中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030416

從正方形內接四十五度的三角形談起

學校名稱： 新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 葉芮甄 國二 黃柔慈	蕭偉智

關鍵詞： 共圓、雙曲線 、對應

從正方形內接四十五度的三角形談起

摘要

本研究源於一道常見的正方形內接三角形的動態幾何問題。我們考慮對角線，先刻劃出兩個動態的 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 之面積比值恆為定值，並且巧妙構造輔助線，利用純幾何方式證明共圓的動態四邊形 $EFMN$ 的圓心軌跡為等軸雙曲線。為了一般化推廣，我們依序設定了等長、半角等條件去探討，實驗了長方形、菱形、直角箏形等，有趣的是，我們發現其兩個三角形面積比為定值的幾何結構是兩組四點共圓，並非等長或半角。值得一提的是，為了刻劃一般化的箏形中的圓心軌跡，我們先建立了菱形的模型，再給出箏形與菱形的對應模型，成功證明其共圓心軌跡也是雙曲線。本研究將常見的幾何問題循序漸進地深化，刻劃出內在結構且給出獨特且有趣的成果。

壹、　前言

一、　研究動機

我們在某校八年級段考試題看到一道動態幾何的題目，如下所示。

四邊形 $ABCD$ 是正方形，E 點在 $\overline{BC}$ 上，F 點在 $\overline{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF = 45°$，請證明 $\overline{BE} + \overline{DF} = \overline{EF}$（註：本研究所有圖片皆為作者利用 GSP 軟體自行繪製）。

證明過程為「在 $\overrightarrow{CB}$ 取一點 F'，使得 $\overline{BF'} = \overline{DF}$。$\triangle ABF' \cong \triangle ADF$（SAS 全等）。在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AEF'$ 中，$\overline{AF} = \overline{AF'}$、$\overline{AE} = \overline{AE}$、$\angle EAF = 45° = 90° - \angle EAF = \angle EAF'$，所以 $\triangle AEF \cong \triangle AEF'$（SAS 全等），可得 $\overline{EF} = \overline{EF'} = \overline{BE} + \overline{BF'} = \overline{BE} + \overline{DF}$」。

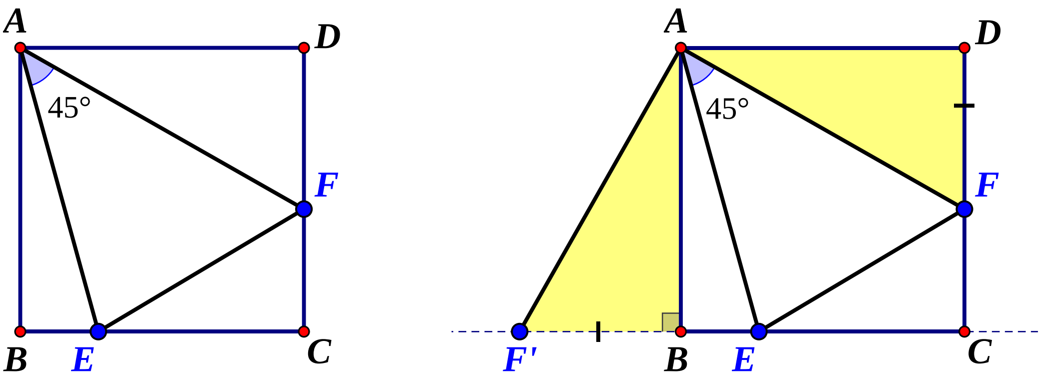


圖 1：段考試題。

我們討論其逆命題，「四邊形 $ABCD$ 是正方形，E 點在 $\overline{BC}$ 上，F 點在 $\overline{CD}$ 上，滿足 $\overline{BE}+\overline{DF}=\overline{EF}$，請證明 $\angle EAF=45°$」。同樣利用一樣構造法，並且利用全等進行證明。在 $\overrightarrow{CB}$ 取一點 F'，使得 $\overline{BF'}=\overline{DF}$。$\triangle ABF'\cong\triangle ADF$（SAS 全等）。在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AEF'$ 中，$\overline{AF}=\overline{AF'}$、$\overline{AE}=\overline{AE}$、$\overline{EF}=\overline{BE}+\overline{DF}=\overline{EF'}$，所以 $\triangle AEF\cong\triangle AEF'$（SSS 全等），可得 $\angle EAF=\angle EAF'=\angle EAB+\angle FAD=\frac{90°}{2}=45°$。

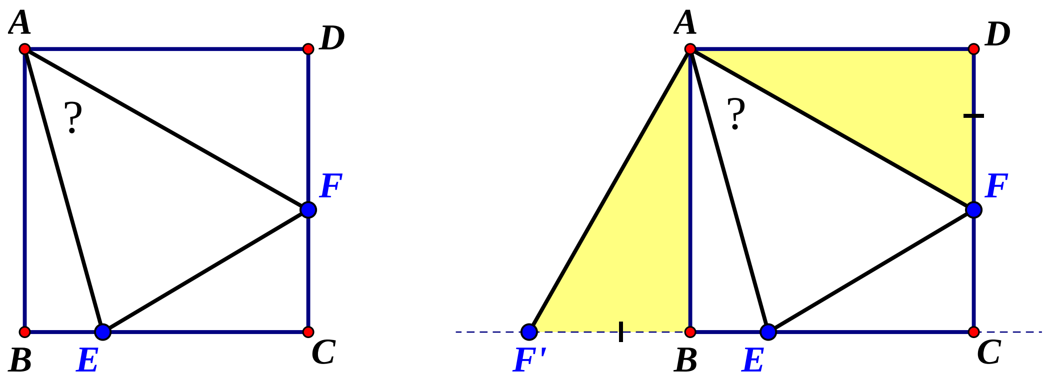


圖 2：段考試題的逆命題。

我們又發現 $\overline{BE}+\overline{DF}=\overline{EF}$ 等價直角 $\triangle CEF$ 的周長等於正方形 $ABCD$ 邊長的兩倍，即 $\overline{CE}+\overline{CF}+\overline{EF}=\overline{CE}+\overline{CF}+\overline{BE}+\overline{DF}=2\overline{AB}$。

$$\angle EAF=45°\Leftrightarrow\overline{BE}+\overline{DF}=\overline{EF}\Leftrightarrow\triangle CEF \text{ 周長為 } 2\overline{AB}$$

二、 文獻探討

我們與指導老師討論此題目後，老師告訴我們這個條件出現在不少競賽中，核心概念都是全等。例如：2010 年青少年數學國際城市邀請賽初選的個人競賽試題的計算證明第 2 題 [1] 或書籍《初中數學競賽教程》[2, p. 240]「已知四邊形 $ABCD$ 為正方形，點 F 在 $\overline{CD}$ 上，點 E 在 $\overline{BC}$ 上，使得 $\angle EAF=45°$，由 A 作 $\overline{EF}$ 之垂線，垂足為點 H，試證 $\overline{BE}=\overline{EH}$ 或 $\overline{AB}=\overline{AH}$」。

然而，我們深入研究這個問題在動態下存有許多沒有被討論到的不變量及軌跡性質，可以探討的項目十分豐富。另外，由於原始條件為「正方形內接四十五度的三角形」，其中正方形是很強的條件，若要進行推廣，能改成什麼樣的四邊形？另外四十五度的三角形，四十五度只是因為九十度的一半嗎？這個動態幾何的內在結構到底是什麼呢？為了解決這些問題，於是我們展開以下研究。

三、 研究目的

（一） 刻劃正方形內接四十五度的三角形的性質。

（二） 刻劃長方形、菱形、直角箏形內接三角形的性質。

（三） 刻劃兩組四點共圓條件下的箏形內接三角形的性質。

（四） 刻劃四邊形內接三角形之面積比值為定值的構圖充分條件。

貳、 研究設備與器材

幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 軟體。

參、 預備知識

預備性質 1 (四點共圓)

(1) 四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle BAC=\angle BDC$，若且唯若 A、B、C、D 四點共圓。

(2) 四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle DAB+\angle BCD=180°$，若且唯若 A、B、C、D 四點共圓。

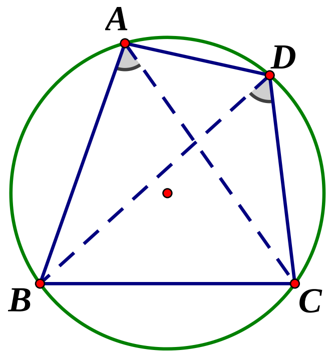


圖 3：判別四點共圓（1）

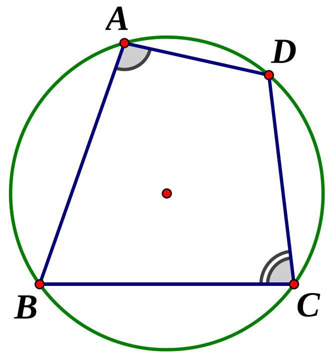


圖 4：判別四點共圓（2）

預備性質 2 (正弦定理)

在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊邊長分別為 a、b、c，則 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$。

預備性質 3 (共角定理)

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\angle A=\angle D$，則

$\triangle ABC:\triangle DEF=\overline{AB}\times\overline{AC}:\overline{DE}\times\overline{DF}$。

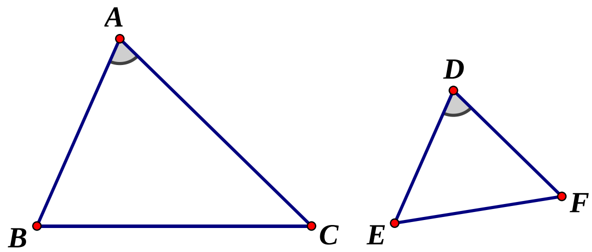


圖 4：共角三角形。

肆、　研究過程與結果

一、 刻劃正方形內接四十五度的三角形的性質

（一）長度性質

前面討論得知 $\angle EAF = 45° \Leftrightarrow \overline{BE} + \overline{DF} = \overline{EF} \Leftrightarrow \triangle CEF$ 周長為 $2\overline{AB}$，因此本節我們直接設定 $\angle EAF = 45°$ 的條件下去討論，我們發現有趣的性質。

性質 1：$\overline{EF}$ 邊上的高的長度恆等於正方形 $ABCD$ 的邊長。

證明：如圖，仿照原本的構造法，因為 $\angle EAF = 45°$，我們可得出 $\triangle AEF \cong \triangle AEF'$（SAS 全等），令 $\overline{AH}$ 為 $\overline{EF}$ 邊上的高，又 $\overline{AB}$ 為 $\overline{EF'}$ 邊上的高，因此 $\overline{AH} = \overline{AB}$。

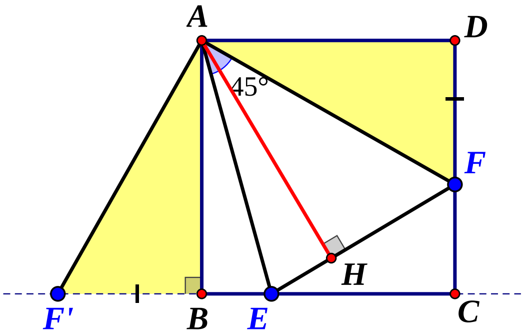


圖 6：$\overline{EF}$ 邊上的高為定值

□

性質 2：當 E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上移動，當 F 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上移動，$\overleftrightarrow{EF}$ 構成的包絡線為一圓，圓心為 A 點，半徑為 $\overline{AB}$。

證明：根據前性質可得 $\triangle AEF$ 的 $\overline{EF}$ 邊上的高 $\overline{AH}$ 恆等於 $\overline{AB}$ 的長度，當 E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上移動，$\overleftrightarrow{EF}$ 為以 A 點為圓心且半徑為 $\overline{AB}$ 的圓切線。即此圓為直線族 $\overleftrightarrow{EF}$ 的包絡線。

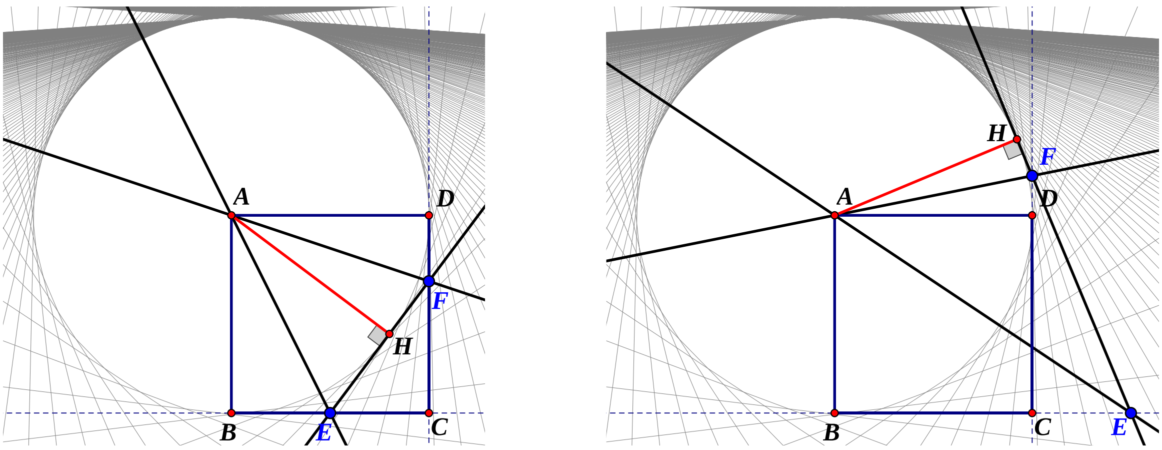


圖 7：$\overleftrightarrow{EF}$ 的包絡線為圓

□

（二）面積性質

考慮 E 點為 $\overleftrightarrow{BC}$ 上的動點且 F 點為 $\overleftrightarrow{CD}$ 的動點，連接 $\overleftrightarrow{BD}$，$\overleftrightarrow{AE}$ 交 $\overleftrightarrow{BD}$ 於 M 點，$\overleftrightarrow{AF}$ 交 $\overleftrightarrow{BD}$ 於 N 點。我們以下證明 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$。

引理 3：$\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$ 且 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$。

證明：

構造 $\triangle ABF' \cong \triangle ADF$（SAS 全等）、$\triangle ADE' \cong \triangle ABE$（SAS 全等），可得出 $\triangle AEF \cong \triangle AEF' \cong \triangle AE'F$（SAS 全等），所以 $\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$ 且 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$。

□

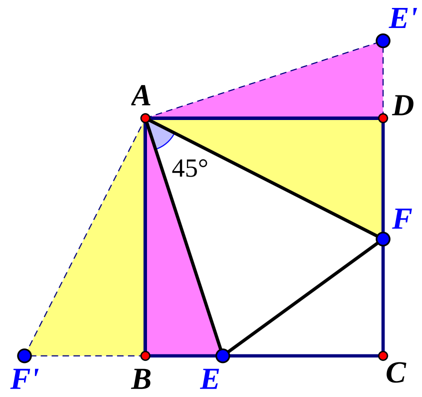


圖 8：兩次構造全等

性質 4：$\triangle AMN \sim \triangle AFE$ 且 $\triangle AEF$ 的面積是 $\triangle AMN$ 的面積的 2 倍。

證明：

1. 因為 $\angle EAF = 45° = \angle NBE$ 且 A、B 為兩定點，所以 A、B、N、E 四點共圓，所以 $\angle ANB = \angle AEB$（當 E 點在 B 點左側時並不影響共圓與角度），又根據前面的引理，$\angle AEF = \angle AEB$，因此 $\angle ANM = \angle AEF$。

2. 同樣方式下，我們也可以得出 $\angle AMN = \angle AFE$，所以 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$（AA 相似）。

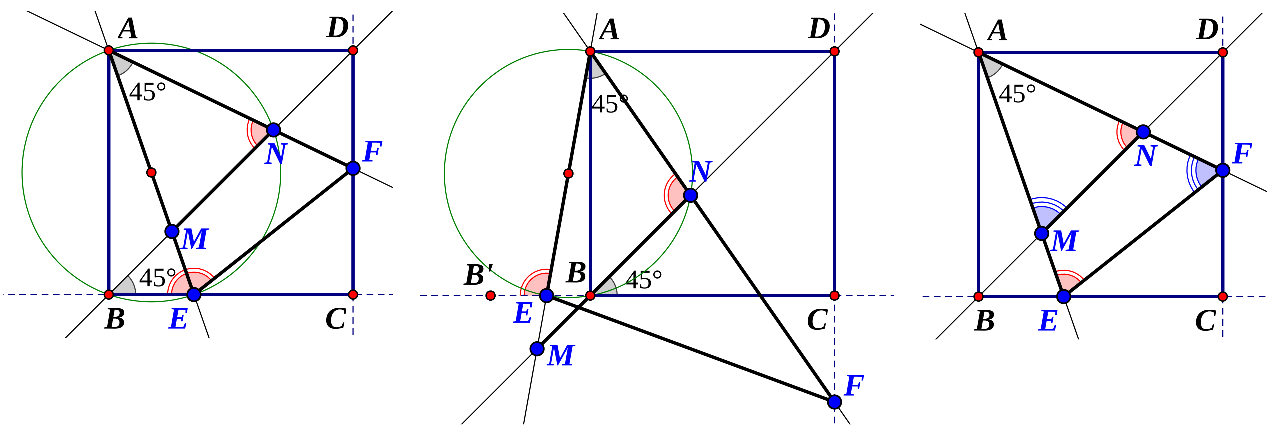


圖 9：$\triangle AMN \sim \triangle AFE$

3. 再討論 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 的面積比，分別過 A 點作 $\overline{EF}$、$\overline{MN}$ 上的高 $\overline{AH}$ 與 $\overline{AK}$，根據性質 2 得知 $\overline{AH} = \overline{AB}$，又 $\overline{BD}$ 為正方形對角線，所以 K 必為 $\overline{BD}$ 的中點，

$\overline{AK} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \overline{AB}$，因此 $\triangle AMN : \triangle AFE = \overline{AK}^2 : \overline{AH}^2 = 1:2$。

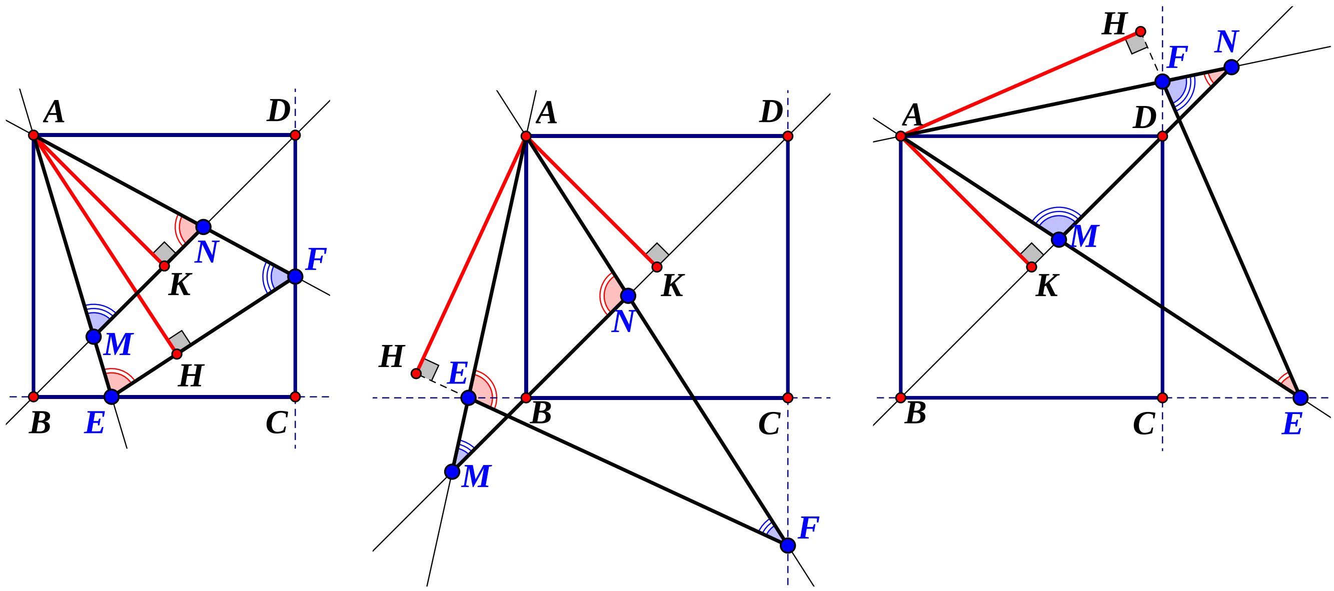


圖 10：$\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 的面積比

□

在前面的長度性質到面積性質可以發現這個幾何問題很有趣，每個性質都是解決下一個性質的工具，環環相扣。由於 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$，所以 E、F、M、N 四點共圓，我們好奇通過 E、F、M、N 四點的圓之圓心在何處？有沒有一些好的性質？

性質 5：動點 E、F、M、N 與定點 C 五點共圓且圓心恆為 $\overline{EF}$ 的中點。

證明：根據前性質可得，A、B、N、E 四點共圓，所以 $\angle FNE = \angle ABC = 90°$，同理我可得 $\angle EMF = \angle ADC = 90°$。直角 $\triangle FNE$ 和直角 $\triangle EMF$ 共用斜邊，所以其外接圓相同，其圓心為 $\overline{EF}$ 的中點 P，又 $\angle C = 90°$，所以動點 E、F、M、N 與定點 C 五點共圓。

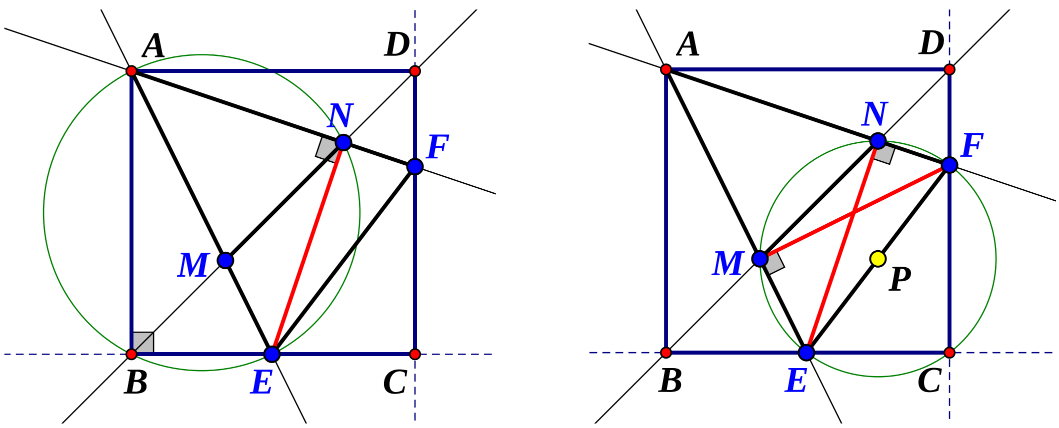


圖 11：五點共圓

□

我們建構了輔助線，巧妙利用多次的共圓與相似，證明了動點 P 的軌跡為雙曲線。

性質 6：在正方形 $ABCD$ 中，E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，$\overline{EF}$ 的中點 P（五邊形 $ECFNM$ 的外接圓圓心）的軌跡為等軸雙曲線，滿足 $|\overline{PC}-\overline{PC_1}|=2\overline{AB}$。

證明：

1. 如圖，在 $\overrightarrow{CB}$ 上取一點 X 使得 $\overline{BX}=\overline{CB}$、在 $\overrightarrow{CD}$ 上取一點 Y 使得 $\overline{DY}=\overline{CD}$，平面上再取一點 C_1 使得四邊形 C_1XCY 為正方形。連接 $\overline{PN}$ 與 $\overline{PM}$，根據性質 5 得知動點 E、F、M、N 與定點 C 五點共圓且圓心為 P 點，所以 $\overline{PN}=\overline{PF}$，即 $\angle PNF=\angle PFN$，又因為根據引理 3 得知 $\angle PFN=\angle AFD$，再得 $\angle PNF=\angle AFD$，$\overleftrightarrow{PN}\parallel\overleftrightarrow{CD}$，同理可得 $\overleftrightarrow{PM}\parallel\overleftrightarrow{CB}$，故 $\triangle PMN$ 為等腰直角三角形。令 $\overleftrightarrow{XN}$ 與 $\overleftrightarrow{YM}$ 交於 Q 點，連接 $\overline{XY}$，因為 $\overline{MN}\parallel\overline{XY}$，可得 $\angle QXY=\angle QNM$、$\angle QYX=\angle QMN$。

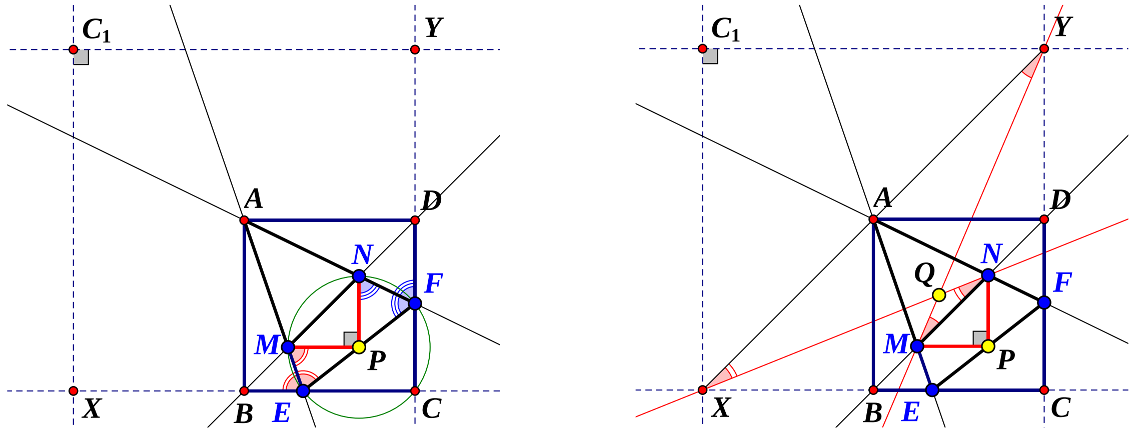


圖 12：幾何關係分析 (1)

2. 在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle NBA$ 中，$\angle ADM=45°=\angle NBA$。根據性質 5 的共圓得知 $\angle DAM=\angle MFC=\angle MEB$，又根據引理 3 得 $\angle MEB=\angle MEF$，由共圓再得 $\angle MEF=\angle BNA$，最後得 $\angle DAM=\angle BNA$，所以 $\triangle ADM\sim\triangle NBA$（AA 相似）。

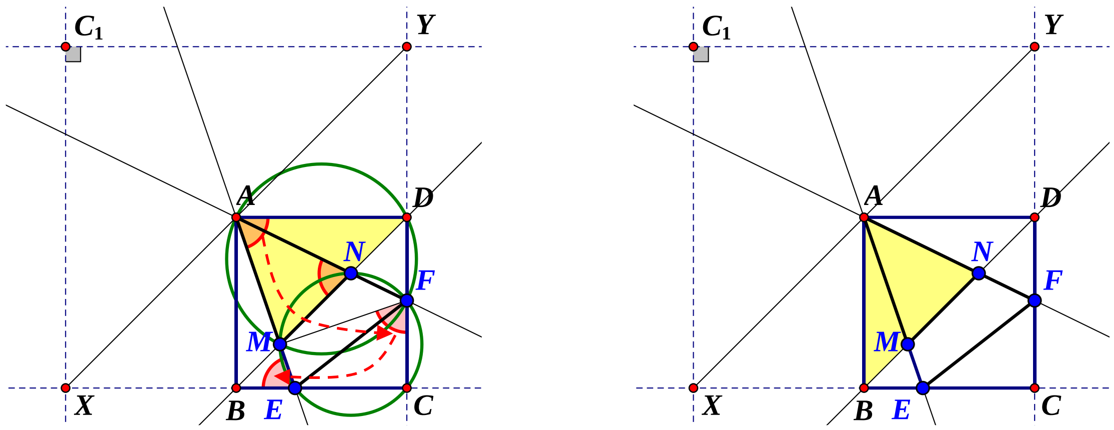


圖 13：幾何關係分析 (2)

3. 因為 $\triangle ADM \sim \triangle NBA$，推得 $\overline{DA} : \overline{DM} = \overline{BN} : \overline{BA}$，我們再將 $\overline{DA}$ 與 $\overline{BA}$ 代換可得 $\overline{DY} : \overline{DM} = \overline{BN} : \overline{BX}$，又 $\angle MDY = 135° = \angle XBN$，所以 $\triangle MDY \sim \triangle XBN$（SAS 相似），可得 $\angle MYD = \angle XNB$ 且 $\angle YMD = \angle NXB$，最後我們再得四個相似三角形 $\triangle MDY \sim \triangle XBN \sim \triangle YQX \sim \triangle MQN$（AA 相似），所以 $\angle YQX = \angle MQN = 135°$。注意到 $\angle YQX = \angle MQN$ 為定角 $135°$ 且 $\angle YC_1X = \angle MPN = 90°$，於是有兩組三點共圓，$Y$、$X$、$Q$ 點共圓且圓心為 C_1 點，以及 M、N、Q 點共圓且圓心為 P 點。

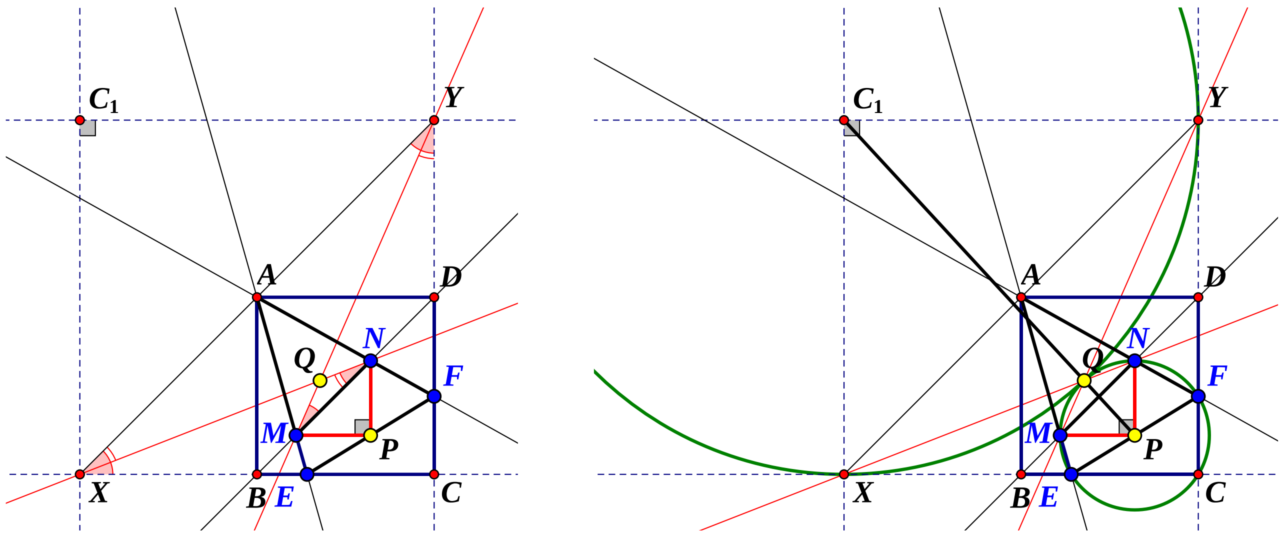


圖 14：共圓

4. 在等腰 $\triangle NPQ$ 和 $\triangle XC_1Q$ 中，因為 $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{C_1X}$ 可得底角 $\angle PNQ = \angle C_1XQ$，所以我們有 $\triangle NPQ \sim \triangle XC_1Q$，再得 $\angle NQP = \angle XQC_1$，因此 C_1、Q、P 三點共線。考慮 $\overline{PC_1} - \overline{PC} = \overline{PC_1} - \overline{PQ} = \overline{QC_1} = 2\overline{AB}$ 為定長。當 P 點在另外一支的證明方式亦同，最後得出 $\overline{PC} - \overline{PC_1} = \overline{PQ} - \overline{PC_1} = \overline{QC_1} = 2\overline{AB}$，因此動點 P 的軌跡為雙曲線。

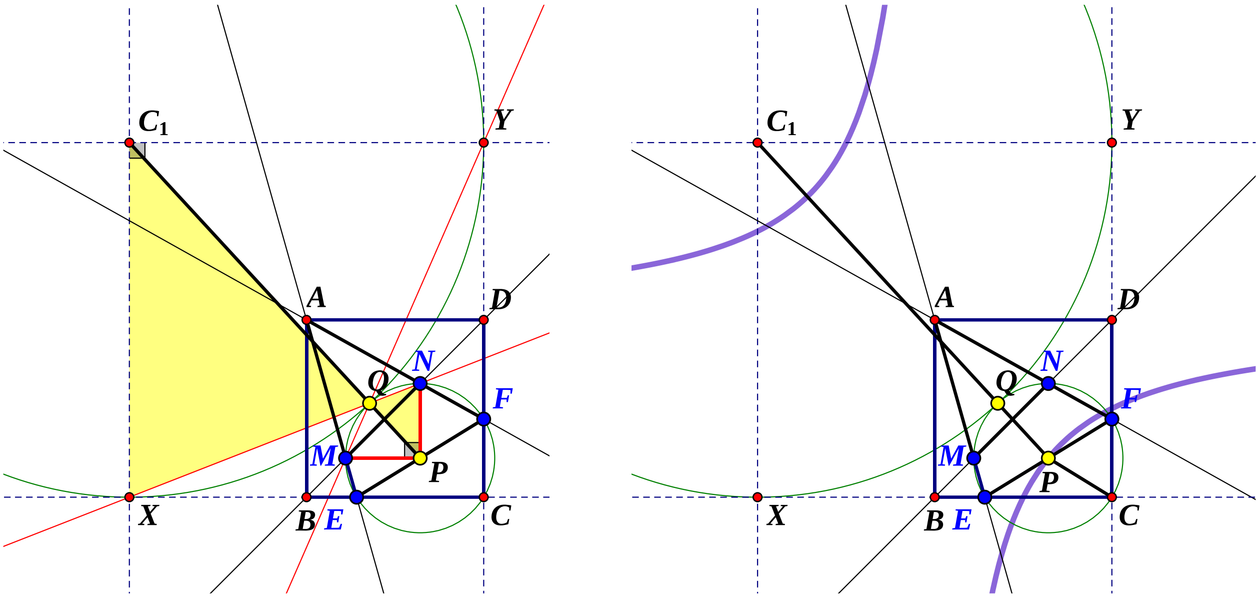


圖 15：P 點的軌跡為雙曲線

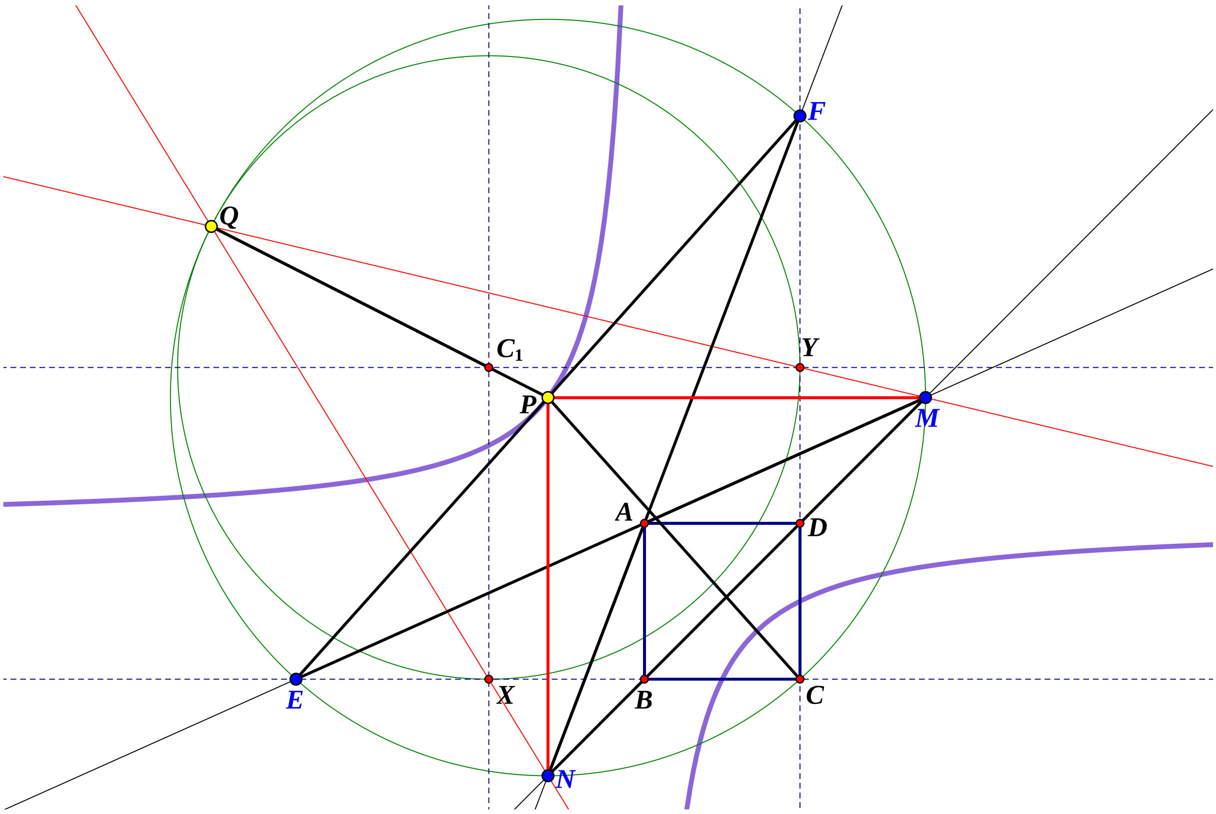


圖 16：P 點的軌跡為雙曲線（另一支）

5. 令 $\overleftrightarrow{C_1X}$ 交雙曲線於 P_1 與 P_2 點，則貫軸長 $\overline{P_1P_2}=2\overline{AB}$，共軛軸長為 $2\sqrt{\left(\frac{\overline{CC_1}}{2}\right)^2-\left(\frac{\overline{P_1P_2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2\overline{AB}^2-\overline{AB}^2}=2\overline{AB}$，因此 P 點的軌跡為等軸雙曲線，漸近線為 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{AD}$。

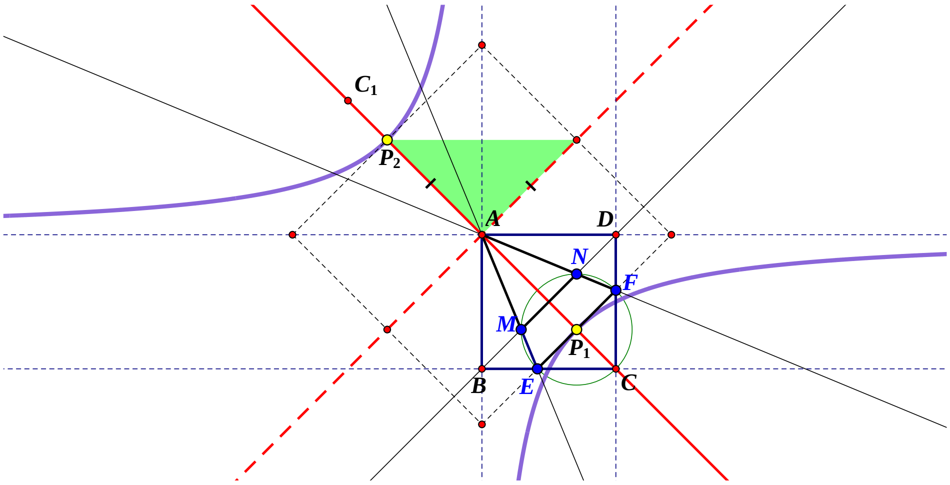


圖 17：P 點的軌跡為等軸雙曲線

二、 刻劃長方形、菱形、直角箏形內接三角形的性質

在前一節的研究給出許多豐富的性質，有趣的是這些性質都環環相扣，我們最感興趣的是 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 的面積比值為定值，以及四個動點 E、F、M、N 共圓，我們接下來就聚焦在這兩個項目進行探討。由於正方形同時具備四邊等長性質、四個角為直角性質，所以我們依序放寬條件去探討推廣情形，如下圖。

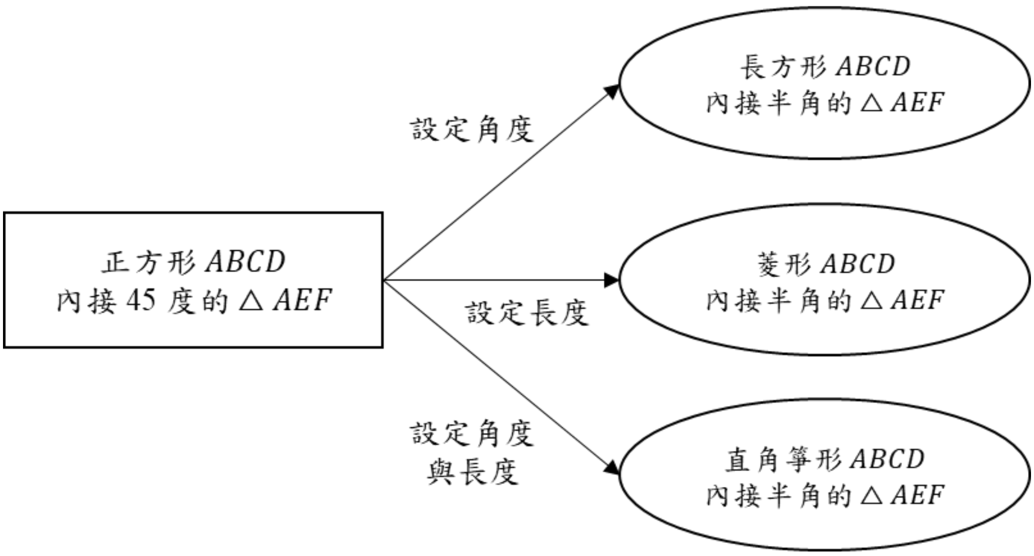


圖 18：長方形、菱形、直角箏形內接三角形

（一）長方形 $ABCD$ 內接 45 度的 $\triangle AEF$

長方形 $ABCD$ 中，E 點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，F 點在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF = 45°$，$\overleftrightarrow{BD}$ 分別與 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$ 交於 M、N 兩點。我們利用 GSP 幾何繪圖軟體觀察實驗，結果發現 $\triangle AEF$ 的面積與 $\triangle AMN$ 的面積比值並不是定值，如下圖。

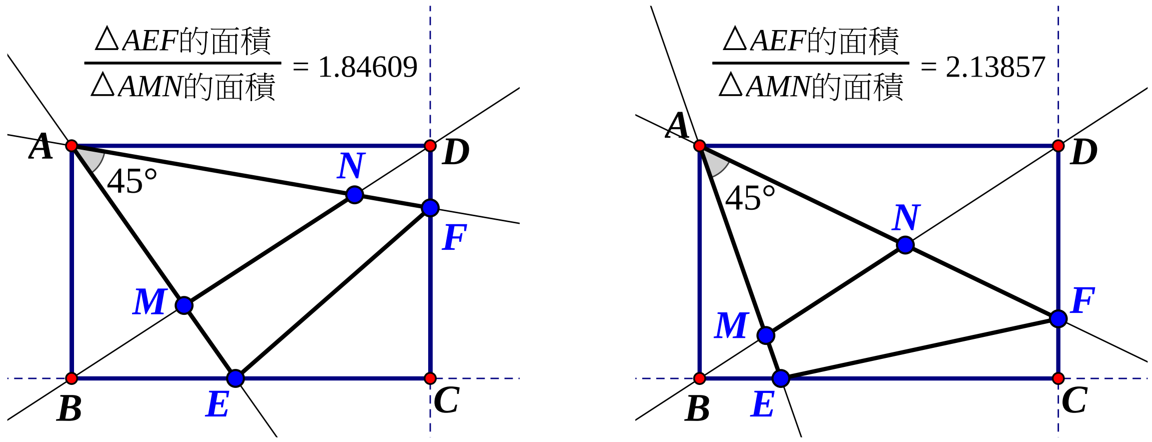


圖 19：長方形內接 45 度的三角形

（二）菱形 $ABCD$ 內接半角的 $\triangle AEF$（$\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$）

菱形 $ABCD$ 中，E 點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，F 點在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$，$\overleftrightarrow{BD}$ 分別與 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$ 交於 M、N 兩點。我們利用 GSP 幾何繪圖軟體觀察實驗，結果發現 $\triangle AEF$ 的面積與 $\triangle AMN$ 的面積比值並不是定值，如下圖。

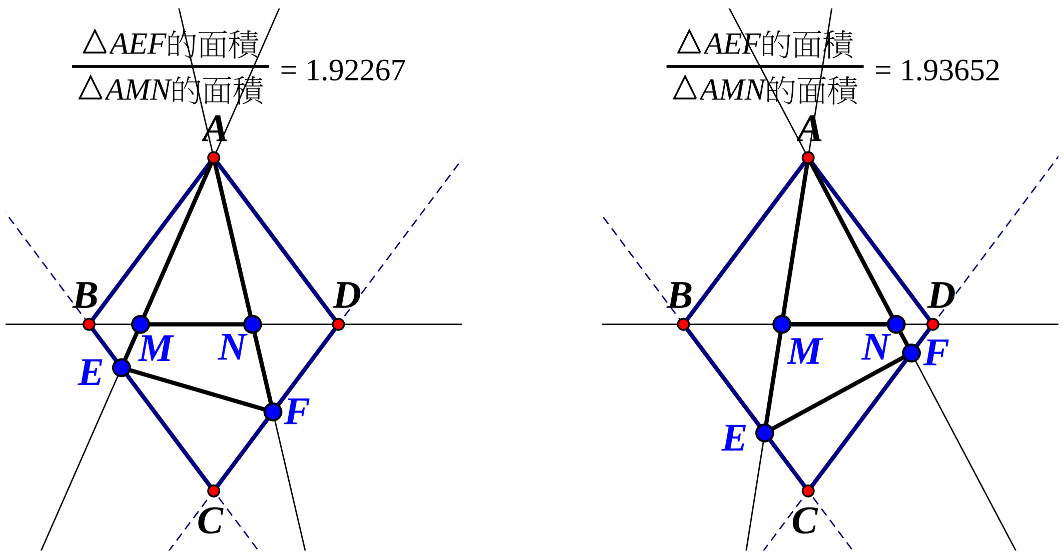


圖 20：菱形內接半角三角形

（三）直角箏形 $ABCD$ 內接半角的 $\triangle AEF$（$\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$）

直角箏形 $ABCD$ 中，$\angle B = \angle D = 90°$，$E$ 點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，F 點在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$，$\overleftrightarrow{BD}$ 分別與 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$ 交於 M、N 兩點。我們利用 GSP 幾何繪圖軟體觀察實驗，有趣的是 $\triangle AEF$ 的面積與 $\triangle AMN$ 的面積比值是定值，如下圖。

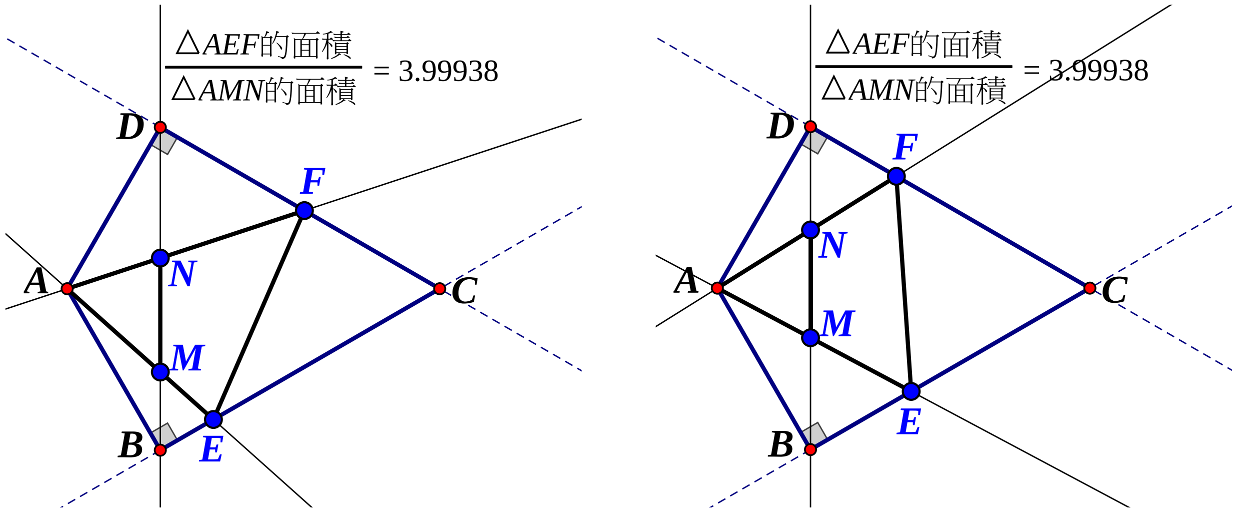


圖 21：直角箏形內接半角三角形

我們接下來一般化證明所有的直角箏形都存在半角構造的 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN}$ 面積定值。

定理 7：對於任意直角箏形 $ABCD$，$\triangle AMN \sim \triangle AFE$ 且 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + 1$。

證明：

1. 過 A 作 $\triangle AEF$ 的高 $\overline{AH}$，在 $\overleftrightarrow{CB}$ 上取一點 F' 使得 $\overline{BF'} = \overline{DF}$，如同正方形構圖，我們可以得出 $\triangle ABF' \cong \triangle ADF$ 且 $\triangle AEF' \cong \triangle AEF$，所以 $\overline{AH} = \overline{AB}$，$\overline{AH}$ 為定長。
2. 令對角線 $\overleftrightarrow{BD}$ 分別與 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$ 交於 M、N 點，因為 $\angle B = \angle D = 90°$，得出 $\angle BAD = 180° - \angle BCD$，又 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$，再得 $\angle EAF = \frac{1}{2}(180° - \angle BCD) = \angle CBD = \angle CDB$，最後可得出 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$（AA 相似）。

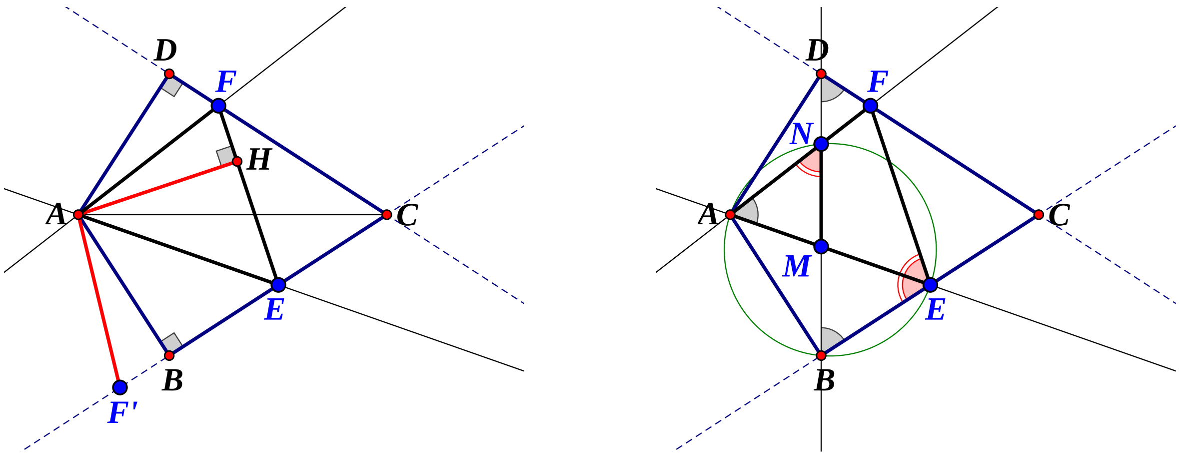


圖 22：直角箏形內 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$

3. 過 A 點作 $\triangle AEF$ 的高 $\overline{AH}$，因為 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 相似，$\triangle AEF:\triangle AMN=\overline{AH}^2:\overline{AK}^2=\overline{AB}^2:\overline{AK}^2$。在 $\triangle AKB$ 與 $\triangle ABC$ 中，$\angle AKB=\triangle ABC=90°$ 且 $\angle KAB=\triangle BAC$（共角），所以 $\triangle AKB\sim\triangle ABC$（AA 相似），於是我們得出 $\overline{AB}^2:\overline{AK}^2=\overline{AC}^2:\overline{AB}^2=(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2):\overline{AB}^2$，因此 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN}=\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2+1$。

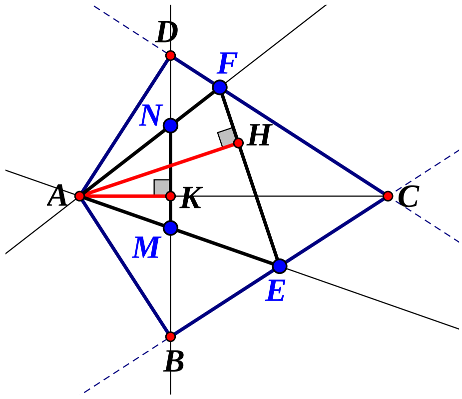


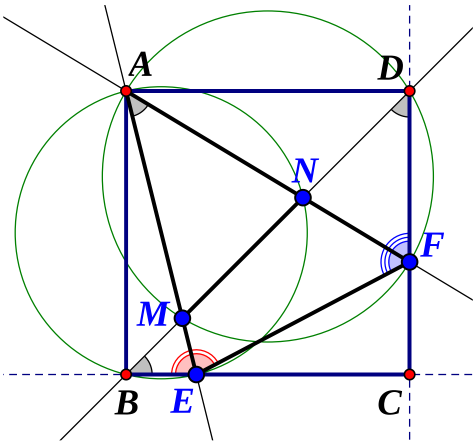
圖 23：面積比

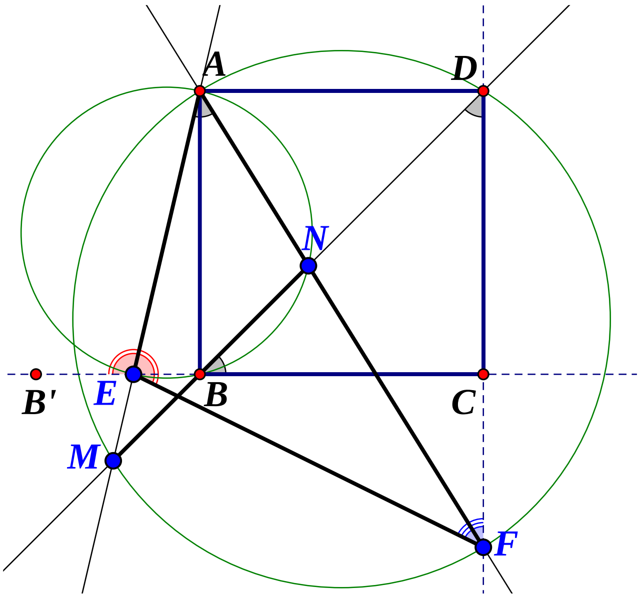
□

三、 刻劃兩組四點共圓條件下的箏形內接三角形的性質

（一）箏形 $ABCD$ 中，兩組四點共圓

分析原始的正方形構圖，以及推廣的直角箏形構圖，我們發現 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 面積為定值的證明過程中可以發現因為兩組四點共圓使得 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 相似，之後再求出其面積比值。如圖，我們把兩個圖形畫出來分析，發現其內在的幾何結構不是半角 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，而是 $\angle EAF=\angle CBD=\angle CDB$，也就是說在四邊形 $ABCD$ 必須滿足 $\overline{BC}=\overline{CD}$，此外還須滿足 $\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$（$\angle B'EF$）與 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$（$\angle D'FE$）。





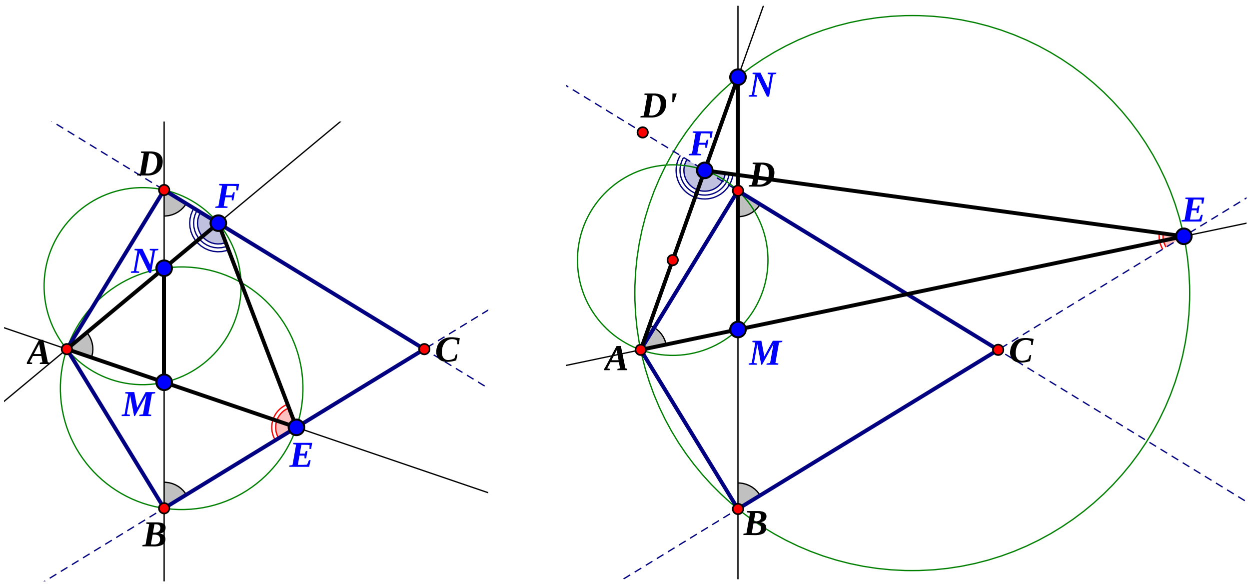


圖 24：幾何結構分析

我們接下來把直角箏形的條件放寬探究，先將箏形 $ABCD$ 中的「直角條件 $\angle B=\angle D=90°$」刪除。

考慮在箏形 $ABCD$ 中，約定 $\overline{AB}=\overline{AD}$ 且 $\overline{CB}=\overline{CD}$，$E$ 點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上，F 點在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF=\angle CBD=\angle CDB$（兩組四點共圓條件下）。令 $\overleftrightarrow{BD}$ 分別與 $\overleftrightarrow{AE}$、$\overleftrightarrow{AF}$ 交於 M、N 兩點，構造出共角的 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$，如下圖，這時候 $\angle EAF$ 不一定會等於 $\angle BAD$ 的一半，我們好奇 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 相似嗎？

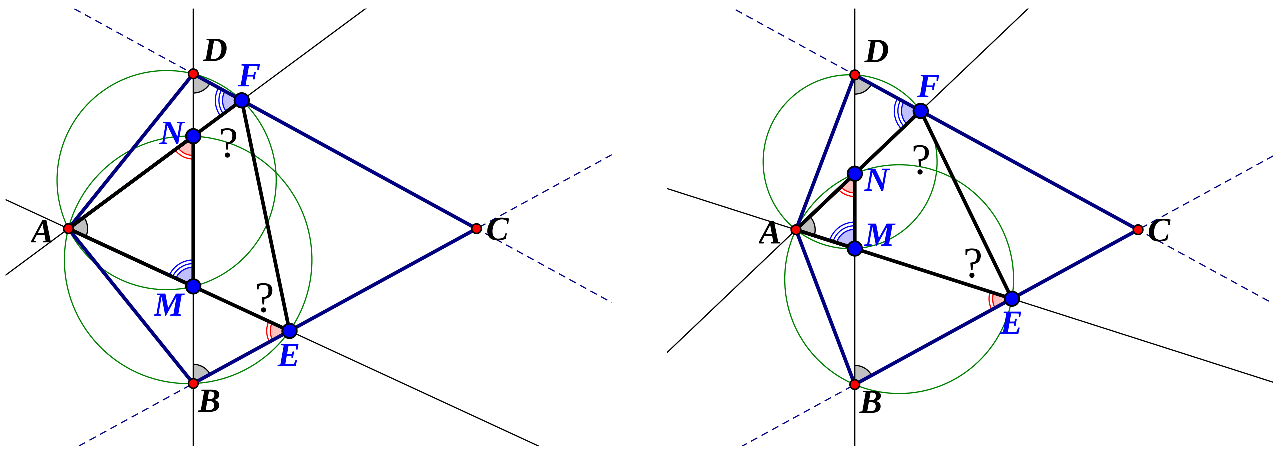
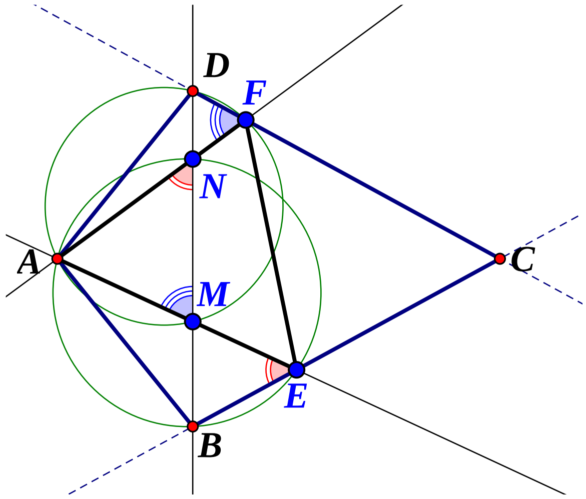


圖 25：任意箏形的構圖

我們先用 GSP 幾何軟體實驗觀察發現 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 相似，兩組共圓的條件下，可以得出 $\angle BEA=\angle BNA$ 且 $\angle AFD=\angle AMD$，因此我們要證明的是為什麼「$\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$ 且 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$」？



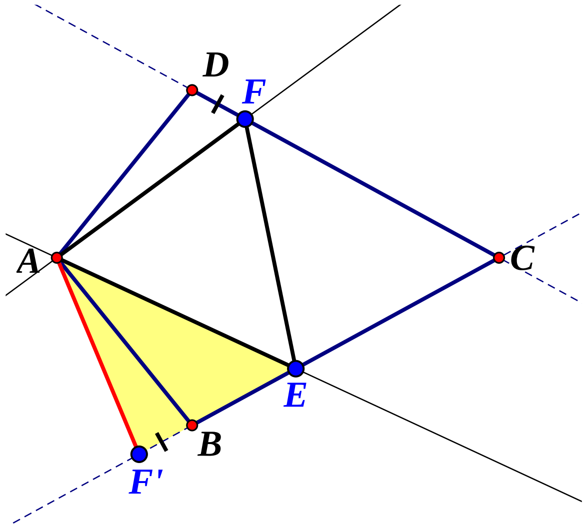


圖 26：分析任意箏形結構

我們是否能仿照正方形或直角箏形的方法嗎？如上圖，若在 $\overrightarrow{CB}$ 上取一點 F'，使得 $\overline{BF'} = \overline{DF}$，由於 $\angle ADC$ 和 $\angle ABF'$ 不一定相等，所以 $\triangle ABF'$ 與 $\triangle ADF$ 不一定會全等，再得 $\triangle AF'E$ 與 $\triangle AEF$ 不一定會全等，因此無法用正方形或直角箏形的方法去證明「$\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$ 且 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$」。

如果可以證明「$\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$ 且 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$」就能證明「$\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 相似（AA相似）」，因此我們花了許多時間思考怎麼證明「$\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$ 且 $\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$」，然而嘗試許多輔助線也沒有成功，於是換個方向思考，因為 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 有了共角的條件 $\angle EAF = \angle NAM$，再考慮處理邊長比值「$\overline{AE}$ 比 $\overline{AN}$，以及 $\overline{AF}$ 比 $\overline{AM}$」兩者相等，我們改為利用 SAS 相似判別條件。

定理 8：對於任意箏形 $ABCD$，$\triangle AMN \sim \triangle AFE$ 且 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN} = \left(\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ABD}\right)^2$。

證明：

1. 因為 A、N、E、B 四點共圓，可得 $\angle AEN = \angle ABD$ 且 $\angle ANE = 180° - \angle ABC$；同理，$A$、$M$、$F$、$D$ 四點共圓，所以 $\angle AFM = \angle ADB$ 且 $\angle AMF = 180^{\circ} - \angle ADC$。
2. 在 $\triangle AEN$ 中，根據正弦定理得知 $\overline{AN} : \overline{AE} = \sin\angle AEN : \sin\angle ANE = \sin\angle ABD : \sin(180° - \angle ABC) = \sin\angle ABD : \sin\angle ABC$；在 $\triangle AFM$ 中，根據正弦定理得知 $\overline{AM} : \overline{AF} = \sin\angle AFM : \sin\angle AMF = \sin\angle ADB : \sin(180° - \angle ADC) = \sin\angle ADB : \sin\angle ADC$，所以 $\overline{AN} : \overline{AE} = \overline{AM} : \overline{AF}$。
3. 在 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 中，$\angle MAN = \angle FAE$ 且 $\overline{AN} : \overline{AE} = \overline{AM} : \overline{AF} = \sin\angle ABD :$

$\sin\angle ABC$，所以 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$（SAS 相似），故 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN}=\left(\frac{\overline{AE}}{\overline{AN}}\right)^2=\left(\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ABD}\right)^2$。

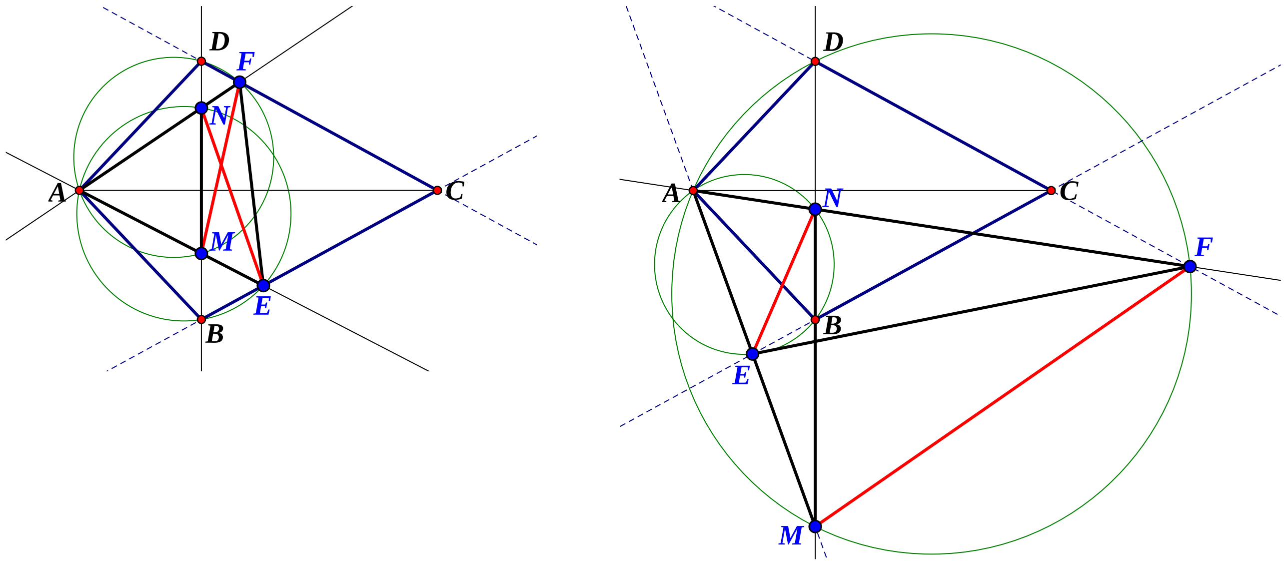


圖 27：任意箏形內 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$

□

根據定理 8，如下圖我們可以推論出在任意箏形 $ABCD$ 中，因為 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 相似，所以四個動點 E、F、M、N 恆共圓，令圓心為 P 點，但是此圓不一定會通過 C 點（四邊形 $ABCD$ 為菱形時，此圓會通過 C 點）。不過有趣的是，當 E 點移動時，觀察 $\overleftrightarrow{MP}$ 與 $\overleftrightarrow{NP}$，我們發現 $\angle MPN$ 保角（為定角），所以等腰 $\triangle PMN$ 的兩個底角 $\angle PMN$ 和 $\angle PNM$ 為定角，即 $\overleftrightarrow{MP}$（$\overleftrightarrow{NP}$）與 $\overleftrightarrow{BD}$ 的交角固定，使得 E 點移動時，$\overleftrightarrow{MP}$ 為一組平行線。同理，我們也發現 $\angle EPF$ 為定角。這個定角性質對於後續刻劃動點 P 的軌跡為雙曲線是很重要的關鍵。

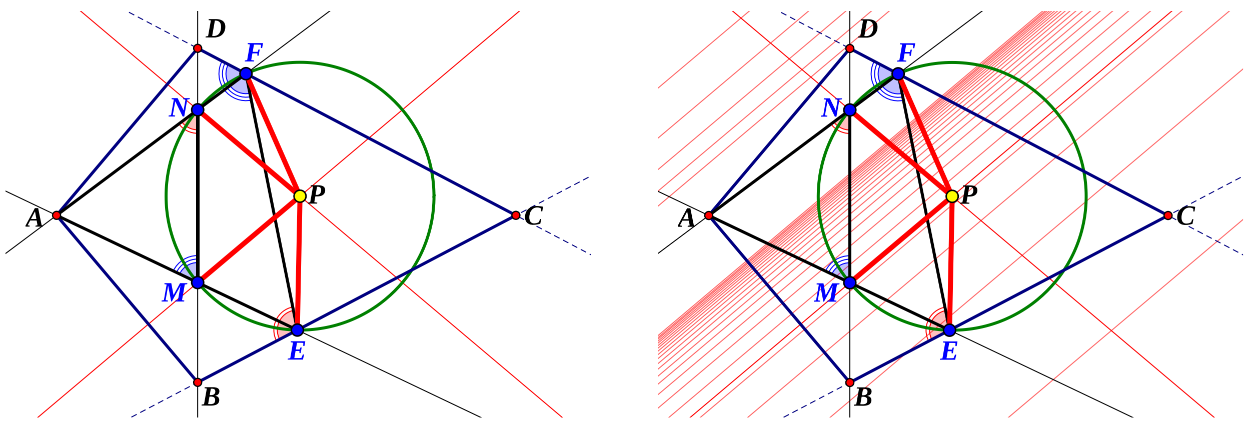


圖 28：任意箏形內 $\angle MPN$ 與 $\angle EPF$ 保角

性質 9：對於任意箏形，當 E 點移動時，$\angle MPN$ 與 $\angle EPF$ 皆為定角。

證明：在圓 P 中，$\angle MPN = \widehat{MN} = 2\angle MEN = 2\angle MFN$。因為 $\angle EAF = \angle CBD = \angle CDB$，所以 A、N、E、B 共圓且 A、M、F、D 共圓，可得 $\angle MEN = \angle AEN = \frac{\widehat{AN}}{2} = \angle ABN$ 且 $\angle MFN = \angle MFA = \frac{\widehat{AM}}{2} = \angle ADM$，即 $\angle MPN = \angle ABN + \angle ADM$。又在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ABN + \angle ADM = 180° - \angle BAD = 2\angle ABD$，故 $\angle MPN$ 為定角。同理，由四點共圓可得 $\angle FNE = \angle ABC$，又 $\angle FNE = \frac{\widehat{EF}}{2}$ 且 $\angle EPF = 360° - \widehat{EF}$，故 $\angle EPF = 360° - 2\angle ABC$。

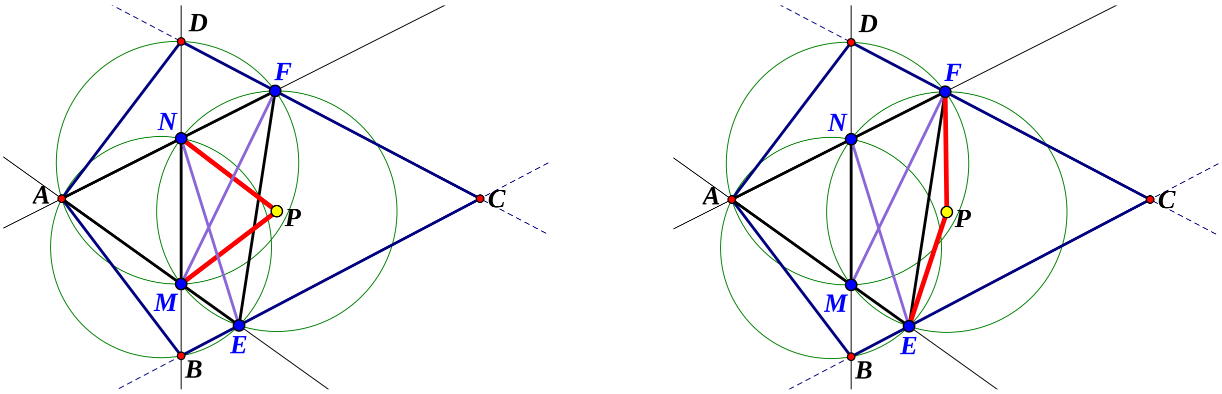


圖 29：$\angle MPN$ 與 $\angle EPF$ 為定角

□

（二）菱形 $ABCD$ 中，圓心 P 點軌跡

定理 8 和性質 9，內在結構是 $\angle EAF = \angle CBD = \angle CDB$，等價 A、N、E、B 四點共圓與 A、M、F、D 四點共圓。由定理 9 可知 E、F、M、N 四點共圓，又因為 A、M、F、D 四點共圓，所以 $\angle AFM = \angle ADB$，在菱形中 $\angle ADB = \angle CDB$，可得 $\triangle AMF$ 與 $\triangle BCD$ 都是等角相同的等腰三角形，再得 $\angle AMF = \angle BCD$，因此 E、F、M、C 四點共圓。

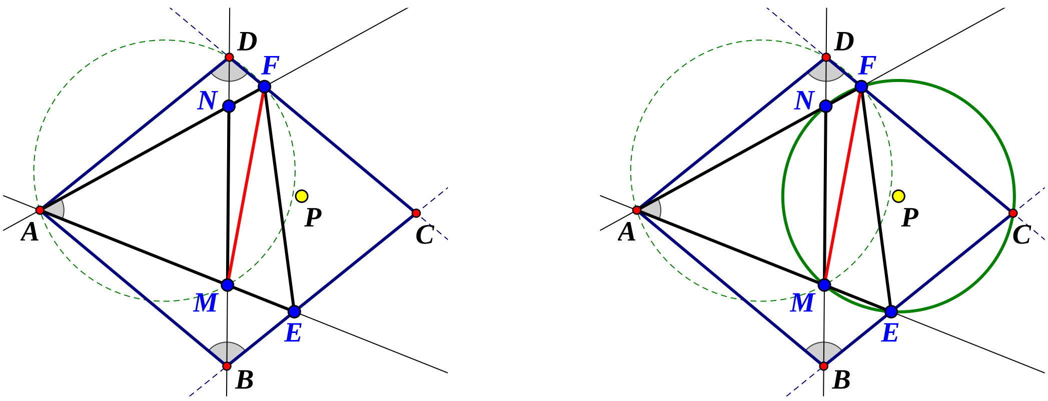


圖 30：E、F、M、N、C五點共圓

接下來我們先處理菱形 $ABCD$ 中，圓心 P 點的軌跡。我們參考性質 7 的正方形證明模型，建造了菱形的證明模型。

在菱形 $ABCD$ 中，在 $\overrightarrow{CB}$ 上取一點 X 使得 $\overline{XB}=\overline{BC}$，在 $\overrightarrow{CD}$ 上取一點 Y 使得 $\overline{YD}=\overline{DC}$，再過 X 點作 $\overleftrightarrow{CB}$ 的垂線，過 Y 點作 $\overleftrightarrow{CD}$ 的垂線，兩垂線交於 C_1 點。因為對稱性，可得 C_1、A、C 三點共線，此外 $\overline{BA}=\overline{BC}=\overline{BX}$，所以 B 點是 $\triangle CXA$ 的外心且 $\overline{XA}\perp\overline{AC}$，同理 $\overline{YA}\perp\overline{AC}$。注意到 $\angle XC_1C=\angle CBD$，又等腰 $\triangle PMN$ 的頂角 $\angle MPN=2\angle ABD=2\angle CBD$，可得 $\overline{PN}\parallel\overline{XC_1}$（內錯角相等），同理 $\overline{PM}\parallel\overline{YC_1}$。

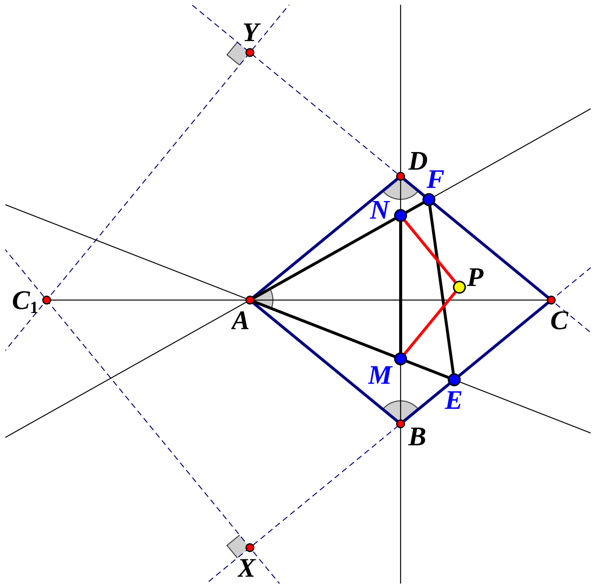
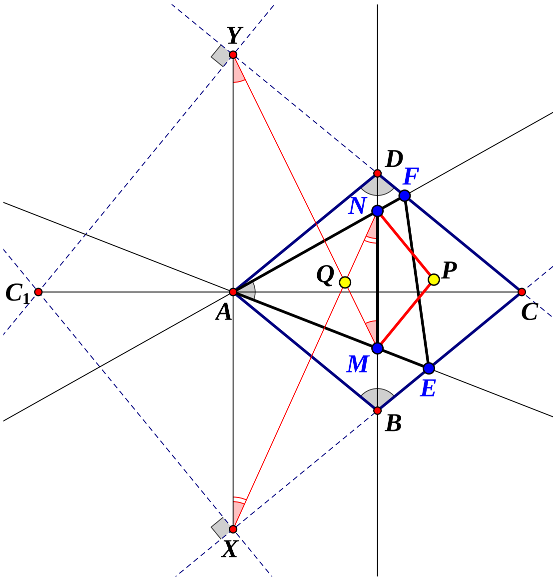


圖 31：建立模型

性質 10：在菱形 $ABCD$ 中，E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，五邊形 $ECFNM$ 的外接圓之圓心 P 點的軌跡為雙曲線。

證明：

1. $\triangle AMN\sim\triangle DMA$、$\triangle AMN\sim\triangle BAN$（AA 相似），推得 $\overline{DA}:\overline{DM}=\overline{BN}:\overline{BA}$，又 $\overline{DA}=\overline{DY}$ 且 $\overline{BA}=\overline{BX}$，所以 $\overline{DY}:\overline{DM}=\overline{BN}:\overline{BX}$。連接 $\overline{MY}$ 與 $\overline{NX}$，在 $\triangle MDY$ 與 $\triangle XBN$ 中，$\overline{DY}:\overline{DM}=\overline{BN}:\overline{BX}$ 且 $\angle MDY=\angle XBN$，推得 $\triangle MDY\sim\triangle XBN$（SAS 相似）。
2. 因為 $\triangle MDY\sim\triangle XBN$，可得 $\angle MYD=\angle XNB$ 且 $\angle YMD=\angle NXB$，又因為 $\overline{BD}\parallel\overline{XY}$ 最後可得出四個相似三角形 $\triangle MDY\sim\triangle XBN\sim\triangle YQX\sim\triangle MQN$（AA 相似），所以 $\angle YQX=\angle MQN=\angle MDY=180°-\angle CDB$。注意到 $\angle YQX=\angle MQN=180°-\angle CDB$ 為定角且 $\angle YC_1X=\angle MPN=2\angle CBD$，於是有兩組三點共圓，$Y$、$X$、$Q$ 點共圓且圓心為 C_1 點，以及 M、N、Q 點共圓且圓心為 P 點。



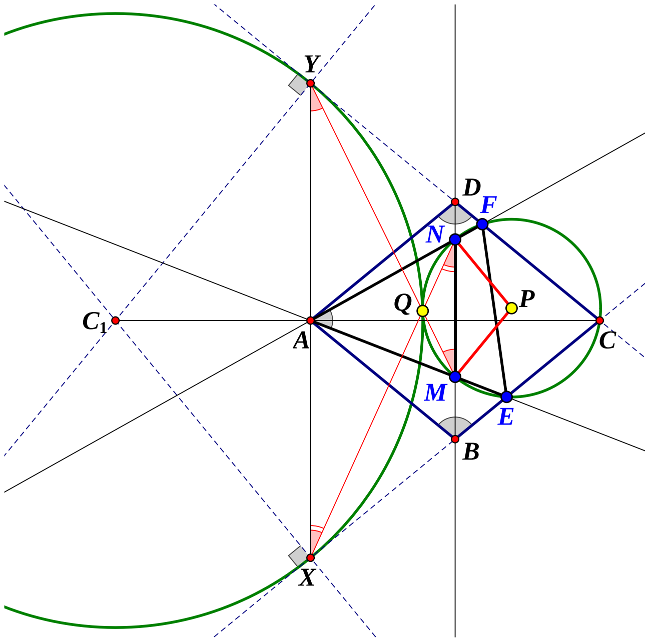


圖 32：相似

3. 在等腰 $\triangle NPQ$ 和 $\triangle XC_1Q$ 中，因為 $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{C_1X}$ 可得底角 $\angle PNQ = \angle C_1XQ$，所以我們有 $\triangle NPQ \sim \triangle XC_1Q$，再得 $\angle NQP = \angle XQC_1$，因此 C_1、Q、P 三點共線。考慮 $\overline{PC_1} - \overline{PC} = \overline{PC_1} - \overline{PQ} = \overline{QC_1} = \overline{QX} = 2\overline{BC} \times \tan(90° - \angle CBD)$ 為定長。當 P 點在另外一支的證明方式亦同，$\overline{PC} - \overline{PC_1} = \overline{PQ} - \overline{PC_1} = \overline{QC_1}$，因此動點 P 的軌跡為雙曲線。

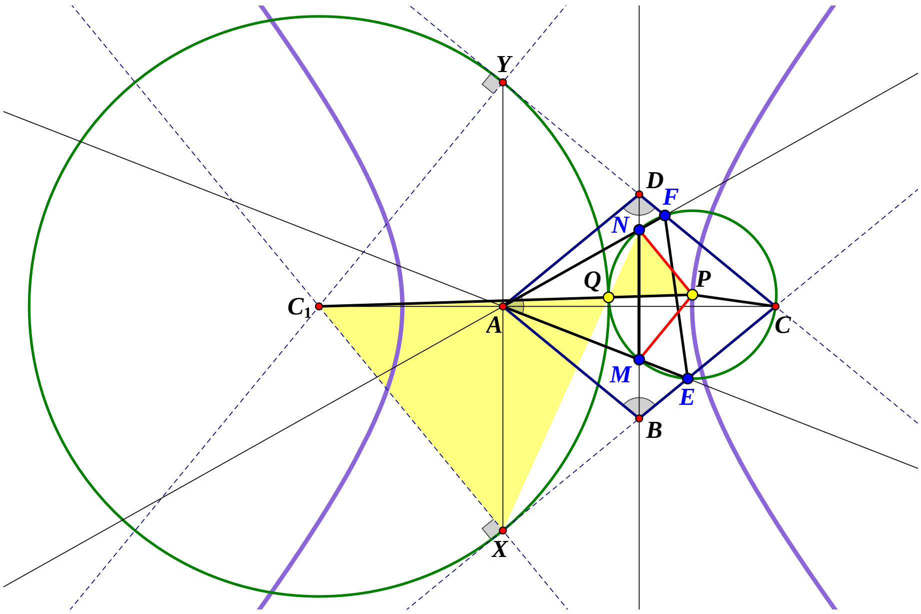


圖 33：P 點的軌跡為雙曲線

4. 因為 $\overline{C_1C}$ 是焦距、$\overline{C_1X}$ 是貫軸長，又 $\overline{C_1X} \perp \overline{XC}$，$\overline{XC} = \sqrt{\overline{C_1C}^2 - \overline{C_1X}^2}$，所以 $\overline{XC}$ 是共軛軸長，因此雙曲線的漸近線與貫軸的夾角就會等於 $\angle CC_1X$，即兩條漸近線分別平

行 $\overline{PM}$ 與 $\overline{PN}$。

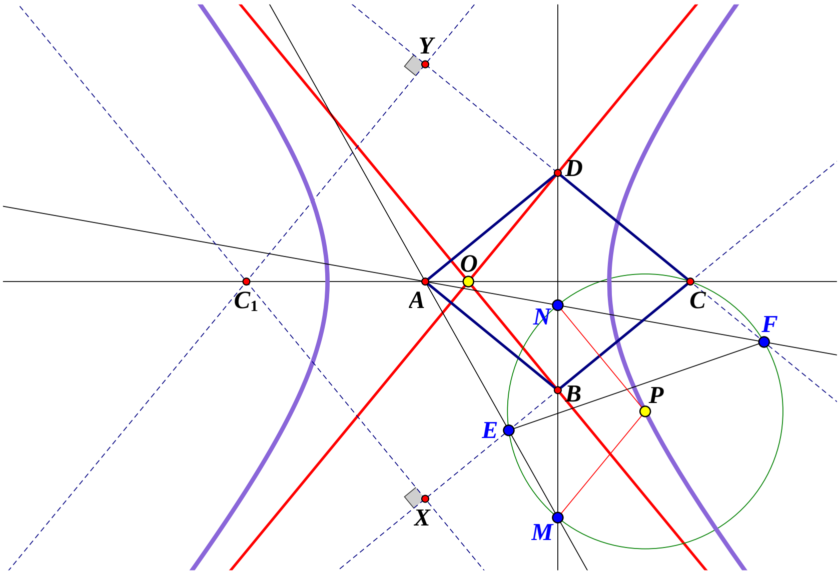


圖 34：雙曲線的漸近線

□

雙曲線的中心是 $\overline{C_1C}$ 的中點，又 $\triangle C_1CX$ 是直角三角形，因此僅須作等腰 $\triangle BCD$ 的外接圓，外接圓與 $\overleftrightarrow{AC}$ 的交點為雙曲線的中心 O 點，而 $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{\overline{C_1C}}{2}$ 是半貫軸長。

（三）任意箏形 $ABCD$ 中，圓心 P 點軌跡

對於任意箏形 $ABCD$ 中，我們深入討論當 E 點移動時，圓心 P 點的軌跡，透過 GSP 軟體描繪 P 點的軌跡，合理推估其軌跡也是雙曲線，然而這個項目的難度顯然比正方形的情形（性質 6）或菱形的情形（性質 10）高許多，因為箏形中的雙曲線中心與焦點都不是箏形 $ABCD$ 的頂點。

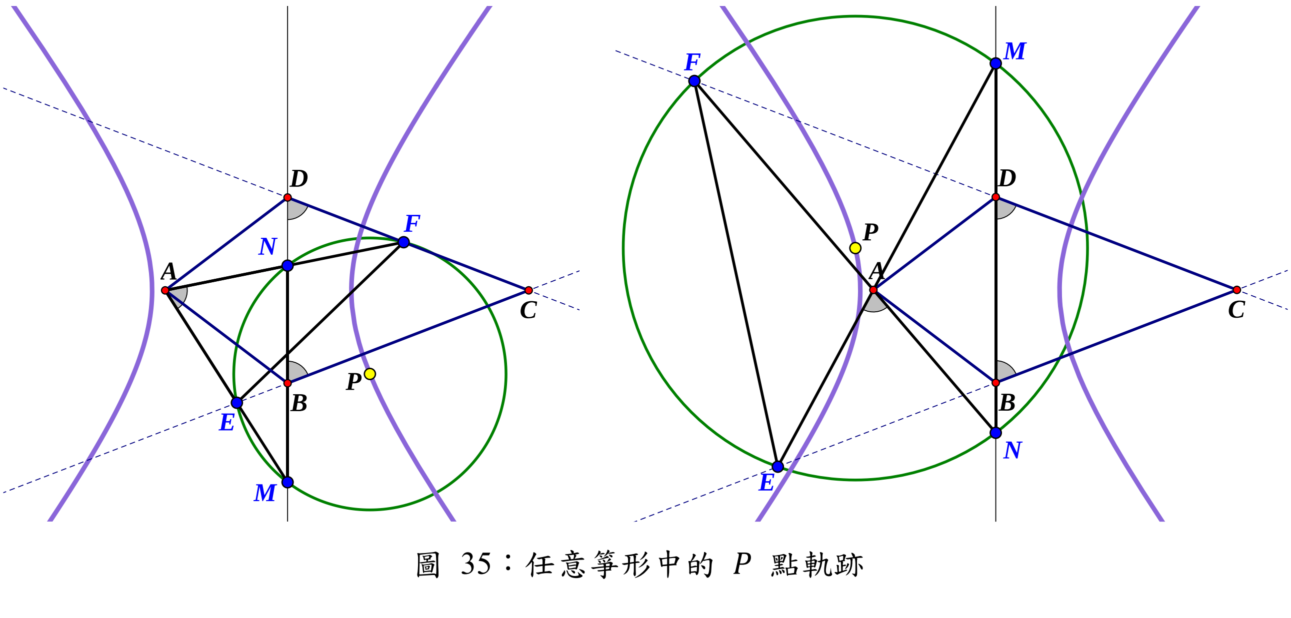


圖 35：任意箏形中的 P 點軌跡

我們一開始想直接從箏形下手證明，然而難度很高，也沒有什麼好結果，後來與指導老師討論後，決定利用菱形的模型入手，對應到箏形，此證明方式是本研究的亮點。

因為菱形 $ABCD$ 的 P 點軌跡雙曲線的中心、貫軸長、漸近線的交角（有了漸近線交角就可以得到焦距）被菱形 $ABCD$ 的邊長 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$ ，以及角度 $\angle ABD=\angle ADB=\angle CBD=\angle CDB=\beta$ 所決定，因此控制邊長與角度就可以構造出所有的雙曲線。

對於任意箏形 $A'B'C'D'$，令 $\overline{A'B'}=\overline{A'D'}$ 且 $\overline{C'B'}=\overline{C'D'}$，$\angle A'B'D'=\angle A'D'B'=\beta$ 且 $\angle C'B'D'=\angle C'D'B'=\alpha$。如下圖，我們將證明對於任何一個菱形 $ABCD$ 中的雙曲線，以及給定角 α，都可以對應到唯一的箏形 $A'B'C'D'$ 中的雙曲線，反之依然。透過對應的觀點，我們證明箏形 $A'B'C'D'$ 中，圓心 P 點軌跡亦為相同的雙曲線，

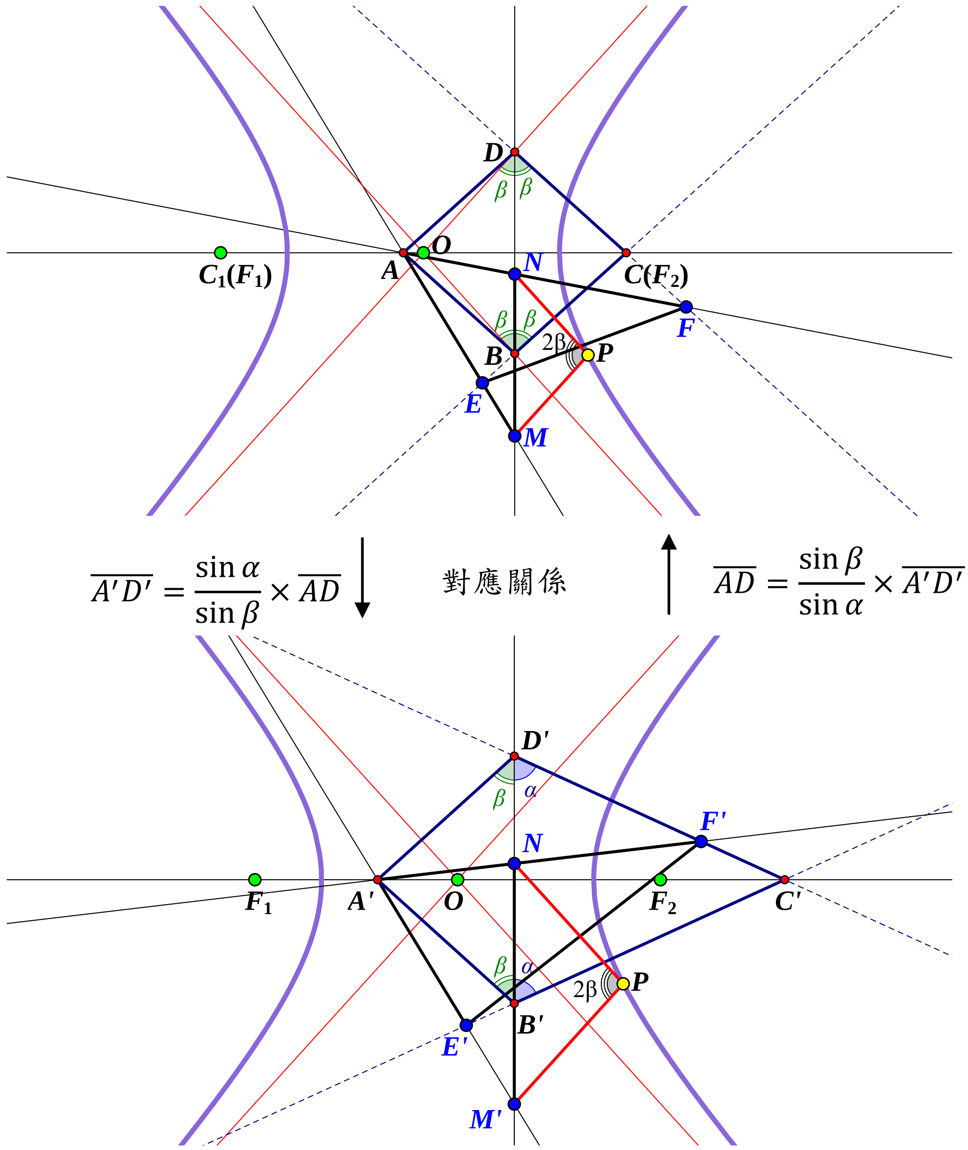


圖 36：菱形與箏形的對應模型

定理 11：在箏形 $A'B'C'D'$ 中，E' 點在 $\overleftrightarrow{B'C'}$ 移動時，四邊形 $E'F'M'N'$ 的外接圓圓心 P 點的軌跡為雙曲線。

證明：

1. 先建構一個菱形模型，其邊長為 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=1$ 且 $\angle ABD=\angle ADB=\angle CBD=\angle CDB=\beta$，其中 $0°<\beta<90°$。考慮直角坐標化，令對角線交點 K 為原點，則 $A(-\sin\beta,0)$、$B(0,-\cos\beta)$、$C(\sin\beta,0)$、$D(0,\cos\beta)$，根據性質 11，$\overline{OD}\perp\overline{CD}$，可得中心 $O\left(\sin\beta-\frac{1}{\sin\beta},0\right)$

2. 以中心 O 為圓心，$\overline{OD}$ 長為半徑畫圓，在圓上分別取兩對稱點 B' 與 D' 使得 $\angle B'OC=\angle D'OC=\alpha$，其中 $0°<\alpha<90°$。再分別過點 B' 與 D' 作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ 的平行線交於 A' 點，分別過點 B' 與 D' 作 $\overline{OB'}$ 與 $\overline{OD'}$ 的垂線交於 C' 點，可得 $\angle C'B'D'=\angle C'D'B'=\alpha$。根據線對稱性可得 A、A'、C、C' 四點共線。

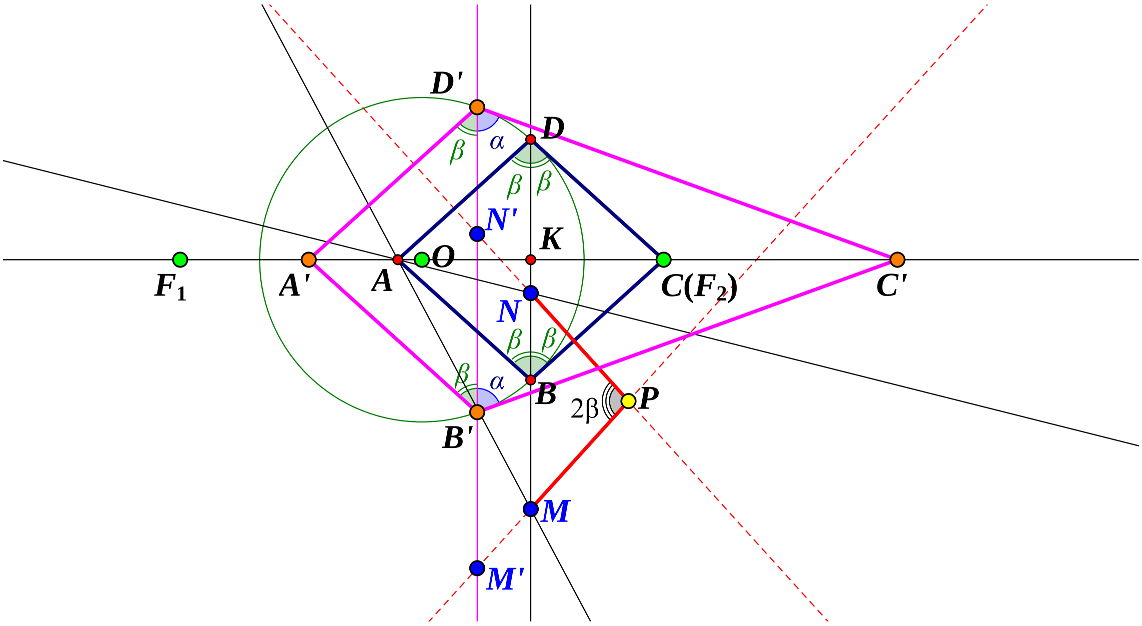


圖 37：對射模型的坐標化

3. 不失一般性，我們省略動點 E 和 F，直接處理兩動點 M、N 的坐標，我們令 $M(0,-\cos\beta+t)$，根據性質 10 有 $\triangle AMN\sim\triangle DMA$，因此 $\overline{AM}^2=\overline{MN}\times\overline{MD}$，代入可得 $\sin^2\beta+(-\cos\beta+t)^2=\overline{MN}\times(2\cos\beta-t)$，化簡後得出 $N\left(0,\frac{1-\cos\beta(2\cos\beta-t)}{2\cos\beta-t}\right)$，為了後續方便表示，令 $T=2\cos\beta-t$，所以 $N\left(0,\frac{1-T\cos\beta}{T}\right)$。

4. 回到箏形 $A'B'C'D'$ 中，$\overline{OD'}=\overline{OD}=\frac{1}{\tan\beta}$ 且 $O\left(-\frac{\cos\beta}{\tan\beta},0\right)$ 於是可得出

$D'\left(-\frac{\cos\beta}{\tan\beta}+\frac{\cos\alpha}{\tan\beta},\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}\right)$，化簡 $D'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta},\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}\right)$。因為 $\overline{A'D'}\parallel\overline{AD}$，得出 $\overline{A'D'}:\overline{AD}=\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}:\cos\beta=\sin\alpha:\sin\beta$，所以 $A'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta}-\sin\alpha,0\right)$。

5. 延長 $\overrightarrow{PM}$ 與 $\overrightarrow{PN}$ 分別交 $\overleftrightarrow{B'D'}$ 於 M' 與 N' 點，注意到 M' 與 N' 也是兩動點且 $\angle M'PN'$ 恆為定角 2β，得出 $\overleftrightarrow{PM'}: y=\tan\beta\ x-\cos\beta+t$ 以及 $\overleftrightarrow{PN'}: y=-\tan\beta\ x+\frac{1-T\cos\beta}{T}$，兩直線與 $\overleftrightarrow{B'D'}: x=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta}$ 解聯立得出交點 $M'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta},\cos\alpha-T\right)$、$N'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta},\frac{1-T\cos\alpha}{T}\right)$，其中 $T=2\cos\beta-t$。

6. 在 $\triangle A'M'N'$ 中，$A'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta}-\sin\alpha,0\right)$、$M'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta},\cos\alpha-T\right)$、$N'\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\tan\beta},\frac{1-T\cos\alpha}{T}\right)$，由餘弦定理有

$$\cos\angle M'A'N'=\frac{\overline{A'M'}^2+\overline{A'N'}^2-\overline{M'N'}^2}{2\times\overline{A'M'}\times\overline{A'N'}}$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha+2(\cos\alpha-T)\left(\frac{1-T\cos\alpha}{T}\right)}{2\times\sqrt{(\sin^2\alpha+(\cos\alpha-T)^2)\left(\sin^2\alpha+\left(\frac{1-T\cos\alpha}{T}\right)^2\right)}}$$

$$=\frac{\frac{2\cos\alpha\,(T^2-2T\cos\alpha+1)}{T}}{2\times\sqrt{(T^2-2T\cos\alpha+1)\left(\frac{T^2-2T\cos\alpha+1}{T^2}\right)}}=\cos\alpha$$

又 $0°<\alpha<90°$，因此得出 $\angle M'A'N'$ 恆為給定角 α。

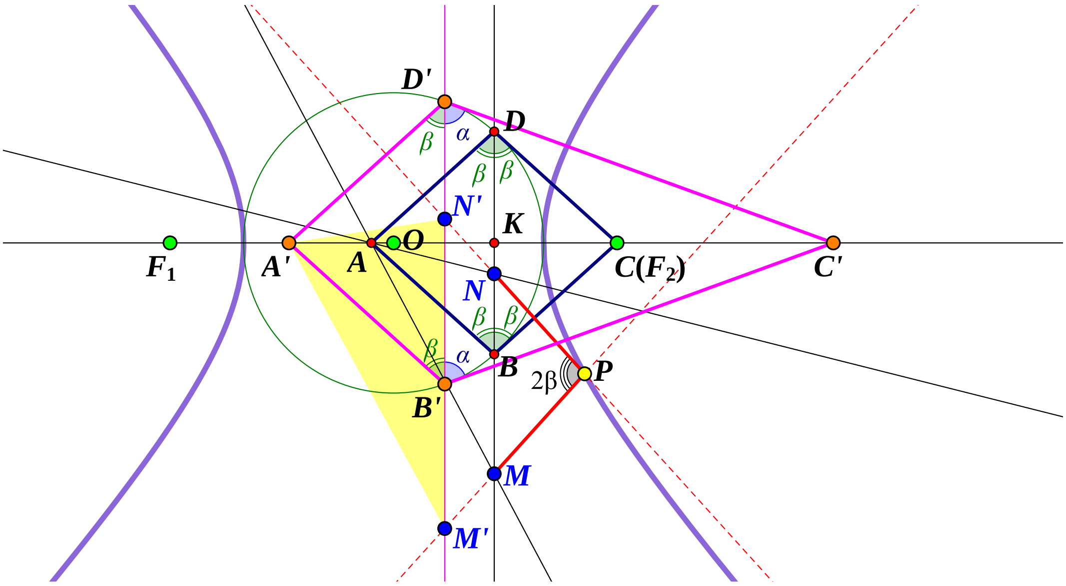


圖 38：$\angle M'A'N'$ 恆為定角 α

7. 箏形 $A'B'C'D'$ 中，M' 與 N' 為兩動點，$\angle M'A'N' = \angle C'B'D' = \angle C'D'B' = \alpha$，為本研究的構圖，根據定理 8 與性質 9，四邊形 $E'F'M'N'$ 的外接圓圓心即為 P 點，此時 P 點與菱形 $ABCD$ 中的四邊形 $EFMN$ 的外接圓圓心 P 點重合，再根據性質 10 可得 P 點軌跡為雙曲線。透過對應的觀點，我們證明箏形 $A'B'C'D'$ 中，圓心 P 點軌跡亦為相同的雙曲線。

□

性質 12：在箏形 $ABCD$ 中，P 點的軌跡為等軸雙曲線的充要條件是 $\angle BAD = 90°$。

證明：

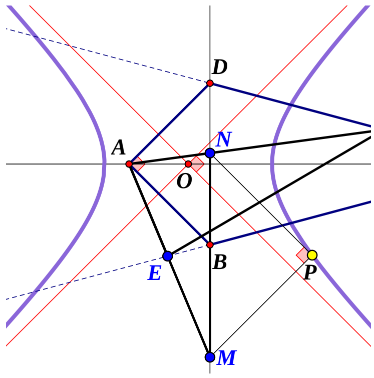


圖 39：P 點軌跡為等軸雙曲線

（⇒）由性質 10 可得雙曲線的兩條漸近線分別平行 $\overline{PM}$ 與 $\overline{PN}$，即 $\angle MPN$ 等於兩條漸近線的夾角。再由性質 9 得出 $\angle MPN = \angle ABD + \angle ADB = 180° - \angle A$。當 P 點的軌跡為等軸雙曲線，即 $\angle MPN = 90°$，可得 $\angle BAD = 180° - 90° = 90°$。

（⇐）當 $\angle BAD = 90°$ 時，同理可得 $\angle MPN = 90°$，因此兩條漸近線相互垂直。

□

我們回頭再關注，構圖條件的兩組共圓（A、B、E、N 與 A、D、F、M），考慮兩圓的交點，一個為定點 A，令另外一個點為 Q，而 Q 點是動點。

我們發現 Q 點的軌跡為圓，其圓心為 P 點軌跡雙曲線的中心，半徑為 P 點軌跡雙曲線的半貫軸長。Q 點與 P 點就這樣巧妙被連結起來，非常有趣！

性質 13：兩圓交點 Q 點的軌跡為圓。

證明：

1. 因為點 A、B、E、N 共圓且點 A、D、F、M 共圓，連接 $\overline{AQ}$、$\overline{DQ}$、$\overline{BQ}$，可得 $\angle AQB = \angle ANB$ 且 $\angle AQD = \angle AMD$（對同弧）（或互補），所以 $\angle BQD = \angle ANB + \angle AMD = 180° - \alpha$ 為定角（或 $\angle BQD = \alpha$ 為定角），又 B 點與 D 點為定點，因此可得 Q 點的軌跡為圓，令其圓心為 O 點，再得出圓心角 $\angle BOD = 2\alpha$。

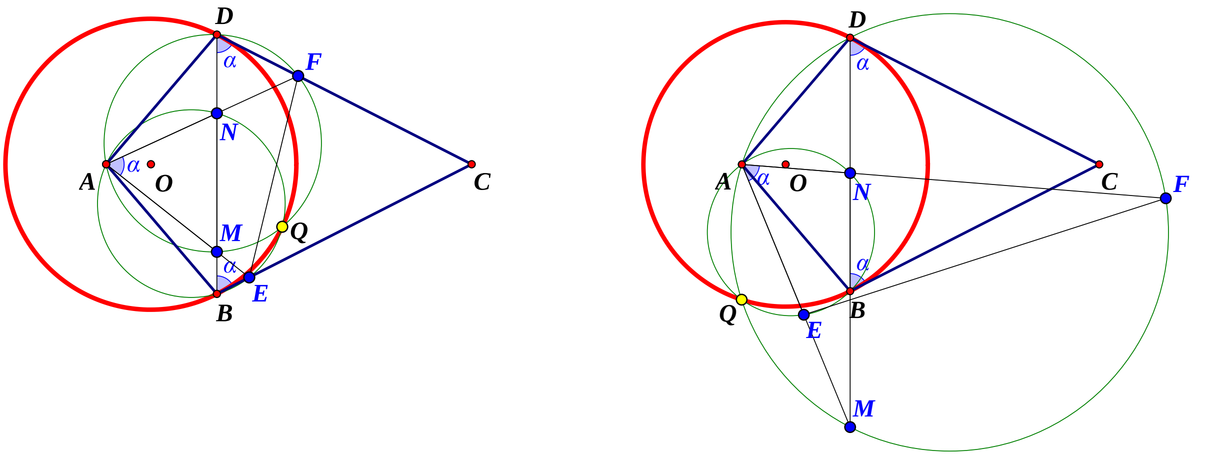


圖 40：Q 點軌跡為圓

2. 再對照定理 11 發現 P 點的軌跡雙曲線的中心滿足 $\angle BOD = 2\alpha$，所以 Q 點的軌跡圓的圓心恰好是 P 點軌跡雙曲線的中心，圓的半徑為 P 點軌跡雙曲線的半貫軸長。

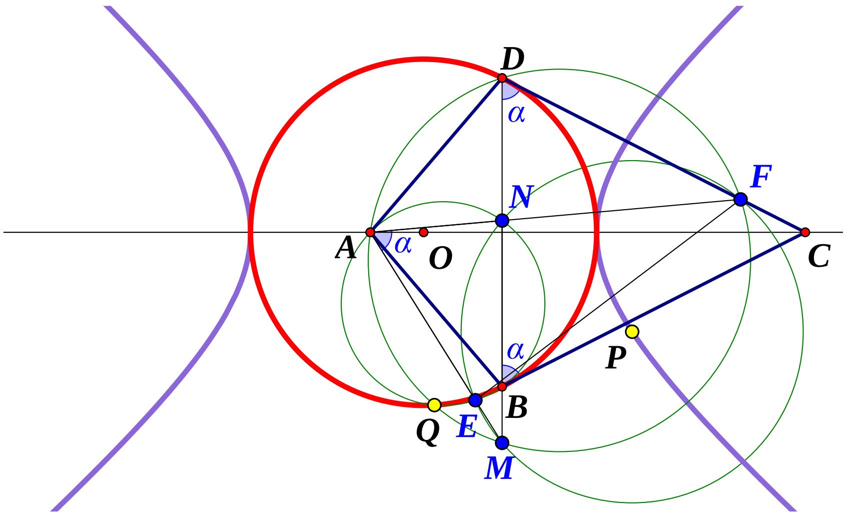


圖 41：Q 點軌跡圓與 P 點軌跡雙曲線的關聯性

□

四、 刻劃四邊形內接三角形之面積比值為定值的構圖

（一）僅一組鄰邊等長的四邊形

我們在前一節的研究聚焦在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 的面積比值為定值的圖形，發現直角箏形跟任意箏形中的幾何結構並非「半角」，而是「$\angle EAF = \angle CBD = \angle CDB$（一組鄰邊等長）」，因為箏形為線對稱圖形，這一節研究中，我們持續進行一般化，我們不設定箏形，設定為「僅一組鄰邊等長，另外一組鄰邊 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AD}$ 不用等長」。

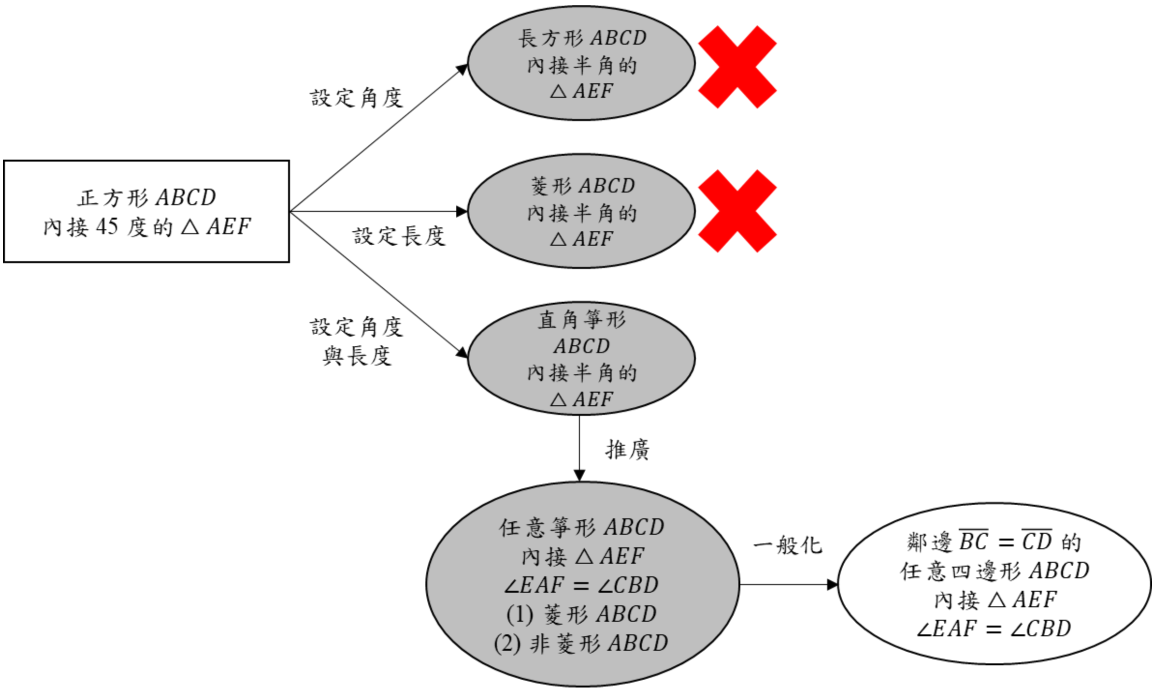


圖 42：研究一般化的發展架構

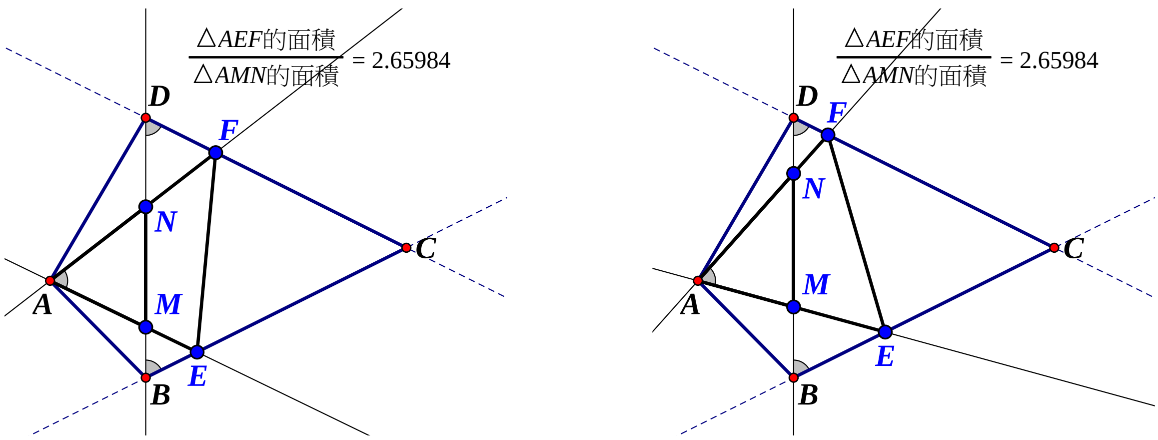


圖 43：僅一組鄰邊等長的四邊形

定理 14：在四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 且 $\angle EAF = \angle CBD = \angle CDB$，則 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN}$ 恆為定值 $\frac{\sin\angle ABC \times \sin\angle ADC}{\sin\angle ABD \times \sin\angle ADB}$。

證明：

1. 因為 A、N、E、B 四點共圓，可得 $\angle AEN = \angle ABD$ 且 $\angle ANE = 180° - \angle ABC$；同理，$A$、$M$、$F$、$D$ 四點共圓，所以 $\angle AFM = \angle ADB$ 且 $\angle AMF = 180^{\circ} - \angle ADC$。
2. 在 △ AEN 中，根據正弦定理得知 $\overline{AN}:\overline{AE} = \sin\angle AEN : \sin\angle ANE = \sin\angle ABD : \sin(180° - \angle ABC) = \sin\angle ABD : \sin\angle ABC$；在 △ AFM 中，根據正弦定理得知 $\overline{AM}$：

$\overline{AF} = \sin\angle AFM$: $\sin\angle AMF = \sin\angle ADB$: $\sin(180° - \angle ADC) = \sin\angle ADB$: $\sin\angle ADC$。在 $\triangle AMN$ 與 $\triangle AFE$ 中，$\angle MAN = \angle FAE$，根據共角定理得知 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN} = \frac{\overline{AE}\times\overline{AF}}{\overline{AM}\times\overline{AN}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{AF}}{\overline{AM}} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ABD} \times \frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ADB} = \frac{\sin\angle ABC \times \sin\angle ADC}{\sin\angle ABD \times \sin\angle ADB}$。

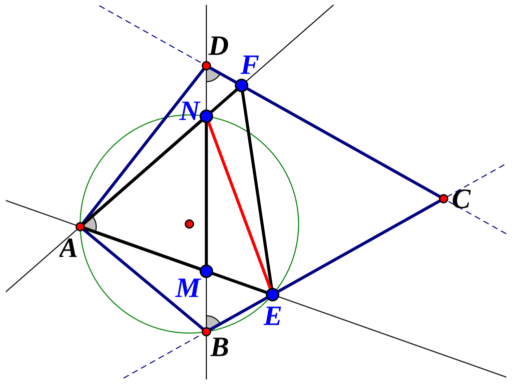


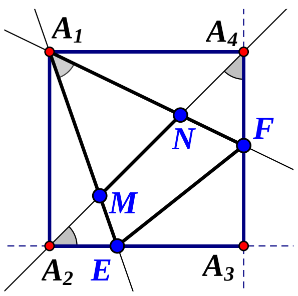
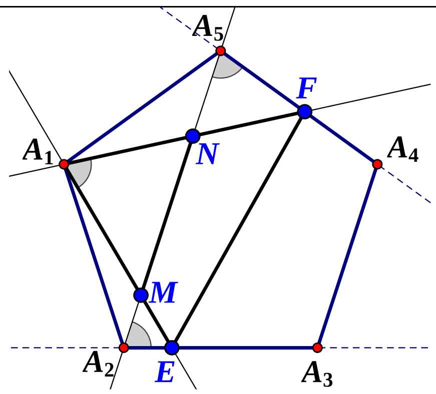
圖 44：一般化 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 面積定值

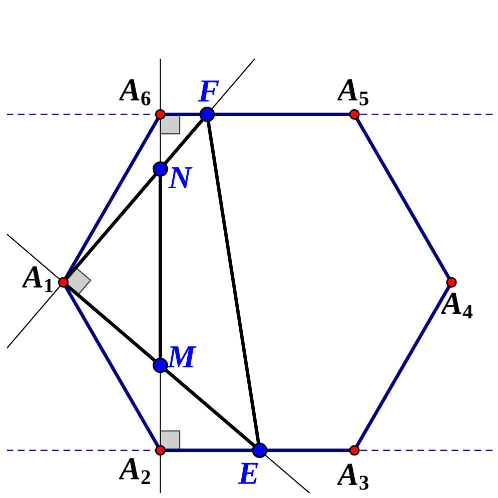
□

（二）正多邊形內接兩個三角形面積比值為定值

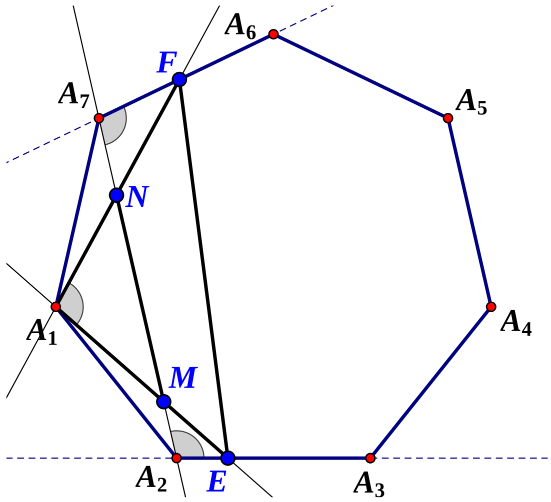
利用定理 14 我們可以得出正 n 邊形內接三角形面積比值 $\frac{\triangle AEF}{\triangle AMN}$ 的通式為定值 $\left(\frac{\sin\frac{(n-2)\times 180°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}}\right)^2$，下表為正方形到正七邊形的圖例。

表 1：正方形到正七邊形內接三角形

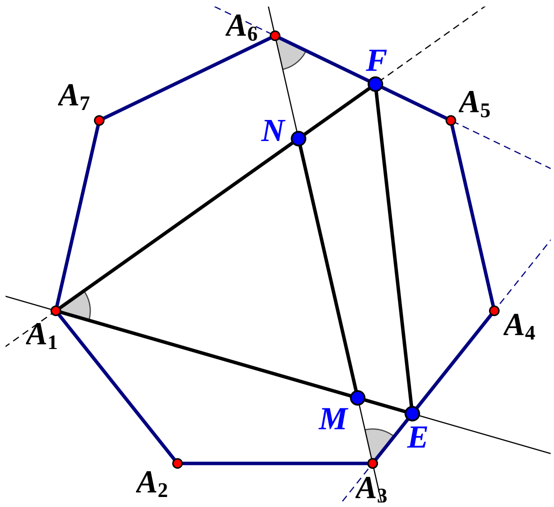
	
$\frac{\triangle A_1EF}{\triangle A_1MN} = \left(\frac{\sin 90°}{\sin 45°}\right)^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$	$\frac{\triangle A_1EF}{\triangle A_1MN} = \left(\frac{\sin 108°}{\sin 36°}\right)^2 = \frac{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ $= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$



$$\frac{\triangle A_1EF}{\triangle A_1MN}=\left(\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}\right)^2=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$



$$\frac{\triangle A_1EF}{\triangle A_1MN}=\left(\frac{\sin\frac{900^\circ}{7}}{\sin\frac{180^\circ}{7}}\right)^2$$



$$\frac{\triangle A_1EF}{\triangle A_1MN}=\left(\frac{\sin\frac{720^\circ}{7}}{\sin\frac{360^\circ}{7}}\right)^2$$

伍、　進行中的研究

我們後續還發現四邊形 $ABCD$ 內接的 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 的有趣關聯性。

首先，正方形 $ABCD$ 內接的 45 度的 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$，我們發現 $\triangle AEF$ 的外心即為 $\triangle AMN$ 的垂心，如圖中的 K 點（我們已經完成此證明，詳閱研究日誌）。

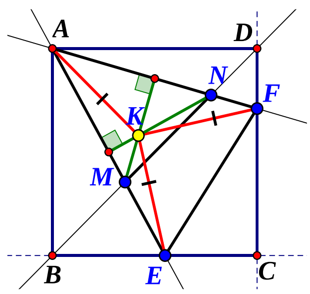


圖 44：K 為 $\triangle AEF$ 的外心與 $\triangle AMN$ 的垂心

第二，我們本來以為這是正方形內接三角形獨有的性質，然而，透過幾何軟體實驗發現，在本研究設定的兩個四點共圓的條件下，構造的內接 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$。對於菱形 $ABCD$，$\triangle AEF$ 的外心亦為 $\triangle AMN$ 的垂心，如圖所示。

第三，對於箏形 $ABCD$，$\triangle AEF$ 的外心 K_1 不會與 $\triangle AMN$ 的垂心 K_2 重合，不過 K_1 與 K_2 恆在對角線 $\overline{AC}$ 上，且點 A、 K_1 與 K_2 的線段比值不受動點 E 影響。

我們用好的觀點來看這個猜想「點 E 在移動時，$\frac{\overline{AK_1}}{\overline{AK_2}}$ 恆為定值」。當四邊形 $ABCD$ 為菱形與正方形時，$\frac{\overline{AK_1}}{\overline{AK_2}}$ 的定值為 1，我們正在證明這個有趣的性質。

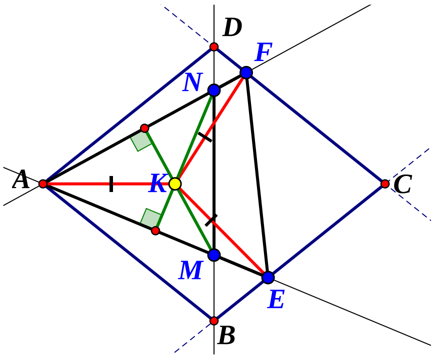


圖 45：菱形

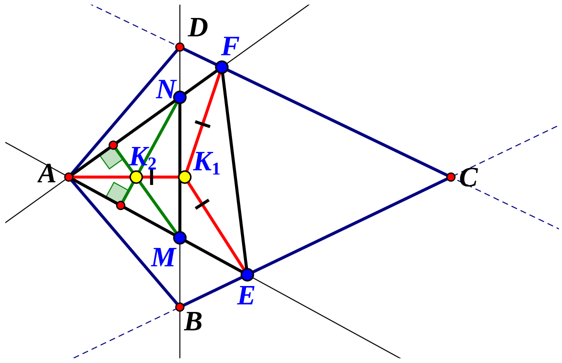


圖 46：箏形

陸、 結論

一、 刻劃正方形內接四十五度的三角形的性質

本研究將正方形 $ABCD$ 內接的 45 度的 $\triangle AEF$ 的問題進行深化，考慮正方形的對角線而構造出 $\triangle AMN$，我們給出 $\triangle AEF$ 與 $\triangle AMN$ 相似，以及面積比為定值 2。我們也創新發現四個動點 E、F、M、N 與定點 C 五點共圓。有趣的是，圓心 P 點恰好為 $\overline{EF}$ 的中點，當 E 點在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上移動時，前述的圓心 P 點的軌跡等軸雙曲線，我們利用純幾何的方式進行證明，巧妙構造輔助線，以及利用多次共圓、相似性質，這是本研究的亮點。

二、 刻劃長方形、菱形、直角箏形內接三角形的性質

由於原始條件為「正方形內接四十五度的三角形」，其中正方形是很強的條件，若要進行推廣，能改成什麼樣的四邊形？另外四十五度的三角形，四十五度只是因為九十度的一半嗎？這個動態幾何的內在結構到底是什麼呢？

我們嘗試了「等長」、「半角」的條件，將正方形改為長方形、菱形、直角箏形，只有在直角箏形中，我們發現兩個 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 相似且面積比值為定值。從這個成功的情況分析，結果發現內在結構不是全等或半角，而是「兩組四點共圓」，這是本研究給出的非常重要的發現。

三、 刻劃兩組四點共圓條件下的箏形內接三角形的性質

由「兩組四點共圓」的條件出發，我們一般化箏形構圖，刻劃出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 相似且面積比值通式。

回到我們感興趣的動點 E、F、M、N 共圓，我們花了不少時間證明其現圓心 P 點的軌跡為雙曲線，後來巧妙給出了對應的模型。我們利用正方形的模型，建造了菱形的證明模型，先證明菱形中的圓心 P 點的軌跡為雙曲線，再建立對應模型：「對於任何一個菱形 $ABCD$ 中的雙曲線，以及給定角 α，都可以對應到唯一的箏形 $A'B'C'D'$ 中的雙曲線；反過來說，對於任何一個箏形 $A'B'C'D'$ 中的雙曲線，都可以對應到唯一的菱形 $ABCD$ 中的雙曲線」。從正方形到菱形，再到箏形的對應模型建立是本研究的證明手法的巧思。

針對構圖條件的兩組共圓（A、B、E、N 與 A、D、F、M），我們考慮兩圓的交點，一個為定點 A，另外一個點為 Q，我們刻劃出 Q 點的軌跡為圓，其圓心為 P 點軌跡雙曲線的中心，半徑為 P 點軌跡雙曲線的半貫軸長。我們給出了兩個動點 Q 點與 P 點的軌跡關聯性，看似無關的項目，卻被巧妙連結起來，非常有趣！

四、 刻劃四邊形內接三角形之面積比值為定值的構圖充分條件

最後一般化討論一組鄰邊等長的四邊形 $ABCD$（$\overline{BC}=\overline{CD}$）中，我們給出兩個 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 雖然不相似，但其面積比值恆為定值 $\frac{\sin\angle ABC\times\sin\angle ADC}{\sin\angle ABD\times\sin\angle ADB}$。我們再得出正 n 邊形內接兩個三角形面積比值的通式，有趣的是，正五邊形內接兩個三角形面積比值為 $1+\varphi$。

柒、 參考文獻

[1] 2010 年青少年數學國際城市邀請賽參賽代表遴選初選個人競賽數學試題，取自：http://www.chiuchang.org.tw/download/iwymic/2010IWYMIC.pdf

[2] 余紅兵（2001）。第 31 講：旋轉。載於顏鎮軍（主編），初中數學競賽教程。臺北市：九章出版社。

[3] 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明編著（2024）。高中選修數學甲下：第 1 章第 3 節雙曲線（頁 48-59）。臺南市：翰林出版事業股份有限公司。

【評語】030416

作品從一道簡明易懂的幾何問題出發，逐步深入導出一些結果，刻畫出其內在結構。考慮其中的變化情形後，將其推廣至四邊形，對於形成的兩三角形面積比，作者們得到從"兩組四點共圓"的條件出發，得到一些進展。文中對於"圓心ｐ點"軌跡的探討也值得肯定，對於將這些性質推到箏形與軌跡的分析可再多與著墨。整體而言是一件典型且用心的平面幾何作品，可思考如何能跳出框架而展現更多的創意。

作品簡報

從正方形內接四十五度的三角形談起

壹、前言

本研究起源於競賽中常見有趣的平面幾何問題，如圖 1，正方形 $ABCD$ 中，動點 E 在 $\overline{BC}$ 上，動點 F 在 $\overline{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF = 45°$，請證明 $\overline{BE} + \overline{DF} = \overline{EF}$，反之亦然。

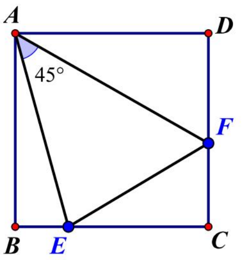


圖 1：原始問題

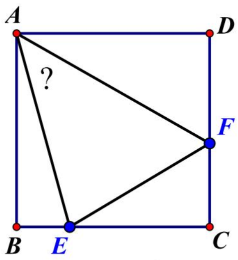


圖 2：逆命題

在正方形 $ABCD$ 外部構造一個 $\triangle ABF'$ 使其全等於 $\triangle ADF$ 即可證明。

【本研究作品說明書和海報的所有圖片為作者自行繪製】

我們好奇此問題的幾何結構是的半角 45 度？還是等邊長？依序針對長方形、菱形、直角箏形進行實驗，之後刻劃任意箏形，最後一般化僅有一組鄰邊等長的四邊形。循序漸進地深化，刻劃內在結構且給出獨特且有趣的成果。

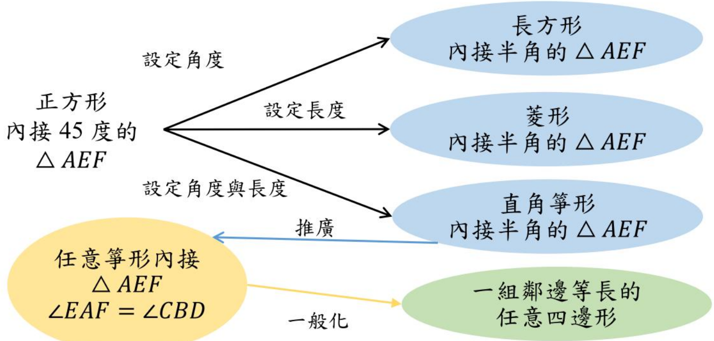


圖 3：研究對象

貳、預備知識

一、共角定理：若 $\angle A = \angle D$，則面積比 $\triangle ABC : \triangle DEF = \overline{AB} \times \overline{AC} : \overline{DE} \times \overline{DF}$。

二、正弦定理：$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC} = a$、$\overline{CA} = b$、$\overline{AB} = c$，則 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$。

三、餘弦定理：$\triangle ABC$ 中，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$，其餘邊同理。

參、研究結果

一、刻劃正方形內接四十五度的三角形的性質

(一) 長度性質

性質 1：$\overline{EF}$ 邊上的高的長度恆等於正方形 $ABCD$ 的邊長。

性質 2：當 E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上移動，當 F 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上移動，$\overleftrightarrow{EF}$ 構成的包絡線為圓。

引理 3：$\overline{AE}$ 平分 $\angle BEF$、$\overline{AF}$ 平分 $\angle DFE$。

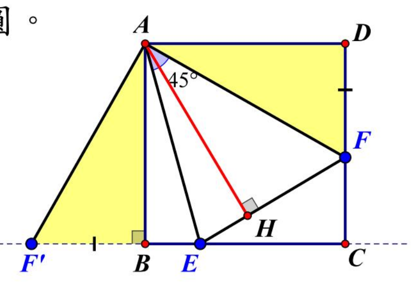


圖 4：$\overline{EF}$ 邊上的高為定值

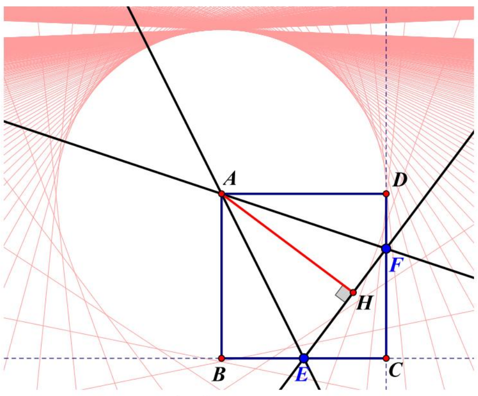


圖 5：$\overleftrightarrow{EF}$ 的包絡線為圓

(二) 面積性質與雙曲線

性質 4：$\triangle AMN \sim \triangle AFE$ 且 $\triangle AEF$ 的面積是 $\triangle AMN$ 的面積的 2 倍。

性質 5：動點 E、F、M、N 與定點 C 五點共圓且圓心恆為 $\overline{EF}$ 的中點。

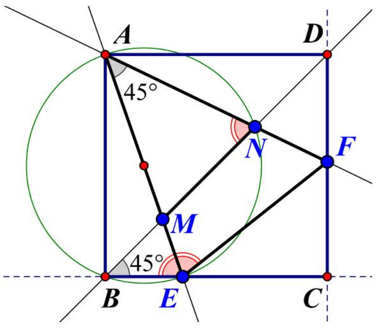


圖 6：共圓

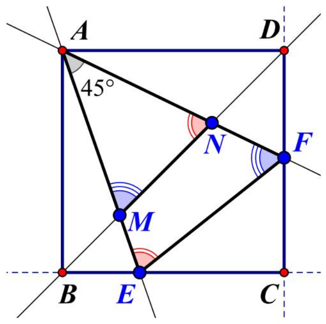


圖 7：$\triangle AMN \sim \triangle AFE$

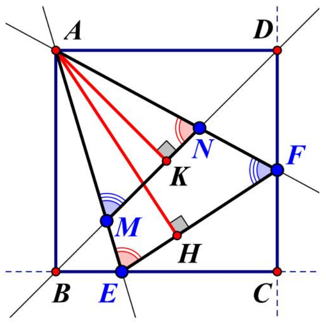


圖 8：面積比

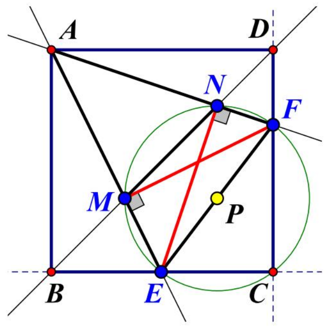


圖 9：五點共圓

性質 6：五邊形 $ECFNM$ 的外接圓圓心 P 點的軌跡為等軸雙曲線，滿足 $|\overline{PC} - \overline{PC_1}| = 2\overline{AB}$。

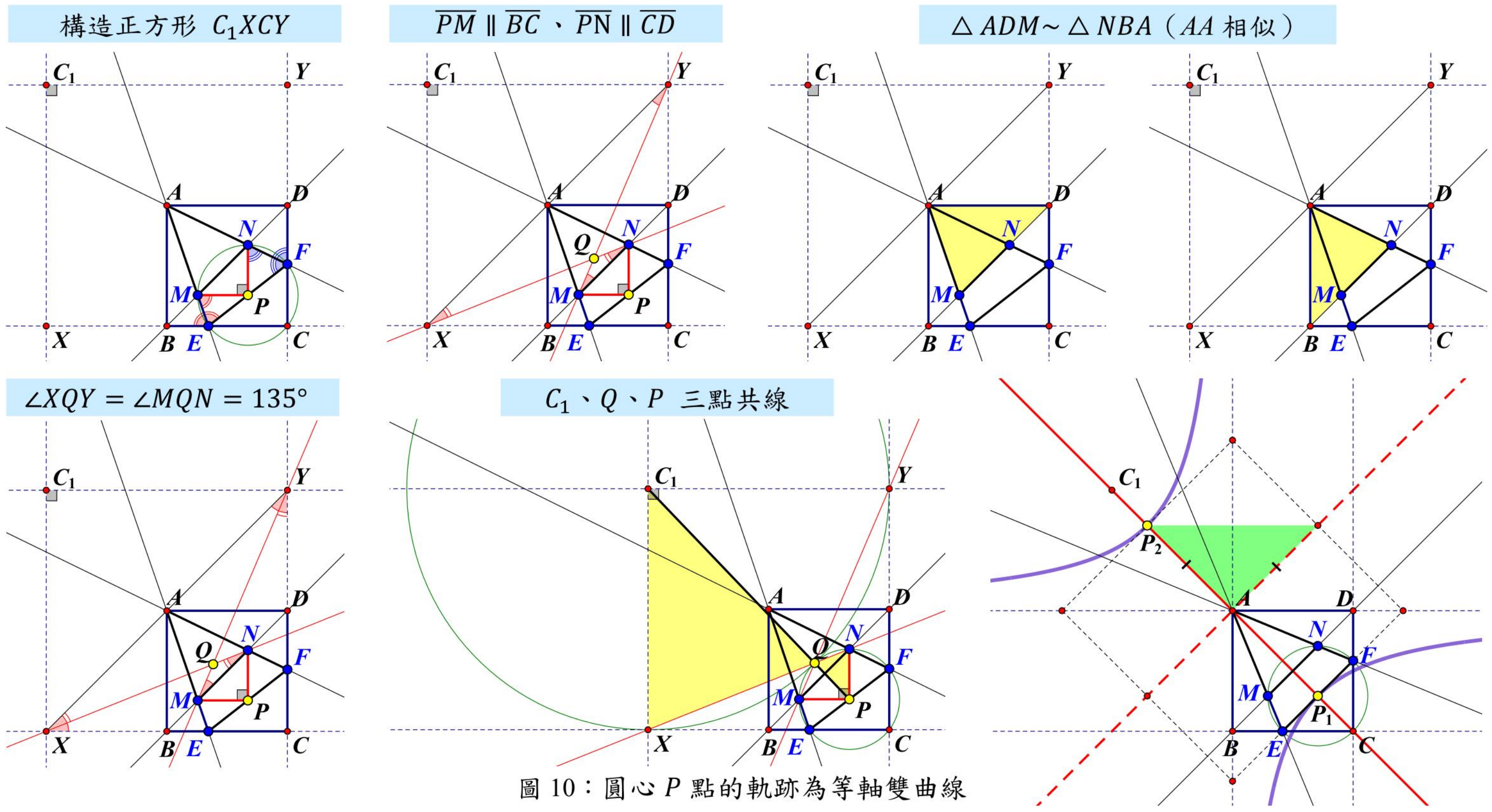


圖 10：圓心 P 點的軌跡為等軸雙曲線

二、刻劃長方形、菱形、直角箏形內接三角形的性質

我們感興趣的是 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 的面積比值。依序實驗發現長方形、菱形內接半角的 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 的面積比值不是定值。然而，直角箏形卻是定值！顯然「半角」不是其內在幾何結構。

定理 7：任意直角箏形 $ABCD$，$\triangle AMN \sim \triangle AFE$ 且 $\dfrac{\text{Area }\triangle AEF}{\text{Area }\triangle AMN} = \left(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + 1 = \left(\dfrac{1}{\cos\angle BAC}\right)^2$。

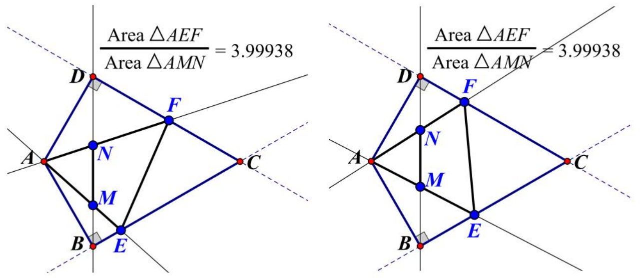


圖 11：直角箏形內接半角三角形

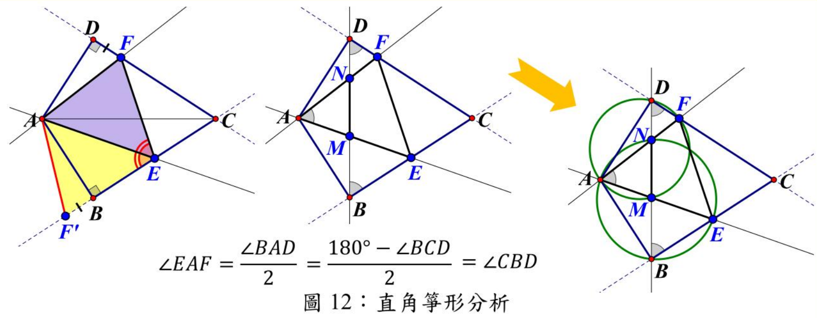


圖 12：直角箏形分析

三、刻劃兩組四點共圓條件下的任意箏形內接三角形的性質

(一) 任意箏形 $ABCD$ 中，兩組四點共圓條件下的內接三角形

定理 8：對於任意箏形 $ABCD$，$\triangle AMN \sim \triangle AFE$ 且 $\dfrac{\text{Area }\triangle AEF}{\text{Area }\triangle AMN} = \left(\dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ABD}\right)^2$。

內在幾何結構
$\angle EAF = \angle CBD = \angle CDB$

在 $\triangle AEN$ 與 $\triangle AFM$ 中，利用正弦定理得 $\overline{AN} : \overline{AE} = \overline{AM} : \overline{AF}$

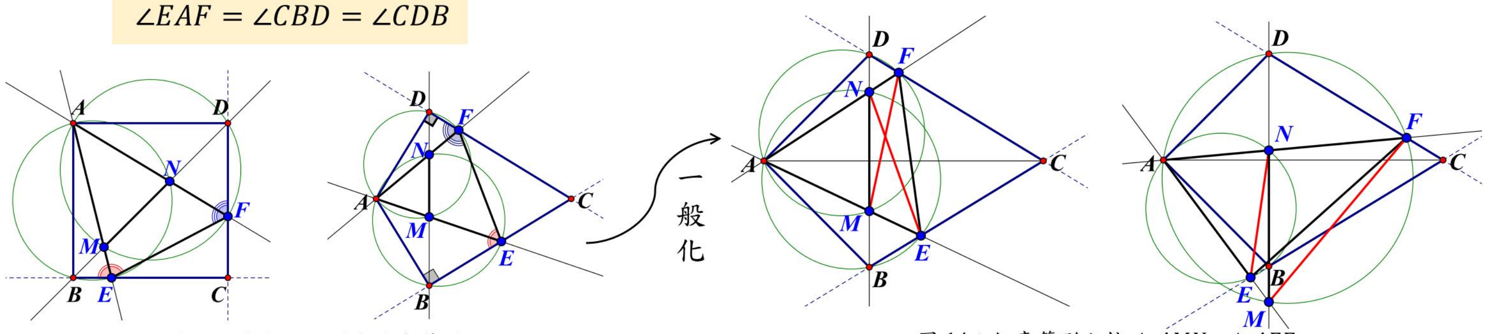


圖 13：分析正方形與直角箏形　　圖 14：任意箏形內接 $\triangle AMN \sim \triangle AFE$

性質 9：對於任意箏形，當 E 點移動時，E、F、M、N 四點共圓且 $\angle MPN$ 與 $\angle EPF$ 皆為定角。

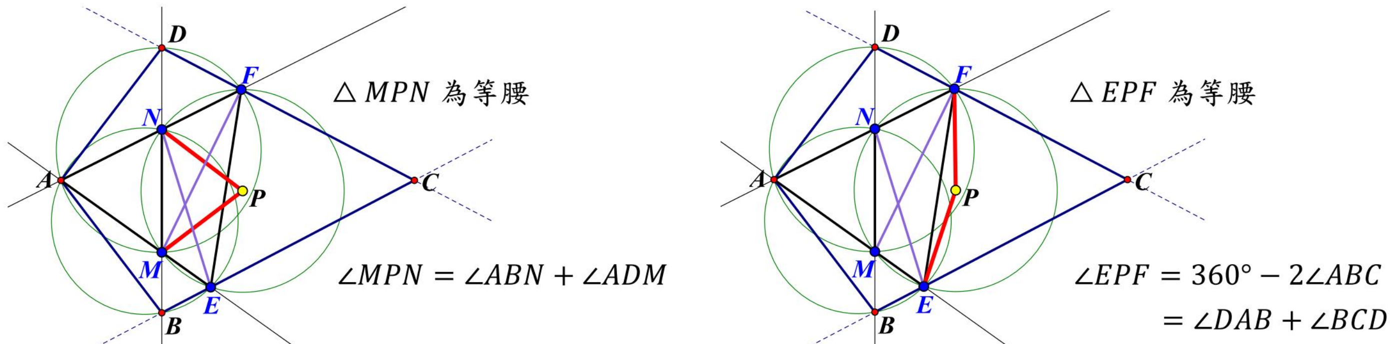


圖 15：定角

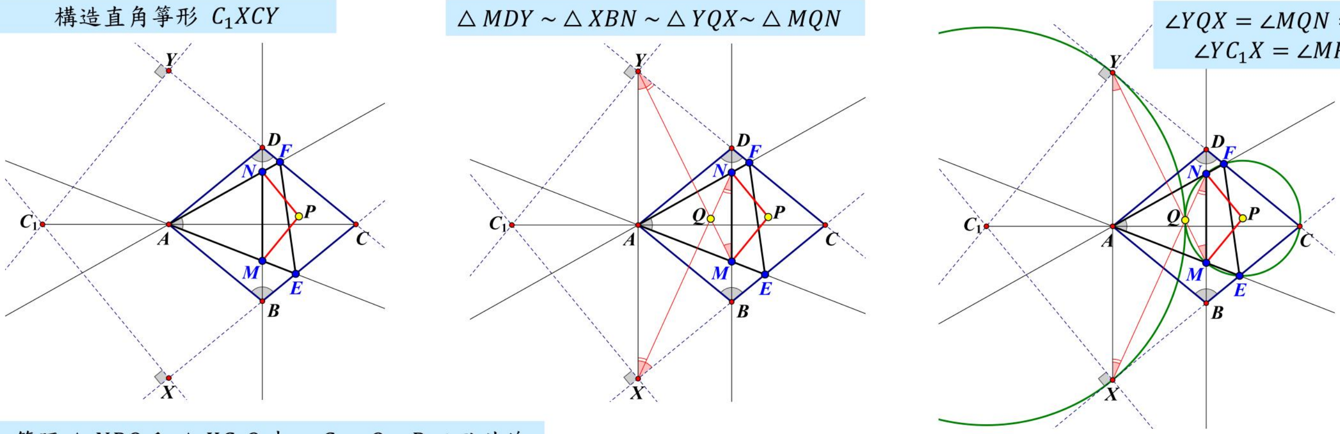
(二) 菱形 $ABCD$ 中，圓心 P 點軌跡

性質 10：在菱形 $ABCD$ 中，E 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 移動時，五邊形 $ECFNM$ 的外接圓之圓心 P 點的軌跡為雙曲線。

構造直角箏形 C_1XCY

$\triangle MDY \sim \triangle XBN \sim \triangle YQX \sim \triangle MQN$

$\angle YQX = \angle MQN = 180^\circ - \angle CBD$
$\angle YC_1X = \angle MPN = 2\angle CBD$



等腰 $\triangle NPQ$ 和 $\triangle XC_1Q$ 中，C_1、Q、P 三點共線

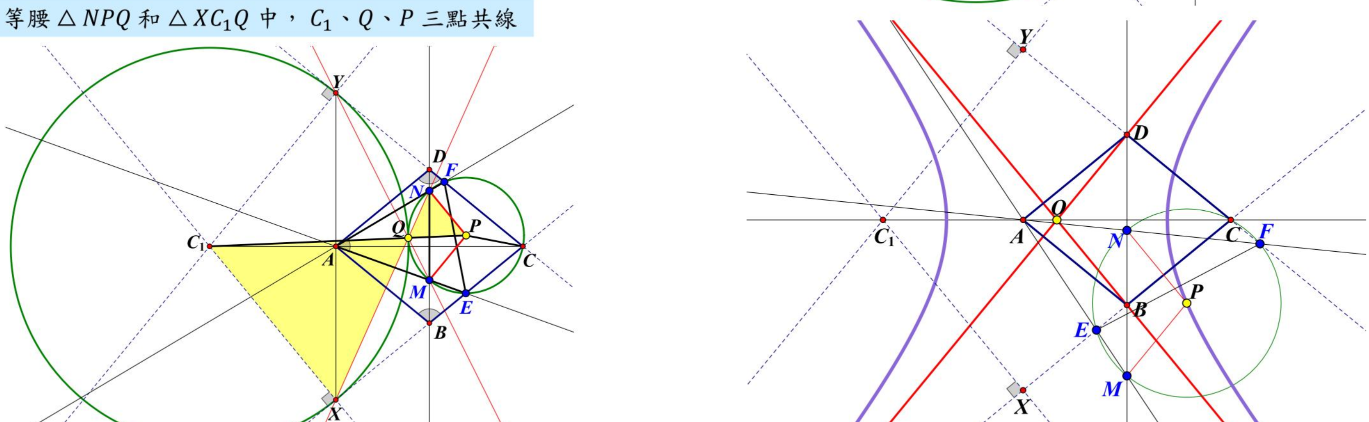
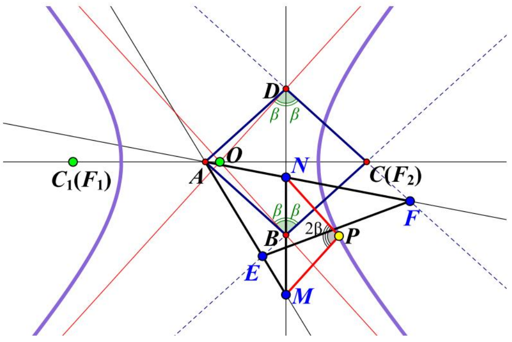


圖 16：菱形中，圓心 P 點的軌跡為雙曲線

(三) 任意箏形 $ABCD$ 中，圓心 P 點軌跡



$$\overline{AD}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\times\overline{A'D'}$$

對應關係

$$\overline{A'D'}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\times\overline{AD}$$

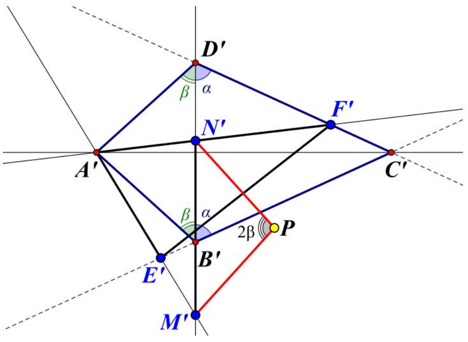


圖 17：菱形與箏形的對應

定理 11：在箏形 $A'B'C'D'$ 中，P 點的軌跡為雙曲線。

圓 O 上取兩點 B' 與 D'，使得 $\angle B'OC=\angle D'OC=\alpha$
再分別過點 B' 與 D' 作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AD}$ 的平行線交於 A'

① 令 $A(-\sin\beta,0)$、$B(0,-\cos\beta)$、$C(\sin\beta,0)$、$D(0,\cos\beta)$、$M(0,-\cos\beta+t)$，可得 $N\left(0,\frac{1-T\cos\beta}{T}\right)$，$T=2\cos\beta-t$。

② 注意到 M' 與 N' 是兩動點且 $\angle M'PN'$ 恆為定角 2β，再給出 $\overleftrightarrow{PM}$ 與 $\overleftrightarrow{PN}$ 方程式，解聯立得 M' 以及 N' 點的坐標。

③ 化簡 $\cos\angle M'A'N'$ 結果等於 $\cos\alpha$，即 $\angle M'A'N'$ 恆為定角 α。

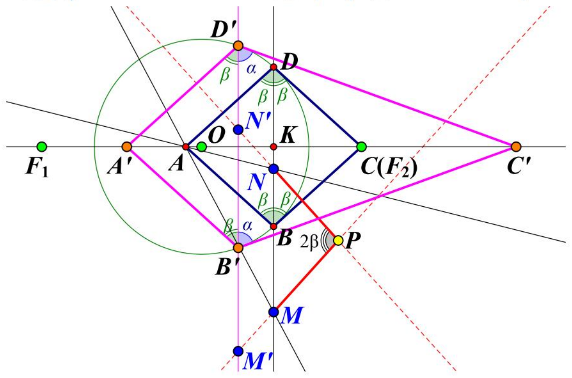
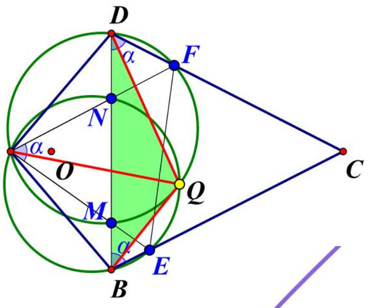


圖 18：對應模型的構造與坐標化

性質 13：兩圓交點 Q 點的軌跡為圓。



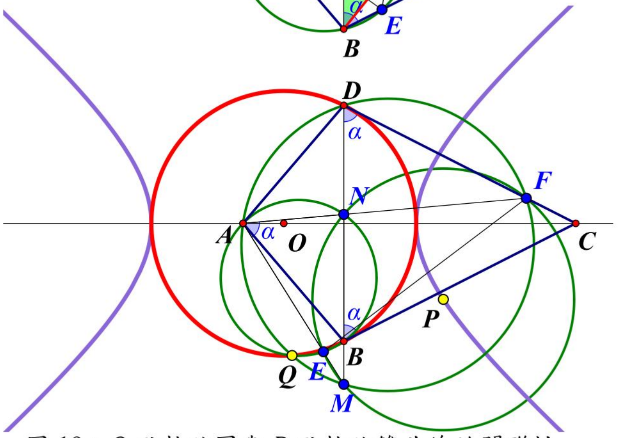


圖 19：Q 點軌跡圓與 P 點軌跡雙曲線的關聯性

四、刻劃四邊形內接三角形之面積比值為定值的構圖

(一) 僅一組鄰邊等長的四邊形

定理 14：$\dfrac{\text{Area}\,\triangle AEF}{\text{Area}\,\triangle AMN}=\dfrac{\sin\angle ABC\times\sin\angle ADC}{\sin\angle ABD\times\sin\angle ADB}$。

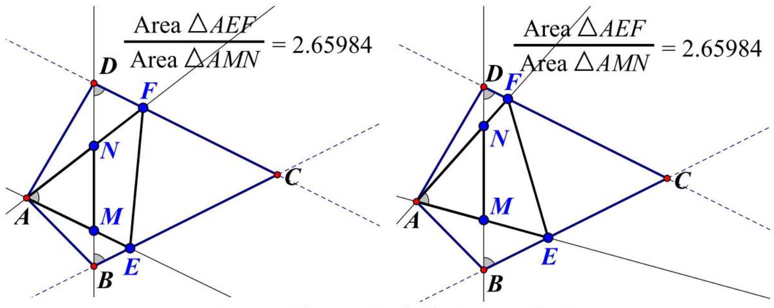
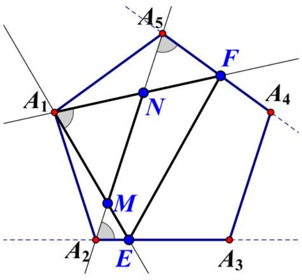


圖 20：僅一組鄰邊等長的四邊形

(二) 正多邊形內接兩個三角形面積

正 n 邊形 $\dfrac{\text{Area}\,\triangle AEF}{\text{Area}\,\triangle AMN}$ 通式為 $\left(\dfrac{\sin\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2$。



$$\frac{\triangle A_1EF}{\triangle A_1MN}=\left(\frac{\sin108^\circ}{\sin36^\circ}\right)^2=\frac{\frac{10+2\sqrt5}{16}}{\frac{10-2\sqrt5}{16}}=\frac{3+\sqrt5}{2}=\varphi^2$$

圖 21：正五邊形為例

五、近期發現：$\triangle AEF$ 的外心與 $\triangle AMN$ 的垂心

性質 15：K 點為 $\triangle AEF$ 的外心，也是 $\triangle AMN$ 的垂心。

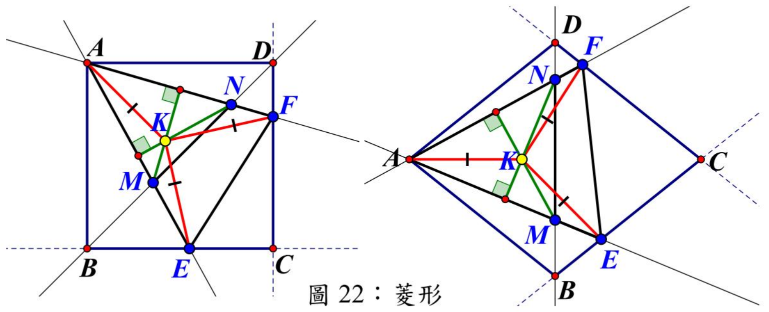


圖 22：菱形

【猜想】
對於任意箏形
K_1 為 $\triangle AEF$ 外心
K_2 為 $\triangle AMN$ 垂心

則 $\dfrac{\overline{AK_1}}{\overline{AK_2}}$ 恆為定值

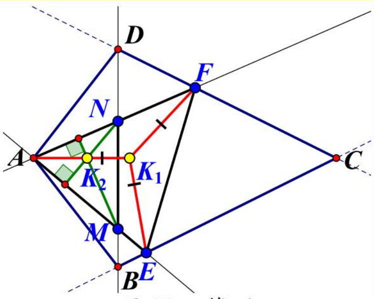


圖 23：箏形

肆、結論

一、本研究將正方形 $ABCD$ 內接的 $\triangle AEF$ 的問題進行深化並構造出 $\triangle AMN$，我們創新發現動點 E、F、M、N 與定點 C 五點共圓且圓心 P 點，最後得到 P 點的軌跡為等軸雙曲線。

二、接續嘗試「等長」、「半角」的條件，將正方形改為長方形、菱形、直角箏形，僅在直角箏形中發現 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 相似且面積比為定值，進而刻畫出內在結構不是全等或半角，而是「兩組四點共圓」，這是很重要的發現。

三、參考正方形的證明模型，給出了菱形 $ABCD$ 中，其圓心 P 點的軌跡為雙曲線。接著處理箏形 $ABCD$，我們巧妙給出了菱形與箏形的對應關係，透過對應關係也證明箏形 $ABCD$ 中，其圓心 P 點的軌跡亦為雙曲線，最後刻劃兩共圓交點 Q 的軌跡為圓，並給出動點 P、Q 的關聯性。

四、推廣到僅一組鄰邊等長的四邊形 $ABCD$，兩個三角形的面積比值依舊為定值，也給出了 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AMN$ 的面積比值的通式。

伍、參考文獻

[1] 2010 年青少年數學國際城市邀請賽參賽代表遴選初選個人競賽數學試題，取自：
http://www.chiuchang.org.tw/download/iwymic/2010IWYMIC.pdf
[2] 余紅兵（2001）。第 31 講：旋轉。載於顏鎮軍（主編），初中數學競賽教程。臺北市：九章出版社。
[3] 雙曲線（2023/9/12）. Retrieved from 維基百科，自由的百科全書：
https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%8F%8C%E6%9B%B2%E7%BA%BF&oldid=78896175