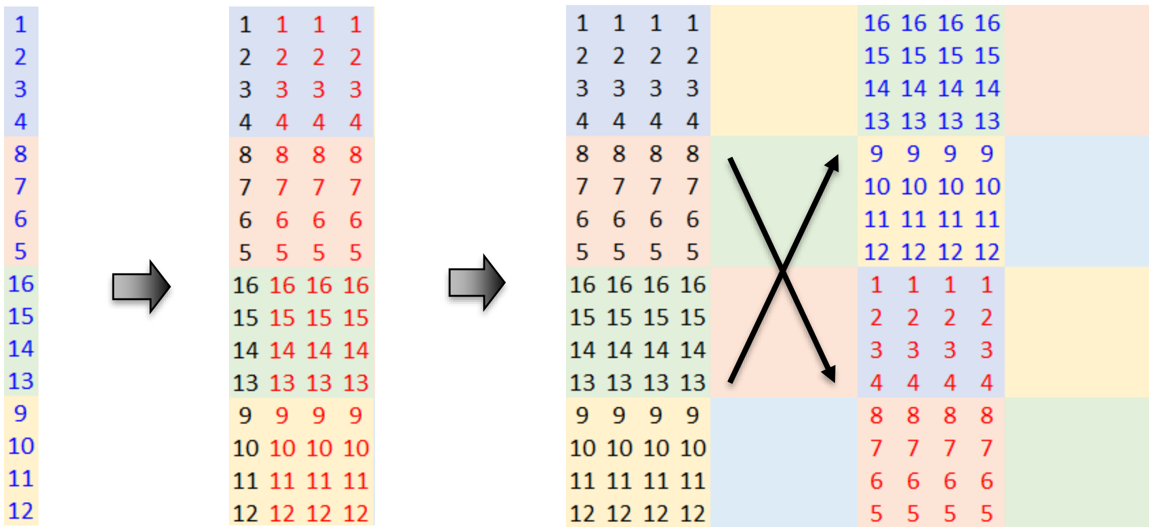


圖 8-2：**數列交叉擴展法**十六階餘數矩陣步驟一至三

步驟四：最後一行上半部與下半部**個別**填入與第一行完全顛倒的數（以避免重複）。

步驟五：同一列的數向左複製三次。

步驟六：d、h 區的數字複製到 j、n 區；l、p 區的數字則複製到 b、f 區，即能完成另一半的十六階餘數矩陣。

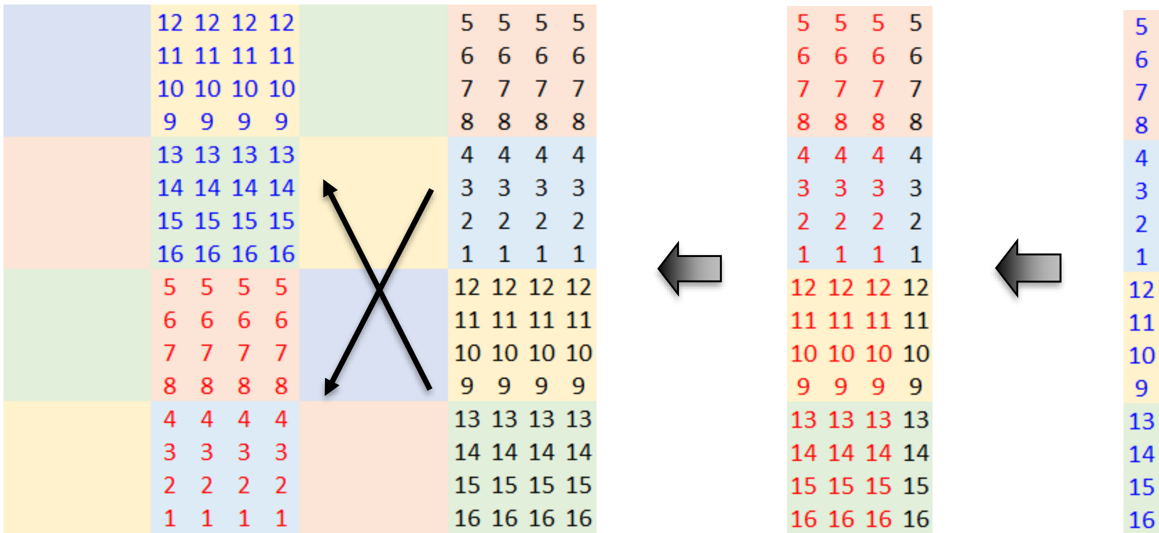


圖 8-3：**數列交叉擴展法**十六階餘數矩陣步驟四至六

步驟七：將兩個一半的十六階餘數矩陣疊合在一起，就能完成十六階餘數矩陣。

1	1	1	1	12	12	12	12	16	16	16	16	5	5	5	5
2	2	2	2	11	11	11	11	15	15	15	15	6	6	6	6
3	3	3	3	10	10	10	10	14	14	14	14	7	7	7	7
4	4	4	4	9	9	9	9	13	13	13	13	8	8	8	8
8	8	8	8	13	13	13	13	9	9	9	9	4	4	4	4
7	7	7	7	14	14	14	14	10	10	10	10	3	3	3	3
6	6	6	6	15	15	15	15	11	11	11	11	2	2	2	2
5	5	5	5	16	16	16	16	12	12	12	12	1	1	1	1
16	16	16	16	5	5	5	5	1	1	1	1	12	12	12	12
15	15	15	15	6	6	6	6	2	2	2	2	11	11	11	11
14	14	14	14	7	7	7	7	3	3	3	3	10	10	10	10
13	13	13	13	8	8	8	8	4	4	4	4	9	9	9	9
9	9	9	9	4	4	4	4	8	8	8	8	13	13	13	13
10	10	10	10	3	3	3	3	7	7	7	7	14	14	14	14
11	11	11	11	2	2	2	2	6	6	6	6	15	15	15	15
12	12	12	12	1	1	1	1	5	5	5	5	16	16	16	16

圖 8-4：**數列交叉擴展法**十六階餘數矩陣步驟七

3. 十六階幻方（**16** × **倍數矩陣** + **餘數矩陣**）：

16 ×

8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15
11	8	9	10	5	6	7	4	3	0	1	2	13	14	15	12
10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13
9	10	11	8	7	4	5	6	1	2	3	0	15	12	13	14
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3
5	6	7	4	11	8	9	10	13	14	15	12	3	0	1	2
6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1
7	4	5	6	9	10	11	8	15	12	13	14	1	2	3	0
15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8
12	15	14	13	2	1	0	3	4	7	6	5	10	9	8	11
13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10
14	13	12	15	0	3	2	1	6	5	4	7	8	11	10	9
3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
2	1	0	3	12	15	14	13	10	9	8	11	4	7	6	5
1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6
0	3	2	1	14	13	12	15	8	11	10	9	6	5	4	7

\+

1	1	1	1	12	12	12	12	16	16	16	16	5	5	5	5
2	2	2	2	11	11	11	11	15	15	15	15	6	6	6	6
3	3	3	3	10	10	10	10	14	14	14	14	7	7	7	7
4	4	4	4	9	9	9	9	13	13	13	13	8	8	8	8
8	8	8	8	13	13	13	13	9	9	9	9	4	4	4	4
7	7	7	7	14	14	14	14	10	10	10	10	3	3	3	3
6	6	6	6	15	15	15	15	11	11	11	11	2	2	2	2
5	5	5	5	16	16	16	16	12	12	12	12	1	1	1	1
16	16	16	16	5	5	5	5	1	1	1	1	12	12	12	12
15	15	15	15	6	6	6	6	2	2	2	2	11	11	11	11
14	14	14	14	7	7	7	7	3	3	3	3	10	10	10	10
13	13	13	13	8	8	8	8	4	4	4	4	9	9	9	9
9	9	9	9	4	4	4	4	8	8	8	8	13	13	13	13
10	10	10	10	3	3	3	3	7	7	7	7	14	14	14	14
11	11	11	11	2	2	2	2	6	6	6	6	15	15	15	15
12	12	12	12	1	1	1	1	5	5	5	5	16	16	16	16

=

129	145	161	177	76	92	108	124	16	32	48	64	197	213	229	245
178	130	146	162	91	107	123	75	63	15	31	47	214	230	246	198
163	179	131	147	106	122	74	90	46	62	14	30	231	247	199	215
148	164	180	132	121	73	89	105	29	45	61	13	248	200	216	232
72	88	104	120	141	157	173	189	201	217	233	249	4	20	36	52
87	103	119	71	190	142	158	174	218	234	250	202	51	3	19	35
102	118	70	86	175	191	143	159	235	251	203	219	34	50	2	18
117	69	85	101	160	176	192	144	252	204	220	236	17	33	49	1
256	240	224	208	53	37	21	5	113	97	81	65	188	172	156	140
207	255	239	223	38	22	6	54	66	114	98	82	171	155	139	187
222	206	254	238	23	7	55	39	83	67	115	99	154	138	186	170
237	221	205	253	8	56	40	24	100	84	68	116	137	185	169	153
57	41	25	9	244	228	212	196	184	168	152	136	125	109	93	77
42	26	10	58	195	243	227	211	167	151	135	183	78	126	110	94
27	11	59	43	210	194	242	226	150	134	182	166	95	79	127	111
12	60	44	28	225	209	193	241	133	181	165	149	112	96	80	128

圖 8-5：**數列交叉擴展法**十六階合成幻方

（六）2^n階（數列交叉擴展法）：

我們探討的是利用不斷的分割或交叉填數字，進而得到倍數矩陣與餘數矩陣，發現當階數為2^n時，都適用這個方法。

1. 2^n階倍數矩陣：

步驟一：填第一列$(0 \sim 2^n - 1)$每一區格數：2^{n-2}（規律如圖 9-1）。

2^{n-1}	$3(2^{n-2})-1$	2^{n-2}	$2^{n-1}-1$	$\cdots 0$	$2^{n-2}-1$	$3(2^{n-2})$	2^n-1

圖 9-1：2^n階倍數矩陣第一列規律

步驟二：第一排每兩數一組，交叉填入第二排，形成2^{n-1}個二階矩陣。

步驟三：每兩個二階矩陣一組，交叉填入第三和第四排，形成2^{n-2}個四階矩陣。

步驟四：每兩個四階矩陣一組，交叉填入下四排，重複此步驟直至完成 2 個2^{n-1}階矩陣，即完成2^n階倍數矩陣的上半部。

步驟五：下半部第一排填入與上半部第一排順序顛倒的數。

步驟六：重複步驟二~步驟四，直至完成 2 個2^{n-1}階矩陣 。

步驟七：將四個2^{n-1}階倍數矩陣合併，就能得到一個完整的2^n階倍數矩陣（如圖 9-2）。

2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	……	$3(2^{n-2})-1$	2^{n-2}	$2^{n-2}+1$	……	$2^{n-1}-1$	0	1	……	$2^{n-2}-1$	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})+1$	……	2^n-1
$2^{n-1}+1$	2^{n-1}	$3(2^{n-2})-1$	$3(2^{n-2})-2$	$2^{n-2}+1$	2^{n-2}	$2^{n-1}-1$	$2^{n-1}-2$	1	0	$2^{n-2}-1$	$2^{n-2}-2$	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})$	2^n-1	2^n-2
$3(2^{n-2})$			$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}-2$			$2^{n-2}+1$	$2^{n-2}-2$			1	2^n-2			$3(2^{n-2})+1$
$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})-2$	$2^{n-1}+1$	2^{n-1}	$2^{n-1}-1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-2}+1$	2^{n-2}	$2^{n-2}-1$	$2^{n-2}-2$	1	0	2^n-1	2^n-2	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})$
2^{n-2}	$2^{n-2}+1$	……	$2^{n-1}-1$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	……	$3(2^{n-2})-1$	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})+1$	……	2^n-1	0	1	……	$2^{n-2}-1$
$2^{n-2}+1$	2^{n-2}	$2^{n-1}-1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}+1$	2^{n-1}	$3(2^{n-2})-1$	$3(2^{n-2})-2$	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})$	2^n-1	2^n-2	1	0	$2^{n-2}-1$	$2^{n-2}-2$
$2^{n-1}-2$			$2^{n-2}+1$	$3(2^{n-2})$			$2^{n-1}+1$	2^n-2			$3(2^{n-2})+1$	$2^{n-2}-2$			1
$2^{n-1}-1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-2}+1$	2^{n-2}	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})-2$	$2^{n-1}+1$	2^{n-1}	2^n-1	2^n-2	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})$	$2^{n-2}-1$	$2^{n-2}-2$	1	0
2^n-1	……	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})$	$2^{n-2}-1$	……	$2^{n-2}-1$	0	$2^{n-1}-1$	……	$2^{n-1}-1$	2^{n-2}	$3(2^{n-2})-1$	……	$2^{n-1}+1$	2^{n-1}
2^n-2	2^n-1	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})+1$	$2^{n-2}-2$	1	0	1	$2^{n-1}-2$	$2^{n-2}+1$	2^{n-2}	$2^{n-2}+1$	$3(2^{n-2})-2$	$3(2^{n-2})-1$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$
$3(2^{n-2})+1$			2^n-2	1			$2^{n-2}-2$	$2^{n-2}+1$			$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}+1$			$3(2^{n-2})$
$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})+1$	2^n-2	2^n-1	0	1	$2^{n-2}-2$	$2^{n-2}-1$	2^{n-2}	$2^{n-2}+1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}-1$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	$3(2^{n-2})-2$	$3(2^{n-2})$
$2^{n-2}-1$	……	$2^{n-2}-1$	0	2^n-1	……	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})-1$	……	$2^{n-1}+1$	2^{n-1}	$2^{n-1}-1$	……	$2^{n-1}-1$	2^{n-2}
$2^{n-2}-2$	1	0	1	2^n-2	2^n-1	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})-2$	$3(2^{n-2})-1$	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-2}+1$	2^{n-2}	$2^{n-2}+1$
1			$2^{n-2}-2$	$3(2^{n-2})+1$			2^n-2	$2^{n-1}+1$			$3(2^{n-2})$	$2^{n-2}+1$			$2^{n-1}-2$
0	1	$2^{n-2}-2$	$2^{n-2}-1$	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})+1$	2^n-2	2^n-1	2^{n-1}	$2^{n-1}+1$	$3(2^{n-2})-2$	$3(2^{n-2})$	2^{n-2}	$2^{n-2}+1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}-1$

圖 9-2：2^n階倍數矩陣

2. 2^n階餘數矩陣：

步驟一：將$0\sim2^n$由小到大分成 4 組，依序填入 **a→e→m→i** 區，填數字的規律分別是**由上至下→由下至上→由上至下→由下至上**（如圖 9-3）。

1
⋮
2^{n-2}
2^{n-1}
⋮
$2^{n-2}+1$
2^n
⋮
$3(2^{n-2})+1$
$2^{n-2}+1$
⋮
$3(2^{n-2})$

圖 9-3：2^n階餘數矩陣第一行規律

步驟二：同一列向右複製$(2^{n-2}-1)$次 。

步驟三：a、e 區複製的數字到 k、o 區；i、m 區的數字則複製到 c、g 區，即完成一半的2^n階餘數矩陣。

步驟四：填第2^n行（上半部與下半部個別填入與第一行完全顛倒的數）。

步驟五：同一列向左複製$(2^{n-2}-1)$次。

步驟六：d、h 區的數字複製到 j、n 區；l、p 區的數字則複製到 b、f 區，即能完成另一半的2^n階餘數矩陣。

步驟七：將兩個一半的2^{n-1}階餘數矩陣疊合在一起，就能完成2^n階餘數矩陣（如圖 9-4）。

1	1	⋯	1	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})$	⋯	$3(2^{n-2})$	2^n	2^n	⋯	2^n	$2^{n-2}+1$	$2^{n-2}+1$	⋯	$2^{n-2}+1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2^{n-2}	2^{n-2}	⋯	2^{n-2}	$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}+1$	⋯	$2^{n-1}+1$	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})+1$	⋯	$3(2^{n-2})+1$	2^n-1	2^n-1	⋯	2^n-1
2^{n-1}	2^{n-1}	⋯	2^{n-1}	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})+1$	⋯	$3(2^{n-2})+1$	$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}+1$	⋯	$2^{n-1}+1$	2^{n-2}	2^{n-2}	⋯	2^{n-2}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$2^{n-2}+1$	$2^{n-2}+1$	⋯	$2^{n-2}+1$	2^n	2^n	⋯	2^n	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})$	⋯	$3(2^{n-2})$	1	1	⋯	1
2^n	2^n	⋯	2^n	$2^{n-2}+1$	$2^{n-2}+1$	⋯	$2^{n-2}+1$	1	1	⋯	1	$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})$	⋯	$3(2^{n-2})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})+1$	⋯	$3(2^{n-2})+1$	2^n-1	2^n-1	⋯	2^n-1	2^{n-2}	2^{n-2}	⋯	2^{n-2}	$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}+1$	⋯	$2^{n-1}+1$
$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}+1$	⋯	$2^{n-1}+1$	2^{n-2}	2^{n-2}	⋯	2^{n-2}	2^{n-1}	2^{n-1}	⋯	2^{n-1}	$3(2^{n-2})+1$	$3(2^{n-2})+1$	⋯	$3(2^{n-2})+1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$3(2^{n-2})$	$3(2^{n-2})$	⋯	$3(2^{n-2})$	1	1	⋯	1	$2^{n-2}+1$	$2^{n-2}+1$	⋯	$2^{n-2}+1$	2^n	2^n	⋯	2^n

圖 9-4：2^n階餘數矩陣

3. 2^n**階幻方（**$2^n\times$**倍數矩陣＋餘數矩陣）：**

將2^n階倍數矩陣與2^n階餘數矩陣合成後的2^n階幻方因為規律較複雜，所以我們並沒有用圖片表示，僅用以下的文字敘述來證明幻方的**線和值皆相同**，且$1\sim 2^{2n}$的數皆**不會重複**。

（七）2^n**階幻方證明:**

1. **線和值相同：**

（1）**倍數矩陣：**為了使各行、列、斜排的加總皆是$2^{2n-1}-2^{n-1}$，並以數獨的方式分散排列，我們以所有數字皆不重複且有規律的方式填第一列，利用第一列不斷的交叉往下填直到完成倍數矩陣的上半部，接著下半部的第一列填入與上半部第一列完全顛倒的數，再利用下半部第一列不斷的交叉往下填直到完成倍數矩陣的下半部。透過交叉與顛倒排列的過程，能將所有數字有規律的分散排列，確保所有的**橫列以及直行**的數字皆是 $0\sim 2^n-1$，且**左上至右下的斜排**剛好別由2^{n-1}個2^{n-1}和2^{n-1}個$2^{n-1}-1$ 所組成，**右上至左下**的分別由2^{n-1}個2^n-1和2^{n-1}個 0 所組成。

各直行與橫列線和值：

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} k=\frac{(2^n-1)\times(2^n-1+1)}{2}=\frac{2^{2n}-2^n}{2}=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

左上至右下的斜排線和值：

$$(2^{n-1})\times(2^{n-1})+(2^{n-1})\times(2^{n-1}-1)=2^{2n-2}+2^{2n-2}-2^{n-1}$$
$$=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

右上至左下的斜排線和值：

$$(2^{n-1})\times(2^n-1)+(2^{n-1})\times 0=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

（2）**餘數矩陣：** 為了使各行、列、斜排的加總皆是$2^{2n-1}+2^{n-1}$且製作出來的幻方能配合倍數矩陣達到數字不重複，我們以所有數字皆不重複且有規律的方式填第一行，然後同一區橫列的數字皆相同，再透過複製或顛倒排列，達到**每行**皆是 $1\sim 2^n$；**每列**會有不同的四組數但加總皆是$2^{n+1}+2$，因為 a、b、c、d 區第一列四個數的加總為$2^{n+1}+2$，而第二列四個數分別是第一行四個數$+1$、-1、-1、$+1$，可以互相抵消，第三第四列也依此類推，這樣每列四個數的加總就都會是$2^{n+1}+2$，除了 a、b、c、d 區之外，下面所有區域的數字排列方式是由 a、b、c、d 區的數字交叉往下複製，所以也能達到每列加總皆是$2^{n+1}+2$，且每區的橫列都會有2^{n-2}個相同的數；**左上至右下的斜排**會有兩組數，分別為$1\sim 2^{n-2}$和$3(2^{n-2})+1\sim 2^n$且各填兩次；**右上至左下**則也會有兩組數，分別為$2^{n-2}+1\sim 2^n-1$和$2^{n-1}+1\sim 3(2^{n-2})$且各填兩次。

各直行線和值：

$$\sum_{k=1}^{2^n} k = \frac{2^n \times (2^n+1)}{2} = \frac{(2^{2n})+(2^n)}{2} = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$$

各橫列線和值：

$$(2^{n-2})(2^{n+1}+2) = 2^{2n-1} + 2^{n-1}$$

右上至左下的斜排線和值：

$$2(\sum_{k=2^{n-2}+1}^{3(2^{n-2})} k)$$

$$= 2 \times (\sum_{k=1}^{3(2^{n-2})} k - \sum_{k=1}^{2^{n-2}} k) = 2 \times \left[\frac{9 \times (2^{n-4}) + 3 \times (2^{n-2}) - (2^{n-4}) - (2^{n-2})}{2}\right]$$

$$= 8 \times (2^{n-4}) + 2 \times (2^{n-2})$$

$$= 2^{2n-1} + 2^{n-1}$$

左上至右下的斜排線和值：

$$2 \times (\sum_{k=1}^{2^{n-2}} k) + 2 \times (\sum_{k=3(2^{n-2})+1}^{2^n} k)$$

$$= 2 \times [\sum_{k=1}^{2^n} k - (\sum_{k=1}^{3(2^{n-2})} k - \sum_{k=1}^{2^{n-2}} k)] = (2^{2n}) + (2^n) - 8 \times (2^{n-4}) - 2 \times (2^{n-2})$$

$$= 2^{2n-1} + 2^{n-1}$$

（3）**幻方：**當倍數矩陣與餘數矩陣每行、每列和斜排的加總皆相同時，那麼用$2^n \times$倍數矩陣 + 餘數矩陣所製作出來幻方的每行、每列和斜排的加總也會跟著相同。

其值為：$(2^n) \times (2^{2n-1} - 2^{n-1}) + 2^{2n-1} + 2^{n-1} = 2^{3n-1} - 2^{2n-1} + 2^{2n-1} + 2^{n-1}$

$$= 2^{3n-1} + 2^{n-1}$$

2.不重複的原因：

（1）**區域：倍數矩陣**每個區域一樣的數字都在**斜排**，直行與橫列的數字都不一樣；**餘數矩陣**則是每個區域每條**橫列**的數字都一樣，斜排的數字都不一樣，這樣倍數矩陣和餘數矩陣每個**區域**的數字對應起來就**不會重複**。

（2）**整個矩陣：**如果把2^n階倍數矩陣和餘數矩陣分成 16 個區域並由英文字母代表（區域分配如圖 5）。倍數矩陣的 C、H、J、M 區皆由$0 \sim 2^{n-2}-1$組成；B、E、K、P 區皆由$2^{n-2} \sim 2^{n-1}-1$組成；A、F、L、O 區皆由$2^{n-1} \sim 3(2^{n-2})-1$組成；D、G、I、N 區皆由$3(2^{n-2}) \sim 2^n$組成。餘數矩陣的 a、h、k、n 區皆由$1 \sim 2^{n-2}$組成；d、e、j、o 區皆由

$2^{n-2}+1\sim2^{n-1}$組成；c、f、i、p 區皆由$2^{n-1}+1\sim3(2^{n-2})$組成；b、g、l、m 區皆由$3(2^{n-2})+1\sim2^{n}$組成。由此可知倍數矩陣中相同的任何一組數，在餘數矩陣中的對應位置皆不會相同。

倍數矩陣

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

餘數矩陣

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

圖 5：十六個區域分配圖

（3）**幻方：**從**數列交叉擴展法**製作出來2^{n}階幻方中，每個對應的數皆是$2^{n}\times$倍數矩陣對應的數 + 餘數矩陣對應的數，而由上述證明可得知倍數矩陣和餘數矩陣對應的數皆不會重複，因此幻方裡所有的數字都不會重複。

二、結合羅伯法與矩陣法中倍數矩陣的特性創造出新的 4n 階幻方解法並驗證其正確性。

以上的敘述能證明數列交叉擴展法可以適用於2^{n}階幻方。但因為我們製作倍數矩陣的規則是利用每兩個數一組去擴展，雖然可以達到數字皆不重複，不過只適用於2^{n}階幻方，所以我們把每兩個數一組的規則去除掉，並試著用其他填完後的直行與橫列也可以達到數字不重複且加總一樣的方法來嘗試，其中我們發現利用**羅伯法**去填每個區域會有這個特性，而且也更容易表示，我們將此方法稱作數列羅伯擴展法，再利用此方法構造 4n 階幻方。

（一）十二階（數列羅伯擴展法）：

1.十二階倍數矩陣：

步驟一：將 0~11 由小到大分成四組，依照 C➔B➔A➔D 區的順序填入第一行。

步驟二：A、B、C、D 區分別往右下，左下，右下，左下填對角線。

步驟三：第一排依每個區域斜線的方向用羅伯法規律往下填相同的數字，直到填滿那一區。

步驟四：每兩區一組交叉填入下面的區域，即完成十二階倍數矩陣的上半部。

步驟五：下半部 J、K、L、I 區第一排填入與 A、B、C、D 區第一排完全顛倒的數。

步驟六：重複步驟二~四即完成十二階倍數矩陣下半部。

步驟七：將上下兩半的倍數矩陣合併，就能得到完整的十二階倍數矩陣。

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11

（步驟一）

11	10	9	2	1	0	5	4	3	8	7	6

（步驟五）

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11
	6			5			0			11	
		6	5					0	11		

（步驟二）

11	10	9	2	1	0	5	4	3	8	7	6
	11			0			5			6	
		11	0					5	6		

（步驟六）

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11
8	6	7	4	5	3	2	0	1	10	11	9
7	8	6	5	3	4	1	2	0	11	9	10

（步驟三）

11	10	9	2	1	0	5	4	3	8	7	6
9	11	10	1	0	2	3	5	4	7	6	8
10	9	11	0	2	1	4	3	5	6	8	7

（步驟六）

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11
8	6	7	4	5	3	2	0	1	10	11	9
7	8	6	5	3	4	1	2	0	11	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	5	3	8	6	7	10	11	9	2	0	1
5	3	4	7	8	6	11	9	10	1	2	0

（步驟四）

11	10	9	2	1	0	5	4	3	8	7	6
9	11	10	1	0	2	3	5	4	7	6	8
10	9	11	0	2	1	4	3	5	6	8	7
2	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3
1	0	2	9	11	10	7	6	8	3	5	4
0	2	1	10	9	11	6	8	7	4	3	5

（步驟六）

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11
8	6	7	4	5	3	2	0	1	10	11	9
7	8	6	5	3	4	1	2	0	11	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	5	3	8	6	7	10	11	9	2	0	1
5	3	4	7	8	6	11	9	10	1	2	0
11	10	9	2	1	0	5	4	3	8	7	6
9	11	10	1	0	2	3	5	4	7	6	8
10	9	11	0	2	1	4	3	5	6	8	7
2	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3
1	0	2	9	11	10	7	6	8	3	5	4
0	2	1	10	9	11	6	8	7	4	3	5

（步驟七）

圖 10-1：**數列羅伯擴展法**十二階倍數矩陣步驟一至七

2.十二階餘數矩陣：

步驟一：將 1~12 由小到大分成 4 組，依序填入 **a→e→m→i** 區，填數字的規律分別是**由上至下→由下至上→由上至下→由下至上**。

步驟二：同一列的數向右複製兩次。

步驟三：在 k、o 區分別依序填入 a、e 區的數字；c、g 區分別依序填入 i、m 區的數字，即完成一半的十二階餘數矩陣。

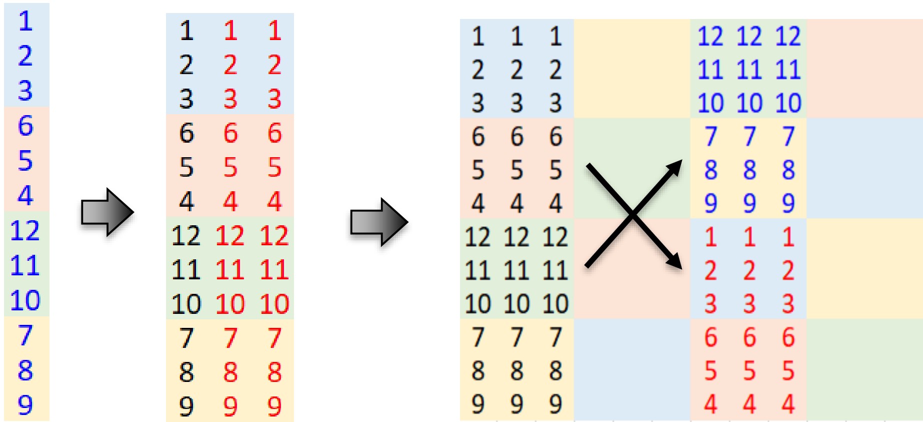


圖 10-2：**數列羅伯擴展法**十二階餘數矩陣步驟一至三

步驟四：最後一行上半部與下半部**個別**填入與第一行完全顛倒的數。

步驟五：同一列的數向左複製兩次。

步驟六：在 j、n 區分別依序填入 d、h 區的數字；b、f 區分別依序填入 l、p 區的數字，即完成另一半的十二階餘數矩陣。

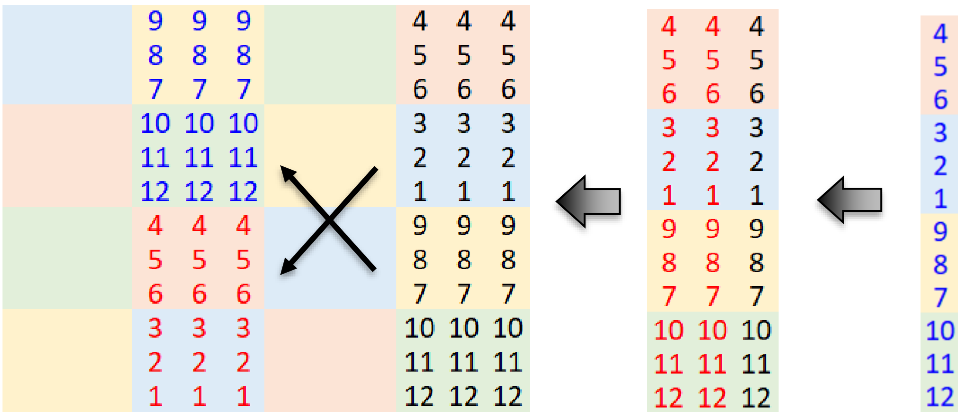


圖 10-3：**數列羅伯擴展法**十二階餘數矩陣步驟四至六

步驟七：將兩個一半的十二階餘數矩陣疊合在一起，就能完成十二階餘數矩陣。

1	1	1	9	9	9	12	12	12	4	4	4
2	2	2	8	8	8	11	11	11	5	5	5
3	3	3	7	7	7	10	10	10	6	6	6
6	6	6	10	10	10	7	7	7	3	3	3
5	5	5	11	11	11	8	8	8	2	2	2
4	4	4	12	12	12	9	9	9	1	1	1
12	12	12	4	4	4	1	1	1	9	9	9
11	11	11	5	5	5	2	2	2	8	8	8
10	10	10	6	6	6	3	3	3	7	7	7
7	7	7	3	3	3	6	6	6	10	10	10
8	8	8	2	2	2	5	5	5	11	11	11
9	9	9	1	1	1	4	4	4	12	12	12

圖 10-4：**數列羅伯擴展法**十二階餘數矩陣步驟七

3.十二階幻方（**12** × 倍數矩陣 + 餘數矩陣）：

12 ×

6	7	8	3	4	5	0	1	2	9	10	11
8	6	7	4	5	3	2	0	1	10	11	9
7	8	6	5	3	4	1	2	0	11	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	5	3	8	6	7	10	11	9	2	0	1
5	3	4	7	8	6	11	9	10	1	2	0
11	10	9	2	1	0	5	4	3	8	7	6
9	11	10	1	0	2	3	5	4	7	6	8
10	9	11	0	2	1	4	3	5	6	8	7
2	1	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3
1	0	2	9	11	10	7	6	8	3	5	4
0	2	1	10	9	11	6	8	7	4	3	5

+

1	1	1	9	9	9	12	12	12	4	4	4
2	2	2	8	8	8	11	11	11	5	5	5
3	3	3	7	7	7	10	10	10	6	6	6
6	6	6	10	10	10	7	7	7	3	3	3
5	5	5	11	11	11	8	8	8	2	2	2
4	4	4	12	12	12	9	9	9	1	1	1
12	12	12	4	4	4	1	1	1	9	9	9
11	11	11	5	5	5	2	2	2	8	8	8
10	10	10	6	6	6	3	3	3	7	7	7
7	7	7	3	3	3	6	6	6	10	10	10
8	8	8	2	2	2	5	5	5	11	11	11
9	9	9	1	1	1	4	4	4	12	12	12

=

73	85	97	45	57	69	12	24	36	112	124	136
98	74	86	56	68	44	35	11	23	125	137	113
87	99	75	67	43	55	22	34	10	138	114	126
42	54	66	82	94	106	115	127	139	3	15	27
53	65	41	107	83	95	128	140	116	26	2	14
64	40	52	96	108	84	141	117	129	13	25	1
144	132	120	28	16	4	61	49	37	105	93	81
119	143	131	17	5	29	38	62	50	92	80	104
130	118	142	6	30	18	51	39	63	79	103	91
31	19	7	135	123	111	102	90	78	70	58	46
20	8	32	110	134	122	89	77	101	47	71	59
9	33	21	121	109	133	76	100	88	60	48	72

圖 10-5：**數列羅伯擴展法**十二階合成幻方

（二）4n階（數列羅伯擴展法）：

成功製作出非2^n階（12 階）幻方後，我們試著將此方法推廣到 4n 階幻方。

1. **$4n$階倍數矩陣：**

步驟一：將$0\sim4n-1$由小到大分成四組，依照 **C➔B➔A➔D** 區的順序填入第一行。

步驟二：A、B、C、D 區分別往右下，左下，右下，左下填對角線。

步驟三：第一排照每個區域斜線的方向用羅伯法規律往下填相同的數字，直到填滿那一區。

步驟四：每兩區一組交叉填入下面的區域，即完成 4n 階倍數矩陣的上半部。

步驟五：下半部 J、K、L、I 區第一排填入與 A、B、C、D 區第一排完全顛倒的數。

步驟六：重複步驟二~四即可完成 4n 階倍數矩陣的下半部。

步驟七：將上下半部合併就能得到完整的 4n 階倍數矩陣（如圖 11-1）。

2n	2n+1	…	3n-1	n	…	2n-2	2n-1	0	1	…	n-1	3n	…	4n-2	4n-1
3n-1	⋱	⋱	⋮	⋮	⋰	⋰	n	n-1	⋱	⋱	⋮	⋮	⋰	⋰	3n
⋮	⋱	⋱	2n+1	2n-2	⋰	⋰	⋮	⋮	⋱	⋱	1	4n-2	⋰	⋰	⋮
2n+1	…	3n-1	2n	2n-1	n	…	2n-2	1	…	n-1	0	4n-1	3n	…	4n-2
n	…	2n-2	2n-1	2n	2n+1	…	3n-1	3n	…	4n-2	4n-1	0	1	…	n-1
⋮	⋰	⋰	n	3n-1	⋱	⋱		⋮	⋰	⋰	3n	n-1	⋱	⋱	
2n-2	⋰	⋰	⋮		⋱	⋱	2n+1	4n-2	⋰	⋰	⋮		⋱	⋱	1
2n-1	n	…	2n-2	2n+1	…	3n-1	2n	4n-1	3n	…	4n-2	1	…	n-1	0
4n-1	4n-2	…	3n	n-1	…	1	0	2n-1	2n-2	…	n	3n-1	…	2n+1	2n
3n	⋱	⋱	⋮	⋮	⋰	⋰	n-1	n	⋱	⋱	⋮	⋮	⋰	⋰	3n-1
⋮	⋱	⋱	4n-2	1	⋰	⋰	⋮	⋮	⋱	⋱	2n-2	2n+1	⋰	⋰	⋮
4n-2	…	3n	4n-1	0	n-1	…	1	2n-2	…	n	2n-1	2n	3n-1	…	2n+1
n-1	…	1	0	4n-1	4n-2	…	3n	3n-1	…	2n+1	2n	2n-1	2n-2	…	n
⋮	⋰	⋰	n-1	3n	⋱	⋱	⋮	⋮	⋰	⋰	3n-1	n	⋱	⋱	⋮
1	⋰	⋰	⋮	⋮	⋱	⋱	4n-2	2n+1	⋰	⋰	⋮	⋮	⋱	⋱	2n-2
0	n-1	…	1	4n-2	…	3n	4n-1	2n	3n-1	…	2n+1	2n-2	…	n	2n-1

圖 11-1：4n 階倍數矩陣

2. $4n$階餘數矩陣：

步驟一：將 1~4n 由小到大分成 4 組，依序填入 **a➔e➔m➔i** 區的第一行，填數字的規律分別是**由上至下➔由下至上➔由上至下➔由下至上**。

步驟二：同一列的數向右複製 n-1 次。

步驟三：a、e 區複製的數字到 k、o 區；i、m 區的數字則複製到 c、g 區，即完成一半的 4n 階餘數矩陣。

步驟四：最後一行上半部與下半部**個別**填入與第一行完全顛倒的數。

步驟五：同一列的數向左複製 n-1 次。

步驟六：d、h 區的數字複製到 j、n 區；l、p 區的數字則複製到 b、f 區，即能完成另一半的 4n 階餘數矩陣。

步驟七：將上下半部的 4n 階餘數矩陣合併，即可完成 4n 階餘數矩陣（如圖 11-2）。

1	1	⋯	1	$3n$	$3n$	⋯	$3n$	4n	4n	⋯	4n	n+1	n+1	⋯	n+1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	⋯	n	$2n$+1	$2n$+1	⋯	$2n$+1	3n+1	3n+1	⋯	3n+1	2n	$2n$	⋯	$2n$
2n	2n	⋯	2n	$3n$ +1	$3n$ +1	⋯	$3n$ +1	2n+1	2n+1	⋯	2n+1	n	n	⋯	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n+1	n+1	⋯	n+1	$4n$	$4n$	⋯	4n	3n	3n	3n	3n	1	1	⋯	1
4n	4n	⋯	4n	n+1	n+1	⋯	n+1	1	1	⋯	1	$3n$	$3n$	⋯	$3n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3n+1	3n+1	⋯	3n+1	2n	$2n$	⋯	$2n$	n	n	⋯	n	$2n$1	$2n$+1	⋯	$2n$+1
2n+1	2n+1	⋯	2n+1	n	n	⋯	n	2n	2n	⋯	2n	$3n$ +1	$3n$ +1	⋯	$3n$ +1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3n	3n	3n	3n	1	1	⋯	1	n+1	n+1	⋯	n+1	$4n$	$4n$	⋯	4n

圖 11-2：4n 階餘數矩陣

3.$4n$階幻方（4n × 倍數矩陣 + 餘數矩陣）：

將4n階倍數矩陣與4n階餘數矩陣合成後的4n階幻方因為規律較複雜，所以我們並沒有用圖片表示，僅用以下的文字敘述來證明4n階幻方的**線和值皆相同**，且$1 \sim 16n^2$的數皆**不重複**。

（三）$4n$階幻方證明：

1.線和值相同：

（1）**倍數矩陣：**為了使各行、列、斜線的加總皆是$8n^2-2n$且分散排列，我們以所有數字皆不重複且有規律的方式填第一列，接著依照每個區域斜線的方向用羅伯法規律往下填相同的數字直到填完那一區所有的數，再接著每兩個區域一組交叉填入下面的區域，就能完成 4n 階倍數矩陣的上半部，下半部的第一列填與上半部第一列完全顛倒的數，再重複上半部填數字的步驟，就能完成 4n 階倍數矩陣的下半部，最後將上下半部合併，即完成一個完整的 4n 階倍數矩陣。透過羅伯法與交叉顛倒排列的過程，能將所有數字有規律的分散排列，確保所有的**橫列以及直行**的數字皆是 0~$4n-1$，且**左上至右下的斜排**由$2n$個$2n$和$2n-1$所組成，**右上至左下**的則由$2n$個$4n-1$和 0 所組成。

各直行與橫列線和值：

$$\sum_{k=1}^{4n-1} k = \frac{(4n-1)\times(4n-1+1)}{2} = \frac{16n^2-4n}{2} = 8n^2-2n$$

右上至左下的斜排線和值：

$$(2\mathrm{n})\times(2\mathrm{n})+(2\mathrm{n})\times(2\mathrm{n}-1) = 8n^2-2n$$

左上至右下的斜排線和值：

$(2\text{n})\times(4\text{n}-1)+(2\text{n})\times(0)=8n^2-2n$

（2）**餘數矩陣：**我們只改變製作倍數矩陣的規則，餘數矩陣的步驟並沒有變，所以只改成用$1\sim4n$來表示。每行、列、斜排的加總皆是$8n+2$，**每條直行**皆是$1\sim4n$；**每條橫列**會有不同的四組數但加起來皆是$8n+2$，因為 a、b、c、d 區第一列四個數的加總為$8n+2$，而第二列四個數分別是第一行四個數$+1$、-1、-1、$+1$，可以互相抵消，第三第四列也依此類推，這樣每列四個數的加總就都會是$8n+2$，且每區的橫列都會有 n 個相同的數；**左上至右下的斜排**會有兩組數，分別為$1\sim\text{n}$和$3\text{n}+1\sim4\text{n}$且各填兩次；**右上至左下**則也會有兩組數，分別為$\text{n}+1\sim2\text{n}$ 和$2^n+1\sim3n$且各填兩次。

各直行與橫列線和值：

$$\sum_{k=1}^{4\text{n}-1}k=\frac{(4n-1)\times(4n-1+1)}{2}=\frac{16n^2-2n}{2}=8n^2+2n$$

左上至右下的斜排線和值：

$$2\times(\sum_{k=1}^{4\text{n}}k+\sum_{k=1}^{\text{n}}k-\sum_{k=1}^{3\text{n}}k)=2\times\left[\frac{16n^2+4n-9n^2-3n+n^2+n}{2}\right]=8n^2+2n$$

右上至左下的斜排線和值：

$$2\times(\sum_{k=1}^{3\text{n}}k)-2\times(\sum_{k=1}^{\text{n}}k)=2\times(\frac{9n^2+3n-n^2-n}{2})=8n^2+2n$$

（3）**幻方：**當倍數矩陣與餘數矩陣每行、每列和斜排的加總皆相同時，那麼用$4n\times$倍數矩陣 + 餘數矩陣所製作出來幻方的每行、每列和斜排加總也會跟著相同。

其值為：$(4\text{n})\times(8n^2-2\text{n})+8n^2+2\text{n}=32n^3-8n^2+8n^2+2n=32n^3+2n$

2.不重複的原因：

（1）**區域：倍數矩陣**每個區域一樣的數字都在**斜排**，直行與橫列的數字都不一樣；**餘數矩陣**則是每個區域每條**橫列**的數字都一樣，斜排的數字都不一樣，這樣倍數矩陣和餘數矩陣每個**區域**的數字對應起來就不會重複。

（2）**整個矩陣：**如果把 4n 階倍數矩陣和餘數矩陣分成 16 個區域並由英文字母代表（區域分配如圖 1）。倍數矩陣的 C、H、J、M 區皆由$0\sim\text{n}-1$組成；B、E、K、P 區皆由$\text{n}\sim2\text{n}-1$組成；A、F、L、O 區皆由$2\text{n}\sim3\text{n}-1$組成；D、G、I、N 區皆由$3\text{n}\sim4\text{n}-1$組成。餘數矩陣的 a、h、k、n 區皆由$1\sim\text{n}$組成；d、e、j、o 區皆由$\text{n}+1\sim2\text{n}$組成；c、f、I、p 區皆由$2\text{n}+1\sim3\text{n}$組成；b、g、l、m 區皆由$3\text{n}+1\sim4\text{n}$組成。由此可知倍數矩陣中相同的任何一

組數，在餘數矩陣中的對應位置皆不會相同。

倍數矩陣					餘數矩陣			
A	B	C	D		a	b	c	d
E	F	G	H		e	f	g	h
I	J	K	L		i	j	k	l
M	N	O	P		m	n	o	p

圖 5：十六個區域分配圖

（3）**幻方：**數列羅伯擴展法製作出來的 4n 階幻方中，每個對應的數皆是$4n\times$倍數矩陣對應的數+餘數矩陣對應的數，而由上述證明可得知倍數矩陣和餘數矩陣對應的數皆不會重複，因此幻方裡所有的數字都不會重複。

三、利用倍數矩陣斜排特性找出更多種 4n 階幻方組合並驗證其正確性。

用**數列羅伯擴展法**製做出 4n 階幻方並證明後，我們試著探討做出來的倍數矩陣是否為**唯一解**，後來發現當斜排加總固定後並以不重複的方式填第一列，再用羅伯法將數字分散排列，也能做出排列方式不同但規律相同的倍數矩陣。

（一）以 4n 階倍數矩陣為例：

步驟一：先將$0\sim4n-1$分成 2n 組，每組相加都要等於$4n-1$（例如 0 和$4n-1$為一組、1 和$4n-2$為一組…），取**任意兩組**做為斜排。

步驟二： 將其中一組的一數填入 A 區第一列最左邊，另一數填入 B 區第一列最右邊；另一組其中一數填入 C 區第一列最左邊，另一數填入 D 區第一列最右邊。

步驟三：以不重複（可不規則）的方式將剩下的數填入第一列。

步驟四：後續的步驟可參考**數列羅伯擴展法**步驟二~七完成倍數矩陣（如圖 12）。

填入剩下的數，使第一列成為以 0~4n-1 組成之不重複且不規則的數列。

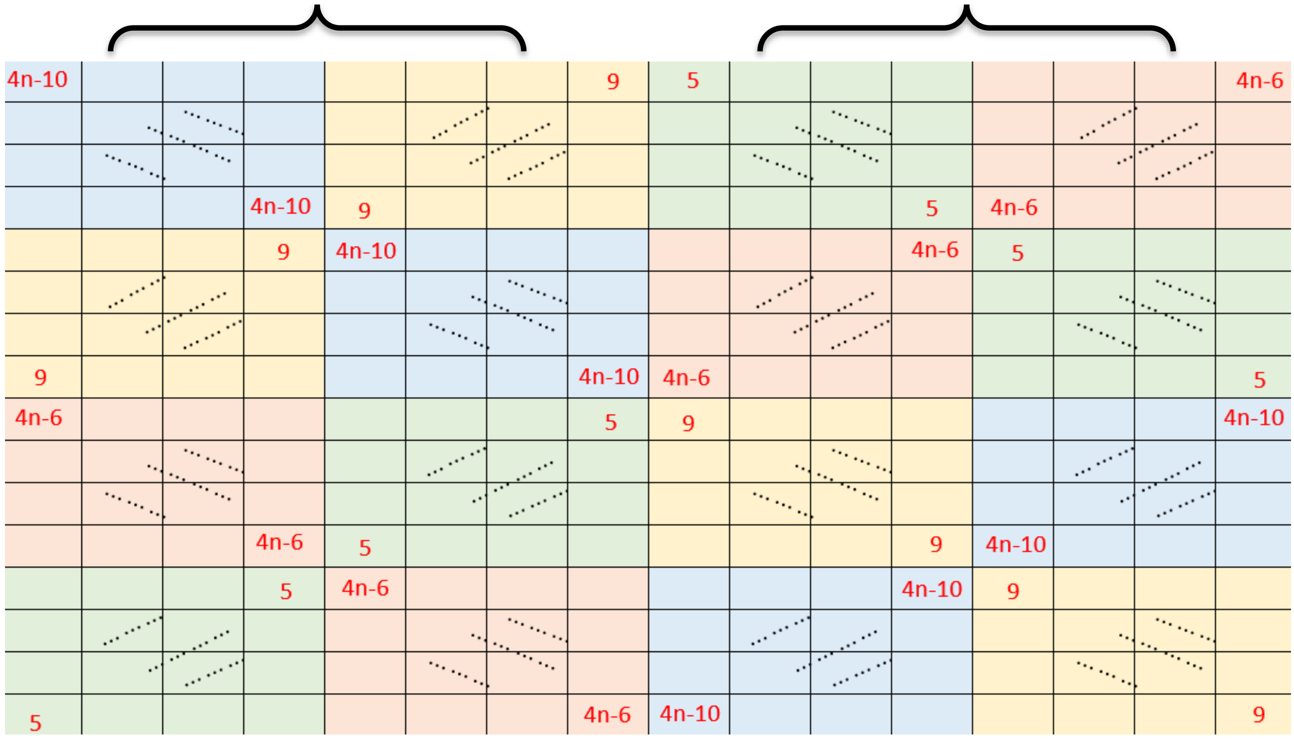


圖 12：此圖取 9、4n-10 為一組，5、4n-6 為一組作為斜排填入 4n 階倍數矩陣。

（二）4n 階餘數矩陣：排列方法如同**數列羅伯擴展法**構造出的餘數矩陣。

（三）證明：

1.線和值相同：

（1）**倍數矩陣：**我們先固定**斜排**的每一組數相加皆等於$4n-1$ ，所以不管哪組數當作斜排其加總皆會等於$8n^2-2n$，然後第一列再填入原本斜排兩組數以外剩下的數，後續步驟同樣以羅伯法將數字分散排列，最後我們依然會得到倍數矩陣的**直行與橫列**皆是 0~$4n-1$ 所組成，因此直行與橫列的線和值也等於$8n^2-2n$。

（2）**餘數矩陣：**因為作法沒改變，所以證明方法如同**數列羅伯擴展法**的餘數矩陣。

（3）**幻方：**因為改變後的倍數矩陣的線和值與原本一樣，且餘數矩陣的線和值也不變，所以最後合成幻方的線和值也相同。

2.數字不重複：

（1）**區域：**區域內的數字雖然改變，但**倍數矩陣**每個區域一樣的數字同樣都在**斜排**，直行與橫列的數字也都不一樣；**餘數矩陣**則是每個區域每條**橫列**的數字都一樣，斜排的數字都不一樣，因此倍數矩陣和餘數矩陣每個**區域**的數字對應起來也都不會重複。

（2）**整個幻方：**因為也是從第一列用羅伯法去擴展，所以改變後的倍數矩陣一樣會由 16 個區域組成，而這 16 個區域的排列方式也如圖 1，同色塊區域皆由同一組數組成，對應

到餘數矩陣的色塊一樣也不會重複，所以對應到餘數矩陣的每個位置也一樣不會重複，因此合成出來的幻方所有數皆不會重複。

倍數矩陣

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

餘數矩陣

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

圖 5：十六個區域分配圖

（四）第一列的排列方式：

我們試著探討最後構造出的倍數矩陣的解總共有**幾種組合**：

步驟一：將 $0\sim4n-1$分成 2n 組，每組相加都要等於$4n-1$。

步驟二：在$2n$組數中取**一組數**，分別填入 A 區第一列最左邊和 B 區第一列最右邊，兩數可互相交換，因此會有$2n\times2$種組合。

步驟三：在剩下的$2n-1$組數中再取**一組數**，分別填入 C 區第一列最左邊和 D 區第一列最右邊，兩數可互相交換，因此會有$(2n-1)\times2$種組合。

步驟四：最後再將剩下$4n-4$個數以不重複（可不規則）的方式填入第一列中剩下的空格，總共有$(4n-4)!$ 種組合。

步驟五：根據乘法原理，第一列的排列方式共有$2n\times2\times(2n-1)\ \times2\times(4n-4)!$種組合。

化簡： $2n\times2\times(2n-1)\times2\times(4n-4)!$

$$=8n(2n-1)\ \times(4n-4)!$$

由上述可知，利用倍數矩陣的斜排特性可以找出 4n 階幻方$8n(2n-1)\ \times(4n-4)!$種排法。

肆、研究結果

一、對角線分割法：利用「中間兩數」以及「最大最小數」當作斜排排法，再將矩陣分割成更小的子矩陣並填入斜排，可以構造出數字不重複且線和值相同的倍數矩陣及餘數矩陣，且兩矩陣合成出來的幻方也能符合數字不重複且線和值相同。

二、數列交叉擴展法：此方法構造出的幻方與**對角線分割法**相同，但填入數字的步驟不同，相較起來規律較容易表示，所以將此方法推廣到2^n階幻方並進行一般式的證明。其構造法簡述如下：

（一）**倍數矩陣**：以不重複且有規則的方式將$0\sim2^n-1$個數填入上半部第一列，下半部第一列則填入完全相反的數列，再分別以兩數一組交叉往下排列即完成。

（二）**餘數矩陣**：以不重複且有規則的方式將$1\sim2^n$個數填入左半部第一行，右半部第一行

的上下半部則個別填入完全相反的數列，透過複製2^{n-2}次後使同一區同一行的數皆一樣，再每兩區交叉往旁擴展即完成。

（三）**證明**：依照幻方的定義：**不重複**填入 1 到n^2的正整數，使得方陣中**每排線和值**皆相同。因此我們需要證明「線和值相同」以及「數字不重複」，其敘述如下：

1.**線和值相同**：用**數列交叉擴展法**構造出倍數矩陣與餘數矩陣後，我們觀察其每行、每列以及斜排的規律，再代入連續加總公式並化簡，得出倍數矩陣與餘數矩陣的每排線和值分別為$2^{2n-1}-2^{n-1}$與$2^{2n-1}+2^{n-1}$，而因為兩矩陣每排的線和值皆相同，因此用$4n\times$倍數矩陣$+$餘數矩陣所合成出的幻方每排線和值也會跟著相同。

2.**數字不重複**：由**數列交叉擴展法**構造出的倍數矩陣與餘數矩陣中，**區域內**的數字排列方式皆交錯且不重複，而倍數矩陣的**每個區域**對應到餘數矩陣皆不重複，因此兩矩陣合成出的幻方的每個數皆不會重複。

三、數列羅伯擴展法：與數列交叉擴展法的差異在於**倍數矩陣**區域內的構造方式，由兩數一組交叉往下排列的規律改成依每區域斜線方向以**羅伯法**填入相同的數，透過這個方式也能使直行橫列皆由 0~$4n-1$組成，因此證明方式如同**數列交叉擴展法**構造出的倍數矩陣。

四、推廣斜排特性：找出數列羅伯擴展法中倍數矩陣的斜排特性，透過固定填入**斜排**兩數的加總等於 4n-1，剩下的數再以不重複且不規則的方式填入**第一列**，最後以**羅伯法**的方式將數字分散排列，構造出不同種 4n 階倍數矩陣的排列方式。

伍、討論

一、數字填入的起始點是否可以隨意指定？也就是倍數矩陣中的 0 對應到餘數矩陣的 1 是否可以在任意位置？我們在研究過程中已經確認**倍數矩陣**中 0 的位置可以在任意地方，但因為我們不確定**餘數矩陣**的作法是否可以改變，且對應到倍數矩陣的數是否不重複，因此未來還需確認餘數矩陣中 1 的位置是否可以在任意地方且對應到倍數矩陣。

二、為什麼餘數矩陣的作法不受2^n階與 4n 階的變化影響？因為我們製作2^n階與 4n 階倍數矩陣的差異是每個**區域內**的數字排列方法，並不會影響到**整個幻方** 16 個區域的排列方式。

三、2n 階幻方是否有通解？**數列羅伯擴展法**最多只能涵蓋到 4n 階幻方，無法推廣到 2n 階幻方，我們推測是因為 2n 階幻方的最小單位矩陣是 2 階幻方，且因為 2 階幻方無解，無法像**數列羅伯擴展法**一樣由最小單位矩陣（四階幻方）去推廣。

陸、結論

一、從矩陣法的探討中，發現奇階倍數矩陣的其中一條斜邊都是中間數，因此我們將此規律延伸到雙偶階倍數矩陣，創造出**對角線分割法**，並製作出能對應倍數矩陣的餘數矩陣。

二、從對角線分割法的規律中我們發現換個角度去看，第一列填數字的方法也有規律，透過交叉排列去擴展，也能得到相同結果，我們稱這個方法為**數列交叉擴展法**，這個方法相較於對角線分割法，較簡單且容易表示，因此我們利用這個方法推廣到2^n階幻方並證明。

三、因為數列交叉擴展法必須是兩個數一組，無法涵蓋所有的雙偶幻方，所以我們把兩個數一組的規則刪除，改用**羅伯法**去填每一區，再結合2^n階倍數矩陣的區域特性，製作出 12 階倍數矩陣，更進一步推廣到 4n 階幻方並成功證明此方法可行。

四、在探討數列交叉擴展法所構造出來的幻方是否可以改變時，我們發現只要先固定斜排，就可以以不重複且不規則的方式填第一列，因此利用此特性從中找出 4n 階幻方共 $8n(2n-1)\times(4n-4)!$種解法並證明每種方法皆可行。

柒、參考文獻

一、李彥頡(1997)。幻方研究。中華民國第三十七屆中小學科學展覽會高中組數學科第三名。

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/37/pdf/37h/147.pdf

二、林品慶、黃治綱、李名弘(2008)。乾坤大挪移---數獨 VS 幻方。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會高中組數學科佳作。

https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/senior/040410.pdf

三、百科知識中文網－幻方。

https://www.jendow.com.tw/wiki/%E5%B9%BB%E6%96%B9

四、百度百科-羅伯法。

https://baike.baidu.hk/item/%E7%BE%85%E4%BC%AF%E6%B3%95/3689947

【評語】030417

本作品討論雙偶幻方的解法，主要是利用觀察與嘗試來解問題，偏重在問題的觀察與歸納，作者將偶數階的魔方陣專注在 n=4k 情形來討論,並應用餘數矩陣的方法來驗證其填寫方法確實符合魔方陣的要求條件，條理分明。但魔方主題偏向趣味數學，數學難度不高，與其他數學的連結也比較少，是比較可惜的。但是看得出作者需花很大心力做觀察，是件用心的作品。魔方真的比較困難的部分是 4k+2 形的，是否能用本作品的方法有所突破？

作品簡報

雙偶幻方之研究與破解

壹、前言

研究動機

我們在國小上數學課時接觸到了幻方，所以對幻方感到興趣，所以上網查了有關幻方的文獻資料，唯獨雙偶幻方到目前為止都還沒有統一的規律，我們對此感到好奇，並開始研究雙偶幻方。

研究目的

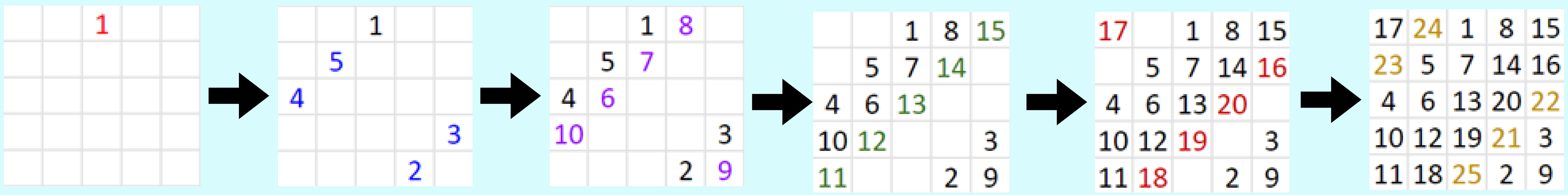
（一）將單階幻方倍數矩陣的斜排特性推廣到雙偶幻方倍數矩陣。
（二）結合羅伯法與矩陣法中倍數矩陣的特性創造出新的 4n 階幻方解法並驗證其正確性。
（三）利用倍數矩陣斜排特性找出更多種 4n 階幻方組合並驗證其正確性。

名詞釋義

幻方就是以邊長為**n**組成的方陣。
幻方分類可分為**奇階**幻方、**單偶**幻方、**雙偶**幻方。
幻方**線和值**（每排加總）：$\frac{(1+n^2)n^2}{2n}$。

文獻探討

羅伯法



矩陣法

因為幻方內的所有數字皆可表示成**n×倍數+餘數**，所以幻方可拆成**倍數矩陣**和**餘數矩陣**來破解。
製作矩陣時要先填**對角線**，再以**數獨**的方式填入剩下的數，使每排線和值皆相同。

（1）倍數矩陣由0～n-1製成。
（2）餘數矩陣由1～n製成。
（3）幻方形成規則：n×倍數矩陣+餘數矩陣。

(1)倍數矩陣

1		2
	1	
0		1

→

1	0	2
2	1	0
0	2	1

(2)餘數矩陣

1		2
	2	
2		3

→

1	3	2
3	2	1
2	1	3

(3)合成幻方

3 ×

1	0	2
2	1	0
0	2	1

+

1	3	2
3	2	1
2	1	3

=

4	3	8
9	5	1
2	7	6

貳、研究設備及器材

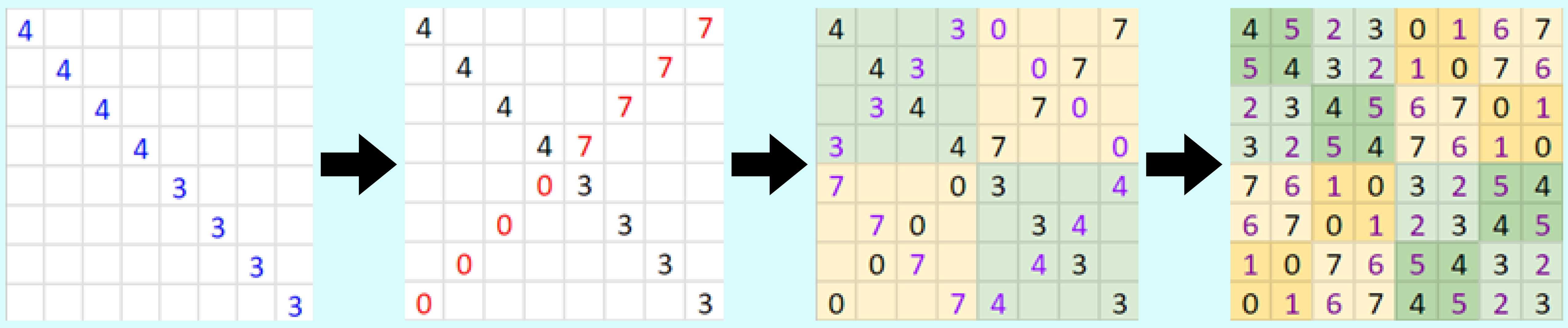
紙、筆、excel（用於計算線和值、驗證數字不重複）

參、研究結果

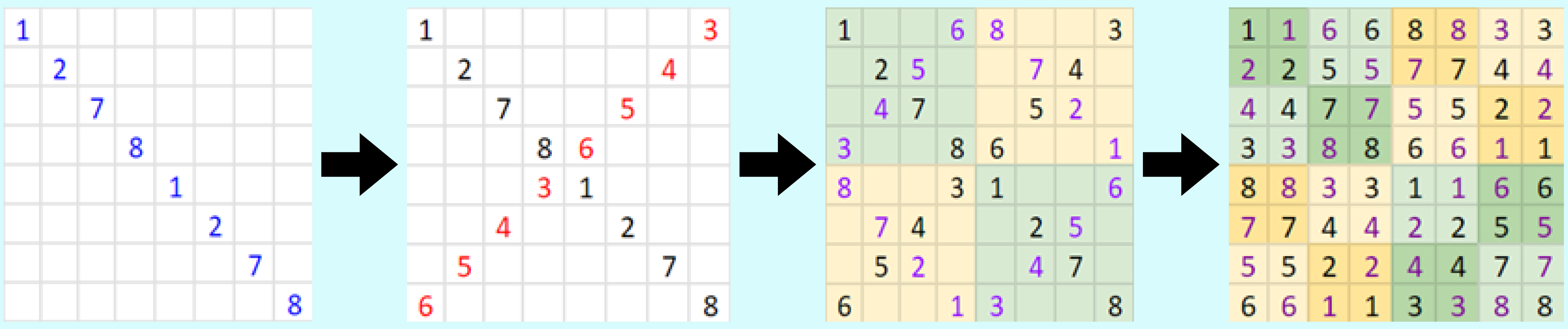
（一）將單階幻方倍數矩陣的斜排特性推廣到雙偶幻方倍數矩陣。

對角線分割法　斜排的兩組數分別由最大最小數和中間兩數組成，然後將每個矩陣分割成4個子矩陣再填斜排，重複此步驟直至完成。

八階倍數矩陣



八階餘數矩陣



合成幻方

8 ×

4	5	2	3	0	1	6	7
5	4	3	2	1	0	7	6
2	3	4	5	6	7	0	1
3	2	5	4	7	6	1	0
7	6	1	0	3	2	5	4
6	7	0	1	2	3	4	5
1	0	7	6	5	4	3	2
0	1	6	7	4	5	2	3

+

1	1	6	6	8	8	3	3
2	2	5	5	7	7	4	4
4	4	7	7	5	5	2	2
3	3	8	8	6	6	1	1
8	8	3	3	1	1	6	6
7	7	4	4	2	2	5	5
5	5	2	2	4	4	7	7
6	6	1	1	3	3	8	8

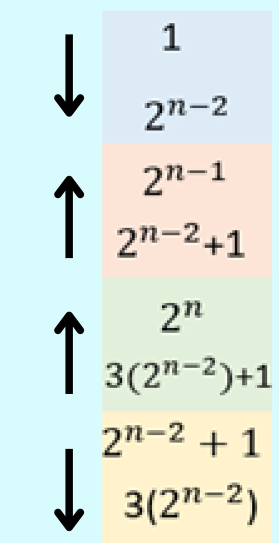
=

33	41	22	30	8	16	51	59
42	34	29	21	15	7	60	52
20	28	39	47	53	61	2	10
27	19	48	40	62	54	9	1
64	56	11	3	25	17	46	38
55	63	4	12	18	26	37	45
13	5	58	50	44	36	31	23
6	14	49	57	35	43	24	32

數列交叉擴展法

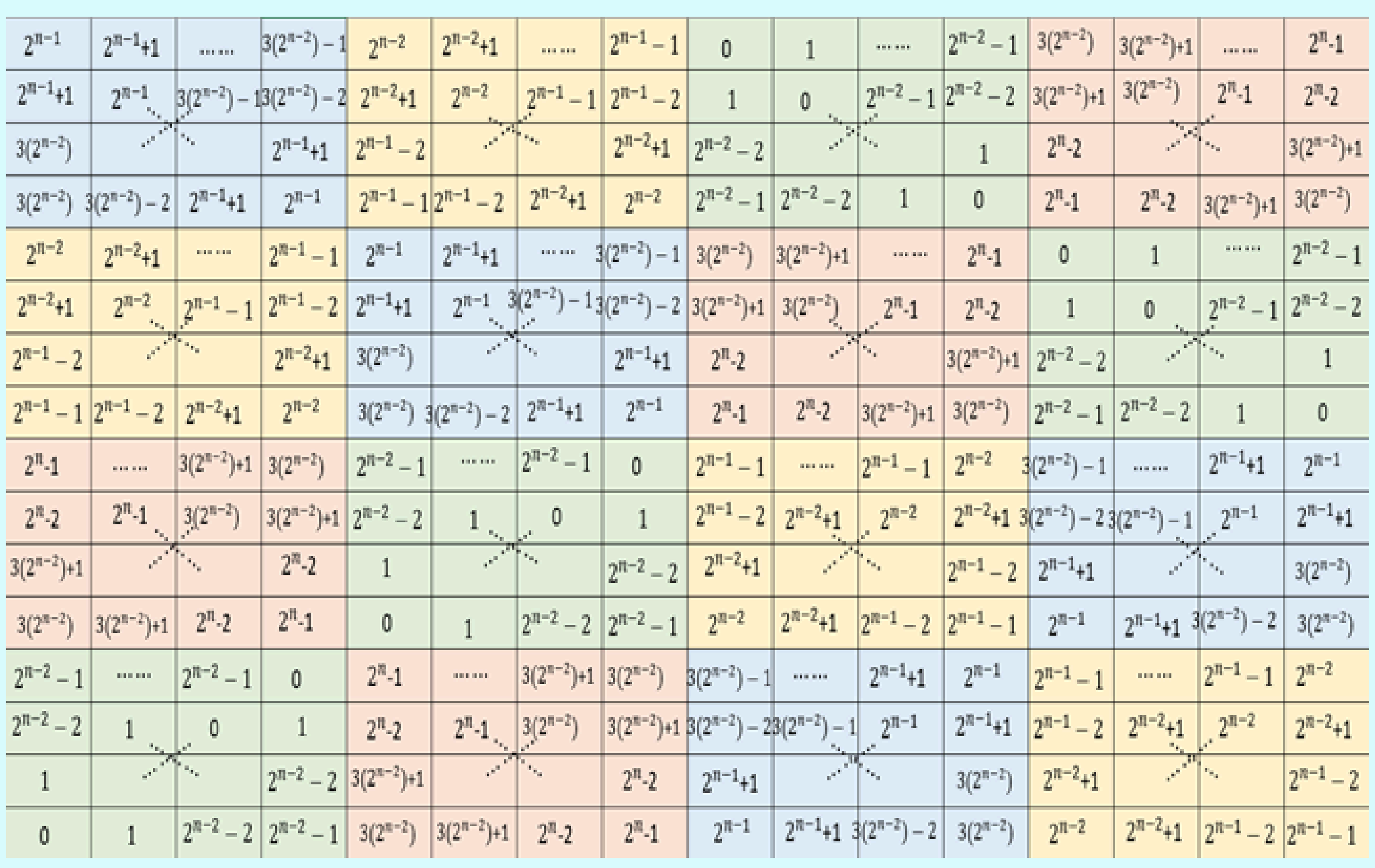
構造出的倍數矩陣與對角線分割法之倍數矩陣結果雖相同，但填入的步驟卻較對角線分割法之步驟更簡單且容易表示。

倍數矩陣填完第一列後透過兩數一組交叉擴展；**餘數矩陣**填完第一行後，向右複製再往旁邊交叉擴展。



倍數矩陣

$2^{n-1}\ \cdots 3(2^{n-2})-1$ $\quad 2^{n-2}\cdots 2^{n-1}-1$ $\quad 0\ \cdots\ 2^{n-2}-1$ $\quad 3(2^{n-2})\cdots 2^{n}-1$



餘數矩陣

證明

一、線和值相同

透過數列交叉擴展法的規則，倍數矩陣能達到以下規律：

1.**每行每列**的數字皆是0到2^n-1

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} k=\frac{(2^n-1)(2^n-1+1)}{2}=\frac{2^{2n}-2^n}{2}=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

2.**左上至右下**的斜排分別由2^{n-1}和$2^{n-1}-1$所組成。

$$(2^{n-1})(2^{n-1})+(2^{n-1})(2^{n-1}-1)$$
$$=2^{2n-2}+2^{2n-2}-2^{n-1}=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

3.**右上至左下**的斜排分別由2^n-1和0所組成。

$$(2^{n-1})(2^n-1)+(2^{n-1})0=2^{2n-1}-2^{n-1}$$

4.透過連續加總的公式和四則運算，每排的加總皆是$2^{2n-1}-2^{n-1}$。

透過數列交叉擴展法的規則，餘數矩陣能達到以下規律：

1.**每行**皆是1到2^n。

$$\sum_{k=1}^{2^n} k=\frac{2^n(2^n+1)}{2}=\frac{2^{2n}+2^n}{2}=2^{2n-1}+2^{n-1}$$

2.**每列**會有不同的四組數但加總皆是$2^{n+1}+2$，且每區的橫列都會有2^{n-2}個相同的數。

$$(2^{n-2})(2^{n+1}+2)+=2^{2n-1}+2^{n-1}$$

3.**左上至右下**的斜排會有兩組數，分別為$1\sim 2^{n-2}$和$3(2^{n-2})+1\sim 2^n$且各填兩次。

$$2\left(\sum_{k=1}^{2^{n-2}} k\right)+2\left(\sum_{k=3(2^{n-2})+1}^{2^n} k\right)=2\left[\sum_{k=1}^{2n}-\left(\sum_{k=1}^{3(2^{n-2})} k-\sum_{k=1}^{2^{n-2}} k\right)\right]=\left(2^{2n}\right)+\left(2^n\right)-8\left(2^{n-4}\right)-2\left(2^{n-2}\right)=2^{2n-1}+2^{n-1}$$

4.**右上至左下**的斜排會有兩組數，分別為$2^{n-2}+1\sim 2^n-1$和$2^{n-1}+1\sim 3(2^{n-2})$且各填兩次。

$$\sum_{k=2^{n-2}+1}^{3(2^{n-2})} k=2\left(\sum_{k=1}^{3(2^{n-2})} k-\sum_{k=1}^{2^{n-2}} k\right)=2\left[\frac{9(2^{n-4})+3\left(2^{n-2}\right)-(2^{n-4})-\left(2^{n-2}\right)}{2}\right]=8\left(2^{n-4}\right)+2\left(2^{n-2}\right)=2^{2n-1}+2^{n-1}$$

5.透過連續加總的公式和四則運算，**每排的加總**皆是$2^{2n-1}+2^{n-1}$。

因為**倍數矩陣**與**餘數矩陣**的線和值分別相同，所以合成出來幻方的線和值也會相同。

二、不重複的原因

1.**區域**：**倍數矩陣**每個區域斜排的數字都一樣，直行與橫列的數字都不一樣；**餘數矩陣**則是每個區域每條橫列的數字都一樣，斜排的數字都不一樣，這樣兩矩陣每個區域的數字對應起來皆**不重複**。

2.整個**矩陣**：將矩陣分成16個區域，且同色塊的區域皆由同一組數組成。當**倍數矩陣**同一個色塊的4個區域對應到**餘數矩陣**的區域，會發現4個顏色**皆不重複**，由此可知倍數矩陣中相同的任何一組數，在餘數矩陣中的對應位置**皆不會相同**。

倍數矩陣			
A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

餘數矩陣			
a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

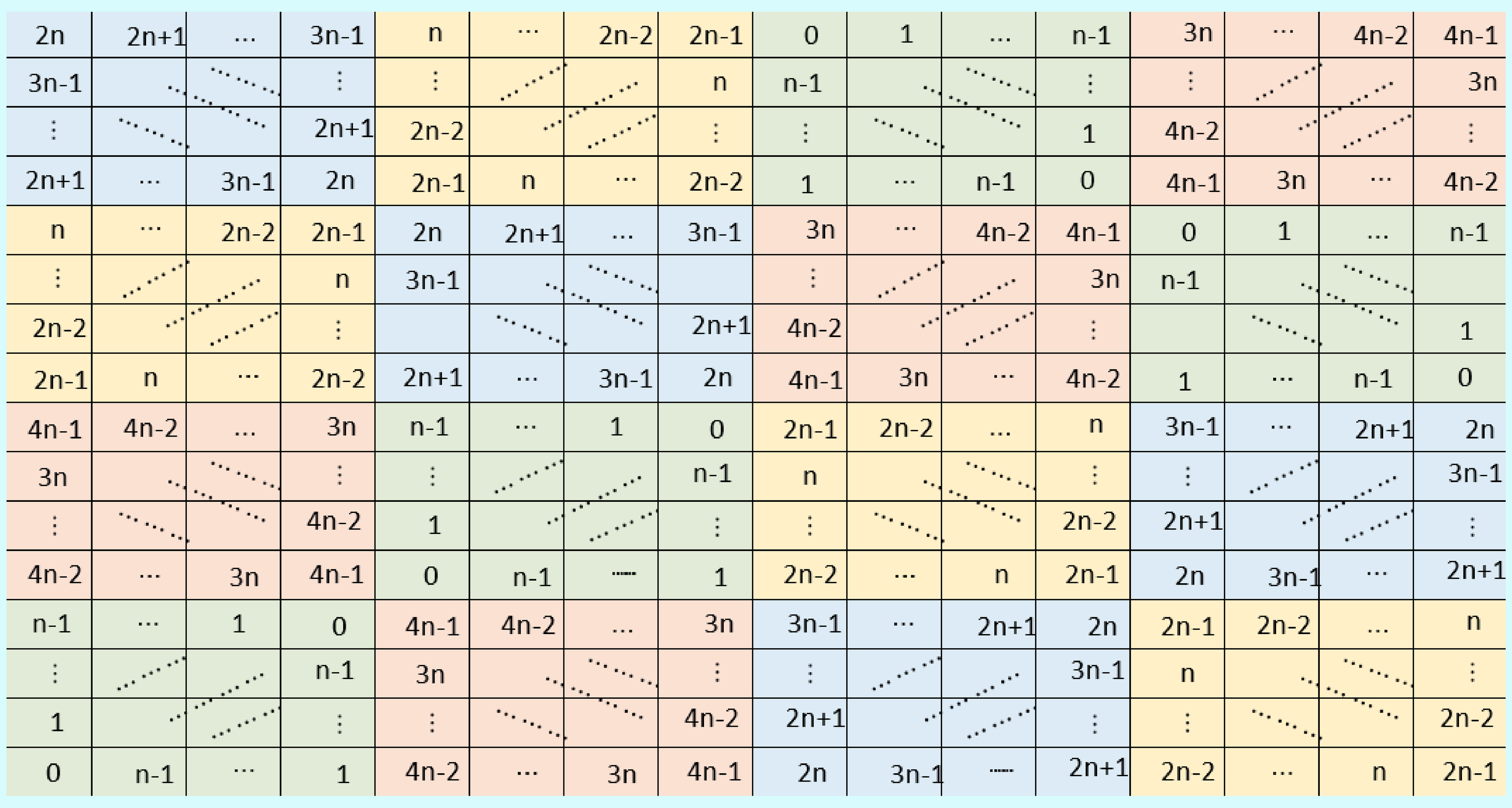
3.**幻方**：由上述證明可知倍數矩陣和餘數矩陣對應的數皆不會重複，因此**幻方**裡所有的數字都**不會重複**。

（二）結合羅伯法與矩陣法中倍數矩陣的特性創造出新的 4n 階幻方解法並驗證其正確性。

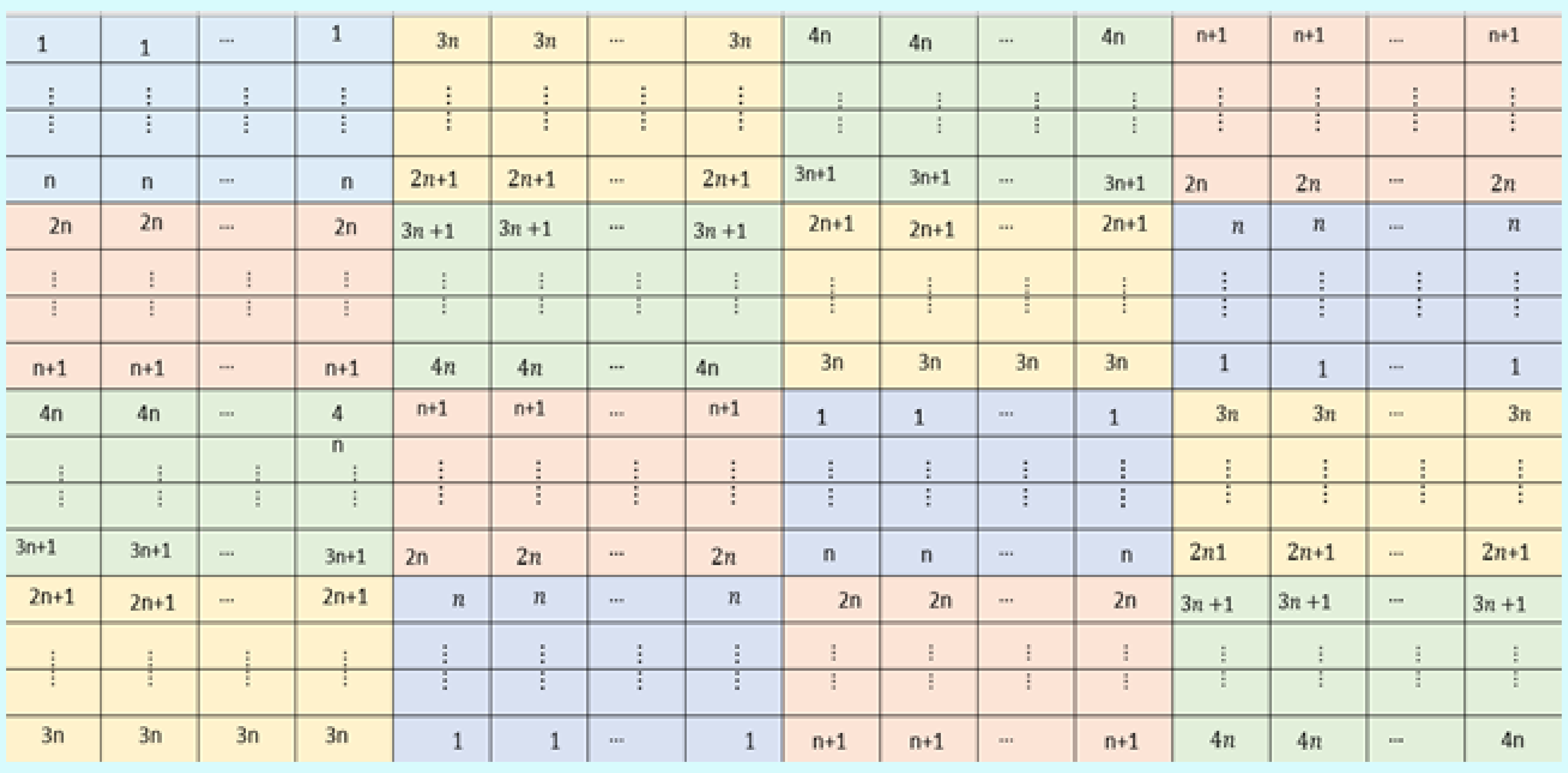
數列羅伯擴展法

倍數矩陣填完第一排後，把兩數一組交叉的規律改成羅伯法的規律填入剩下的數。
餘數矩陣填完第一行後，向右複製再往旁邊交叉擴展。

倍數矩陣



餘數矩陣



證明

一、線和值相同

（一）**倍數矩陣：**利用**羅伯法**去填每一區也可以達到每直行與橫列皆由0~4n-1組成，與**數列交叉擴展法**構造出的倍數矩陣特性相同，因此證明方式如前。

（二）**餘數矩陣：**作法如同數列交叉擴展法的餘數矩陣，因此證明方式也如前。

（三）**幻方：**因為**倍數矩陣**與**餘數矩陣**的線和值分別相同，所以合成出來幻方的**線和值**也會相同。

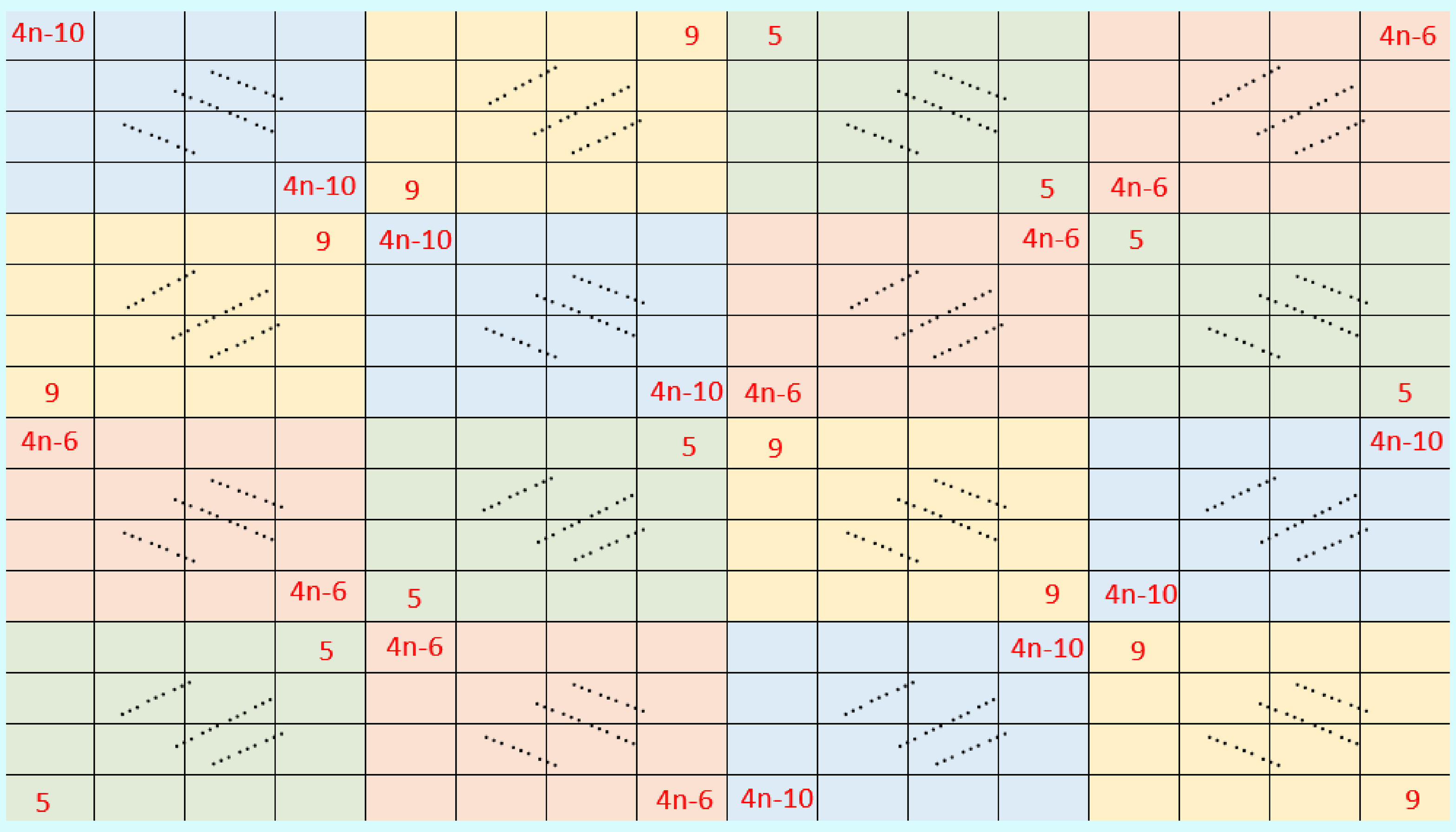
二、不重複的原因

（一）**區域：**倍數矩陣每區一樣的數字同樣都在斜排，直行與橫列的數字都不一樣； 餘數矩陣則不變，因此兩矩陣每區的數字對應起來也都不會重複。

（二）**整個矩陣：**改變後倍數矩陣的**區域特性**與**數列交叉擴展法**相同，因此證明方式也如前。

（三）**幻方：**因為**倍數矩陣**與**餘數矩陣**的線和值分別相同，所以合成出來幻方的**線和值**也會相同。

（三）利用倍數矩陣斜排特性找出更多種 4n 階幻方組合並驗證其正確性。



(此圖取5、4n-6為一組，9、4n-10為一組作為斜排填入4n階倍數矩陣)

	適用範圍	構造法不相同的地方
對角線分割法	2^n	對角線分別填入中間兩數和最大最小數，透過分割矩陣重複填對角線的方式完成。
數列交叉擴展法	2^n	第一列填完後，利用兩數一組交叉擴展來構造倍數矩陣。
數列羅伯擴展法	4n	第一列填完後，利用羅伯法的規律構造倍數矩陣。

步驟

1.0~4n-1每兩數一組，其相加皆為**4n-1**。
2.隨機取兩組數作為斜排排法。
3.第一列空格處以不重複**（可不規則）**的方式填入剩下的數。
4.後續步驟可參考**數列羅伯擴展法**。

證明

一、線和值相同

只要固定**斜排**加總，且**第一列**皆由0~4n-1組成，再透過**羅伯法**將數字分散排列，所構造出的**倍數矩陣**特性與**數列羅伯擴展法**相同，因此證明方式如前。

二、不重複的原因

構造出的**倍數矩陣**雖然**數字**的組成不同，但**排列方式**相同，也具有**區域特性**且對應**餘數矩陣**，因此證明方式也如前。

解法數

$$2n \times 2 \times (2n-1) \times 2 \times (4n-4)!$$
$$= 8n(2n-1) \times (4n-4)!$$

肆、結論

一、從**矩陣法**發現奇階矩陣的斜邊規律延伸到雙偶倍數矩陣，創造出**對角線分割法**，並製作出能對應倍數矩陣的**餘數矩陣**。
二、從對角線分割法的中我們發現也能透過**交叉排列去擴展**得到相同結果，找到**數列交叉擴展法**，推廣到 2^n 階倍數矩陣並證明。
三、將兩個數一組的規則刪除並改用**羅伯法**去填每一區，再結合矩陣的區域特性創造出**數列羅伯擴展法**，並更進一步推廣到4n階並證明此方法可行。

伍、討論

一、數字填入的起始點是否可以隨意指定？
二、為什麼**餘數矩陣**的作法不需改變？
三、2n階幻方是否有通解？

陸、參考資料

一、李彥頡(1997)。幻方研究。中華民國第三十七屆中小學科學展覽會高中組數學科第三名。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/37/pdf/37h/147.pdf
二、林品慶、黃治網、李名弘(2008)。乾坤大挪移---數獨 VS 幻方。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會高中組數學科佳作。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/senior/040410.pdf
三、百科知識中文網－幻方。
https://www.jendow.com.tw/wiki/%E5%B9%BB%E6%96%B9
四、百度百科-羅伯法。
https://baike.baidu.hk/item/%E7%BE%85%E4%BC%AF%E6%B3%95/3689947