

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

030415

截柱錐體

學校名稱：臺中市立大墩國民中學

| | |
|---|------------------|
| 作者： 國二 江佩岑 國二 王靜涵 國二 王芊晴 | 指導老師： 楊士弘 |
|---|------------------|

關鍵詞：橫截面、正角柱、正角錐

截柱錐體

摘要

此研究探討在正角柱及正角錐上一刀斬後分割成二部份而形成截面時，觀察其所形成的截面變化，並利用 Geogebra、Desmos 等電腦軟體模擬繪製，藉此來計算正角柱及正角錐分割成的截面周長與面積，進而推導出其公式及觀察截面大小之變化，以及其與側稜線長的關係。

壹、研究動機

我們在學校課程裡學習到求正角柱的表面積時，是將立體圖形展開後，找出底部正多邊形的面積加上側面(矩形)的面積和；而正角錐的表面積則是將底部正多邊形的面積加上側面(等腰三角形)的面積和。

當我們看了過去的科展作品中有人探討在正多面體上採特殊規則切出截面時的截面圖形時，激發我們探索立體圖形的剖面的好奇心：當正角柱的底面積與正角錐的底面積相同，且正角柱側稜線長度與正角錐側稜線長度也相同且做不同比例的延伸時，1. 如果在正角柱及正角錐上採特殊規則截出截面時，此截面會是怎樣的形狀及具有甚麼性質？2. 能否找到一個最大截面？在此研究報告中，我們將研究對象設定為在正角柱及正角錐底部的正多邊形邊長為 1，而側稜線長為 a 時的正三角柱體/錐體、正四角柱體/錐體、正五角柱體/錐體、正六角柱體/錐體，以瞭解我們感興趣的問題，並且利用 Geogebra、Desmos 電腦繪製軟體來協助我們觀察和完成計算。

貳、研究目的

- 一、分析、理解正角柱及正角錐的各種截面變化和圖形。
- 二、運用 Geogebra 電腦軟體觀察正角柱/正角錐進行截面的圖形變化。
- 三、算出正角柱及正角錐採特定方式截面時所形成的各種截面形狀及其周長和面積公式。
- 四、利用 Desmos 軟體分析各截面的周長和面積公式，並協助我們最大周長及面積的出現與側稜線長 a 的大小有何對應關係。

參、研究器材與設備

電腦、GeoGebra 軟體、Desmos 軟體、紙、筆

肆、研究過程

一、基本定義：

(一)、正角柱：

本研究中所使用的角柱，指的是具有以下特點的正角柱：1.上下底面在兩個分別的平行平面上是全等的多邊形 2.各側面為垂直連接這兩個底面的平行四邊形 3.每相鄰兩個四邊形的公共邊都相互平行。

(二)、正角錐

本研究中所使用的角錐，指的是具有以下特點的正角錐：1.底面為正多邊形 2.底面正多邊形各頂點向其所在平面外連接一點後，構成的各側面為全等的等腰三角形。

(三)、截面限制條件：

本研究中的截面，即平面與柱錐體相交時產生的交集，其在柱錐體上相交的位置限縮在頂點、稜線中點；而截面若剛好在柱錐體表面上則不在討論範圍內。意即，平面與柱錐體相交時的截面各邊(又稱為截痕)，必為柱錐體頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線。

二、進行步驟：

(一)、利用 GeoGebra 軟體中可對角柱、角錐操作截面的工具，協助我們進行觀察，將正三角柱、正四角柱、正五角柱、正六角柱，以及正三角錐、正四角錐、正五角錐、正六角錐，都以前述的條件得到截面，輔助我們計算底部正多邊形邊長為 1，而側稜線長為 a 的各正角柱/正角錐的截面周長及面積。

(二)、將步驟(一)計算出的截面周長及面積公式進行比較與分析，利用 Desmos 軟體繪製各個截面的周長、面積與側稜線長 a 的關係圖；並藉此推導出各正角柱/正角錐截面的最大周長及面積公式。

三、探討過程：

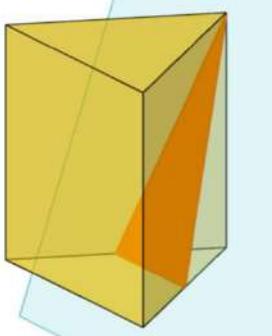
在各正角柱/正角錐內部使用特定方式所截出的截面可能形狀、周長及面積：

在這個部分按照基本定義中所列的特定截面方式，列舉出可截出的形狀，並計算出周長及面積，以下以**正三角柱及正六角錐為例**，列出探討過程：

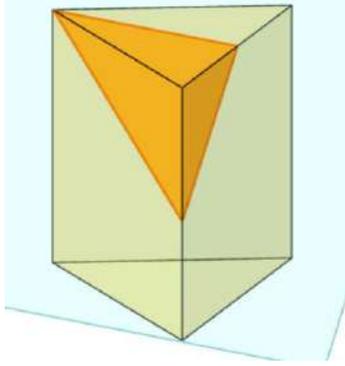
●正三角柱

1. 繪出底邊長為 1 和側邊長為 a 的正三角柱，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

表一 三角柱截面周長及面積計算(本表跨頁呈現)

| | |
|---|---|
| (1)如圖所示，連接 1 頂點與 2 稜線中點所成的截面為一等腰三角形 | |
|  | 底邊 = $\frac{1}{2}a$ |
| | 兩腰 = $\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$ |
| | 高 = $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{4}$ |
| | 截面周長 = $\sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2}$ |
| | 截面面積 = $\frac{\sqrt{16a^2+3}}{16}$ |

(2)如圖所示，連接1頂點與2稜線中點所成的截面為一等腰三角形



$$\text{底邊} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$$

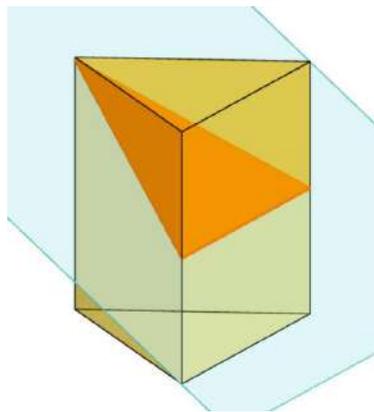
$$\text{兩腰} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$\text{高} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2+4}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

$$\text{截面周長} = \frac{\sqrt{a^2+4}}{2} + \sqrt{a^2+1}$$

$$\text{截面面積} = \frac{\sqrt{3a^2+12}}{16}$$

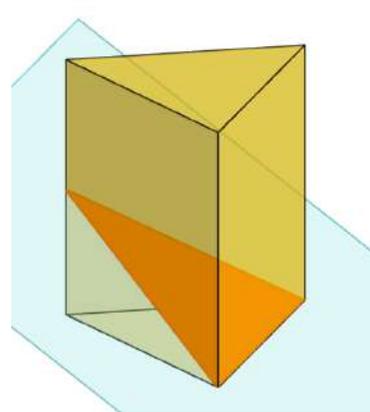
(3)1頂點與2稜線中點連線
截面為一等腰三角形



$$\text{截面周長} = \sqrt{a^2+4} + 1$$

$$\text{截面面積} = \frac{\sqrt{a^2+3}}{4}$$

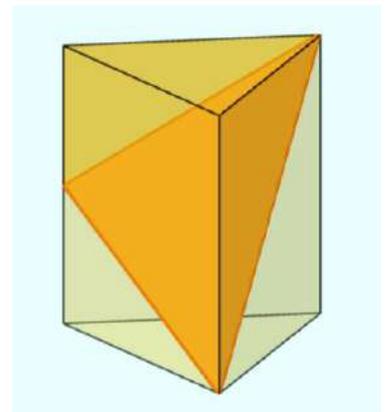
(4)2頂點與1稜線中點連線
截面為一等腰三角形



$$\text{截面周長} = \sqrt{a^2+4} + 1$$

$$\text{截面面積} = \frac{\sqrt{a^2+3}}{4}$$

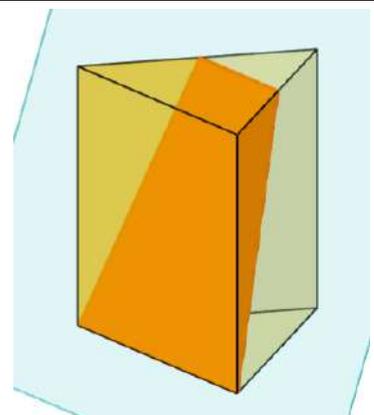
(5)2頂點與1稜線中點連線
截面為一等腰三角形



$$\text{截面周長} = \sqrt{a^2+4} + \sqrt{a^2+1}$$

$$\text{截面面積} = \frac{\sqrt{3a^2+3}}{4}$$

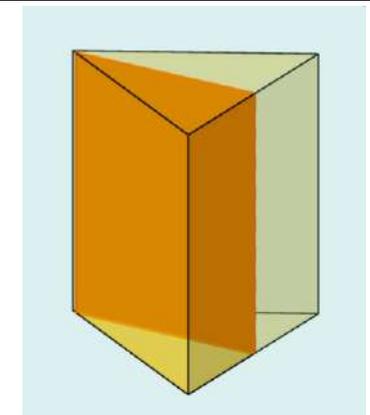
(6)2頂點與1稜線中點連線
截面為一等腰梯形



$$\text{截面周長} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{4}$$

$$\text{截面面積} = \frac{3\sqrt{16a^2+3}}{16}$$

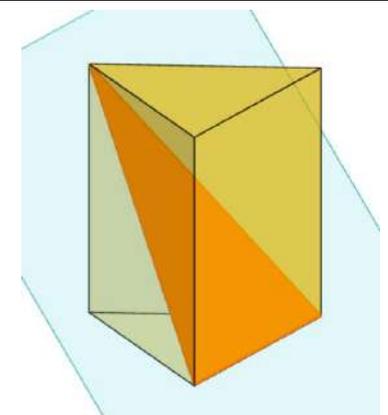
(7)2頂點與2稜線中點連線
截面為一等腰三角形



$$\text{截面周長} = \sqrt{3} + 2a$$

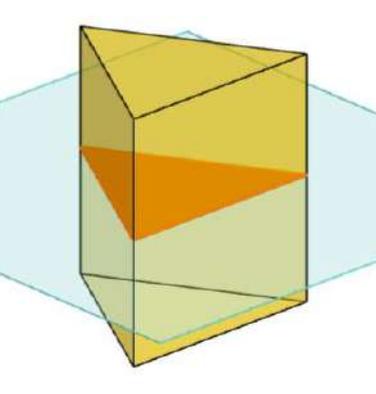
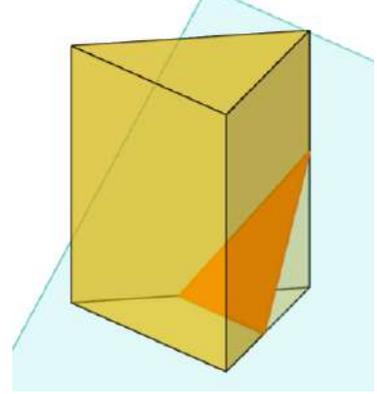
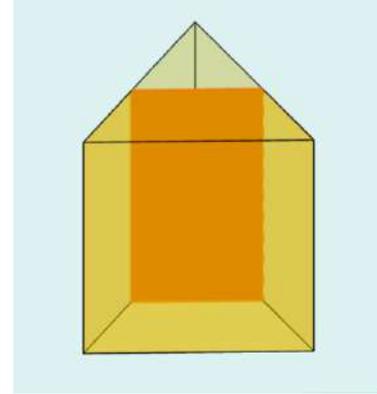
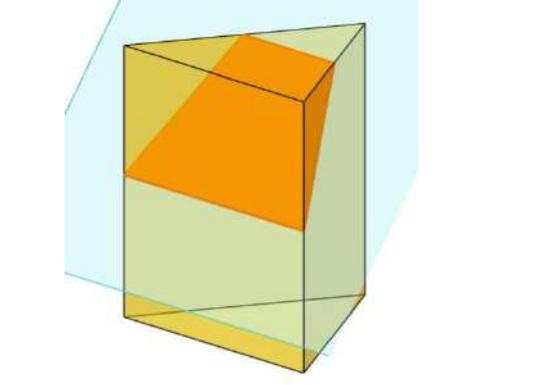
$$\text{截面面積} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

(8)3頂點連線
截面為一等腰三角形



$$\text{截面周長} = 2\sqrt{a^2+1} + 1$$

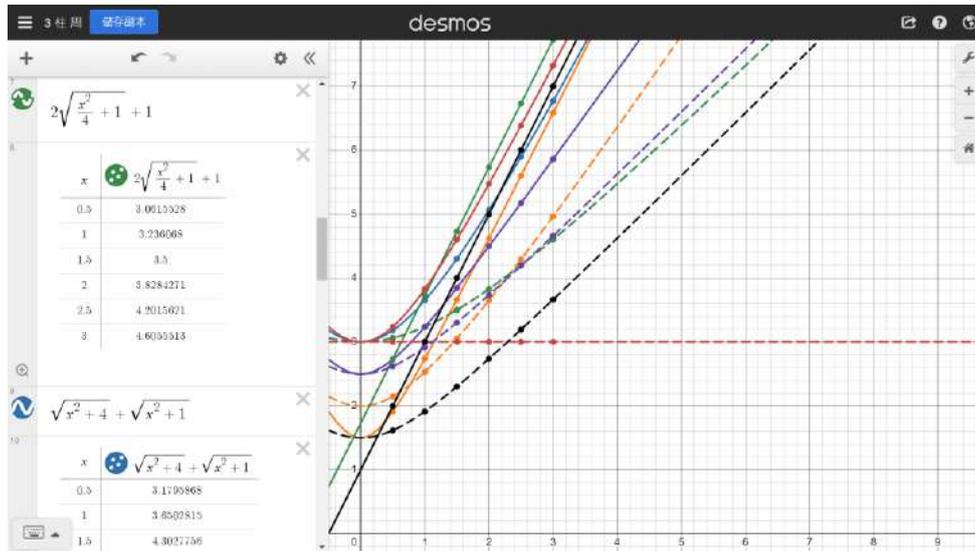
$$\text{截面面積} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$$

| | | |
|--|---|---|
| (9)3 稜線中點連線 截面為一正三角形 | (10)3 稜線中點連線 截面為一等腰三角形 | (11)4 稜線中點連線 截面為一長方形 |
|  |  |  |
| 截面周長= 3 截面面積= $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | 截面周長= $\sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{2}$ 截面面積= $\frac{\sqrt{4a^2+3}}{16}$ | 截面周長= $1 + 2a$ 截面面積= $\frac{1}{2}a$ |
| (12)如圖所示，連接 4 稜線中點所成的截面為一等腰梯形 | | |
|  | 上底= $\frac{1}{2}$ 下底=1 兩腰= $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ 高= $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ 截面周長= $\sqrt{a^2 + 1} + \frac{3}{2}$ 截面面積= $\frac{3\sqrt{a^2+1}}{16}$ | |

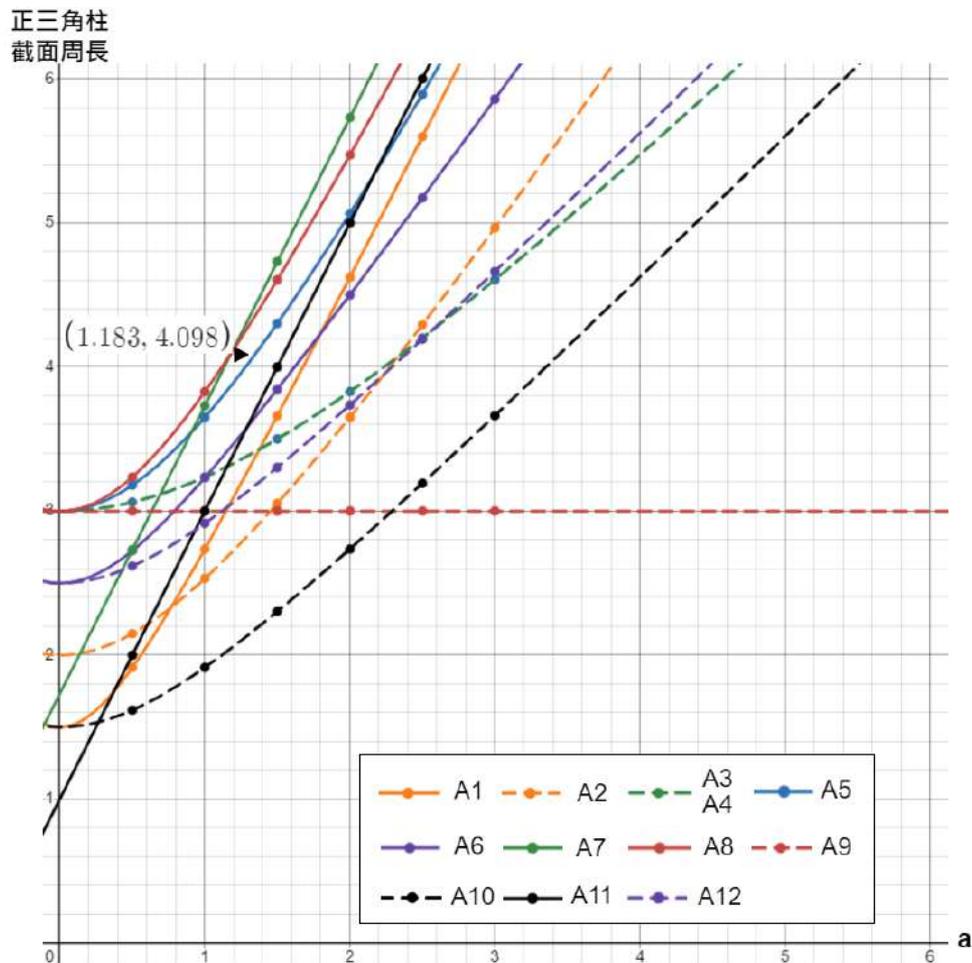
(表一由作者一整理及製作)

2. 利用 Desmos 軟體，分別將正三角柱按特定連線方式所截各截面周長的公式以及截面面積的公式繪製於平面坐標中，使用軟體繪製的操作示意圖如圖一所示。我們將計算出的各截面周長/各截面面積公式一一輸入於 Desmos 的座標圖繪製畫面中(因軟體本身的限制，須將 a 先行轉換為 x 輸入，呈現為自變數為 x、應變數為 y 的函數圖形)。

繪製出的圖形呈現為橫軸為 a(正三角柱側稜線長)，縱軸為截面周長或截面面積的座標圖，如圖二及圖三所示。



圖一 使用 Desmos 進行三角柱截面計算示意圖(本圖由作者一製作)



圖二 正三角柱截面周長(本圖由作者一製作)

(1)截面周長與 a 的關係

如圖二為橫軸為 a(正三角柱側稜線長)，縱軸為截面周長的座標圖。

由圖中可以看出，按特定連線方式所截各截面的最大周長可能出現在截面 A8(3 頂

點連線的等腰三角形)或截面 A7(2 頂點 2 稜線中點連接的長方形)中；其餘截面皆不可能出現最大周長。

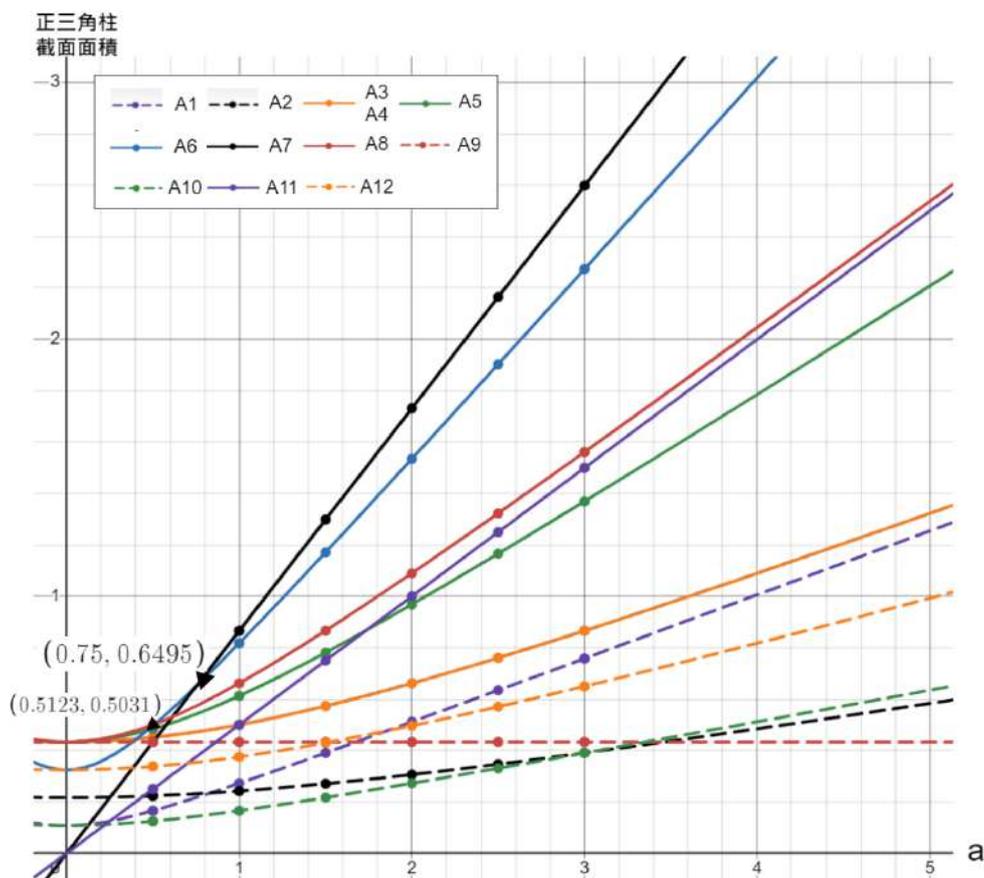
我們利用 A8 周長公式=A7 周長公式的計算，找出截面 A8 及截面 A7 的周長公式的交點，得知兩條線相交時的 $a \approx 1.183$ (四捨五入到小數點後第 3 位)，進而得知此時的正三角柱截面周長約等於 4.098。經由觀察此交點可以發現：當正三角柱側稜線長 $a \leq 1.183$ 時，最大周長出現在截面 A8(3 頂點連線的等腰三角形)中；而當正三角柱側稜線長 $a \geq 1.183$ 時，最大周長出現在截面 A7(2 頂點 2 稜線中點連接的長方形)中。

值得注意的是，截面 A9(3 稜線中點連線的正三角形)的周長始終為一常數，即不論側稜線長 a 如何變化，因為截面始終是橫切的正三角形，所以周長也保持不變。另外，截面 A3(1 頂點 2 稜線中點連接的等腰三角形)及 A4(2 頂點 1 稜線中點連接的等腰三角形)因截面公式相同，所以周長及面積的圖形也相同。

(2) 截面面積與 a 的關係

下圖為橫軸為 a (正三角柱側稜線長)，縱軸為截面面積的座標圖。

如圖所示，按特定連線方式所截各截面的最大面積可能出現在截面 A6(2 頂點 2 稜線中點連線的等腰梯形)、A7(2 頂點 2 稜線中點連線的長方形)或 A8(3 頂點連線的等腰三角形)中；其餘截面皆不可能出現最大面積。



圖三 正三角柱截面面積(本圖由作者一製作)

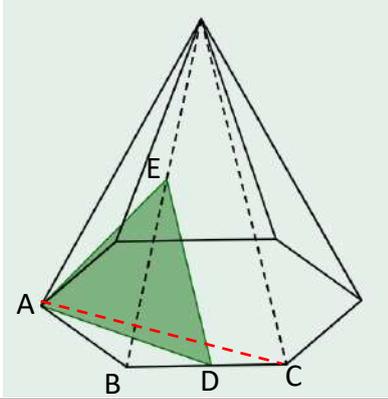
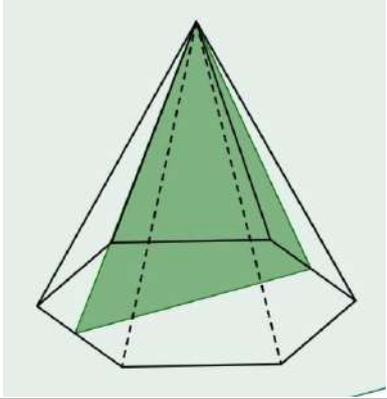
仿照前述步驟，我們計算出截面 A8 及 A6 的面積公式的交點，以及 A6 及 A7 的面積公式的交點，可以發現到有最大面積的截面出現了兩次的移轉：當正三角柱側稜線長 $a \leq 0.5123$ 時，最大面積出現在截面 A8(3 頂點連線的等腰三角形)中；當正三角柱側稜線長 $0.5123 \leq a \leq 0.75$ 時，最大面積出現在截面 A6(2 頂點 2 稜線中點連線的等腰梯形)中；而當正三角柱側稜線長增加到 $a \geq 0.75$ 時，最大面積出現在截面 A7(2 頂點 2 稜線中點連線的長方形)中。

在這邊也值得注意的是，截面 A9(3 頂點連線的正三角形)面積始終為一常數，即不論側稜線長 a 如何變化，因為截面始終是橫切的正三角形，所以面積也保持不變。

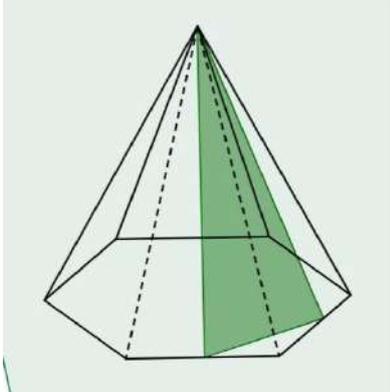
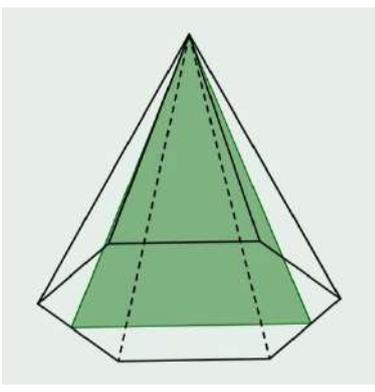
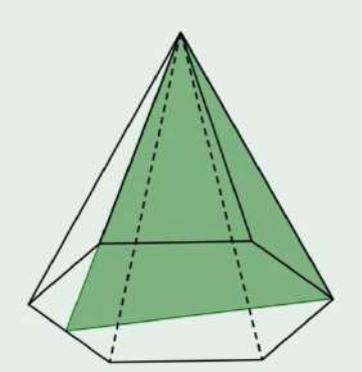
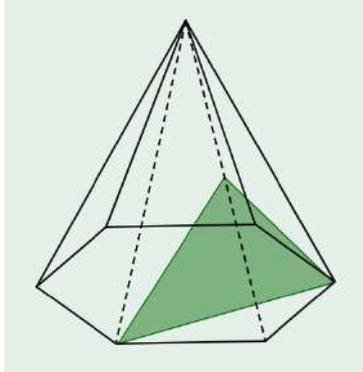
●正六角錐

1. 繪出底邊長為 1 和側邊長為 a 的正六角錐，按照由頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

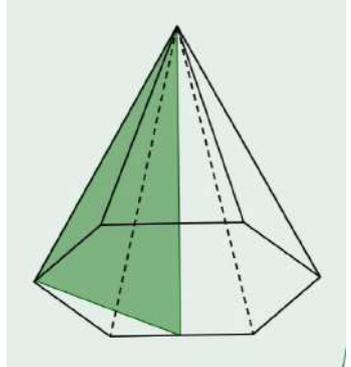
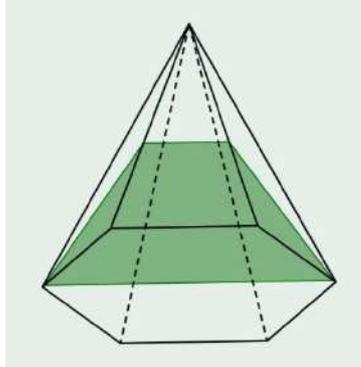
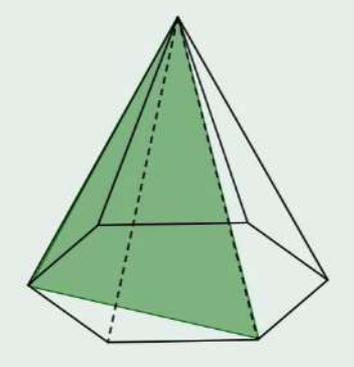
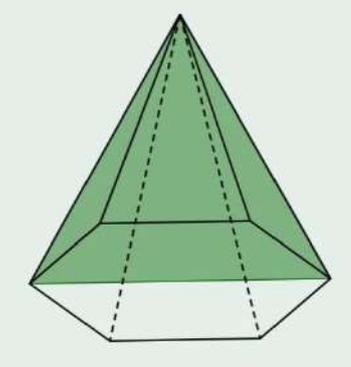
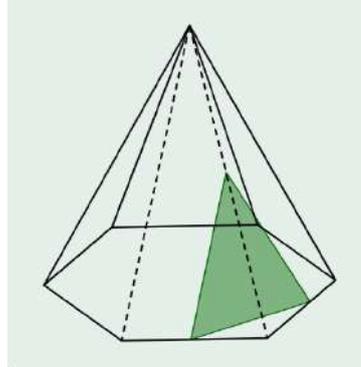
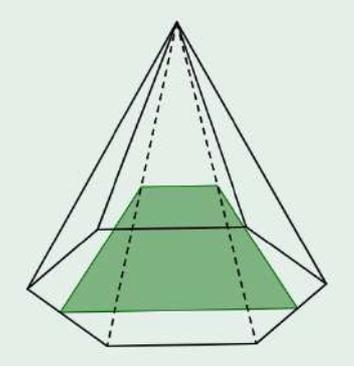
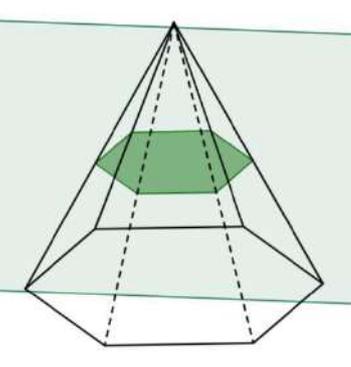
表二 六角錐截面周長及面積計算(本表跨頁呈現)

| (1)1 頂點與 2 稜線中點連線 截面為一等腰三角形 | (2)1 頂點與 2 稜線中點連線 截面為一等腰三角形 |
|---|--|
|  |  |
| <p>底邊長 = 等腰 $\triangle ABC$ 之中線定理 = $\frac{\sqrt{7}}{2}$，</p> <p>一腰 = $\frac{a}{2}$，一腰 = 等腰 \triangle 之中線 = $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2}$</p> <p>利用海龍公式求出 $S = \frac{\sqrt{7+a+\sqrt{a^2+2}}}{4}$</p> <p>截面周長 = $\frac{a+\sqrt{7}+\sqrt{a^2+2}}{2}$</p> <p>截面面積 = $\frac{\sqrt{28a^2-25}}{16}$</p> | <p>截面周長 = $\sqrt{3} + \sqrt{4a^2-1}$</p> <p>截面面積 = $\frac{\sqrt{3a^2-3}}{2}$</p> |

(接續下頁表格)

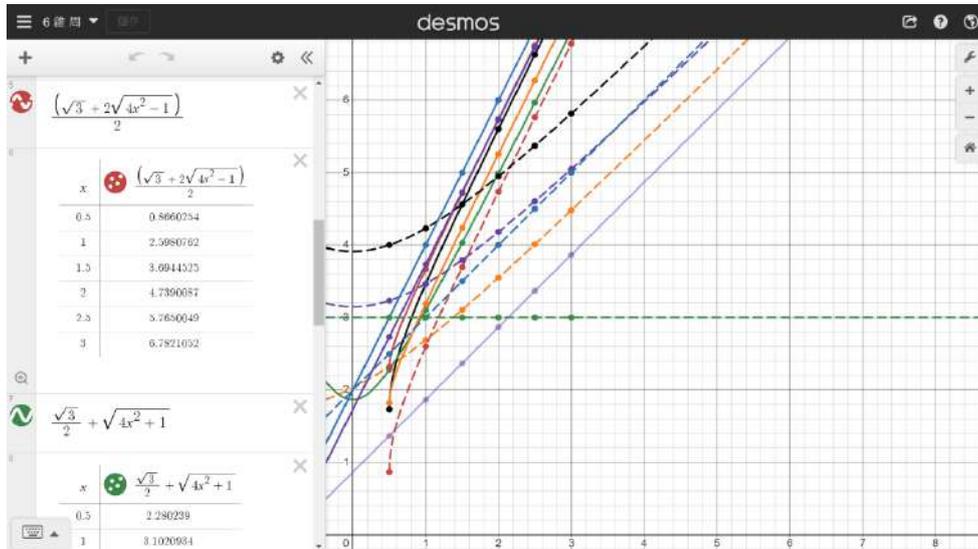
| | |
|--|--|
| <p>(3) 1 頂點與 2 稜線中點連線 截面為一等腰三角形</p> | <p>(4) 2 頂點與 1 稜線中點連線 截面為一三角形</p> |
|  |  |
| <p>截面周長 = $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{4a^2-1}}{2}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{48a^2-21}}{16}$</p> | <p>截面周長 = $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{4a^2+1}}{2}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{48a^2+3}}{16}$</p> |
| <p>(5) 1 頂點與 2 稜線中點連線 截面為一等腰三角形</p> | <p>(6) 2 頂點與 1 稜線中點連線 截面為一等腰三角形</p> |
|  |  |
| <p>底邊長 = $\frac{\sqrt{13}}{2}$，一腰 = a，另一腰 = $\frac{\sqrt{4a^2-1}}{2}$ 利用海龍公式求出 $S = \frac{2a+\sqrt{13}+\sqrt{4a^2-1}}{4}$ 截面周長 = $\frac{2a+\sqrt{13}+\sqrt{4a^2-1}}{2}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{52a^2-49}}{8}$</p> | <p>截面周長 = $\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + 2}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{3a^2-3}}{4}$</p> |

(接續下頁表格)

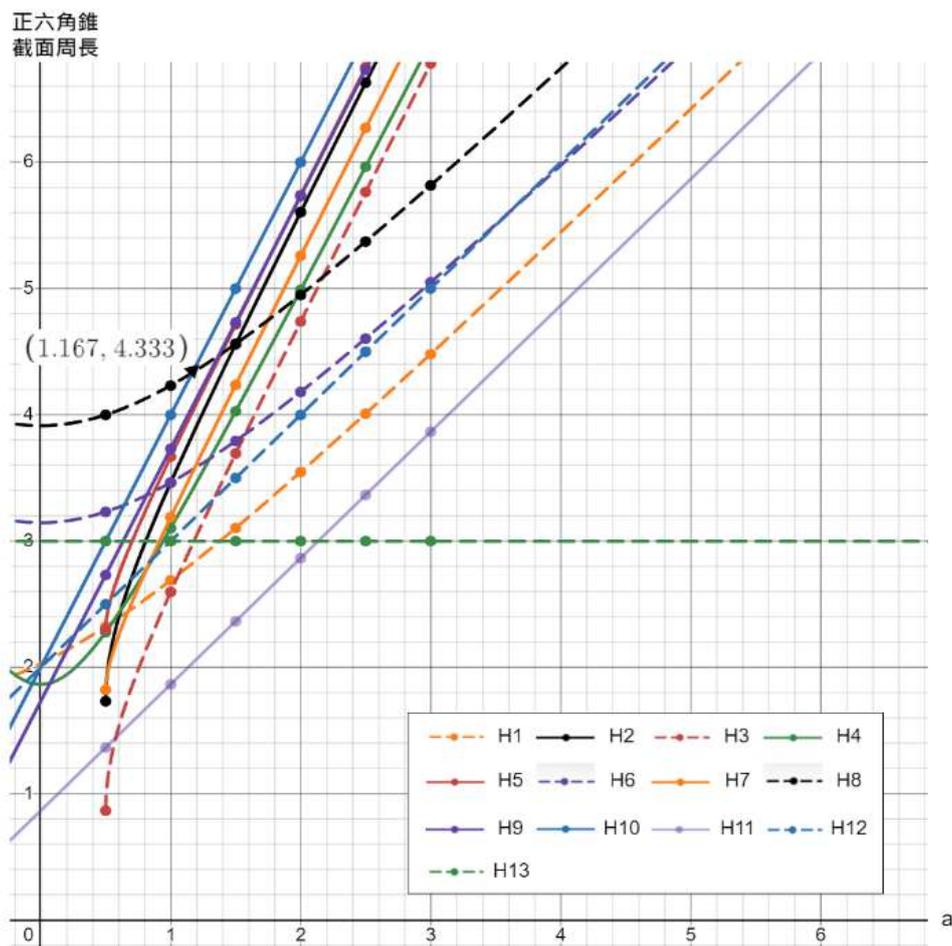
| | | |
|--|---|--|
| (7) 2 頂點與 1 稜線中點連線 截面為一等腰三角形 | (8) 2 頂點與 2 稜線中點連線 截面為一等腰梯形 | (9) 3 頂點連線 截面為一等腰三角形 |
|  |  |  |
| 截面周長 = $\frac{2a + \sqrt{7} + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{7a^2 - 4}}{4}$ | 截面周長 = $\frac{5 + 2\sqrt{a^2 + 2}}{2}$ 截面面積 = $\frac{5\sqrt{4a^2 - 1}}{16}$ | 截面周長 = $2a + \sqrt{3}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{12a^2 - 9}}{4}$ |
| (10) 3 頂點連線 截面為一正三角形 | (11) 3 稜線中點連線 截面為一等腰三角形 | (12) 4 稜線中點連線 截面為一等腰梯形 |
|  |  |  |
| 截面周長 = $2 + 2a$ 截面面積 = $\sqrt{a^2 - 1}$ | 截面周長 = $\frac{2a + \sqrt{3}}{2}$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{12a^2 - 9}}{16}$ | 截面周長 = $2 + a$ 截面面積 = $\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2}$ |
| (13) 6 稜線中點連線 截面為一正六邊形 | | |
|  | | |
| 截面周長 = $3\sqrt{3}$ 截面面積 = $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ | | |

(表二由作者二整理及製作)

2. 利用 Desmos 軟體，分別將正六角錐按特定連線方式所截各截面周長的公式以及截面面積的公式繪製於平面坐標中，使用軟體繪製的操作示意圖如圖四所示。我們將計算出的各截面周長/各截面面積公式一一輸入於 Desmos 的座標圖繪製畫面中。於 Desmos 軟體中繪製出的圖形如圖五及圖六所示，呈現為橫軸為 a (正六角錐側稜線長)，縱軸為截面周長或截面面積的座標圖。



圖四 使用 Desmos 進行六角錐截面計算示意圖(本圖由作者二製作)



圖五 正六角錐截面周長(本圖由作者二製作)

(1) 截面周長與 a 的關係

如圖五為橫軸為 a(正六角錐側稜線長)，縱軸為截面周長的座標圖。

由圖中可以看出，按特定連線方式所截各截面的最大周長可能出現在截面 H8(2 頂點 2 稜線中點連接的等腰梯形)或截面 H10(3 頂點連線的正三角形)中；其餘截面皆不可能出現最大周長。

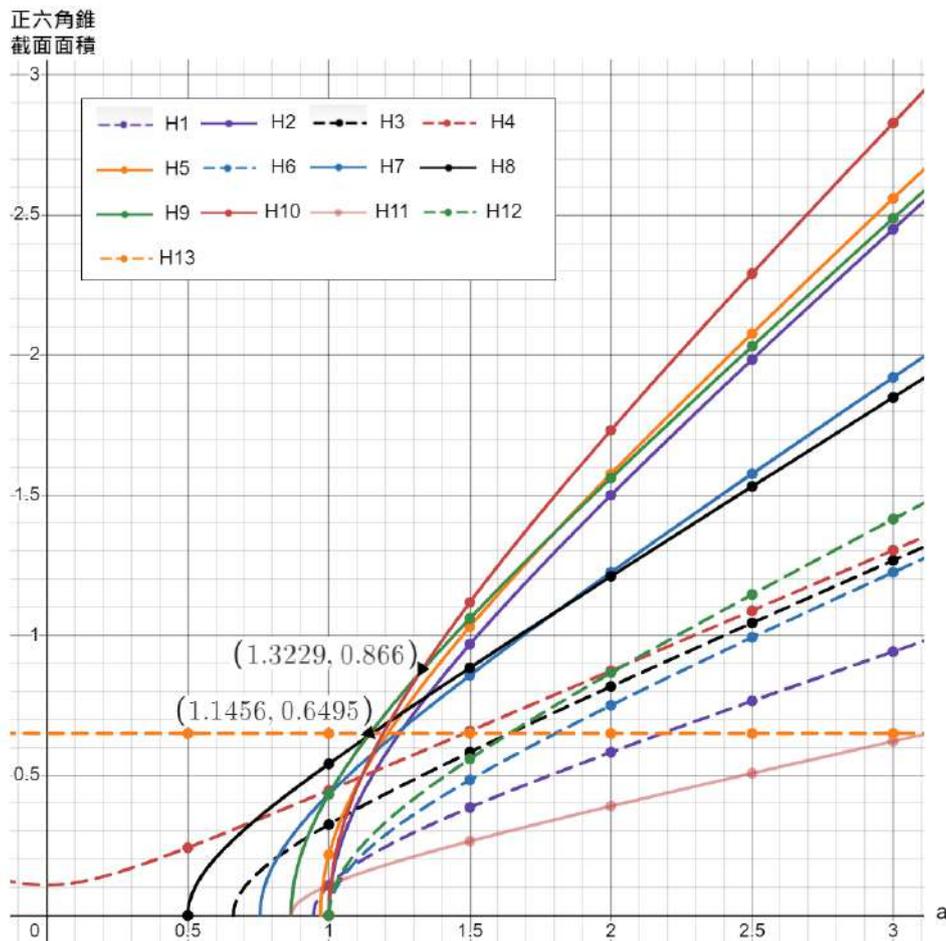
我們利用 H8 周長公式=H10 周長公式的計算，找出截面 H8 及截面 H10 的周長公式的交點，得知兩條線相交時的 $a \approx 1.167$ (四捨五入到小數點後第 3 位)，進而得知此時的正六角錐截面周長約等於 4.333。經由觀察此交點可以發現：當正六角錐側稜線長 $a \leq 1.167$ 時，最大周長出現在截面 H8(2 頂點 2 稜線中點連接的等腰梯形)中；而當正三角柱側稜線長 $a \geq 1.167$ 時，最大周長出現在截面 H10(3 頂點連線的正三角形)中。

另外，在這邊也能注意到截面 H13(3 稜線中點連線的正三角形)的周長始終為一常數，即不論側稜線長 a 如何變化，因為截面始終是橫切的正三角形，所以周長也保持不變。

(2) 截面面積與 a 的關係

下圖為橫軸為 a(正六角錐側稜線長)，縱軸為截面面積的座標圖。

如圖所示，按特定連線方式所截各截面的最大面積可能出現在截面 H13(6 稜線中點連線的正六邊形)、H9(3 頂點連線的等腰三角形)或 H10(3 頂點連線的正三角形)中；其餘截面皆不可能出現最大面積。



圖六 正六角錐截面面積(本圖由作者二製作)

仿照前述步驟，我們計算出截面 H13 及 H9 的面積公式的交點，以及 H9 及 H10 的面積公式的交點，可以發現到有最大面積的截面出現了兩次的移轉：當正六角錐側稜線長 $a \leq 1.146$ (四捨五入至小數點後第三位) 時，最大面積出現在截面 H13 (6 稜線中點連接的正六邊形) 中；當正六角錐側稜線長 $1.146 \leq a \leq 1.323$ 時，最大面積出現在截面 H9 (3 頂點連線的等腰三角形) 中；而當正六角錐側稜線長增加到 $a \geq 1.323$ 時，最大面積出現在截面 H10 (3 頂點連線的正三角形) 中。

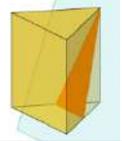
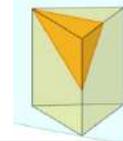
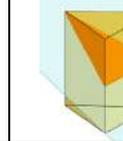
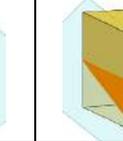
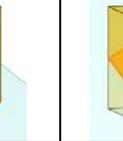
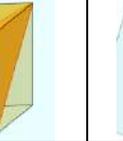
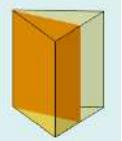
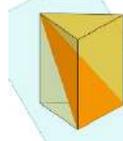
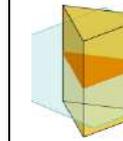
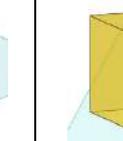
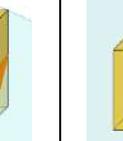
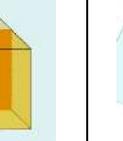
在這邊也值得注意的是，截面 H13 (6 稜線中點連接的正六角形) 面積始終為一常數，即不論側稜線長 a 如何變化，因為截面始終是橫切的正六角形，所以面積也保持不變。

伍、研究結果

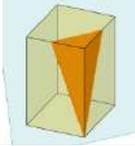
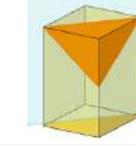
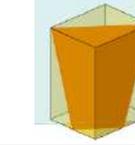
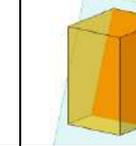
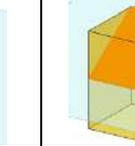
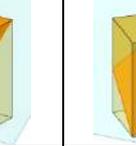
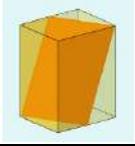
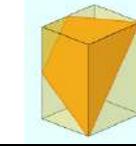
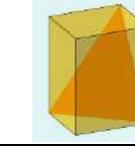
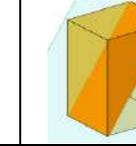
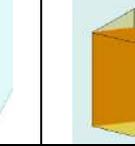
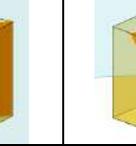
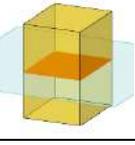
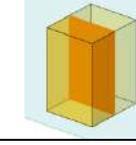
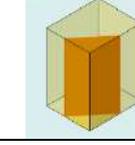
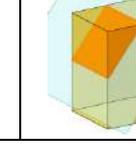
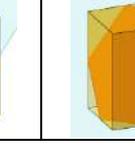
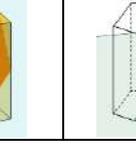
一、 列出各柱錐體的可能截面形狀、截面周長及面積

由於空間中不共線的三點可決定一平面，因此任一種柱體錐體皆可以依序按照第肆章的截面限制條件：1 頂點與 2 中點連線、2 頂點與 1 稜線中點連線、3 頂點連線以及 3 稜線中點連線等等找出截面；另因柱體錐體特殊的對稱特性，前述任三點連線之後，會有其他頂點或稜線中點共面的情形，而形成不同的截面形狀，以下將各柱錐體按特定連線方式所截出的截面歸納於表格中：

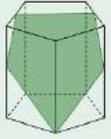
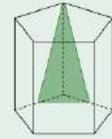
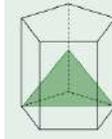
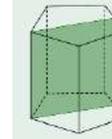
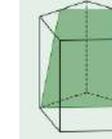
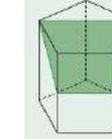
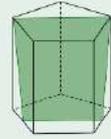
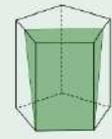
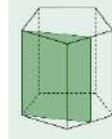
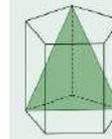
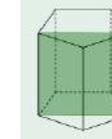
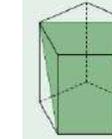
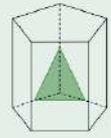
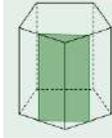
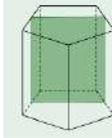
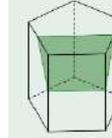
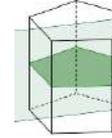
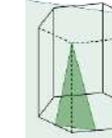
表三 各角柱/角錐截面彙整(本表跨頁呈現)

| 柱體類型 | 正三角柱 | | | | | |
|------|---|---|---|---|--|---|
| 編號 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 |
| 截面方式 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{2}$ | $\sqrt{1+\frac{a^2}{4}} + \sqrt{1+a^2}$ | $\sqrt{a^2+4} + 1$ | $\sqrt{a^2+4} + 1$ | $\sqrt{a^2+4} + \sqrt{a^2+1}$ | $\frac{\sqrt{16a^2+3}}{4}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{16a^2+3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3a^2+12}}{16}$ | $\frac{\sqrt{a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3a^2+3}}{4}$ | $\frac{3\sqrt{16a^2+3}}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正三角柱 | | | | | |
| 編號 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 |
| 截面形狀 | 長方形 | 等腰三角形 | 正三角形 | 等腰三角形 | 長方形 | 等腰梯形 |
| 截面方式 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 3 頂點連線 | 3 稜線中點 連線 | 3 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 |
| 周長 | $\sqrt{3} + 2a$ | $2\sqrt{a^2+1} + 1$ | 3 | $\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}$ | $1 + 2a$ | $\sqrt{a^2+1} + \frac{3}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ | $\frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+3}}{16}$ | $\frac{1}{2}a$ | $\frac{3\sqrt{a^2+3}}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |

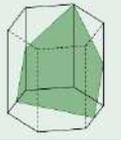
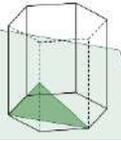
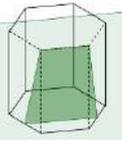
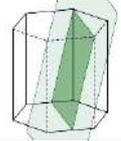
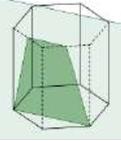
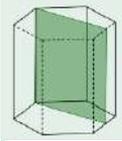
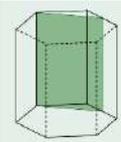
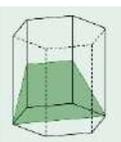
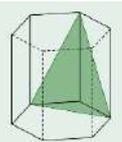
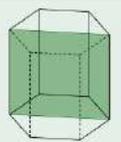
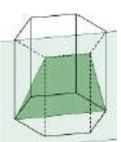
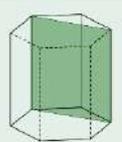
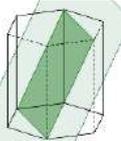
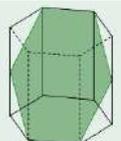
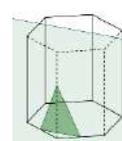
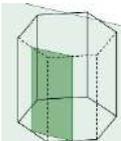
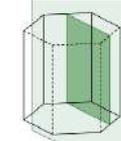
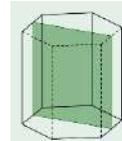
(接續下頁表格)

| | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 柱體類型 | 正四角柱 | | | | | |
| 編號 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 正三角形 | 等腰梯形 | 長方形 | 長方形 | 菱形 |
| 截面方式 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{\sqrt{16a^2+4}+\sqrt{2}}{2}$ | $3\sqrt{2}$ | $\sqrt{4a^2+1}+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ | $2+\sqrt{4a^2+1}$ | $2+\sqrt{a^2+4}$ | $\sqrt{4a^2+16}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{16a^2+2}}{64}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{72a^2+9}}{8}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2a^2+4}}{2}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正四角柱 | | | | | |
| 編號 | B12 | B12 | B12 | B12 | B12 | B12 |
| 截面形狀 | 平行四邊形 | 梯形 | 等腰三角形 | 長方形 | 長方形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 3 頂點連線 | 4 頂點連線 | 4 頂點連線 | 3 稜線中點 連線 |
| 周長 | $\sqrt{5}+\sqrt{4a^2+1}$ | $\frac{3\sqrt{a^2+1}+\sqrt{5}+\sqrt{a^2+4}}{2}$ | $\sqrt{2}+\sqrt{4a^2+4}$ | $2(1+\sqrt{a^2+1})$ | $2a+2\sqrt{2}$ | $\sqrt{a^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ | $\frac{(60a^2+57)(\sqrt{a^2+1})}{64}$ | $\frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}$ | $\sqrt{a^2+1}$ | $\sqrt{2}a$ | $\frac{\sqrt{2a^2+1}}{8}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正四角柱 | | | | | 正五角柱 |
| 編號 | B13 | B14 | B15 | B16 | B17 | C1 |
| 截面形狀 | 正方形 | 長方形 | 長方形 | 長方形 | 六邊形 | 三角形 |
| 截面方式 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 6 稜線中點 連線 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | 4 | $2a+2$ | $2a+\sqrt{2}$ | $\sqrt{a^2+1}+2$ | $\sqrt{2}+\sqrt{4a^2+4}$ | $\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+4}+\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2}$ |
| 面積 | 1 | a | $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ | $\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{4\sqrt{5}a^2+2\sqrt{5}+16a^2+10}}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |

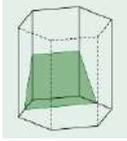
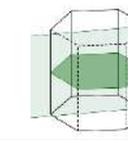
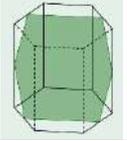
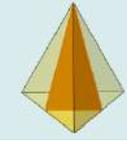
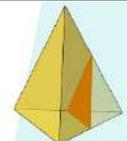
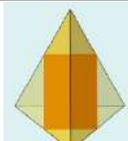
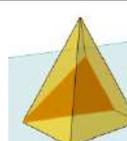
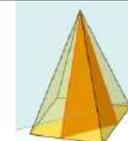
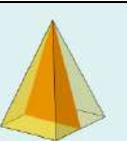
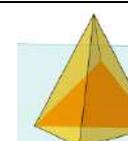
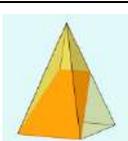
(接續下頁表格)

| | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 柱體類型 | 正五角柱 | | | | | |
| 編號 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
| 截面形狀 | 五邊形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 長方形 | 等腰梯形 | 等腰梯形 |
| 截面方式 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4\sqrt{4a^2 + 1}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2 + 16}}{2}$ | $2a + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ | $\frac{3 + 3\sqrt{5} + \sqrt{64a^2 + 16}}{4}$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{a^2 + 4}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{3 + \sqrt{5} + 4\sqrt{a^2 + 4} + 4\sqrt{a^2 + 1}}{4}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{64a^2 + 10} - 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{4a^2 - 22})}{16}$ | $\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} a$ | $\frac{(3 + 3\sqrt{5})(\sqrt{64a^2 + 10} - 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{4a^2 - 20} + 2\sqrt{5})}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正五角柱 | | | | | |
| 編號 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 |
| 截面形狀 | 等腰梯形 | 等腰梯形 | 長方形 | 等腰三角形 | 長方形 | 等腰梯形 |
| 截面方式 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 3 頂點連線 | 4 頂點連線 | 4 頂點連線 |
| 周長 | $\frac{5 + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{4a^2 + 1}}{4}$ | $\frac{7 + \sqrt{5} + 4\sqrt{4a^2 + 1}}{4}$ | $2a + \sqrt{4 + \sqrt{5}}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{16a^2 + 16}}{2}$ | $1 + \sqrt{5} + 2a$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + 4\sqrt{a^2 + 1}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{(5 + \sqrt{5})(\sqrt{64a^2 + 10} + 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(7 + \sqrt{5})(\sqrt{64a^2 + 10} + 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{\sqrt{4 + \sqrt{5}}}{2} a$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 + 10} - 2\sqrt{5})}{16}$ | $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} a$ | $\frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 + 10} + 2\sqrt{5})}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正五角柱 | | | | | 正六角柱 |
| 編號 | C14 | C15 | C16 | C17 | C18 | D1 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 長方形 | 長方形 | 等腰梯形 | 正五邊形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 3 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 5 稜線中點 連線 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4\sqrt{a^2 + 1}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4a}{2}$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + 4a}{2}$ | $\frac{5 + \sqrt{5} + 4\sqrt{a^2 + 1}}{4}$ | 5 | $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{16a^2 + 4}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 + 10} - 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{1 + \sqrt{5}}{4} a$ | $\frac{3 + \sqrt{5}}{4} a$ | $\frac{(7 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 + 12} + 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{5 \tan(54^\circ)}{4}$ | $\frac{\sqrt{192a^2 + 3}}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |

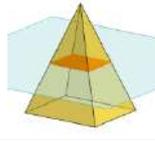
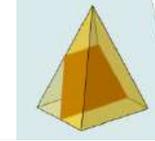
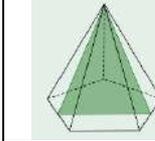
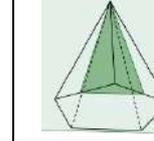
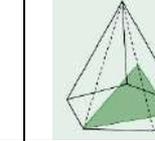
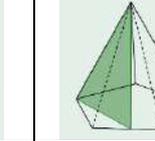
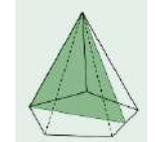
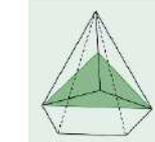
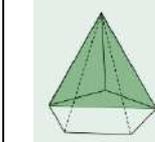
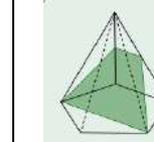
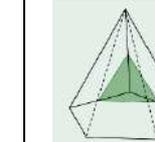
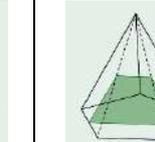
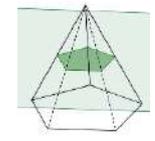
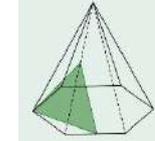
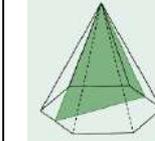
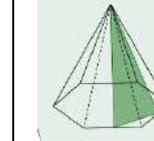
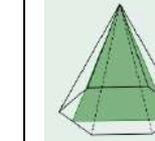
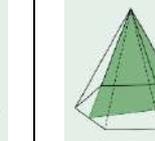
(接續下頁表格)

| | | | | | | |
|------|---|---|---|--|---|---|
| 柱體類型 | 正六角柱 | | | | | |
| 編號 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 | D7 |
| 截面形狀 | 五邊形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 | 長方形 | 等腰梯形 | 長方形 |
| 截面方式 | 1 頂點 4 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 4}$ | $\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + 4}$ | $\frac{5 + 2\sqrt{4a^2 + 1}}{2}$ | $2\sqrt{3} + \sqrt{4a^2 + 1}$ | $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{4a^2 + 1}}{2}$ | $2a + \sqrt{13}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3a^2 + 12} + \sqrt{12a^2 + 12}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3a^2 + 3}}{4}$ | $\frac{5\sqrt{16a^2 + 3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{12a^2 + 3}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{48a^2 + 3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{13}}{2}a$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正六角柱 | | | | | |
| 編號 | D8 | D9 | D10 | D11 | D12 | D13 |
| 截面形狀 | 長方形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 正方形 | 等腰梯形 | 長方形 |
| 截面方式 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | $2a + \sqrt{7}$ | $3 + \sqrt{a^2 + 4}$ | $\sqrt{3} + \sqrt{4a^2 + 4}$ | $2a + 4$ | $3 + 2\sqrt{a^2 + 1}$ | $2a + \sqrt{3}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ | $\frac{3\sqrt{a^2 + 3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{12a^2 + 3}}{4}$ | $2a$ | $\frac{3\sqrt{4a^2 + 3}}{4}$ | $\sqrt{3}a$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正六角柱 | | | | | |
| 編號 | D14 | D15 | D16 | D17 | D18 | D19 |
| 截面形狀 | 長方形 | 六邊形 | 等腰三角形 | 長方形 | 長方形 | 長方形 |
| 截面方式 | 3 頂點連線 | 4 頂點連線 | 4 頂點連線 | 3 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 |
| 周長 | $2\sqrt{3} + 2\sqrt{a^2 + 1}$ | $2 + 2\sqrt{a^2 + 4}$ | $\frac{\sqrt{4a^2 + 1}}{4}$ | $2a + \sqrt{3}$ | $2a + 3$ | $2a + 2\sqrt{3}$ |
| 面積 | $\sqrt{3a^2 + 3}$ | $\frac{3\sqrt{a^2 + 3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{12a^2 + 3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ | $\frac{3}{2}a$ | $\sqrt{3}a$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |

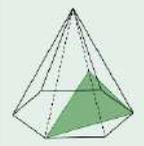
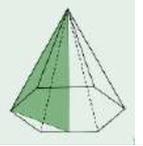
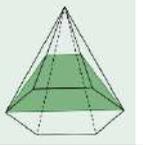
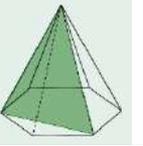
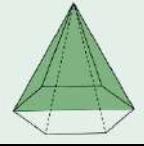
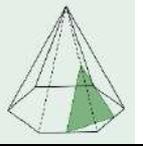
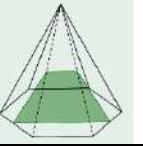
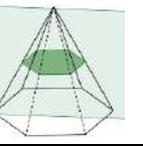
(接續下頁表格)

| | | | | | | |
|------|---|---|---|--|---|---|
| 柱體類型 | 正六角柱 | | | 正三角錐 | | |
| 編號 | D20 | D21 | D22 | E1 | E2 | E3 |
| 截面形狀 | 等腰梯形 | 正六邊形 | 六邊形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 6 稜線中點 連線 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{5 + 2\sqrt{a^2 + 1}}{2}$ | 6 | $3 + 2\sqrt{a^2 + 1}$ | $\frac{1}{2} + \sqrt{a^2 + 2}$ | $\frac{1}{2} + \sqrt{4a^2 - 1}$ | $1 + \sqrt{a^2 + 2}$ |
| 面積 | $\frac{5\sqrt{4a^2 + 3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{7\sqrt{4a^2 + 3}}{8}$ | $\frac{\sqrt{4a^2 + 7}}{16}$ | $\frac{\sqrt{16a^2 - 5}}{16}$ | $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{4}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正三角錐 | | | 正四角錐 | | |
| 編號 | E4 | E5 | E6 | E7 | F1 | F2 |
| 截面形狀 | 三角形 | 正三角形 | 等腰三角形 | 長方形 | 三角形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 3 稜線 中點連接 | 3 稜線 中點連接 | 4 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{\sqrt{3} + 2a + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $a + \frac{1}{2}$ | $a + 1$ | $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{4a^2 - 1}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3a^2 - 1}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{4a^2 - 1}}{16}$ | $\frac{1}{4}a$ | $\frac{\sqrt{5a^2 + 1}}{8}$ | $\frac{\sqrt{8a^2 - 3}}{8}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正四角錐 | | | | | |
| 編號 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 三角形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 3 頂點連線 | 3 稜線中點 連線 |
| 周長 | $2 + \sqrt{4a^2 - 1}$ | $\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 2}$ | $\frac{\sqrt{5} + 2a + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{3}{2} + \sqrt{a^2 + 2}$ | $2a + \sqrt{2}$ | $a + \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{4a^2 - 2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{(10a + 13)(2\sqrt{5} - 3)}}{8}$ | $\frac{\sqrt{36a^2 + 63}}{16}$ | $\frac{\sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2a^2 - 4}}{8}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |

(接續下頁表格)

| | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 柱體類型 | 正四角錐 | | 正五角錐 | | | |
| 編號 | F9 | F10 | G1 | G2 | G3 | G4 |
| 截面形狀 | 正方形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 三角形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 4 稜線中點 連線 | 4 稜線中點 連線 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 |
| 周長 | 2 | $a + \frac{3}{2}$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + 4\sqrt{4a^2 - 1}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4\sqrt{4a^2 - 1}}{4}$ | $\frac{a + \sqrt{a^2 + 2} + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}{2}$ | $\frac{2a + \sqrt{4a^2 - 1} + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{\sqrt{36a^2 - 9}}{16}$ | $\frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{64a^2 - 30} - 6\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{64a^2 - 22} - 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{\sqrt{16a^2 + 4\sqrt{5}a^2 - 9} - 4\sqrt{5}}{16}$ | $\frac{\sqrt{8\sqrt{4 + \sqrt{5}}a}}{16}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正五角錐 | | | | | |
| 編號 | G5 | G6 | G7 | G8 | G9 | G10 |
| 截面形狀 | 三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 |
| 截面方式 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 | 3 頂點連接 | 2 頂點 2 稜線 中點連接 | 3 稜線 中點連接 | 4 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{2a + \sqrt{4a^2 - 1} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{a^2 + 2}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4a}{2}$ | $\frac{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{a^2 + 2}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4a}{4}$ | $\frac{4a + 5 + \sqrt{5}}{4}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{80a^2 + 32\sqrt{5}a^2 - 56} - 24\sqrt{5}}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{4a^2 + 2} - 2\sqrt{5})}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 - 6} - 2\sqrt{5})}{16}$ | $\frac{(2 + \sqrt{5})(\sqrt{4a^2 + 3})}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 - 6} - 2\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(5 + \sqrt{5})(\sqrt{16a^2 - 6} - 2\sqrt{5})}{64}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正五角錐 | 正六角錐 | | | | |
| 編號 | G11 | H1 | H2 | H3 | H4 | H5 |
| 截面形狀 | 正五邊形 | 三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 三角形 |
| 截面方式 | 5 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 1 頂點 2 稜線 中點連接 | 2 頂點 1 稜線 中點連接 |
| 周長 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{a + \sqrt{7} + \sqrt{a^2 + 2}}{2}$ | $\sqrt{3} + \sqrt{4a^2 - 1}$ | $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{4a^2 + 1}}{2}$ | $\frac{2a + \sqrt{13} + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{5 \tan(54^\circ)}{16}$ | $\frac{\sqrt{28a^2 - 25}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3a^2 - 3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{48a^2 - 21}}{16}$ | $\frac{\sqrt{48a^2 + 3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{52a^2 - 49}}{8}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |  |  |

(接續下頁表格)

| 柱體類型 | 正六角錐 | | | |
|------|---|---|--|---|
| 編號 | H6 | H7 | H8 | H9 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 三角形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 |
| 截面方式 | 2 頂點 1 稜線中點 連接 | 2 頂點 1 稜線中點 連接 | 2 頂點 2 稜線中點 連接 | 3 頂點連線 |
| 周長 | $\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + 2}$ | $\frac{2a + \sqrt{7} + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{5 + 2\sqrt{a^2 + 2}}{2}$ | $2a + \sqrt{3}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3a^2 - 3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{7a^2 - 4}}{4}$ | $\frac{5\sqrt{4a^2 - 1}}{16}$ | $\frac{\sqrt{12a^2 - 9}}{4}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |
| 柱體類型 | 正六角錐 | | | |
| 編號 | H10 | H11 | H12 | H13 |
| 截面形狀 | 正三角形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 | 正六邊形 |
| 截面方式 | 3 頂點連線 | 3 稜線 中點連接 | 4 稜線 中點連接 | 6 稜線 中點連接 |
| 周長 | $2 + 2a$ | $\frac{2a + \sqrt{3}}{2}$ | $2 + a$ | 3 |
| 面積 | $\sqrt{a^2 - 1}$ | $\frac{\sqrt{12a^2 - 9}}{16}$ | $\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ |
| 示意圖 |  |  |  |  |

(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

(一)按照特定的連線方式所得出的柱體截面圖形，三角柱的可能截面形狀有正三角形、等腰三角形、長方形及等腰梯形；四角柱的可能截面形狀有正三角形、等腰三角形、長方形、等腰梯形、平行四邊形、菱形、梯形及六邊形；五角柱的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、等腰梯形、長方形、五邊形及正五邊形；六角柱的可能截面形狀有等腰三角形、長方形、等腰梯形、正方形、五邊形、六邊形及正六邊形。

(二)按照特定的連線方式所得出的錐體截面圖形，三角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、正三角形及長方形；四角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、等腰梯形及正方形；五角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、等腰梯形及正五邊形；六角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、正三角形、等腰梯形及正六邊形。

二、各柱錐體的截面周長及面積與 a 的關係

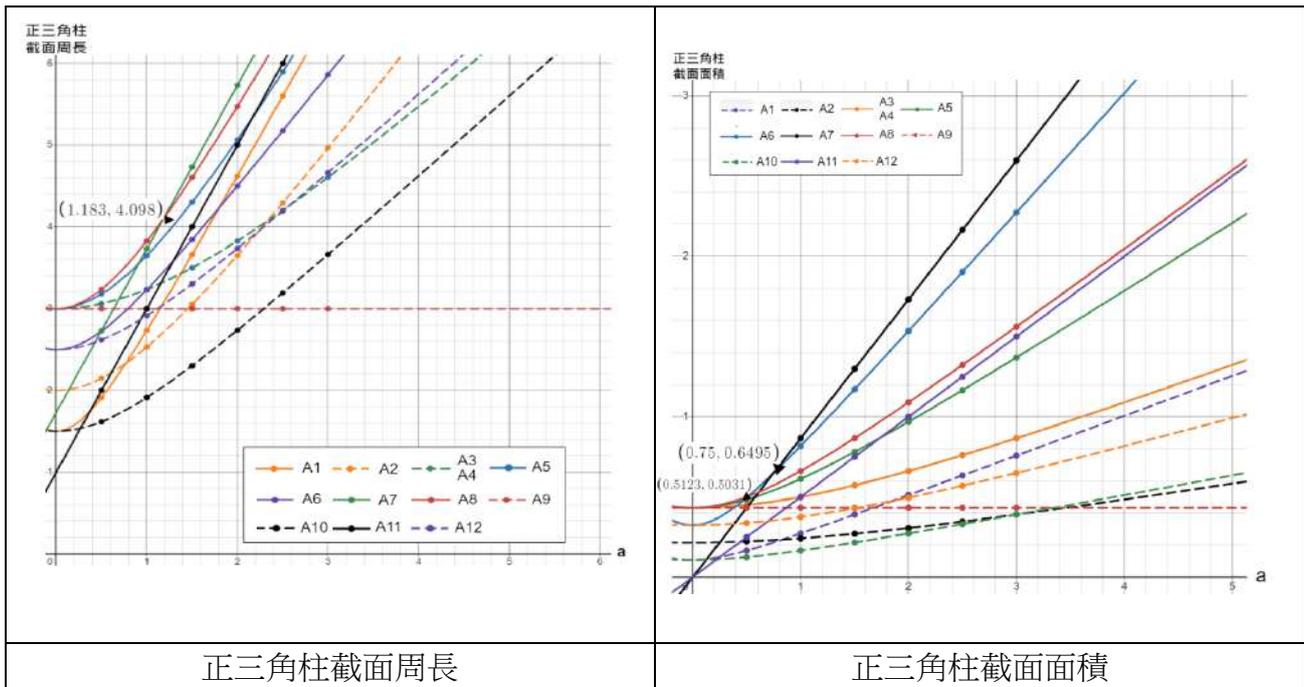
藉由使用 Demos 繪製各柱錐體的截面周長及面積與 a 的關係圖，我們更進一步的計算出各柱錐體的最大截面周長及面積會出現在哪一個截面中，以及與各正角柱/角錐的側邊稜

線長 a 有怎樣的關係，以下列出歸納所得的結論：

(一)當正三角柱側稜線長 $a \leq 1.183$ 時，最大周長出現在截面 A8(3 頂點連線的等腰三角形)中；而當正三角柱側稜線長 $a \geq 1.183$ 時，最大周長出現在截面 A7(2 頂點 2 稜線中點連接的長方形)中。

當正三角柱側稜線長 $a \leq 0.5123$ 時，最大面積出現在截面 A8(3 頂點連線的等腰三角形)中；而當正三角柱側稜線長 $0.5123 \leq a \leq 0.75$ 時，最大面積出現在截面 A6(2 頂點 2 稜線中點連線的等腰梯形)中；而當正三角柱側稜線長 $a \geq 0.75$ 時，最大面積出現在截面 A7(2 頂點 2 稜線中點連線的長方形)中。

表四 正三角柱截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者一整理與製作)

(二)當正四角柱側稜線長 $a \leq 0.5073$ 時，最大周長出現在截面 B2(2 頂點 1 稜線中點連線的正三角形)中；當正四角柱側稜線長 $0.5073 \leq a \leq 1$ 時，最大周長出現在截面 B10(4 頂點連線的長方形)中，而當正四角柱側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大周長出現在截面 B11(4 頂點連線的長方形)中。

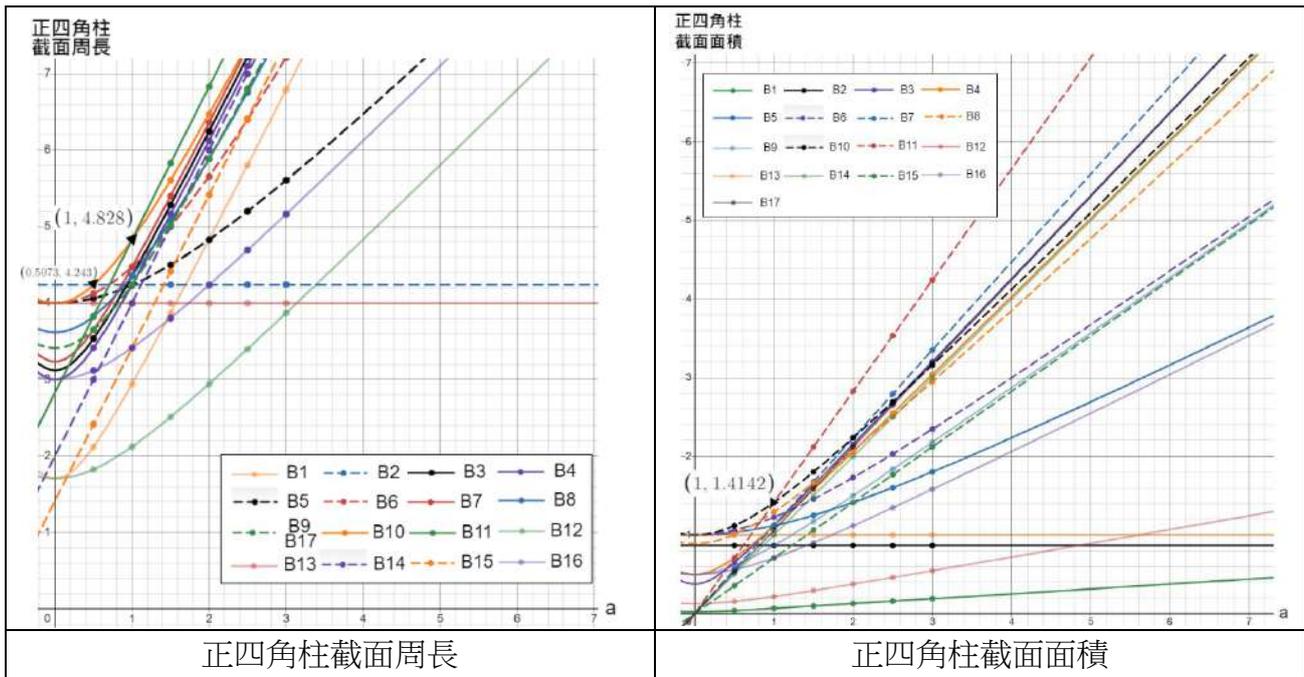
當正四角柱側稜線長 $a \leq 1$ 時，最大面積出現在截面 B10(4 頂點連線的長方形)中；而當正四角柱側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大面積出現在截面 B11(4 頂點連線的長方形)中。

(三)正五角柱側稜線長 $a \leq 0.6469$ 時，最大周長出現在截面 C18(5 稜線中點連線的正五邊形)中；當正五角柱側稜線長 $0.6469 \leq a \leq 1.4635$ 時，最大周長出現在截面 C13(4 頂點連線的等腰梯形)中；而當正五角柱側稜線長 $a \geq 1.4635$ 時，最大周長出現在截面 C12(4 頂點連接的長方形)中。

當正五角柱側稜線長 $a \leq 3.351$ 時，最大面積出現在截面 C2(4 稜線中點連線的五邊形)中；而當正五角柱側稜線長 $a \geq 3.351$ 時，最大面積出現在截面 C12(4 頂點連接的長方

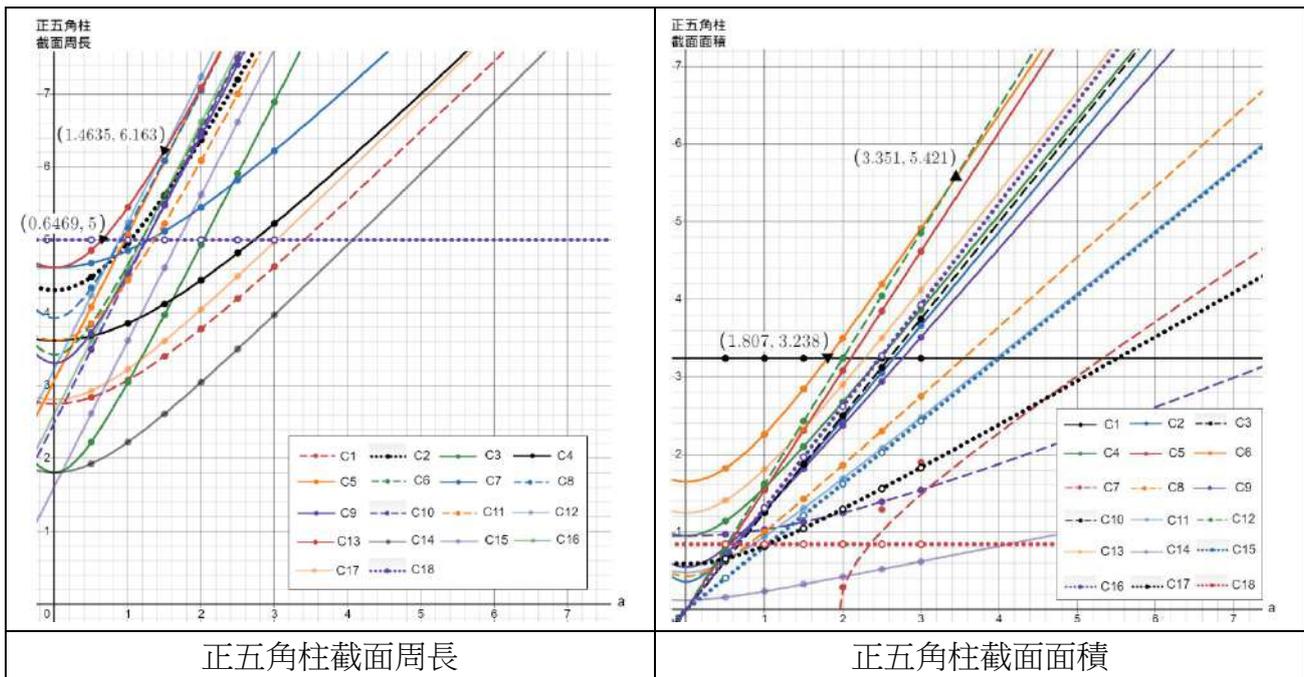
形)中。

表五 正四角柱截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者二整理與製作)

表六 正五角柱截面周長/面積與 a 的關係



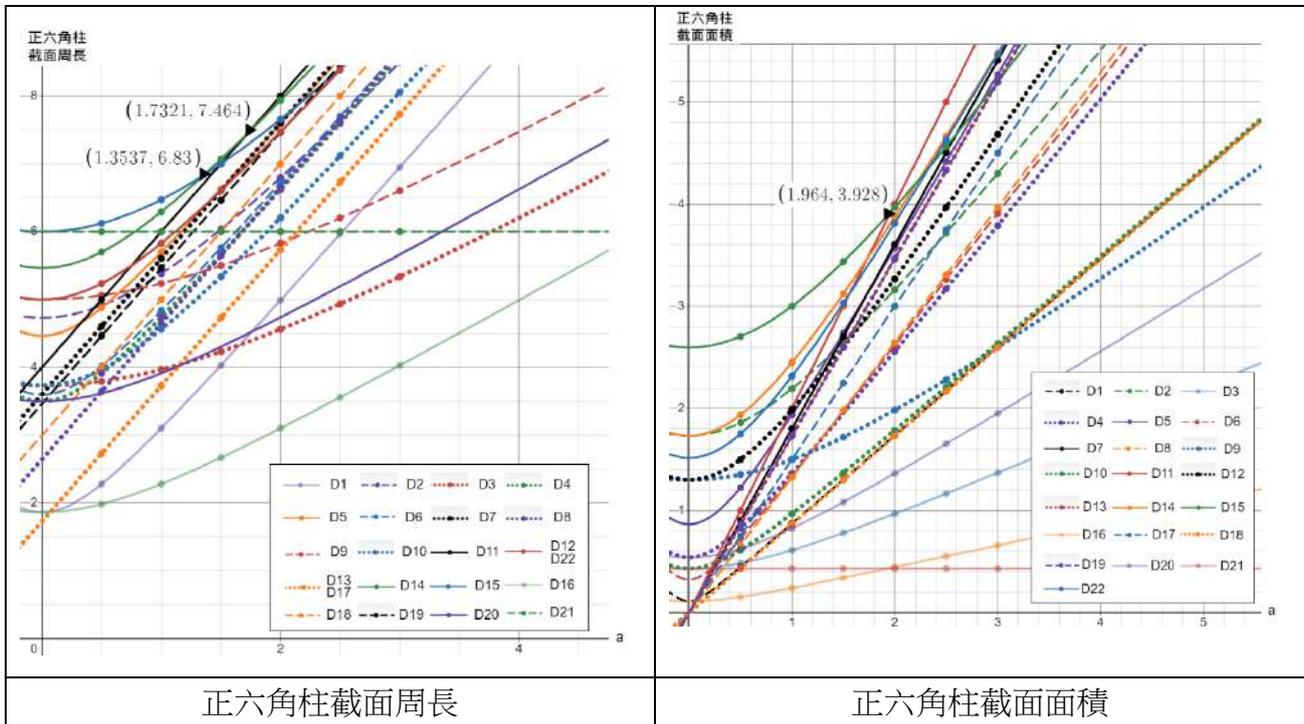
(本表由作者一整理與製作)

(四)當正六角柱側稜線長 $a \leq 1.3537$ 時,最大周長出現在截面 D15(4 頂點連線的六邊形)中;
當正六角柱側稜線長 $1.3537 \leq a \leq 1.7321$ 時,最大周長出現在截面 D14(3 頂點連線的長

方形)中；而當正六角柱側稜線長 $a \geq 1.7321$ 時，最大周長出現在截面 D11(2 頂點 2 稜線中點連接的正方形)中。

當正六角柱側稜線長 $a \leq 1.964$ 時，最大面積出現在截面 D15(4 頂點連線的六邊形)中；而當正六角柱側稜線長 $a \geq 1.964$ 時，最大面積出現在截面 D11(2 頂點 2 稜線中點連接的正方形)中。

表七 正六角柱截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者三整理與製作)

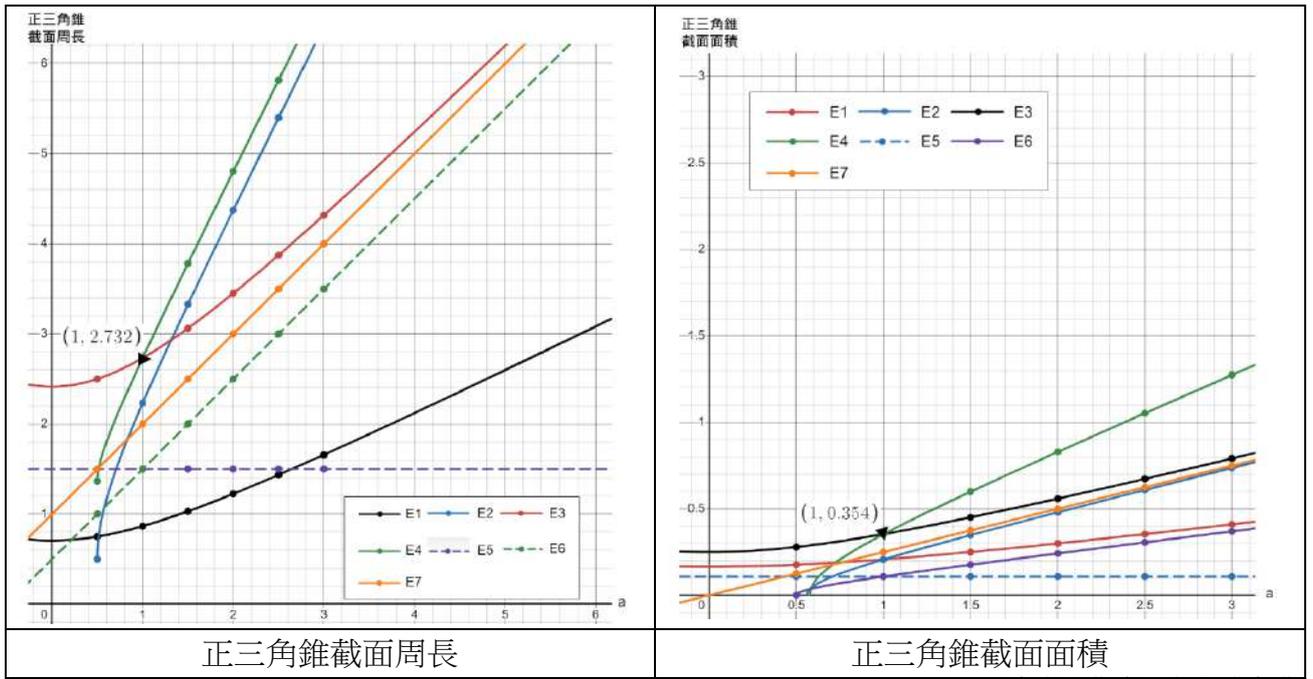
(五)當正三角錐側稜線長 $a \leq 1$ 時，最大周長出現在截面 E3(2 頂點 1 稜線中點連接的等腰三角形)中；而當正三角錐側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大周長出現在截面 E4(2 頂點 1 稜線中點連接的三角形)中。

當正三角錐側稜線長 $a \leq 1$ 時，最大面積出現在截面 E3(2 頂點 1 稜線中點連接的等腰三角形)中；而當正三角錐側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大面積出現在截面 E4(2 頂點 1 稜線中點連接的三角形)中。

(六)當正四角錐側稜線長 $a \leq 0.742$ 時，最大周長出現在截面 F6(2 頂點 2 稜線中點連線的等腰梯形)中；當正四角錐側稜線長 $a \geq 0.742$ 時，最大周長出現在 F3(1 頂點 2 稜線中點連線的等腰三角形)中。

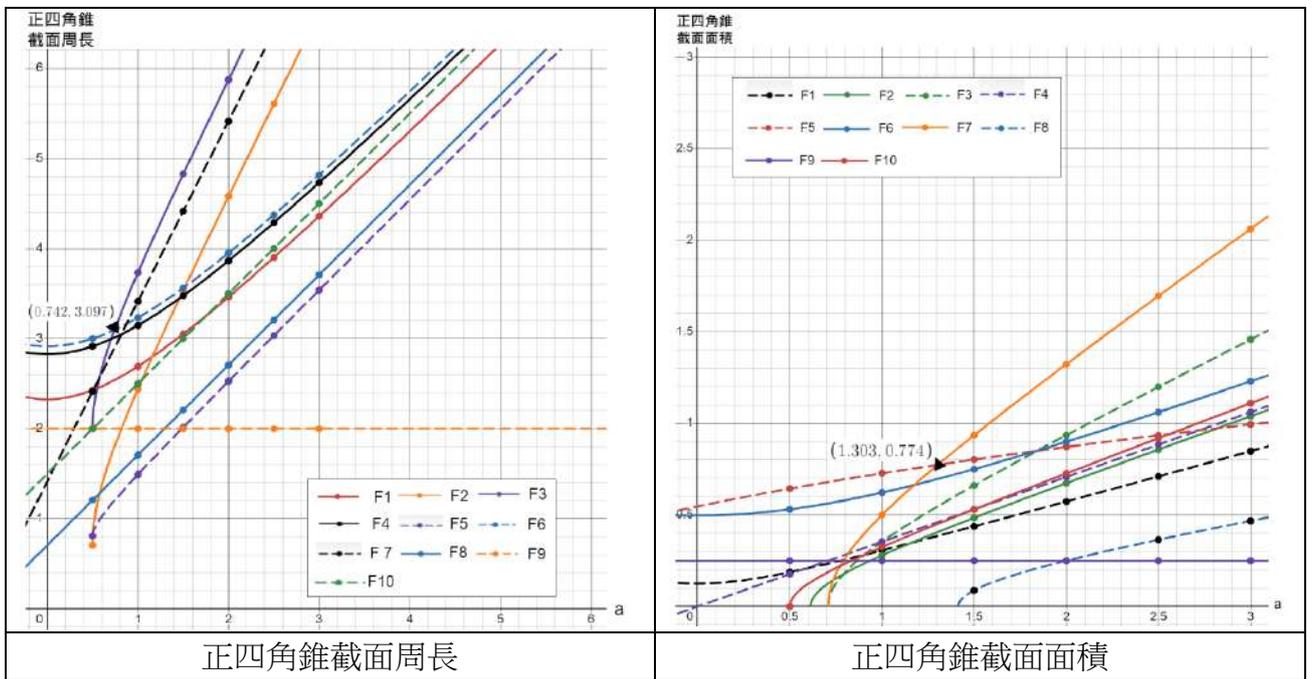
當正四角錐側稜線長 $a \leq 1.303$ 時，最大面積出現在截面 F5(2 頂點 1 稜線中點連線的三角形)中；而當正四角錐側稜線長 $a \geq 1.303$ 時，最大面積出現在截面 F7(3 頂點連線的等腰三角形)中。

表八 正三角錐截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者一整理與製作)

表九 正四角錐截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者二整理與製作)

(七)當正五角錐側稜線長 $a \leq 1.3$ 時，最大周長出現在截面 G8(2 頂點 2 稜線中點連接的等腰梯形)中；而當五角錐側稜線長 $a \geq 1.3$ 時，最大周長出現在截面 G5(2 頂點 1 稜線中點連接的三角形)中。

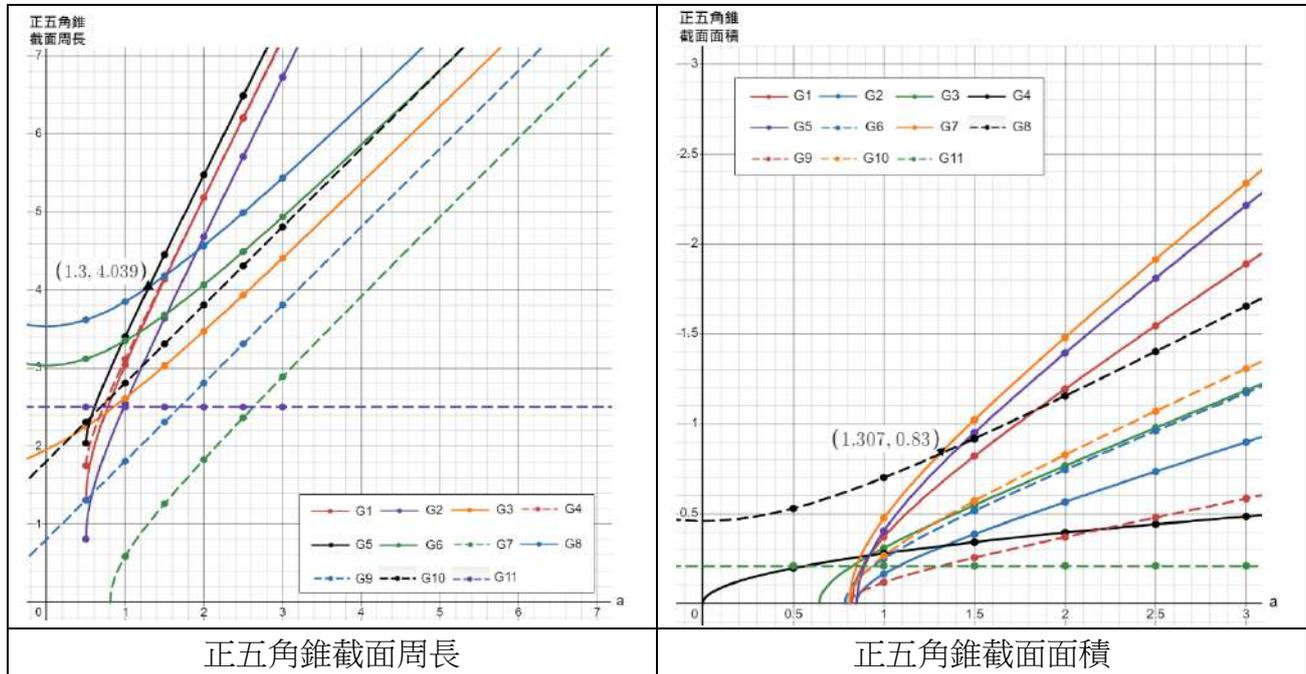
當正五角錐側稜線長 $a \leq 1.307$ 時，最大面積出現在截面 G8(2 頂點 2 稜線中點連接的等腰梯形)中；而當正五角錐側稜線長 $a \geq 1.307$ 時，最大面積出現在截面 G7(3 頂點連接的等腰三角形)中。

(八)當正六角錐側稜線長 $a \leq 1.167$ 時，最大周長出現在截面 H8(2 頂點 2 稜線中點連接的

等腰梯形)中；而當正六角錐側稜線長 $a \geq 1.167$ 時，最大周長出現在截面 H10(3 頂點連線的正三角形)中。

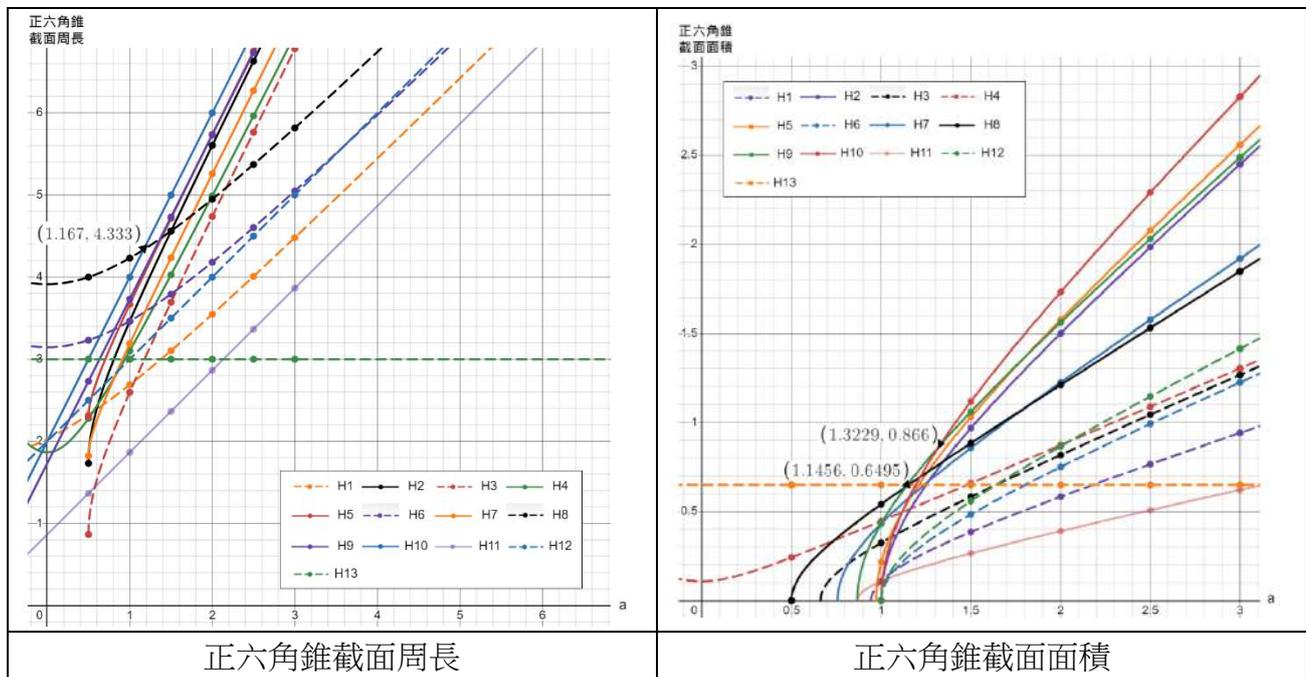
當正六角錐側稜線長 $a \leq 1.1456$ 時，最大面積出現在截面 H13(6 稜線中點連線的正六邊形)中；而當正六角錐側稜線長 $1.1456 \leq a \leq 1.3229$ 時，最大面積出現在截面 H9(3 頂點連線的等腰三角形)中；當正六角錐側稜線長 $a \geq 1.3229$ 最大面積出現在截面 H10(3 頂點連線的正三角形)中。

表十 正五角錐截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者三整理與製作)

表十一 正六角錐截面周長/面積與 a 的關係



(本表由作者三整理與製作)

(九)經由對各正角柱/角錐的截面周長及面積的計算及圖形繪製，我們可以發現一個有趣的結果：按特定的連線方式所得出的柱錐體截面，皆會因為側邊稜線長 a 的長度伸縮，而出現最大截面周長及最大截面面積出現在不同的截面中的情形。其中，在最大截面周長的部分，除了正四角柱、正五角柱及正六角柱會因側邊稜線長 a 的長度變化，最大截面周長在3個圖型間移轉；其餘角柱及角錐的最大截面周長皆是在2個圖型間移轉。

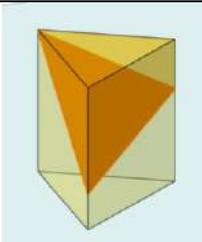
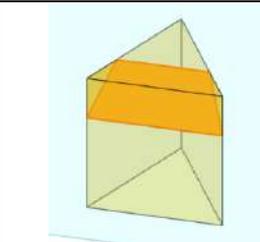
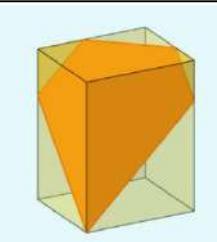
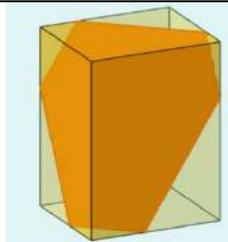
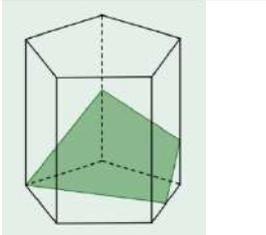
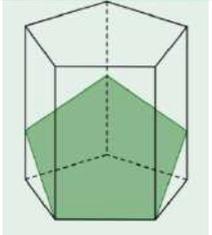
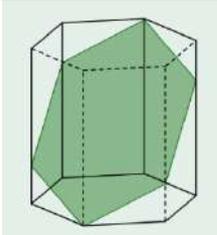
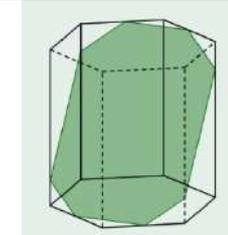
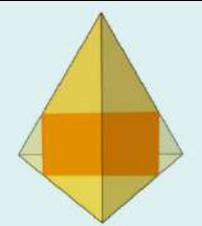
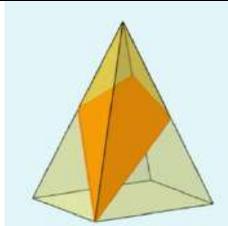
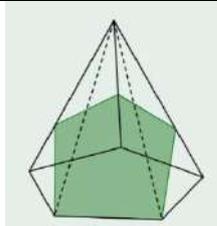
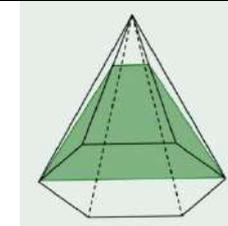
而在最大截面面積的部分，除了正三角柱、正五角柱及正六角錐會因側邊稜線長 a 的長度變化，最大截面面積在3個圖型間移轉；其餘角柱及角錐的最大截面面積皆是在2個圖型間移轉。

陸、未來展望

本研究柱體、錐體截面連線方式限縮在頂點到頂點、頂點到稜線中點或稜線中點到稜線中點的連線。未來將可進一步探討如果從點到稜邊比為1:2的點連線或中點到稜邊比為1:2的點連線等所截出的圖形。

例如：三角柱可能截出三角形、等腰梯形、四邊形或五邊形等；四角柱可能截出菱形、五邊形或六邊形等；五角柱可能截出四邊形或五邊形等；六角柱可能截出五邊形、六邊形或八邊形等；三角錐可能截出長方形或等腰梯形等；四角錐可能截出箏形、等腰梯形、四邊形或五邊形等；五角錐可能截出五邊形或六邊形等；六角錐可能截出等腰梯形、五邊形或六邊形等……

表十二 延伸可能截面

| 三角柱 | | 四角柱 | |
|---|---|--|---|
|  |  |  |  |
| 五角柱 | | 六角柱 | |
|  |  |  |  |
| 三角錐 | 四角錐 | 五角錐 | 六角錐 |
|  |  |  |  |

(本表由作者三整理與製作)

柒、參考資料(文獻)及其他

- 【1】紀韋廷、陳書睿與吳映築(2021年)。正多面體表面移動及一刀斬所形成的截面。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。嘉義市。
- 【2】朱軒緯(2002年)。柱多久？錐多大？中華民國第 42 屆中小學科學展覽會，台南縣。
- 【3】Geogebra 立體圖形的截面幾何課程資源。柯志明(2014)。取自 <https://www.geogebra.org/u/orchiming>
- 【4】Geogebra 錐體圖形截面線上資源。Jerzy Mil(2011)。取自 <https://www.geogebra.org/u/yuri1969>

【評語】 030415

此研究探討正角柱和正角錐上一刀分割後的截面變化，利用 Geogebra 和 Desmos 模擬計算截面的周長和面積，推導公式並觀察截面大小與側稜線長的關係。作品列出相應柱錐體中截面形狀、截面周長及面積，探討截面與側稜線長的關係，並加以比較它們的最大值。

若能再分析數學式子做說明，進一步將一些性質推廣至不同柱體(錐)下，看是否有類似的規律，成果會更完備。

作品簡報

截柱錐體

摘要

此研究探討在正角柱及正角錐上一刀斬後分割成二部份而形成截面時，觀察其所形成的截面變化，並利用Geogebra等電腦軟體模擬繪製，藉此來計算正角柱及正角錐分割成的截面周長與面積，進而推導出其公式及觀察截面大小之變化關係。

壹、研究動機

我們在學校課程裡學習到求正角柱的表面積時，是將立體圖形展開後，找出底部正多邊形的面積加上側面(矩形)的面積和；而正角錐的表面積則是將底部正多邊形的面積加上側面(等腰三角形)的面積和。

當我們看了過去的科展作品中有人探討在正多面體上採特殊規則切出截面的截面圖形時，激發我們探索立體圖形的剖面的好奇心；當正角柱的底面積與正角錐的底面積相同，且正角柱側棱線長度與正角錐側棱線長度也相同且做不同比例的延伸時，1. 如果在正角柱及正角錐上採特殊規則切出截面時，此截面會是怎樣的形狀及具有甚麼性質？2. 能否找到一個最大截面？在此研究報告中，我們將研究對象設定為在正角柱及正角錐底部的正多邊形邊長為1，而側棱線長為a時的正三角柱體/錐體、正四角柱體/錐體、正五角柱體/錐體、正六角柱體/錐體，以瞭解我們感興趣的問題，並且利用Geogebra、Desmos電腦繪製軟體來協助我們觀察和完成計算。

貳、研究目的

- 一、分析、理解正角柱及正角錐的各種截面變化與圖形。
- 二、運用Geogebra電腦軟體觀察正角柱/正角錐進行截面的圖形變化。
- 三、算出正角柱及正角錐採特定方式截面時所形成的各種截面形狀及其周長和面積公式。
- 四、利用Desmos軟體分析各截面的周長和面積公式，並協助我們最大周長及面積的出現與側棱線長a的大小有何對應關係。

參、研究器材與設備

電腦、GeoGebra軟體、Desmos軟體、紙、筆

肆、研究過程

一、基本定義：

(一)、正角柱：

- 本研究中所使用的角柱，指的是具有以下特點的正角柱：
1. 上下底面在兩個分別的平行平面上是全等的多邊形
 2. 各側面為垂直連接這兩個底面的平行四邊形
 3. 每相鄰兩個四邊形的公共邊都相互平行。

(二)、正角錐

- 本研究中所使用的角錐，指的是具有以下特點的正角錐：
1. 底面為正多邊形
 2. 底面正多邊形各頂點向其所在平面外連接一點後，構成的各側面為全等的等腰三角形。

(三)、截面限制條件：

本研究中的截面，即平面與柱錐體相交時產生的交集，其在柱錐體上相交的位置限縮在頂點、棱線中點；而截面若剛好落在柱錐體表面上則不在討論範圍內。意即，平面與柱錐體相交時的截面各邊(又稱為截痕)，必為柱錐體頂點到頂點、頂點到棱線中點或棱線中點到棱線中點的連線。

二、進行步驟：

- (一)、利用GeoGebra軟體中可對角柱、角錐操作截面的工具，協助我們進行觀察，將正三角柱、正四角柱、正五角柱、正六角柱，以及正三角錐、正四角錐、正五角錐、正六角錐，都以前述的條件得到截面，輔助我們計算底部正多邊形邊長為1，而側棱線長為a的各正角柱/正角錐的截面周長及面積。
- (二)、將步驟(一)計算出的截面周長及面積公式進行比較與分析，利用Desmos軟體繪製各個截面的周長、面積與側棱線長a的關係圖；並藉此推導出各正角柱/正角錐截面的最大周長及面積公式。

三、探討過程：

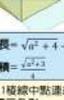
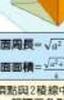
在各正角柱/正角錐內部使用特定方式所截出的截面可能形狀、周長及面積：

在這個部分按照基本定義中所列的特定截面方式，列舉出可截出的形狀，並計算出周長及面積，以下以**正三角柱**為例，列出探討過程：

● 正三角柱

1. 繪出底邊長為1和側邊長為a的正三角柱，按照由頂點到頂點、頂點到棱線中點或棱線中點到棱線中點的連線方式，將可能的截面繪出，並計算其面積及周長。

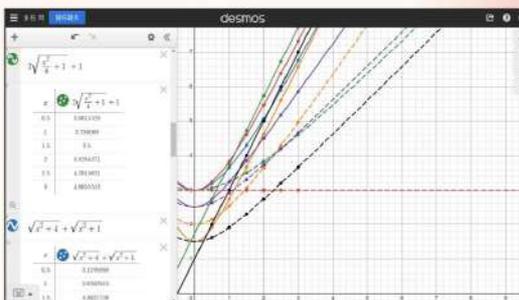
表一 三角柱截面周長及面積計算(本表跨頁呈現)

| | | | | | |
|----------------------------------|---|--------------------------|--|--------------------------|---|
| (1) 如圖所示，連接1頂點與2棱線中點所成的截面為一等腰三角形 |  $\text{底邊} = \frac{1}{2}a$ $\text{兩腰} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$ $\text{高} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{4}$ $\text{截面周長} = \sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2}$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{16}$ | | | | |
| (2) 如圖所示，連接1頂點與2棱線中點所成的截面為一等腰三角形 |  $\text{底邊} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$ $\text{兩腰} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}$ $\text{高} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{4a^2+1}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{4}$ $\text{截面周長} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2} + \sqrt{2a^2+1}$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{16}$ | | | | |
| (3) 1頂點與2棱線中點連線截面為一等腰三角形 |  $\text{截面周長} = \sqrt{a^2+4} + 1$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ | (4) 2頂點與1棱線中點連線截面為一等腰三角形 |  $\text{截面周長} = \sqrt{a^2+4} + 1$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ | (5) 2頂點與1棱線中點連線截面為一等腰三角形 |  $\text{截面周長} = \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+1}$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ |
| (6) 2頂點與1棱線中點連線截面為一等腰三角形 |  $\text{截面周長} = \frac{\sqrt{16a^2+3}}{2\sqrt{4a^2+1}}$ $\text{截面面積} = \frac{1}{16}$ | (7) 2頂點與2棱線中點連線截面為一等腰三角形 |  $\text{截面周長} = \sqrt{3} + 2a$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ | (8) 3頂點連線截面為一等腰三角形 |  $\text{截面周長} = 2\sqrt{a^2+1} + 1$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ |

| | | |
|--|---|---|
| (9) 3棱線中點連線截面為一等腰三角形 | (10) 3棱線中點連線截面為一等腰三角形 | (11) 4棱線中點連線截面為一長方形 |
|  $\text{截面周長} = \frac{3}{2}$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ |  $\text{截面周長} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}$ $\text{截面面積} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{16}$ |  $\text{截面周長} = 1 + 2a$ $\text{截面面積} = \frac{1}{2}a$ |
| (12) 如圖所示，連接4棱線中點所成的截面為一等腰梯形 | | |
|  | $\text{上底} = \frac{1}{2}$ $\text{下底} = 1$ $\text{兩腰} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}$ $\text{高} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ $\text{截面周長} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}$ $\text{截面面積} = \frac{3\sqrt{4a^2+3}}{16}$ | |

(表一由作者一整理及製作)

2. 利用Desmos軟體，分別將正三角柱按特定連線方式所截各截面周長的公式以及截面面積的公式繪製於平面坐標中，使用軟體繪製的操作示意圖如圖一所示。我們將計算出的各截面周長/各截面面積公式一一輸入於Desmos的座標圖繪製畫面中(因軟體本身的限制，須將a先行轉換為x輸入，呈現為自變數為x、應變數為y的函數圖形)。繪製出的圖形呈現為橫軸為a(正三角柱側棱線長)，縱軸為截面周長或截面面積的座標圖，如圖二及圖三所示。



圖一 使用Desmos進行三角柱截面計算示意圖(本圖由作者一製作)

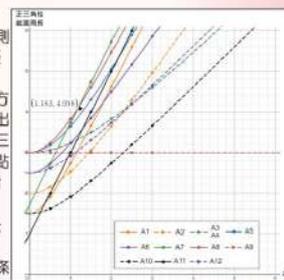
(1) 截面周長與a的關係

如圖二為橫軸為a(正三角柱側棱線長)，縱軸為截面周長的座標圖。

由圖中可以看出，按特定連線方式所截各截面的最大周長可能出現在截面A8(3頂點連線的等腰三角形)或截面A7(2頂點2棱線中點連線的長方形)中；其餘截面皆不可能出現最大周長。

我們利用A8周長公式=A7周長公式的計算，找出截面A8及截面A7的周長公式的交點，得知兩條線相交時的 $a = 1.183$ (四捨五入到小數點後第3位)，進而得知此時的正三角柱截面周長約等於4.098。經由觀察此交點可以發現：當正三角柱側棱線長 $a \leq 1.183$ 時，最大周長出現在截面A8(3頂點連線的等腰三角形)中；而當正三角柱側棱線長 $a \geq 1.183$ 時，最大周長出現在截面A7(2頂點2棱線中點連線的長方形)中。

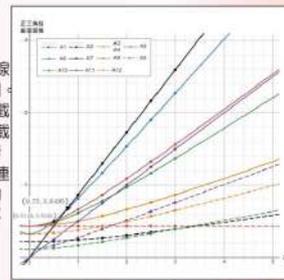
值得注意的是，截面A9(3棱線中點連線的正三角形)的周長始終為一常數，即不論側棱線長a如何變化，因為截面始終是橫切的正三角形，所以周長也保持不變。另外，截面A3(1頂點2棱線中點連線的等腰三角形)及A4(2頂點1棱線中點連線的等腰三角形)因截面公式相同，所以周長及面積的圖形也相同。



圖二 正三角柱截面周長(本圖由作者一製作)

(2) 截面面積與a的關係

下圖為橫軸為a(正三角柱側棱線長)，縱軸為截面面積的座標圖。如圖所示，按特定連線方式所截各截面的最大面積可能出現在截面A6(2頂點2棱線中點連線的等腰梯形)或A7(2頂點2棱線中點連線的長方形)或A8(3頂點連線的等腰三角形)中；其餘截面皆不可能出現最大面積。



圖三 正三角柱截面面積(本圖由作者一製作)

仿照前述步驟，我們計算出截面A8及A6的面積公式的交點，以及A6及A7的面積公式的交點，可以發現到有最大面積的截面出現了兩次的轉移：當正三角柱側棱線長 $a \leq 0.5123$ 時，最大面積出現在截面A8(3頂點連線的等腰三角形)中；當正三角柱側棱線長 $0.5123 \leq a \leq 0.75$ 時，最大面積出現在截面A6(2頂點2棱線中點連線的等腰梯形)中；而當正三角柱側棱線長增加到 $a \geq 0.75$ 時，最大面積出現在截面A7(2頂點2棱線中點連線的長方形)中。

在這邊也值得注意的是，截面A9(3頂點連線的正三角形)面積始終為一常數，即不論側棱線長a如何變化，因為截面始終是橫切的正三角形，所以面積也保持不變。

伍、研究結果

一、列出各柱錐體的可能截面形狀、截面周長及面積

由於空間中不共線的三點可決定一平面，因此任一種柱錐體皆可以依序按照第四章的截面限制條件：1頂點與2中點連線、2頂點與1棱線中點連線、3頂點連線以及3棱線中點連線等等找出截面；另因柱錐體特殊的對稱特性，前述三點連線之後，會有其他頂點或棱線中點共面的情形，而形成不同的截面形狀，以下將各柱錐體按特定連線方式所截出的截面歸納於表格中：

表三 各角柱/角錐截面彙整

| 正三角柱 | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|
| 編號 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 |
| 截線方式 | 1頂點2稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{2}$ | $\sqrt{1+\frac{a^2}{4} + \sqrt{1+a^2}}$ | $\sqrt{a^2+4} + 1$ | $\sqrt{a^2+4} + 1$ | $\sqrt{a^2+4} + \sqrt{a^2+1}$ | $\frac{\sqrt{16a^2+3}}{4}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{16a^2+3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3a^2+12}}{16}$ | $\frac{\sqrt{a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3a^2+3}}{4}$ | $\frac{3\sqrt{16a^2+3}}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正三角柱 | | | | | | |
| 編號 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 |
| 截面形狀 | 長方形 | 等腰三角形 | 正三角形 | 等腰三角形 | 長方形 | 等腰梯形 |
| 截線方式 | 2頂點2稜線中點連接 | 3頂點連線 | 3稜線中點連接 | 3稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 |
| 周長 | $\sqrt{3} + 2a$ | $2\sqrt{a^2+1} + 1$ | 3 | $\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{2}$ | $1 + 2a$ | $\sqrt{a^2+1} + \frac{3}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ | $\frac{\sqrt{4a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+3}}{16}$ | $\frac{1}{2}a$ | $\frac{3\sqrt{a^2+3}}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正四角柱 | | | | | | |
| 編號 | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 正三角形 | 等腰梯形 | 長方形 | 長方形 | 菱形 |
| 截線方式 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{\sqrt{16a^2+4} + \sqrt{2}}{2}$ | $3\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1} + \frac{3}{2}\sqrt{2}}{2}$ | $2 + \sqrt{4a^2+1}$ | $2 + \sqrt{a^2+4}$ | $\sqrt{4a^2+16}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{16a^2+2}}{64}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{72a^2+9}}{8}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2a^2+4}}{2}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正四角柱 | | | | | | |
| 編號 | B7 | B8 | B9 | B10 | B11 | B12 |
| 截面形狀 | 平行四邊形 | 梯形 | 等腰三角形 | 長方形 | 長方形 | 等腰三角形 |
| 截線方式 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 3頂點連線 | 4頂點連線 | 4頂點連線 | 3稜線中點連接 |
| 周長 | $\sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1} + \sqrt{4a^2+3}}{2}$ | $\sqrt{2} + \sqrt{4a^2+4}$ | $2(1 + \sqrt{a^2+1})$ | $2a + 2\sqrt{2}$ | $\sqrt{a^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ | $\frac{(66a^2+57)\sqrt{a^2+1}}{64}$ | $\frac{\sqrt{2a^2+1}}{2}$ | $\sqrt{a^2+1}$ | $\sqrt{2}a$ | $\frac{\sqrt{2a^2+1}}{8}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正四角柱 | | | | | | |
| 編號 | B13 | B14 | B15 | B16 | B17 | C1 |
| 截面形狀 | 正方形 | 長方形 | 長方形 | 長方形 | 六邊形 | 三角形 |
| 截線方式 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 6稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | 4 | $2a + 2$ | $2a + \sqrt{2}$ | $\sqrt{a^2+1} + 2$ | $\sqrt{2} + \sqrt{4a^2+4}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1} + \sqrt{4a^2+3}}{2}$ |
| 面積 | 1 | a | $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ | $\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{2a^2+1} + \sqrt{2a^2+3}}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正五角柱 | | | | | | |
| 編號 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
| 截面形狀 | 五邊形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 長方形 | 等腰梯形 | 等腰梯形 |
| 截線方式 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+16}}{2}$ | $2a + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{4}$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{a^2+1}}{4}$ |
| 面積 | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 20)}{16}$ | $\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2}a$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正五角柱 | | | | | | |
| 編號 | C8 | C9 | C10 | C11 | C12 | C13 |
| 截面形狀 | 等腰梯形 | 等腰梯形 | 長方形 | 等腰三角形 | 長方形 | 等腰梯形 |
| 截線方式 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 3頂點連線 | 4頂點連線 | 4頂點連線 |
| 周長 | $\frac{3 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{4}$ | $\frac{7 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{4}$ | $2a + \sqrt{4} + \sqrt{5}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{2}$ | $1 + \sqrt{5} + 2a$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2+1}}{4}$ |
| 面積 | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{\sqrt{4} + \sqrt{5}}{2}a$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{16}$ | $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}a$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正五角柱 | | | | | | |
| 編號 | C14 | C15 | C16 | C17 | C18 | D1 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 長方形 | 長方形 | 等腰梯形 | 正五邊形 | 等腰三角形 |
| 截線方式 | 3稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 5稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4\sqrt{a^2+1}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4a}{2}$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + 4a}{2}$ | $\frac{5 + \sqrt{5} + 4\sqrt{a^2+1}}{4}$ | 5 | $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{16a^2+4}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}a$ | $\frac{3 + \sqrt{5}}{4}a$ | $\frac{(7 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $5 \tan(54^\circ)$ | $\frac{\sqrt{192a^2+3}}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |

| 正六角柱 | | | | | | |
|------|--|---|---|---|---|---|
| 編號 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 | D7 |
| 截面形狀 | 五邊形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 | 長方形 | 等腰梯形 | 長方形 |
| 截線方式 | 1頂點4稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\sqrt{3} + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+1}$ | $\sqrt{3} + \sqrt{a^2+4}$ | $\frac{5 + 2\sqrt{4a^2+1}}{2}$ | $2\sqrt{3} + \sqrt{4a^2+1}$ | $\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{4a^2+1}}{2}$ | $2a + \sqrt{13}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3a^2+12} + \sqrt{3a^2+12}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3a^2+3}}{4}$ | $\frac{5\sqrt{16a^2+3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{12a^2+3}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{48a^2+3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{13}}{2}a$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正六角柱 | | | | | | |
| 編號 | D8 | D9 | D10 | D11 | D12 | D13 |
| 截面形狀 | 長方形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 正方形 | 等腰梯形 | 長方形 |
| 截線方式 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $2a + \sqrt{7}$ | $3 + \sqrt{a^2+4}$ | $\sqrt{3} + \sqrt{4a^2+4}$ | $2a + 4$ | $3 + 2\sqrt{a^2+1}$ | $2a + \sqrt{3}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ | $\frac{3\sqrt{a^2+3}}{4}$ | $\frac{\sqrt{12a^2+3}}{4}$ | 2a | $\frac{3\sqrt{4a^2+3}}{4}$ | $\sqrt{3}a$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正六角柱 | | | | | | |
| 編號 | D14 | D15 | D16 | D17 | D18 | D19 |
| 截面形狀 | 長方形 | 六邊形 | 等腰三角形 | 長方形 | 長方形 | 長方形 |
| 截線方式 | 3頂點連線 | 4頂點連線 | 4頂點連線 | 3稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 |
| 周長 | $2\sqrt{3} + 2\sqrt{a^2+1}$ | $2 + 2\sqrt{a^2+4}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1}}{4}$ | $2a + \sqrt{3}$ | $2a + 3$ | $2a + 2\sqrt{3}$ |
| 面積 | $\sqrt{3a^2+3}$ | $\frac{3\sqrt{a^2+3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{12a^2+3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ | $\frac{3}{2}a$ | $\sqrt{3}a$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正六角柱 | | | | | | |
| 編號 | D20 | D21 | D22 | E1 | E2 | E3 |
| 截面形狀 | 等腰梯形 | 正六邊形 | 六邊形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 |
| 截線方式 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 6稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{5 + 2\sqrt{a^2+1}}{2}$ | 6 | $3 + 2\sqrt{a^2+1}$ | $\frac{1}{2} + \sqrt{a^2+2}$ | $\frac{1}{2} + \sqrt{4a^2-1}$ | $1 + \sqrt{a^2+2}$ |
| 面積 | $\frac{5\sqrt{4a^2+3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{7\sqrt{4a^2+3}}{8}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+7}}{16}$ | $\frac{\sqrt{16a^2-5}}{16}$ | $\frac{\sqrt{a^2+1}}{4}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正三角錐 | | | | | | |
| 編號 | E4 | E5 | E6 | E7 | F1 | F2 |
| 截面形狀 | 三角形 | 正三角形 | 等腰三角形 | 長方形 | 三角形 | 等腰三角形 |
| 截線方式 | 2頂點1稜線中點連接 | 3稜線中點連接 | 3稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{\sqrt{3} + 2a + \sqrt{4a^2-1}}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $a + \frac{1}{2}$ | a + 1 | $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{4a^2-1}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3a^2-1}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3}}{16}$ | $\frac{\sqrt{4a^2-1}}{16}$ | $\frac{1}{4}a$ | $\frac{\sqrt{5a^2+1}}{8}$ | $\frac{\sqrt{8a^2-3}}{8}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正四角錐 | | | | | | |
| 編號 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
| 截面形狀 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 三角形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 |
| 截線方式 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 | 3頂點連線 | 3稜線中點連接 |
| 周長 | $2 + \sqrt{4a^2-1}$ | $\sqrt{2} + \sqrt{a^2+2}$ | $\frac{\sqrt{5} + 2a + \sqrt{4a^2-1}}{2}$ | $\frac{3}{2} + \sqrt{a^2+2}$ | $2a + \sqrt{2}$ | $a + \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{4a^2-2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ | $\frac{\sqrt{(18a+13)(2a^2-3)}}{8}$ | $\frac{\sqrt{36a^2+63}}{16}$ | $\frac{\sqrt{2a^2-1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2a^2-4}}{8}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正四角錐 | | | | | | |
| 編號 | F9 | F10 | G1 | G2 | G3 | G4 |
| 截面形狀 | 正方形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 三角形 | 等腰三角形 |
| 截線方式 | 4稜線中點連接 | 4稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 1頂點2稜線中點連接 | 2頂點2稜線中點連接 |
| 周長 | 2 | $\frac{3}{a} + \frac{2}{2}$ | $\frac{3 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2-1}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{4a^2-1}}{4}$ | $\frac{a + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+2}}{2}$ | $2a + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2+2}$ |
| 面積 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{\sqrt{36a^2-9}}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 - 3a + 2)}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 - 3a + 2)}{16}$ | $\frac{\sqrt{4a^2+1} + \sqrt{4a^2-1} + \sqrt{a^2+1}}{16}$ | $\frac{\sqrt{8a^2+5a}}{16}$ |
| 示意圖 | | | | | | |
| 正五角錐 | | | | | | |
| 編號 | G5 | G6 | G7 | G8 | G9 | G10 |
| 截面形狀 | 三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 | 等腰三角形 | 等腰梯形 |
| 截線方式 | 2頂點1稜線中點連接 | 2頂點1稜線中點連接 | 3頂點連線 | 2頂點2稜線中點連接 | 3稜線中點連接 | 4稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{2a + \sqrt{a^2+1} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{4}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{a^2+2}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4a}{2}$ | $\frac{2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{a^2+2}}{2}$ | $\frac{1 + \sqrt{5} + 4a}{4}$ | $\frac{4a + 5 + \sqrt{5}}{4}$ |
| 面積 | $\frac{\sqrt{a^2+1} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{16}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{16}$ | $\frac{(2 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ | $\frac{(1 + \sqrt{5})(4a^2 + 16 + 20\sqrt{5})}{64}$ |
| 示意圖 | | | | | | |

| 柱體類型 | 正五角錐 | | | 正六角錐 | | |
|------|---------------------------------------|---|---|---|---|---|
| | G11 | H1 | H2 | H3 | H4 | H5 |
| 截線方式 | 正五邊形 | 三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 等腰三角形 | 三角形 |
| 截線位置 | 5 稜線中點連接 | 1 頂點 2 稜線中點連接 | 1 頂點 2 稜線中點連接 | 1 頂點 2 稜線中點連接 | 1 頂點 2 稜線中點連接 | 2 頂點 1 稜線中點連接 |
| 周長 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{a + \sqrt{7} + \sqrt{a^2 + 2}}{2}$ | $\sqrt{3} + \sqrt{4a^2 - 1}$ | $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{4a^2 + 1}}{2}$ | $\frac{2a + \sqrt{3} + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ |
| 面積 | $\frac{5\sqrt{3} \tan(54^\circ)}{16}$ | $\frac{\sqrt{2}8a^2 - 25}{16}$ | $\frac{\sqrt{3}a^2 - 3}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}8a^2 - 21}{16}$ | $\frac{\sqrt{4}8a^2 + 3}{16}$ | $\frac{\sqrt{5}2a^2 - 49}{8}$ |
| 示圖 | | | | | | |
| 柱體類型 | 正六角錐 | | | | | |
| 截線方式 | H6 | | H7 | | H8 | |
| 截線位置 | 等腰三角形 | | 三角形 | | 等腰梯形 | |
| 截線位置 | 2 頂點 1 稜線中點連接 | | 2 頂點 1 稜線中點連接 | | 2 頂點 2 稜線中點連接 | |
| 周長 | $\sqrt{3} + \sqrt{a^2 + 2}$ | | $\frac{2a + \sqrt{7} + \sqrt{4a^2 - 1}}{2}$ | | $\frac{5 + 2\sqrt{4a^2 + 2}}{2}$ | |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3}a^2 - 3}{4}$ | | $\frac{\sqrt{7}a^2 - 4}{4}$ | | $\frac{5\sqrt{4}a^2 - 1}{16}$ | |
| 示圖 | | | | | | |
| 柱體類型 | 正六角錐 | | | | | |
| 截線方式 | H10 | | H11 | | | |
| 截線位置 | 正三角形 | | 等腰三角形 | | | |
| 截線位置 | 3 頂點連接 | | 3 稜線中點連接 | | | |
| 周長 | $2 + 2a$ | | $\frac{2a + \sqrt{3}}{2}$ | | | |
| 面積 | $\frac{\sqrt{3}a^2 - 1}{16}$ | | $\frac{\sqrt{12}a^2 - 9}{16}$ | | | |
| 示圖 | | | | | | |

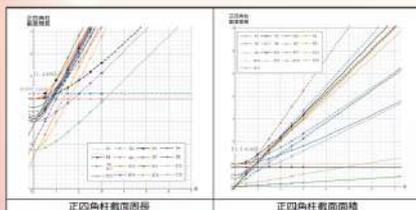
(本表由作者一、作者二、作者三共同整理與製作)

- (一) 按照特定的連線方式所得出的柱體截面圖形，三角柱的可能截面形狀有正三角形、等腰三角形、長方形及等腰梯形；四角柱的可能截面形狀有正三角形、等腰三角形、長方形、等腰梯形、平行四邊形、菱形、梯形及六邊形；五角柱的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、等腰梯形、長方形、五邊形及正五邊形；六角柱的可能截面形狀有等腰三角形、長方形、等腰梯形、正方形、五邊形、六邊形及正六邊形。
- (二) 按照特定的連線方式所得出的錐體截面圖形，三角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、正三角形及長方形；四角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、等腰梯形及正方形；五角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、等腰梯形及正五邊形；六角錐的可能截面形狀有三角形、等腰三角形、正三角形、等腰梯形及正六邊形。

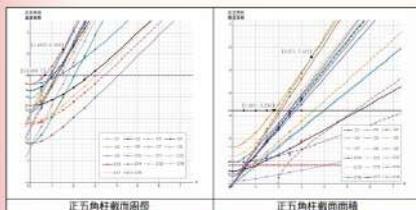
二、各柱錐體的截面周長及面積與a的關係

藉由使用Demos繪製各柱錐體的截面周長及面積與a的關係圖，我們更進一步的計算出各柱錐體的最大截面周長及面積會出現在哪一個截面中，以及與各正角柱/角錐的側邊稜線長a有怎樣的關係，以下列出歸納所得的結論（與三角柱相關的結果已於探討過程詳列，此處省略）：

- (一) 當正四角柱側稜線長 $a \leq 0.5073$ 時，最大周長出現在截面B2 (2頂點1稜線中點連線的正三角形)中；當正四角柱側稜線長 $0.5073 \leq a \leq 1$ 時，最大周長出現在截面B10 (4頂點連線的長方形)中，而當正四角柱側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大周長出現在截面B11 (4頂點連線的長方形)中。
- 當正四角柱側稜線長 $a \leq 1$ 時，最大面積出現在截面B10 (4頂點連線的長方形)中；而當正四角柱側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大面積出現在截面B11 (4頂點連線的長方形)中。
- (二) 正五角柱側稜線長 $a \leq 0.6469$ 時，最大周長出現在截面C18 (5稜線中點連線的正五邊形)中；當正五角柱側稜線長 $0.6469 \leq a \leq 1.4635$ 時，最大周長出現在截面C13 (4頂點連線的等腰梯形)中；而當正五角柱側稜線長 $a \geq 1.4635$ 時，最大周長出現在截面C12 (4頂點連線的長方形)中。
- 當正五角柱側稜線長 $a \leq 3.351$ 時，最大面積出現在截面C2 (4稜線中點連線的五邊形)中；而當正五角柱側稜線長 $a \geq 3.351$ 時，最大面積出現在截面C12 (4頂點連線的長方形)中。

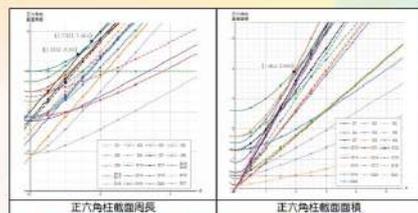


表五 正四角柱截面周長/面積與a的關係 (本表由作者二整理與製作)



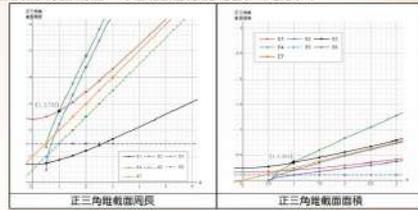
表六 正五角柱截面周長/面積與a的關係 (本表由作者一整理與製作)

- (三) 當正六角柱側稜線長 $a \leq 1.3537$ 時，最大周長出現在截面D15 (4頂點連線的六邊形)中；當正六角柱側稜線長 $1.3537 \leq a \leq 1.7321$ 時，最大周長出現在截面D14 (3頂點連線的長方形)中；而當正六角柱側稜線長 $a \geq 1.7321$ 時，最大周長出現在截面D11 (2頂點2稜線中點連線的正方形)中。
- 當正六角柱側稜線長 $a \leq 1.964$ 時，最大面積出現在截面D15 (4頂點連線的六邊形)中；而當正六角柱側稜線長 $a \geq 1.964$ 時，最大面積出現在截面D11 (2頂點2稜線中點連線的正方形)中。

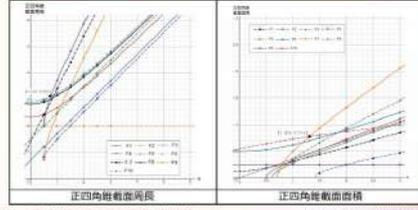


表七 正六角柱截面周長/面積與a的關係 (本表由作者三整理與製作)

- (四) 當正三角錐側稜線長 $a \leq 1$ 時，最大周長出現在截面E3 (2頂點1稜線中點連線的等腰三角形)中；而當正三角錐側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大周長出現在截面E4 (2頂點1稜線中點連線的三角形)中。
- 當正三角錐側稜線長 $a \leq 1$ 時，最大面積出現在截面E3 (2頂點1稜線中點連線的等腰三角形)中；而當正三角錐側稜線長 $a \geq 1$ 時，最大面積出現在截面E4 (2頂點1稜線中點連線的三角形)中。
- (五) 當正四角錐側稜線長 $a \leq 0.742$ 時，最大周長出現在截面F6 (2頂點2稜線中點連線的等腰梯形)中；而當正四角錐側稜線長 $a \geq 0.742$ 時，最大周長出現在截面F3 (1頂點2稜線中點連線的等腰三角形)中。
- 當正四角錐側稜線長 $a \leq 1.3033$ 時，最大面積出現在截面F5 (2頂點1稜線中點連線的三角形)中；而當正四角錐側稜線長 $a \geq 1.3033$ 時，最大面積出現在截面F7 (3頂點連線的等腰三角形)中。

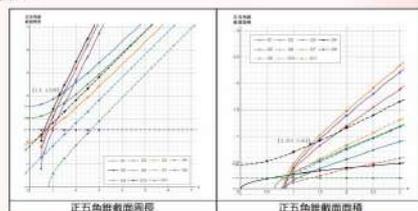


表八 正三角錐截面周長/面積與a的關係 (本表由作者一整理與製作)

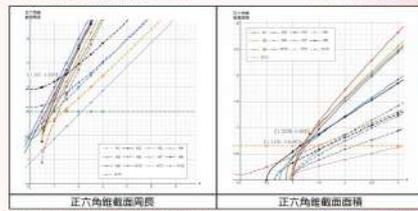


表九 正四角錐截面周長/面積與a的關係 (本表由作者二整理與製作)

- (六) 當正五角錐側稜線長 $a \leq 1.307$ 時，最大周長出現在截面G8 (2頂點2稜線中點連線的等腰梯形)中；而當正五角錐側稜線長 $a \geq 1.307$ 時，最大周長出現在截面G5 (2頂點1稜線中點連線的三角形)中。
- 當正五角錐側稜線長 $a \leq 1.307$ 時，最大面積出現在截面G8 (2頂點2稜線中點連線的等腰梯形)中；而當正五角錐側稜線長 $a \geq 1.307$ 時，最大面積出現在截面G7 (3頂點連線的等腰三角形)中。
- (七) 當正六角錐側稜線長 $a \leq 1.167$ 時，最大周長出現在截面H8 (2頂點2稜線中點連線的等腰梯形)中；而當正六角錐側稜線長 $a \geq 1.167$ 時，最大周長出現在截面H10 (3頂點連線的正三角形)中。
- 當正六角錐側稜線長 $a \leq 1.1456$ 時，最大面積出現在截面H13 (6稜線中點連線的正六邊形)中；而當正六角錐側稜線長 $1.1456 \leq a \leq 1.3229$ 時，最大面積出現在截面H9 (3頂點連線的等腰三角形)中；當正六角錐側稜線長 $a \geq 1.3229$ 時，最大面積出現在截面H10 (3頂點連線的正三角形)中。



表十 正五角錐截面周長/面積與a的關係 (本表由作者三整理與製作)



表十一 正六角錐截面周長/面積與a的關係 (本表由作者三整理與製作)

- (八) 經由對各正角柱/角錐的截面周長及面積的計算及圖形繪製，我們可以發現一個有趣的結果：按特定的連線方式所得出的柱錐體截面，皆會因為側邊稜線長a的長度伸縮，而出現最大截面周長及最大截面面積出現在不同的截面中的情形。其中，在最大截面周長的部分，除了正四角柱、正五角柱及正六角柱會因側邊稜線長a的長度變化，最大截面周長在3個圖形間轉移；其餘角柱及角錐的最大截面周長皆是在2個圖形間轉移。
- 而在最大截面面積的部分，除了正三角柱、正五角柱及正六角錐會因側邊稜線長a的長度變化，最大截面面積在3個圖形間轉移；其餘角柱及角錐的最大截面面積皆是在2個圖形間轉移。

陸、參考資料(文獻)及其他

- [1] 紀韋廷、陳書睿與吳映榮(2021年)。正多面體表面移動及一刀斬所形成的截面。中華民國第61屆中小學科學展覽會。嘉義市。
- [2] 朱軒緯(2002年)。柱多久？錐多大？中華民國第42屆中小學科學展覽會，台南縣。
- [3] Geogebra立體圖形的截面幾何課程資源。柯志明(2014)。取自 <https://www.geogebra.org/u/orchiming>
- [4] Geogebra錐體圖形截面上資源。Jerzy Mil(2011)。取自 <https://www.geogebra.org/u/yur.i1969>