# 中華民國第64屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組　數學科

030414

**機率的陷阱——伯特蘭悖論**

學校名稱：臺南市立後甲國民中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 國三 黃姿菱<br>國三 謝紹謙<br>國三 陳姿婷 | 王婉頤 |

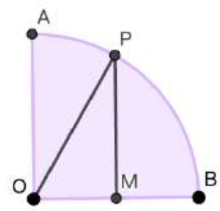

關鍵詞：機率、悖論、幾何

# 摘要

1889 年，約瑟．伯特蘭(Joseph Bertrand)展示了以下問題：「圓內隨機一弦大於圓內接正三角形邊長機率為何？」並提出三種解法，而每一種解法都分別得到不同的答案。我們發現其他正多邊形也有類似情況，歸納出其中的規律，並且將伯特蘭的解法推廣為第四種，這種解法可以在範圍內任意產生無限多種機率。接著推廣到立體空間中探討，也同樣發生悖論，這些不一致的情況蓋提議敘述不清所致。

# 壹、 研究動機

何謂悖論？我們可以從這個簡單的例子談起。如圖（本研究所用之圖形皆為自行繪製），$\angle AOP = 30° \wedge \angle BOP = 60° \wedge \overline{PM} \perp \overline{OB}$，隨機做一$\overline{OB}$垂線，則此垂線和$\overline{OM}$相交的機率為何？




法一：過$\overline{OB}$上隨機一點做垂線。此題解為$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{1}{2}$

法二：過$\widehat{AB}$上隨機一點做垂線。此題解為$\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}} = \frac{1}{3}$

像這樣一題的兩個解法分別帶來不同的答案，我們把這種不一致的情況稱為「悖論」。

再來看以下問題「隨機一弦大於圓內接正三角形邊長機率為何？」[1] [2] [3]這題看似平凡的機率題，竟然能由多種不同的計算方法得出不同的答案。驀然回首，卻驚覺計算過程無誤。

究竟為什麼一個題目可以得出多個正確答案呢？即便過了一百多年，這仍然是個耐人尋味又值得深思的問題。

# 貳、 研究目的

目的一：將伯特蘭悖論推廣至其他正多邊形或立體空間。

目的二：尋找產生無限多種機率的方法。

目的三：歸納推廣後的規律。

目的四：探討可能導致伯特蘭悖論發生的原因。

# 參、研究器材

紙筆、尺規、電腦、計算機、GeoGebra

# 肆、問題討論

問題一：隨機一弦大於圓內接正三角形邊長的機率為何？

問題二：有沒有其他可能的答案？

問題三：隨機一弦大於圓內接其他正多邊形邊長的機率為何？

問題四：隨機一弦大於球內接各種凸正多面體邊長的機率為何？

問題五：隨機一截圓大於球內接各種凸正多面體一面的外接圓之機率為何？

問題六：為什麼會產生悖論？

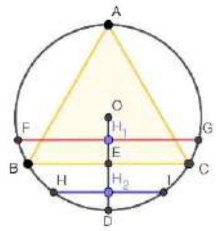
## 伍、研究內容（本研究所用之圖形皆為自行繪製）

問題一：隨機一弦大於圓內接正三角形邊長之機率，以下我們提供三種方法

法一：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

WLOG 假設此弦平行正三角形一邊，則此半徑垂直弦與正三角形一邊，如圖。

$\overline{OH_1}$、$\overline{OH_2}$分別為$\overline{FG}$、$\overline{HI}$的弦心距，$\overline{OE}$為$\overline{BC}$的弦心距。



$$\because \overline{OH_1} < \overline{OE} < \overline{OH_2}$$

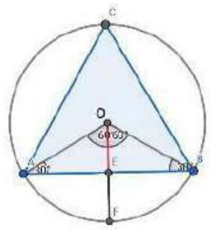
$$\therefore \overline{FG} > \overline{BC} > \overline{HI}$$

亦即當弦垂直半徑於$\overline{OE}$上時，弦大於正三角形邊長

如圖，連接圓心 O 和正△ABC 兩頂點 B、C 得$\overline{OB} = \overline{OC} =$半徑 r

$\because \angle BOE=60^\circ \wedge \overline{BC} \perp \overline{OE}$

$\therefore \overline{OD} = 2\overline{OE} =$半徑 r



$\therefore \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{1}{2}$

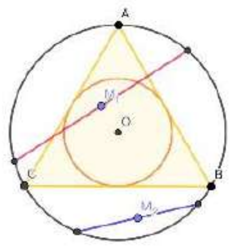
∴隨機一弦大於圓內接正三角形邊長之機率為$\frac{1}{2}$

法二：隨機中點法：圓 O 內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M做$\overline{MO}$

之垂線交圓於D 、 E ，$\overline{DE}$即為所求之弦，且M為$\overline{DE}$中點，如下圖。

仿照上述可知，當 M 在正△ABC 的內切圓內，弦$\overline{DE}$ >正ΔABC 邊長，且除圓心外，圓內每一點皆對應一弦。但是因為圓內隨機一點恰選到圓心之機率趨近於 0，故不須考慮圓心。因此，隨機一弦大於圓內接正三角形邊長的機率為內切圓和外接圓之面積比值。

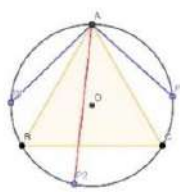
根據上述可知圓心到內接正三角形一邊的距離為半徑的$\frac{1}{2}$



∵正三角形內切圓的半徑是外接圓的$\frac{1}{2}$

∴面積為$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$倍

∴隨機一弦大於圓內接正三角形邊長之機率為$\frac{1}{4}$

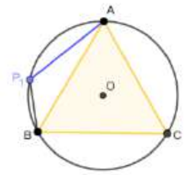


法三：隨機端點法：在圓上隨機取 2 點作為弦的 2 端點。

WLOG 假設其中一端點在正ΔABC頂點 A 上，如圖。

如圖，$\because \angle AP_1B = 120° > 90°$

$\therefore \overline{AB}$為$\triangle AP_1B$最大邊

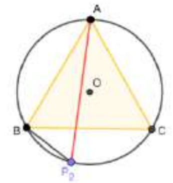



$$\therefore \overline{AP_1} < \overline{AB}$$

如圖，當$P_2$在$\widehat{BC}$上

$$\because \angle ABP_2 = \angle ABC + \angle CBP_2 = 60° + \angle CBP_2 > 60° = \angle APB$$

$$\therefore \overline{AP_2} > \overline{AB}$$




$\because \widehat{\mathrm{BC}} = \frac{1}{3}$圓周

$\therefore$隨機一弦大於圓內接正三角形邊長之機率為$\frac{1}{3}$

問題二：其他可能的答案

以上三個是伯特蘭提供的方法，接下來要進行推廣，推廣後的方法可以透過改變弦的取法在範圍內任意產生機率。

法四：推廣後的隨機端點法：隨機在半徑為 r 的圓$O_1$上取一點 P，過其做直徑$\overline{PT}$。過 T 做半徑為 R 之圓$O_2, R \geq r$，使兩圓內切或重合。過 P 做切線交圓$O_2$於 D、E，將大圓截成兩弧。在與 T 相切的弧上隨機取一點 Q，$\overline{PQ}$交圓$O_1$於 R ，$\overline{PR}$即為所求之弦。

WLOG 假設 P 與正三角形一頂點 A 重合，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$分別交圓$O_2$於 F、G。當 Q 在$\widehat{FG}$上，則 R 在$\widehat{BC}$上。由前述可知，此時$\overline{PR} >$正三角形一邊。

情況一：$\frac{R}{r} = 1$

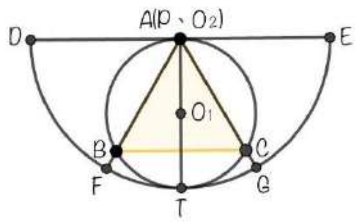
兩圓重合，此特例同隨機端點法，機率為$\frac{1}{3}$

情況二：$\frac{R}{r} = 2$

A 與$O_2$重合$\wedge \widehat{DTE} = 180°$

$\widehat{FG} = \angle FO_2G, \because A$與$O_2$重合$\therefore \widehat{FG} = \angle FAG = 60°$

$$\because \frac{\widehat{FG}}{\widehat{DTE}} = \frac{60°}{180°} = \frac{1}{3}$$




$\therefore$隨機一弦大於圓內接正三角形一邊的機率為$\frac{1}{3}$

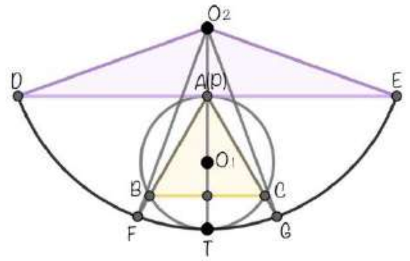
情況三：$\frac{R}{r} = 3$

$$\angle AO_2D = arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{DO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{1}{3}$$

做$\overline{O_2H} \perp \overleftrightarrow{FA}$交$\overleftrightarrow{FA}$於 H

$$\because \angle O_2AH = \angle FAT = 30° \wedge \angle AHO_2 = 90°$$

$\therefore \triangle AHO_2$為 30°-60°-90°三角形$\Rightarrow \overline{O_2H} = \frac{\overline{AO_2}}{2} = \frac{R}{2} - r = \frac{r}{2}$



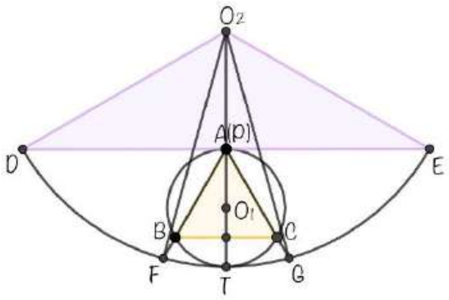

$$\angle O_2FH = arcsin\frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_2F}} = arcsin\frac{\frac{r}{2}}{R} = arcsin\frac{1}{6}$$

$$\angle FO_2A = \frac{\pi}{6} - \angle O_2FH = \frac{\pi}{6} - arcsin\frac{1}{6}$$

$$\because \frac{\widehat{FG}}{\widehat{DE}} = \frac{\angle FO_2G}{\angle DO_2E} = \frac{\angle FO_2A}{\angle AO_2D} = \frac{\frac{\pi}{6} - arcsin\frac{1}{6}}{arccos\frac{1}{3}}$$

$\therefore$隨機一弦大於圓內接正三角形一邊的機率為$\frac{\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{1}{6}}{arccos\frac{1}{3}}$

情況四：$\frac{R}{r} = q, q \geq 1$




$$\angle AO_2D = arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{DO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{q-2}{q}$$

做$\overline{O_2H} \perp \overrightarrow{FA}$交$\overrightarrow{FA}$於 H

$$\because \angle O_2AH = \angle FAT = 30° \wedge \angle AHO_2 = 90°$$

$\therefore \triangle AHO_2$為 30°-60°-90°三角形$\Rightarrow \overline{O_2H} = \frac{\overline{AO_2}}{2} = \frac{R}{2} - r$

$$\angle O_2FH = arcsin\frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_2F}} = arcsin\frac{\frac{R}{2} - r}{R} = arcsin\frac{q-2}{2q}$$

$$\angle FO_2A = \frac{\pi}{6} - \angle O_2FH = \frac{\pi}{6} - arcsin\frac{q-2}{2q}$$

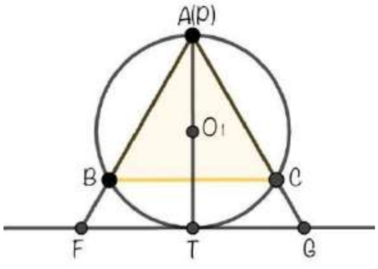
$$\because \frac{\widehat{FG}}{\widehat{DTE}} = \frac{\angle FO_2G}{\angle DO_2E} = \frac{\angle FO_2A}{\angle AO_2D} = \frac{\frac{\pi}{6} - arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$$

$\therefore$隨機一弦大於圓內接正三角形一邊的機率為$\frac{\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

情況五：$\frac{R}{r} \to \infty$

$\widehat{DTE}$變成一條直線，當 Q 在$\overline{FG}$上，則 R 在$\widehat{BC}$上，此時$\overline{PR} >$正三角形一邊

如圖所示，直線的長度是無限的，而$\overline{FG}$的長度有限，因此機率趨近於 0




也可以用極限作為驗證：$\frac{R}{r} = q \to \infty$

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}=\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{1}{q^2\sqrt{1-(\frac{q-2}{2q})^2}}}{\frac{2}{q^2\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2}}}=\lim_{q\to\infty}\frac{\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2}}{2\sqrt{1-(\frac{q-2}{2q})^2}}=0$$

∴隨機一弦大於圓內接正三角形一邊的機率趨近於 0

問題三：隨機一弦大於圓內接其他正多邊形邊長之機率

圖形一：正方形

法一：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

WLOG 假設此弦平行正方形一邊，則此半徑垂直弦與正方形一邊，如圖

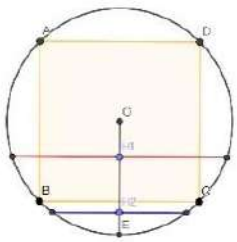
顯而易見地，當弦$\overline{\mathrm{FG}}$垂直半徑$\overline{OE}$於圓心和正方形一邊$\overline{\mathrm{AB}}$之間(不在$\overline{\mathrm{AB}}$上)，則弦$\overline{\mathrm{FG}}>$正方形 ABCD 一邊$\overline{\mathrm{AB}}$。因此，我們只消得知圓心 O 到正方形一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

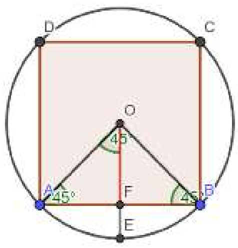
如下圖，連接圓心 O 和正方形 ABCD 兩頂點 A、B 得$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=$半徑 r

∵$\angle AOF=45^\circ \wedge \overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OE}}$

∴$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}\overline{\mathrm{OF}}=$半徑 r

∴$\frac{\overline{OF}}{\overline{OE}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



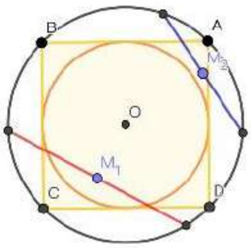




∴隨機一弦大於圓內接正方形邊長之機率為$\frac{\sqrt{2}}{2}$

法二：隨機中點法：圓 O 內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M做$\overline{\mathrm{MO}}$之垂線交圓於 E、F，$\overline{\mathrm{EF}}$即為所求之弦，且M為$\overline{\mathrm{EF}}$中點，如圖。

顯而易見地，當 M 在正方形 ABCD 的內切圓內，弦$\overline{\mathrm{EF}}>$正方形 ABCD 邊長

且除圓心外，圓內每一點皆對應一弦。但是因為圓內隨機一點恰選到圓心之機率趨近於 0，故不須考慮圓心。因此，隨機一弦大於圓內接正方形邊長的機率為內切圓和外接圓之面積比值。




根據上述可知圓心到內接正方形一邊的距離為半徑的$\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵正方形內切圓的半徑是外接圓的$\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴面積為$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}$倍

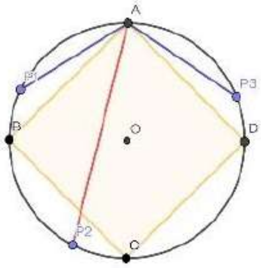
∴隨機一弦大於圓內接正方形邊長之機率為$\frac{1}{2}$

法三：隨機端點法：在圓上隨機取 2 點作為弦的 2 端點。

WLOG 假設其中一端點在正方形頂點上，如圖。

仿照上例可知，當另一端點 P 落在弧$\widehat{\mathrm{BCD}}$上，則$\overline{\mathrm{AP}}>$正方形 ABCD 邊長

$\because \widehat{BCD} = \frac{1}{2}$圓周




$\therefore$隨機一弦大於圓內接正方形邊長之機率為$\frac{1}{2}$

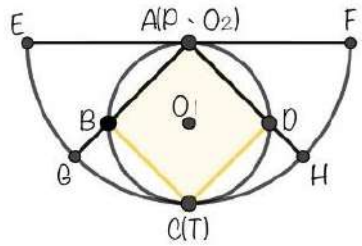
法四：推廣後的隨機端點法：隨機在半徑為 r 的圓$O_1$上取一點 P，過其做直徑$\overline{PT}$。過 T 做半徑為 R 之圓$O_2, R \geq r$，使兩圓內切或重合。過 P 做切線交圓$O_2$於 E、F，將大圓截成兩弧。在與 T 相切的弧上隨機取一點 Q，$\overline{PQ}$交圓$O_1$於 R ，$\overline{PR}$即為所求之弦。

WLOG 假設 P 與正方形一頂點 A 重合，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$分別交圓$O_2$於 G、H。當 Q 在$\widehat{GH}$上，則 R 在$\widehat{BCD}$上。由前述可知，此時$\overline{PR} >$正方形一邊。

情況一：$\frac{R}{r} = 1$

兩圓重合，此特例同隨機端點法，機率為$\frac{1}{2}$

情況二：$\frac{R}{r} = 2$




A 與$O_2$重合$\wedge \widehat{ETF} = 180°$

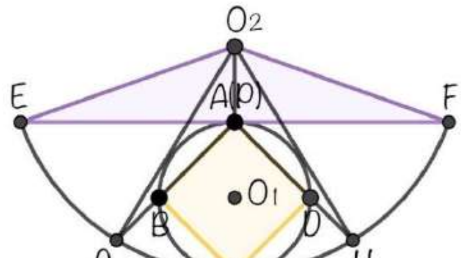
$\widehat{GH} = \angle GO_2H, \because A與O_2重合 \therefore \widehat{GH} = \angle GAH = 90°$

$$\because \frac{\widehat{GH}}{\widehat{ETF}} = \frac{90°}{180°} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$隨機一弦大於圓內接正方形一邊的機率為$\frac{1}{2}$

情況三：$\frac{R}{r} = 3$

$$\angle AO_2E = arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{EO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{1}{3}$$




做$\overline{O_2I} \perp \overrightarrow{GA}$交$\overrightarrow{GA}$於 I

$$\because \angle O_2AI = \angle GAT = 45° \wedge \angle AIO_2 = 90°$$

$\therefore \triangle\, AIO_2$為等腰三角形$\Rightarrow \overline{O_2I} = \frac{\overline{AO_2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R}{2} - \sqrt{2}r = \frac{\sqrt{2}r}{2}$

$$\angle O_2GI = arcsin\frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_2G}} = arcsin\frac{\frac{\sqrt{2}r}{2}}{R} = arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$$

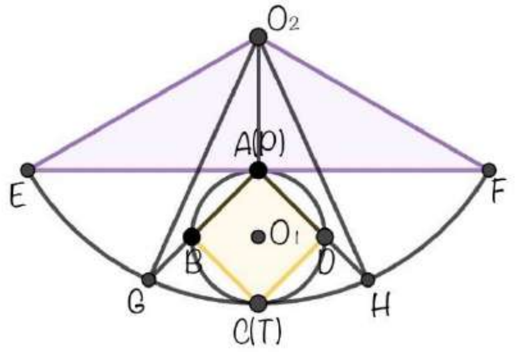
$$\angle GO_2A = \frac{\pi}{4} - \angle O_2GI = \frac{\pi}{4} - arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\because \frac{\widehat{GH}}{\widehat{EF}} = \frac{\angle GO_2H}{\angle EO_2F} = \frac{\angle GO_2A}{\angle AO_2E} = \frac{\frac{\pi}{4} - arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}}{arccos\frac{1}{3}}$$

∴隨機一弦大於圓內接正方形一邊的機率為$\frac{\frac{\pi}{4}-arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}}{arccos\frac{1}{3}}$

情況四：$\frac{R}{r}=q,q\geq 1$

$$\angle AO_2E=arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{EO_2}}=arccos\frac{R-2r}{R}=arccos\frac{q-2}{q}$$




做$\overline{O_2I}\perp\overleftrightarrow{GA}$交$\overleftrightarrow{GA}$於 I

$$\because \angle O_2AI=\angle GAT=45°\wedge\angle AIO_2=90°$$

∴△ $AIO_2$為等腰直角三角形⇒ $\overline{O_2I}=\frac{\overline{AO_2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}R}{2}-\sqrt{2}r$

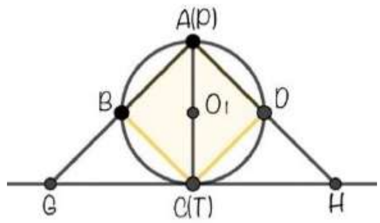
$$\angle O_2GI=arcsin\frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_2G}}=arcsin\frac{\frac{\sqrt{2}R}{2}-\sqrt{2}r}{R}=arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}$$

$$\angle GO_2A=\frac{\pi}{4}-\angle O_2GI=\frac{\pi}{4}-arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}$$

$$\because\frac{\widehat{GH}}{\widehat{ETF}}=\frac{\angle GO_2H}{\angle EO_2F}=\frac{\angle GO_2A}{\angle AO_2E}=\frac{\frac{\pi}{4}-arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$$

∴隨機一弦大於圓內接正方形一邊的機率為$\frac{\frac{\pi}{4}-arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

情況五：$\frac{R}{r}\to\infty$




$\widehat{ETF}$變成一條直線，當 Q 在$\overline{GH}$上，則 R 在$\widehat{BCD}$上，此時$\overline{PR}>$正方形一邊

如圖所示，直線的長度是無限的，而$\overline{GH}$的長度有限，因此機率趨近於 0

也可以用極限作為驗證：$\frac{R}{r}=q\to\infty$

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}=\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2}}{q^2\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q})^2}}}{\frac{2}{q^2\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2}}}$$

$$=\lim_{q\to\infty}\frac{\sqrt{2-2(\frac{q-2}{q})^2}}{2\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q})^2}}=0$$

∴隨機一弦大於圓內接正方形一邊的機率趨近於 0

圖形二：正五邊形

法一：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

WLOG 假設此弦平行正五邊形一邊，則此半徑垂直弦與正五邊形一邊，如圖。

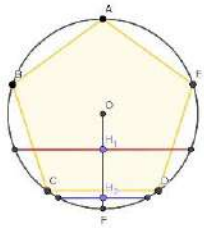
顯而易見地，當弦$\overline{\mathrm{GH}}$垂直半徑$\overline{OF}$於圓心和正五邊形一邊$\overline{\mathrm{AB}}$之間(不在$\overline{\mathrm{AB}}$上)，則弦$\overline{\overline{\mathrm{GH}}}>$正方形 ABCDE 一邊$\overline{\mathrm{AB}}$。因此，我們只消得知圓心 O 到正五邊形一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

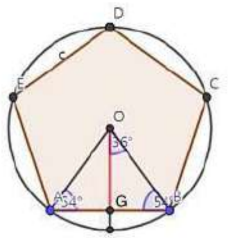
如下圖，連接圓心 O 和正五形 ABCDE 兩頂點 A、B 得$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=$半徑 r

∵ ∠AOG=36°∧ $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{OF}}$

∴$\cos 36°\ \overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OG}}$

∴$\frac{\overline{OG}}{\overline{OF}}=\cos 36°$



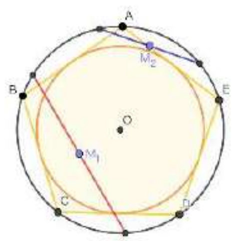


∴隨機一弦大於圓內接正五邊形邊長之機率為$\cos 36°$

法二：隨機中點法：圓 O 內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M做$\overline{\mathrm{MO}}$之垂線交圓於 F、G，$\overline{\mathrm{FG}}$即為所求之弦，且M為$\overline{\mathrm{FG}}$中點，如圖。

顯而易見地，當 M 在正五邊形 ABCDE 的內切圓內，弦$\overline{\mathrm{FG}}>$正五邊形 ABCDE 邊長。

且除圓心外，圓內每一點皆對應一弦。但是因為圓內隨機一點恰選到圓心之機率趨近於 0，故不須考慮圓心。因此，隨機一弦大於圓內接正五邊形邊長的機率為內切圓和外接圓之面積比值。



根據上述可知圓心到內接正五邊形一邊的距離為半徑的$\cos 36°$

∵正五邊形內切圓的半徑是外接圓的$\cos 36°$

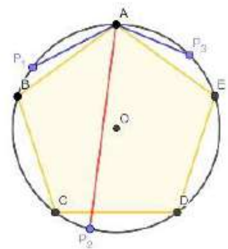
∴面積為$cos^2 36°$倍

∴隨機一弦大於圓內接正五邊形邊長之機率為$cos^2 36°$

法三：隨機端點法：在圓上隨機取 2 點作為弦的 2 端點。

WLOG 假設其中一端點在正五邊形頂點上，如右下圖。

顯而易見地，當另一端點 M 落在弧$\widehat{\mathrm{BCDE}}$上，則$\overline{\mathrm{AM}}>$正五邊形 ABCDE 邊長



∵$\widehat{\mathrm{BCDE}}=\frac{3}{5}$圓周

∴隨機一弦大於圓內接正五邊形邊長之機率為$\frac{3}{5}$

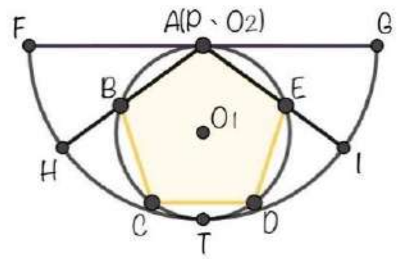
法四：推廣後的隨機端點法：隨機在半徑為 r 的圓$O_1$上取一點 P，過其做直徑$\overline{PT}$。過 T 做半徑為 R 之圓$O_2, R\geq r$，使兩圓內切或重合。過 P 做切線交圓$O_2$於 F、G，將大圓截成兩弧。在與 T 相切的弧上隨機取一點 Q，$\overline{PQ}$交圓$O_1$於 R ，$\overline{PR}$即為所求之弦。

WLOG 假設 P 與正五邊形一頂點 A 重合，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}$分別交圓$O_2$於 H、I。當 Q 在$\widehat{HI}$上，則 R 在$\widehat{BCDE}$上。由前述可知，此時$\overline{PR}>$正五邊形一邊。

情況一：$\frac{R}{r} = 1$

兩圓重合，此特例同隨機端點法，機率為$\frac{3}{5}$

情況二：$\frac{R}{r} = 2$




A 與$O_2$重合$\wedge \widehat{FTG} = 180°$

$\widehat{HI} = \angle HO_2I, \because A$與$O_2$重合$\therefore \widehat{HI} = \angle HAI = 108°$

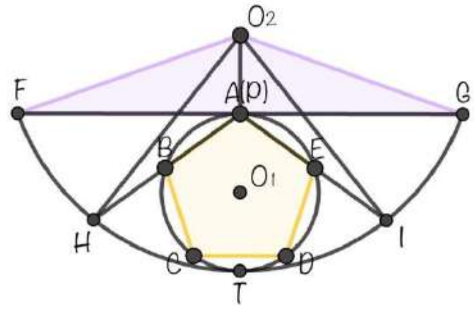
$$\because \frac{\widehat{HI}}{\widehat{FTG}} = \frac{108°}{180°} = \frac{3}{5}$$

∴隨機一弦大於圓內接正五邊形一邊的機率為$\frac{3}{5}$

情況三：$\frac{R}{r} = 3$

$$\angle AO_2F = arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{FO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{1}{3}$$

做$\overline{O_2J} \perp \overrightarrow{HA}$交$\overrightarrow{HA}$於 J




$$\because \angle O_2AJ = \angle HAT = 54° \wedge \angle AJO_2 = 90°$$

$$\therefore \overline{O_2J} = (R-2r)sin\frac{3\pi}{10} = rsin\frac{3\pi}{10}$$

$$\angle O_2HJ = arcsin\frac{\overline{O_2J}}{\overline{O_2H}} = arcsin\frac{rsin\frac{3\pi}{10}}{R} = arcsin\frac{sin\frac{3\pi}{10}}{3}$$

$$\angle HO_2A = \frac{3\pi}{10} - \angle O_2HJ = \frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{sin\frac{3\pi}{10}}{3}$$

$$\because \frac{\widehat{HI}}{\widehat{FG}} = \frac{\angle HO_2I}{\angle FO_2G} = \frac{\angle HO_2A}{\angle AO_2F} = \frac{\frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{sin\frac{3\pi}{10}}{3}}{arccos\frac{1}{3}}$$

∴隨機一弦大於圓內接正五邊形一邊的機率為$\frac{\frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{sin\frac{3\pi}{10}}{3}}{arccos\frac{1}{3}}$

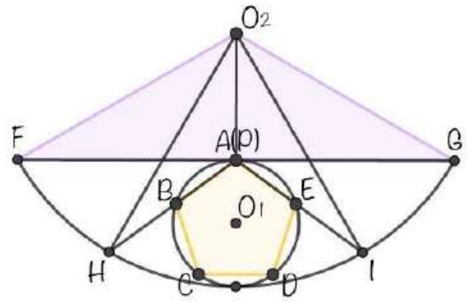
情況四：$\frac{R}{r} = q, q \geq 1$

$$\angle AO_2F = arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{FO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{q-2}{q}$$

做$\overline{O_2J} \perp \overrightarrow{HA}$交$\overrightarrow{HA}$於 J

$$\because \angle O_2AJ = \angle HAT = 54° \wedge \angle AJO_2 = 90°$$

$$\therefore \overline{O_2J} = (R-2r)sin\frac{3\pi}{10}$$




$$\angle O_2HJ = arcsin\frac{\overline{O_2J}}{\overline{O_2H}} = arcsin\frac{(R-2r)sin\frac{3\pi}{10}}{R}$$

$$= arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}$$

$$\angle HO_2A = \frac{3\pi}{10} - \angle O_2HJ = \frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}$$

$$\because \frac{\widehat{HI}}{\widehat{FTG}} = \frac{\angle HO_2I}{\angle FO_2G} = \frac{\angle HO_2A}{\angle AO_2F} = \frac{\frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$$

∴隨機一弦大於圓內接正五邊形一邊的機率為$\frac{\frac{3\pi}{10}-arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

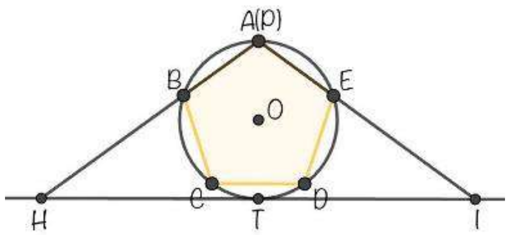
情況五：$\frac{R}{r} \to \infty$

$\widehat{FTG}$變成一條直線，當 Q 在$\overline{HI}$上，則 R 在$\widehat{BCDE}$上，此時$\overline{PR}$ >正五邊形一邊

如圖所示，直線的長度是無限的，而$\overline{HI}$的長度有限，因此機率趨近於 0

也可以用極限作為驗證：$\frac{R}{r} = q \to \infty$

$$\lim_{q\to\infty}\frac{\frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}} = \lim_{q\to\infty}\frac{\frac{2sin\frac{3\pi}{10}}{q^2\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2 sin^2\frac{3\pi}{10}}}}{\frac{2}{q^2\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2}}}$$




$$= \lim_{q\to\infty}\frac{\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2}sin\frac{3\pi}{10}}{\sqrt{1-(\frac{q-2}{q})^2 sin^2\frac{3\pi}{10}}} = 0$$

∴隨機一弦大於圓內接正五邊形一邊的機率趨近於 0

圖形三：正 n 邊形

法一：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦

WLOG 假設此弦平行正 n 邊形一邊，則此半徑垂直弦與正 n 邊形一邊。若此弦垂直半徑於圓心和圓內接正 n 邊形一邊之間，此弦長度>正 n 邊形一邊，因此我們只消知道圓心與圓內接正 n 邊形一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

連接圓心和圓內接正 n 邊形一邊的一端點可得一半徑且和原半徑夾$\frac{\frac{360°}{n}}{2}=\frac{180°}{n}$，所以圓心與圓內接正 n 邊形一邊的距離為半徑的$\cos\frac{180°}{n}$，因此隨機一弦長度>圓內接正 n 邊形邊長機率為$\cos\frac{180°}{n}$。

法二：隨機中點法：連接圓內隨機一點與圓心，過此點作此連線之垂線，交圓於所求之弦的兩端點

當此隨機一點位於正 n 邊形內切圓內，弦長度>正 n 邊形邊長。且除圓心外，圓內每一點皆對應一弦。但是因為圓內隨機一點恰選到圓心之機率趨近於 0，故不須考慮圓心。因此，隨機一弦大於圓內接正 n 邊形邊長的機率為內切圓和外接圓之面積比值。由上述可知圓心與圓內接正 n 邊形一邊的距離為半徑的$\cos\frac{180°}{n}$。

∵正 n 邊形內切圓的半徑為外接圓的$\cos\frac{180°}{n}$

∴面積為$cos^2\frac{180°}{n}$倍

∴隨機一弦長度>圓內接正 n 邊形邊長機率為$cos^2\frac{180°}{n}$。

法三：隨機端點法：在圓上隨機取 2 點作為弦的 2 端點。

正 n 邊形每邊皆對應一等弧，這 n 個等弧恰構成正 n 邊形的外接圓。WLOG 假設其中一端點在正 n 邊形頂點上，則若另一端點在此頂點相鄰兩邊對應之優弧上(亦即此端點在另外 n-2 個優弧上)，此弦>正 n 邊形邊長

∵這 n-2 個優弧= $\frac{n-2}{n}$圓周

∴隨機一弦長度>圓內接正 n 邊形邊長機率為$\frac{n-2}{n}$

法四：推廣後的隨機端點法：隨機在半徑為 r 的圓$O_1$上取一點 P，過其做直徑$\overline{PT}$。過 T 做半徑為 R 之圓$O_2, R \geq r$，使兩圓內切或重合。過 P 做切線交圓$O_2$於 A、B，將大圓截成兩弧。在與 T 相切的弧上隨機取一點 Q，$\overline{PQ}$交圓$O_1$於 R，$\overline{PR}$即為所求之弦。

WLOG 假設 P 與正 n 邊形一頂點$V_1$重合，$\overrightarrow{V_1V_2}, \overrightarrow{V_1V_n}$分別交圓$O_2$於 C、D。當 Q 在$\widehat{CD}$上，則 R 在$V_1\widehat{V_2 \dots\dots} V_n$上。由前述可知，此時$\overline{PR}$ >正 n 邊形一邊。

情況一：$\frac{R}{r}=1$

兩圓重合，此特例同隨機端點法，機率為$\frac{n-2}{n}$

情況二：$\frac{R}{r}=2$

$V_1$與$O_2$重合$\wedge \widehat{ATB}=180°$

$\widehat{CD}=\angle CO_2D, \because A$與$O_2$重合$\therefore \widehat{CD}=\angle CAD=180°-\frac{360°}{n}$

$$\because \frac{\widehat{CD}}{\widehat{ATB}}=\frac{180°-\frac{360°}{n}}{180°}=\frac{n-2}{n}$$

∴隨機一弦大於圓內接正 n 邊形一邊的機率為$\frac{n-2}{n}$

情況三：$\frac{R}{r}=3$

$$\angle V_1O_2A=arccos\frac{\overline{V_1O_2}}{\overline{AO_2}}=arccos\frac{R-2r}{R}=arccos\frac{1}{3}$$

做$\overline{O_2H}\perp\overrightarrow{CV_1}$交$\overrightarrow{CV_1}$於 H

$$\because \angle O_2V_1H=\angle CV_1T=90°-\frac{180°}{n}\wedge\angle V_1HO_2=90°$$

$$\therefore \overline{O_2H}=(R-2r)\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})=rsin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})$$

$$\angle O_2CH=arcsin\frac{\overline{HO_2}}{\overline{CO_2}}=arcsin\frac{rsin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}{R}=arcsin\frac{sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}{3}$$

$$\angle CO_2V_1=(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})-\angle O_2CH=(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})-arcsin\frac{sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}{3}$$

$$\because \frac{\widehat{CD}}{\widehat{AB}}=\frac{\angle CO_2D}{\angle AO_2B}=\frac{\angle CO_2V_1}{\angle AO_2V_1}=\frac{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})-arcsin\frac{sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}{3}}{arccos\frac{1}{3}}$$

∴隨機一弦大於圓內接正 n 邊形一邊的機率為$\frac{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})-arcsin\frac{sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n})}{3}}{arccos\frac{1}{3}}$

情況四：$\frac{R}{r}=q, q\geq 1$

$$\angle V_1O_2A=arccos\frac{\overline{V_1O_2}}{\overline{AO_2}}=arccos\frac{R-2r}{R}=arccos\frac{q-2}{q}$$

做$\overline{O_2H}\perp\overrightarrow{CV_1}$交$\overrightarrow{CV_1}$於 H

$$\because \angle O_2V_1H = \angle CAT = 90° - \frac{180°}{n} \wedge \angle V_1HO_2 = 90°$$

$$\therefore \overline{O_2H} = (R-2r)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$\angle HCO_2 = arcsin\frac{\overline{HO_2}}{\overline{CO_2}} = arcsin\frac{(R-2r)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{R} = arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}$$

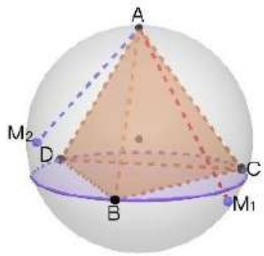
$$\angle CO_2V_1 = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) - \angle HCO_2 = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) - arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}$$

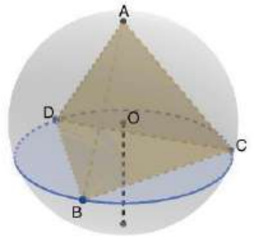
$$\because \frac{\widehat{CD}}{\widehat{ATB}} = \frac{\angle CO_2D}{\angle AO_2B} = \frac{\angle CO_2V_1}{\angle AO_2V_1} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) - arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$$

∴隨機一弦大於圓內接正 n 邊形一邊的機率為$\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)-arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

| 隨機對象 / 多邊形 | 隨機半徑垂直線 | 隨機中點 | 隨機端點 | 推廣後的隨機端點 |
|---|---|---|---|---|
| 正三角形 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{\frac{\pi}{6} - arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |
| 正方形 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\frac{\pi}{4} - arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |
| 正五邊形 | $\cos 36°$ | $\cos^2 36°$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{\frac{3\pi}{10} - arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 正 n 邊形 | $\cos\frac{180°}{n}$ | $\cos^2\frac{180°}{n}$ | $\frac{n-2}{n}$ | $\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) - arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |

問題四：隨機一弦長度大於球內接各種正多面體一邊的機率



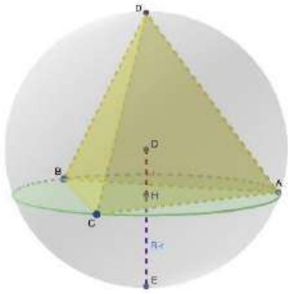

圖形一：正四面體

法一：隨機端點法：在球面上隨機取兩點作為弦之兩端點。

WLOG 假設其中一端點在正四面體的一頂點 A 上，如圖。

顯而易見地，當另一端點M落在以對面正△BCD 外接圓為底的球冠上，則$\overline{AM}>$正四面體邊長。我們可以透過簡易的積分得知球冠表面積公式$S=2\pi RH$

如圖，令正四面體邊長=a



$\overline{DE}$交△ABC 於 H

∵H 為△ABC 之外心∧△ABC 為正△

∴H 為△ABC 之重心和垂心

$\therefore \overleftrightarrow{AH} \perp \overline{BC}$於 F∧$\overline{AH}=\frac{2\overline{AF}}{3}$

$$\overline{AH}=\frac{2\overline{AF}}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{3}$$

$$\overline{DH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$$

連結$\overline{OA}$，得$\overline{OA}=\overline{OD}=\overline{OE}$，令其=R

$$\overline{OA}^2=\overline{AH}^2+\overline{OH}^2$$

$$\overline{OA}^2=\overline{AH}^2+(\overline{DH}-\overline{OD})^2$$

$$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2+(\frac{\sqrt{6}a}{3}-R)^2$$

$$R=\frac{\sqrt{6}a}{4}$$

令$\overline{OH}=r$

$$\overline{OH}=\overline{DH}-\overline{OD}$$

$$r=\frac{\sqrt{6}a}{3}-\frac{\sqrt{6}a}{4}=\frac{\sqrt{6}a}{12}$$

由上述可知球冠表面積$S=2\pi RH$，其中正四面體外接球半徑$R=\frac{\sqrt{6}a}{4}$；正四面體內切球半徑$=\frac{\sqrt{6}a}{12}$。

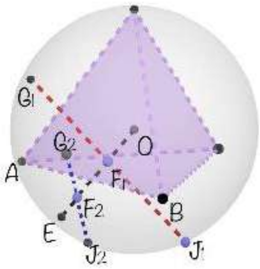
$$H=\frac{\sqrt{6}a}{4}-\frac{\sqrt{6}a}{12}=\frac{\sqrt{6}a}{6}$$

$$2\pi RH = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{6}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{12} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$4\pi R^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$\because \frac{2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \frac{1}{6}$$

∴隨機一弦大於球內接正四面體邊長之機率為$\frac{1}{6}$



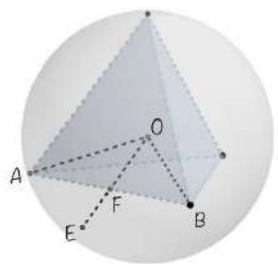

法二：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。WLOG 假設此半徑過球心垂直正四面體一邊，則此弦平行正四面體一邊，如圖。

顯而易見地，當弦$\overline{GJ}$垂直半徑$\overline{OE}$於球心和正四面體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$之間(不在$\overline{\mathrm{AB}}$上)，則弦$\overline{\mathrm{GJ}} >$正四面體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$。因此，我們只消得知球心 O 到正四面體一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

如右下圖，$\overline{OE}$交$\overline{AB}$於 F，連接圓心 O 和正四面體兩頂點 A、B

$\because \overline{\mathrm{OA}} = \overline{OE} = \overline{\mathrm{OB}} =$正四面體外接球半徑$R = \frac{\sqrt{6}a}{4} \wedge \overline{AF} = \overline{BF} = \frac{a}{2}$

$$\therefore \overline{OF} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$$



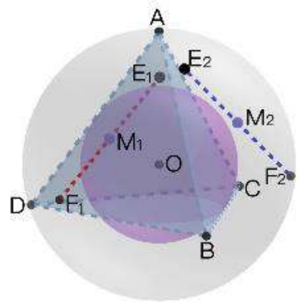

$$\because \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{\sqrt{6}a}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

∴隨機一弦大於球內接正四面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{3}}{3}$

法三：隨機中點法：球 O 內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M隨機做$\overline{\mathrm{MO}}$之垂線交圓於 E、F，$\overline{\mathrm{EF}}$即為所求之弦，且M為$\overline{\mathrm{EF}}$中點，如圖。

顯而易見地，當 M 在正四面體六邊所切之球內，弦$\overline{\mathrm{EF}} >$正四面體邊長。

且球內每一點皆對應無限多弦。因此，隨機一弦大於球內接正四面體邊長的機率為正四面體六邊所切之球和外接球之體積比值。



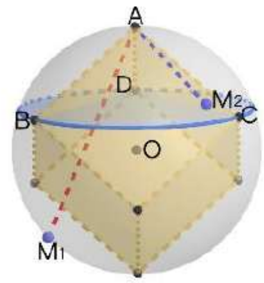

根據上述可知球心到內接正四面體一邊的距離為半徑的$\frac{\sqrt{3}}{3}$

∵正四面體六邊所切之球的半徑是外接球的$\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴體積為$(\frac{\sqrt{3}}{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$倍

∴隨機一弦大於球內接正四面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{3}}{9}$

圖形二：正方體

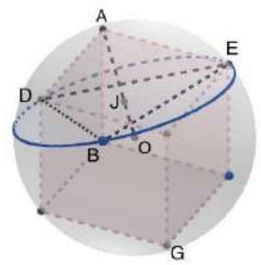



法一：隨機端點法：在球面上隨機取兩點作為弦之兩端點。

WLOG 假設其中一端點在正方體的一頂點 A 上，如圖。

顯而易見地，當另一端點M落在以 A 的三個相鄰頂點 B、D、E 所接的圓為底的球冠上，則$\overline{AM}$ >正方體邊長

如圖右下，令正方體邊長=a




正方體外接球半徑=$\frac{對角線長}{2}=\frac{\sqrt{3}正方體邊長}{2}$

過 A 做△BDE 垂線交△BDE 於 J

$$\because \overline{BD}=\overline{DE}=\overline{BE}=\sqrt{2}a$$

∴△BDE 為正△

$$\because \angle AJB=\angle AJD=\angle AJE=90°\wedge\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{AE}\wedge\overline{AJ}=\overline{AJ}=\overline{AJ}$$

$$\therefore\triangle ABJ\cong\triangle \mathrm{ADJ}\cong \mathrm{AEJ}\ \text{by RHS}\Rightarrow\overline{BJ}=\overline{DJ}=\overline{EJ}$$

∵J 為△BDE 之外心Λ△BDE 為正△

∴J 為△BDE 之重心⇒ $\overline{BJ}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{6}a}{3}$

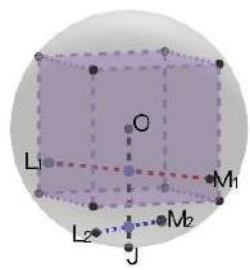
$$H=\overline{GJ}=\overline{AG}-\overline{AJ}=\overline{AG}-\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BJ}^2}=\sqrt{3}a-\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{6}a}{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

$$2\pi RH=2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}a}{3}=2\pi a^2$$

$$4\pi R^2=3\pi a^2$$

$$\because\frac{2\pi RH}{4\pi R^2}=\frac{2\pi a^2}{3\pi a^2}=\frac{2}{3}$$

∴隨機一弦大於球內接正方體邊長之機率為$\frac{2}{3}$




法二：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

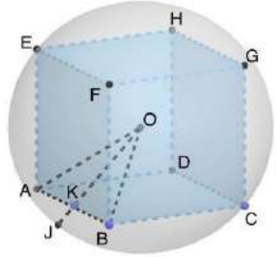
WLOG 假設此半徑過球心垂直正方體一邊，則此弦平行正方體一邊，如圖。

顯而易見地，當弦$\overline{LM}$垂直半徑$\overline{OJ}$於於球心和正方體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$之間(不在$\overline{\mathrm{AB}}$上)，則弦$\overline{\mathrm{LM}}$ >正方體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$。因此，我們只消得知球心 O 到正方體一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

如圖右下，$\overline{OJ}$交$\overline{AB}$於 K，連接圓心 O 和正方體兩頂點 A、B

$\because \overline{OA}=\overline{OJ}=\overline{OB}=$正方體外接球半徑$R=\frac{\sqrt{3}a}{2} \wedge \overline{AK}=\overline{BK}=\frac{a}{2}$

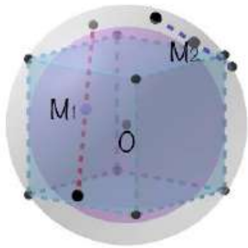
$$\therefore \overline{OK}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}$$




$$\because \frac{\overline{OK}}{\overline{OJ}}=\frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\therefore$隨機一弦大於球內接正方體邊長之機率為$\frac{\sqrt{6}}{3}$

法三：隨機中點法：球 O 內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M隨機做$\overline{MO}$之垂線交圓於 J、K，$\overline{JK}$即為所求之弦，且M為$\overline{JK}$中點，如圖。



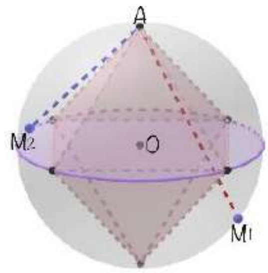

顯而易見地，當 M 在正方體 12 邊所切之球內，弦$\overline{JK}>$正方體邊長，且球內每一點皆對應無限多弦。因此，隨機一弦大於球內接正方體邊長的機率為正方體 12 邊所切之球和外接球之體積比值。

根據上述可知球心到內接正方體一邊的距離為半徑的$\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\because$正方體 12 邊所切之球的半徑是外接球的$\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore$體積為$(\frac{\sqrt{6}}{3})^3=\frac{2\sqrt{6}}{9}$倍

$\therefore$隨機一弦大於球內接正方體邊長之機率為$\frac{2\sqrt{6}}{9}$



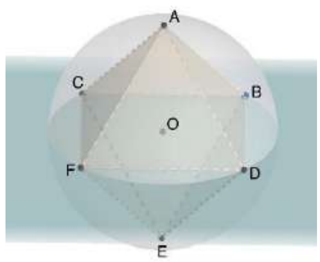

圖形三：正八面體

法一：隨機端點法：在球面上隨機取兩點作為弦之兩端點。

WLOG 假設其中一端點在正八面體的一頂點 A 上，如圖。

顯而易見地，當另一端點M落在以 A 的三個相鄰頂點 B、C、D、F 所接的圓為底的球冠上（即為半球），則$\overline{AM}>$正八面體邊長

如圖，$\because$半球之表面積為整體球的一半

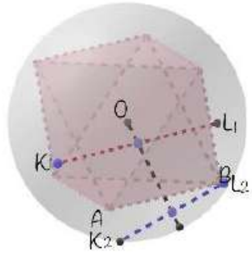



$\therefore$隨機一弦大於球內接正八面體邊長之機率為$\frac{1}{2}$

法二：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

WLOG 假設此半徑過球心垂直正八面體一邊，則此弦平行正八面體一邊，如圖右下。

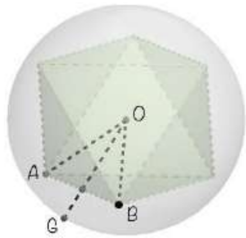
顯而易見地，當弦$\overline{KL}$垂直半徑$\overline{OG}$於於球心和正八面體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$之間(不在$\overline{\mathrm{AB}}$上)，則弦$\overline{\mathrm{KL}}$ >正八面體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$。因此，我們只消得知球心 O 到正八面體一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率，如下圖。




外接球半徑$R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$ ∧圓心 O 到正八面體一邊的距離

$=\frac{a}{2}$

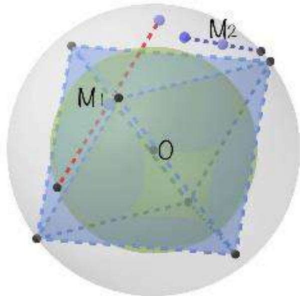
$$\because \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$




∴隨機一弦大於球內接正八面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{2}}{2}$

法三：隨機中點法：球O內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M隨機做$\overline{\mathrm{MO}}$之垂線交圓於 J、K，$\overline{\mathrm{JK}}$即為所求之弦，且M為$\overline{\mathrm{JK}}$中點，如圖。

顯而易見地，當 M 在正八面體 12 邊所切之球內，弦$\overline{\mathrm{GI}}$ >正八面體邊長，且球內每一點皆對應無限多弦。因此，隨機一弦大於球內接正八面體邊長的機率為正八面體 12 邊所切之球和外接球之體積比值。




根據上述可知球心到內接正八面體一邊的距離為半徑的$\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵正八面體 12 邊所切之球的半徑是外接球的$\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴體積為$(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$倍

∴隨機一弦大於球內接正八面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{2}}{4}$

圖形四：正十二面體

法一：隨機端點法：在球面上隨機取兩點作為弦之兩端點。

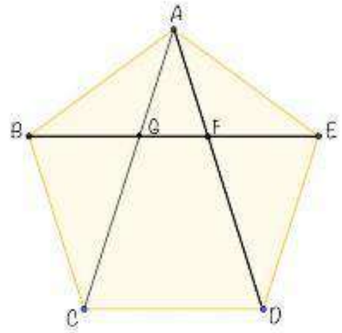
WLOG 假設其中一端點在正十二面體的一頂點 A 上，如圖。

顯而易見地，當另一端點 X 落在以 A 的三個相鄰頂點 B、E、J 所接的圓為底的球冠上，則$\overline{AX}$ >正十二面體邊長。

為了之後的方便，先在這裡計算正五邊形各線段之比。

如圖，正五邊形 ABCDE 中，$\overline{BE}$交$\overline{AD}$於 F、交$\overline{AC}$於 G

令邊長=aΛ對角線長=b




$$\overline{AF} = b - a \wedge \overline{FG} = 2a - b$$

$$\because \triangle GFA \sim \triangle FAB \sim \triangle BAD$$

$$\therefore \overline{GF}:\overline{FA} = \overline{FA}:\overline{AB} = \overline{BA}:\overline{AD}$$

$$(2a-b):(b-a) = (b-a):a = a:b$$

$$b^2 - ab - a^2 = 0$$

$$(\frac{b}{a})^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

$\frac{b}{a} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(負不合)=Φ

b=Φa

順帶一提，$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b} = \phi$

如圖，正五邊形 ABCDE 中，外心為 O[4]

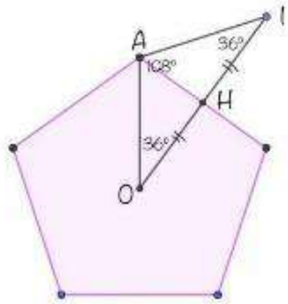
∵外心為中垂線之交點

∴可過 O 做$\overline{AB}$中垂線交$\overline{AB}$於 H

在$\overrightarrow{OH}$上找一點 I，$s.t. \overline{OH} = \overline{HI}$

∵ΔOIA 為 36°-36°-108°三角形

∴由上述可知$\overline{OI} = \phi\overline{OA}$




$$\overline{OH} = \frac{\overline{OI}}{2} = \frac{\phi\overline{OA}}{2}$$

$\overline{OA}$ =外接圓半徑，令其=R

$$\overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OA}^2$$

$$(\frac{a}{2})^2 + (\frac{\phi R}{2})^2 = R^2$$

$$R = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a$$

如圖，正十二面體內鑲有正六面體[4]，令正十二面體邊長=aΛ外接球半徑 R

$\overline{UV}$交正五邊形 ABCDE 於 W

由上述可知正方體邊長=Φa

正十二面體外接球半徑=正方體外接球半徑=$\frac{\sqrt{3}\phi a}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$

過 A 做△BEJ 垂線交△BEJ 於 U

$$\because \overline{BE} = \overline{EJ} = \overline{BJ}$$

∴△BEJ 為正△，由上述可知此正三角邊長=Φa

∵U 為ΔBEJ 之外心ΛΔBEJ 為正三角形

$\therefore$U 為$\Delta$BEJ 之重心和垂心$\Rightarrow \overline{BU} = \frac{\sqrt{3}\phi a}{3}$

$$H = \overline{RU} = \overline{AR} - \overline{AU} = \overline{AR} - \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BU}^2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}a - \sqrt{(\phi a)^2 - (\frac{\sqrt{3}\phi a}{3})^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}+3\sqrt{15}-\sqrt{30}}{6}a$$

$$2\pi RH = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a \cdot \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}+3\sqrt{15}-\sqrt{30}}{6}a = \frac{9-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2}\pi a^2$$

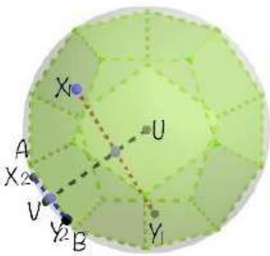
$$4\pi R^2 = 4\pi(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a)^2 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\pi a^2$$

$$\because \frac{2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{\frac{9-3\sqrt{2}+3\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2}\pi a^2}{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}\pi a^2} = \frac{3-\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore$隨機一弦大於球內接正十二面體邊長之機率為$\frac{3-\sqrt{2}}{3}$

法二：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

WLOG 假設此半徑過球心垂直正十二面體一邊，則此弦平行正十二面體一邊，如圖。

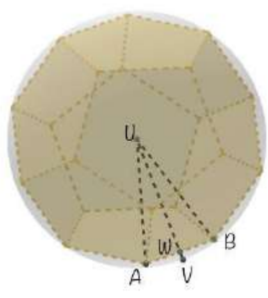



顯而易見地，當弦$\overline{XY}$垂直半徑$\overline{UV}$於於球心和正十二面體一邊$\overline{AB}$之間(不在$\overline{AB}$上)，則弦$\overline{XY}$ >正十二面體一邊$\overline{AB}$。因此，我們只消得知球心 U 到正十二面體一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

如圖右下，$\overline{UV}$交$\overline{AB}$於 W，連接球心 U 和正十二面體兩頂點 A、B

$\because \overline{UA} = \overline{UV} = \overline{UB} =$正十二面體外接球半徑$R = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a \wedge \overline{AW} = \overline{BW} = \frac{a}{2}$

$$\therefore \overline{UW} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}a$$

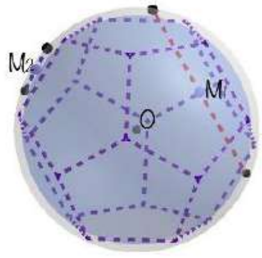



$$\because \frac{\overline{UW}}{\overline{UV}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$$

$\therefore$隨機一弦大於球內接正十二面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

法三：隨機中點法：球 O 內隨機取一點 X，連接$\overline{XO}$，過 X 隨機做$\overline{XO}$之垂線交圓於 U、V，$\overline{UV}$即為所求之弦，且 X 為$\overline{UV}$中點，如圖。

顯而易見地，當 M 在正十二面體 30 邊所切之球內，弦$\overline{UV}$ >正十二面體邊長，且球內每一點皆對應無限多弦。因此，隨機一弦大於球內接正十二面體邊長的機率為正十二面體 30 邊所切之球和外接球之體積比值。




根據上述可知球心到內接正十二面體一邊的距離為半徑的$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

∵正十二面體 30 邊所切之球的半徑是外接球的$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

∴體積為$(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6})^3 = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{9}$倍

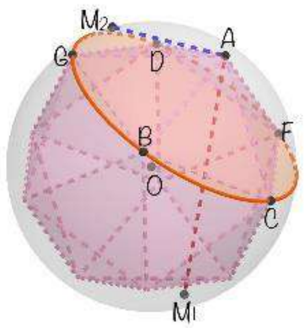
∴隨機一弦大於球內接正十二面體邊長之機率為$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{9}$

圖形五：正二十面體

法一：隨機端點法：在球面上隨機取兩點作為弦之兩端點。

WLOG 假設其中一端點在正二十面體的一頂點 A 上，如圖

顯而易見地，當另一端點 M 落在以 A 的 5 個相鄰頂點 B、C、F、D、G 所接的圓為底的球冠上，則$\overline{AM}$ >正二十面體邊長。




如圖，過 A 做五邊形 BCFDG 的垂線交五邊形 BCFDG 於 N

$\overline{ON}$交△ABC 於 L

$\overline{OA}$交五邊形 BCFGD 於 M

令正二十面體邊長=a，外接球半徑=R

由上述可知$\overline{BM} = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a$

$$\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} + \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BM}^2} = \overline{OA}$$

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a\right)^2} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a\right)^2} = R$$

$$R = \frac{\sqrt{25-5\sqrt{5}} - \sqrt{5\sqrt{5}-5}}{40}a = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$$

$$H = \overline{KN} = \overline{AK} - \overline{AN} = \overline{AK} - \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BN}^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} - \sqrt{a^2 - (\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 5}{10}a$$

$$2\pi RH = 2\pi\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\cdot\frac{\sqrt{5}+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}-5}{10}a$$

$$=\frac{50+10\sqrt{5}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}\pi a^2$$

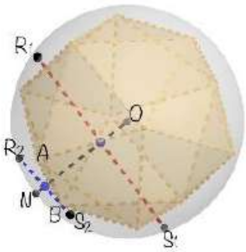
$$4\pi R^2 = 4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a\right)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}\pi a^2$$

$$\because \frac{2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{\frac{50+10\sqrt{5}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{20}\pi a^2}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}\pi a^2} = \frac{20+\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{20}$$

∴隨機一弦大於球內接正二十面體邊長之機率為$\frac{20+\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{20}$

法二：隨機半徑垂直線法：隨機做一半徑垂直線，即為所求之弦。

WLOG 假設此半徑過球心垂直正二十面體一邊，則此弦平行正二十面體一邊，如圖。



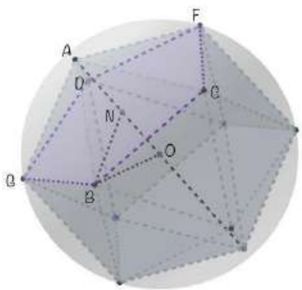

顯而易見地，當弦$\overline{RS}$垂直半徑$\overline{ON}$於於球心和正二十面體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$之間(不在$\overline{\mathrm{AB}}$上)，則弦$\overline{\mathrm{RS}} >$正二十面體一邊$\overline{\mathrm{AB}}$。因此，我們只消得知球心 O 到正二十面體一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

如圖，$\overline{ON}$交$\overline{AB}$於 Q，連接球心 O 和正二十面體兩頂點 A、B

$\because \overline{OA} = \overline{ON} = \overline{OB} =$正二十面體外接球半徑$R = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a \wedge \overline{AQ} = \overline{BQ} = \frac{a}{2}$

$$\therefore \overline{OQ} = \sqrt{(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a)^2-(\frac{a}{2})^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}a$$

$$\because \frac{\overline{OQ}}{\overline{ON}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}a}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$$

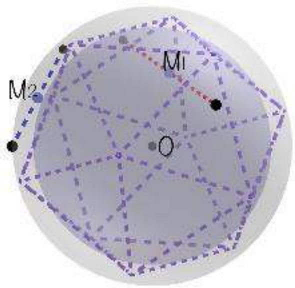



∴隨機一弦大於球內接正二十面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$

法三：隨機中點法：球 O 內隨機取一點 M，連接$\overline{MO}$，過 M 隨機做$\overline{\mathrm{MO}}$之垂線交圓於 N、Q，$\overline{\mathrm{NQ}}$即為所求之弦，且 M 為$\overline{\mathrm{NQ}}$中點，如圖。

顯而易見地，當 M 在正二十面體 30 邊所切之球內，弦$\overline{\mathrm{NQ}} >$正二十面體邊長，且球內每一點皆對應無限多弦。因此，隨機一弦大於球內接正二十面體邊長的機率為正二十面體 30 邊所切之球和外接球之體積比值。

根據上述可知球心到內接正二十面體一邊的距離為半徑的$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$




∵正二十面體 30 邊所切之球的半徑是外接球的$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$

∴體積為$(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10})^3=\frac{\sqrt{85+38\sqrt{5}}}{40}$倍

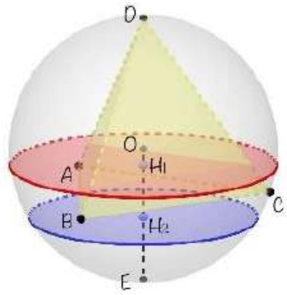
∴隨機一弦大於球內接正十二面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{85+38\sqrt{5}}}{40}$

| 隨機對象 \ 多面體 | 隨機端點 | 隨機半徑垂直線 | 隨機中點 |
|---|---|---|---|
| 正四面體 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{9}$ |
| 正方體 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ |
| 正八面體 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| 正十二面體 | $\frac{3-\sqrt{2}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$ | $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{9}$ |
| 正二十面體 | $\frac{20+\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{20}$ | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$ | $\frac{\sqrt{85+38\sqrt{5}}}{40}$ |

問題五：隨機一截圓大於球內接各種正多面體一面的外接圓之機率

法一：隨機半徑垂直面法：隨機作一半徑垂直面，即為所求之截圓。

WLOG 假設此截圓平行正四面體一面，則此半徑垂直此截圓與正四面體一面，如圖。



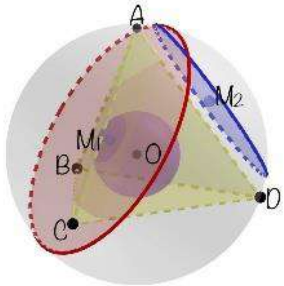

顯而易見地，當此截圓垂直半徑$\overline{OE}$於球心 O 和△ABC 之間（不在△ABC 上），此截圓大於正四面體一面的外接圓。因此，我們只消得知球心 O 到△ABC 的距離和半徑的比值，即可求出機率，如圖。

$\because \frac{\overline{OH}}{\overline{OE}}=\frac{r}{R}=\frac{\frac{\sqrt{6}a}{12}}{\frac{\sqrt{6}a}{4}}=\frac{1}{3}$

∴隨機一截圓大於球內接正四面體一面的外接圓的機率為$\frac{1}{3}$

法二：隨機圓心法：球 O 內隨機取一點 M，連接$\overline{\mathrm{MO}}$，過 M 做一平面垂直$\overline{\mathrm{MO}}$，與球交會處為一圓，且 M 為圓之圓心，如圖。

顯而易見地，當 M 在內切球內，圓 M 大於正四面體一面的外接圓。且除球心外，球內每一點皆對應一截圓。但是因為球內隨機一點恰選到球心之機率趨近於 0，故不須考慮球心。




由上述可知內切球和外接球半徑比值為$\frac{1}{3}$

∵正四面體內切球半徑為外接球的$\frac{1}{3}$

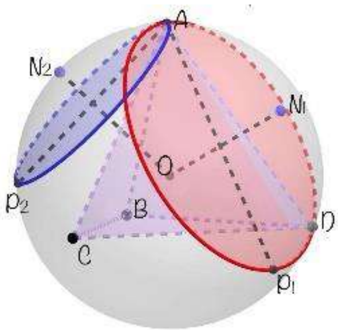
∴體積為$(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$倍

∴隨機一截圓大於球內接正四面體一面的外接圓的機率為$\frac{1}{27}$

法三：隨機直徑法：在球面上隨機取 2 點作為截圓的直徑。

在球面上隨機取 2 點作為截圓的直徑等價於先在球面上隨機取一點 M，接著在球面上再隨機取一點 P，過 M 做$\overline{OP}$垂線，另與球面交於一點 N，$\overline{MN}$即為所求之截圓的一直徑而$\overline{OP}$為此截圓之法線，如此一來便能避免$\overline{MN}$恰為球之直徑的問題。

WLOG 假設 M 在正四面體一頂點 A 上，如圖。



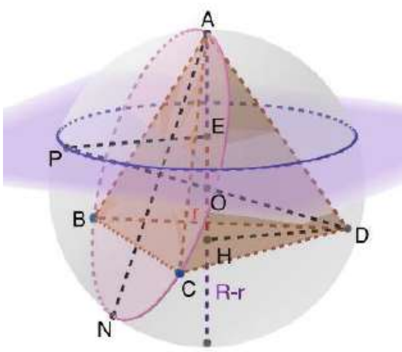

當$\overline{OP}$垂直正四面體一面，過 P 做 A 之對面正△BCD 的平行面，即得一球冠。顯而易見地，當 P 在此球冠上時，截圓＞正四面體所截之一面。

如下圖，當$\overline{OP}$垂直正四面體一面，底面的一頂點D在$\overrightarrow{PO}$上且 O 為$\overline{DP}$中點。過 A 做△BCD 的垂線交△BCD 於 H，過 P 做$\overline{AH}$的垂線交$\overline{AH}$於 E

$$\because \angle DHO = \angle PEO = 90° \wedge \angle DOH = \angle PEO \wedge \overline{DO} = \overline{OP}$$
$$\therefore \triangle DHO \cong \triangle PEO by AAS \Rightarrow \overline{OE} = \overline{OH}$$

令正四面體邊長=a；外接球半徑=R；內切球半徑=r；球冠高=H；，由上述可知$r = \frac{\sqrt{6}a}{12} \wedge R = \frac{\sqrt{6}a}{4}$

$$H = \overline{AE} = R - \overline{OE} = \frac{\sqrt{6}a}{4} - \frac{\sqrt{6}a}{12} = \frac{\sqrt{6}a}{6}$$
$$2\pi RH = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{6}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{6} = \frac{\pi a^2}{2}$$
$$4\pi R^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$$
$$\because \frac{2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{\frac{\pi a^2}{2}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \frac{1}{3}$$




∴隨機一截圓大於球內接正四面體一面的外接圓的機率為$\frac{1}{3}$

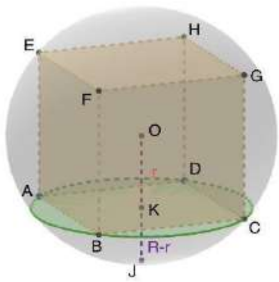
圖形二：正方體

法一：隨機半徑垂直面法：隨機作一半徑垂直面，即為所求之截圓。


WLOG 假設此截圓平行正方體一面，則此半徑垂直此截圓與正方體一面，如圖。

顯而易見地，當此截圓垂直半徑$\overline{OJ}$於球心 O 和正方形 ABCD 之間（不在正方形 ABCD 上），此截圓大於正方體一面的外接圓。因此，我們只消得知球心 O 到正方形 ABCD 的距離和半徑的比值，即可求出機率，如下圖

球心 O 到正方形 ABCD 的距離$=\frac{正方體的高}{2}=\frac{正方體邊長}{2}$




正方體外接球半徑$=\frac{對角線長}{2}=\frac{\sqrt{3}正方體邊長}{2}$

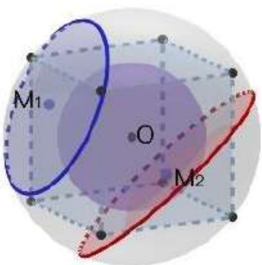
$$\because \frac{球心\ O\ 到正方形\ ABCD\ 的距離}{正方體外接球半徑}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$隨機一截圓大於球內接正方體一面的外接圓的機率為$\frac{\sqrt{3}}{3}$

法二：隨機圓心法：球 O 內隨機取一點 M，連接$\overline{MO}$，過 M 做一平面垂直$\overline{MO}$，與球交會處為一圓，且 M 為圓之圓心，如圖。

顯而易見地，當 M 在內切球上，圓 M 大於正方體一面的外接圓。且除球心外，球內每一點皆對應一截圓。但是因為球內隨機一點恰選到球心之機率趨近於 0，故不須考慮球心。

由上述可知內切球和外接球半徑比值為$\frac{\sqrt{3}}{3}$




$\because$正方體內切球半徑為外接球的$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$體積為$(\frac{\sqrt{3}}{3})^3=\frac{\sqrt{3}}{9}$倍

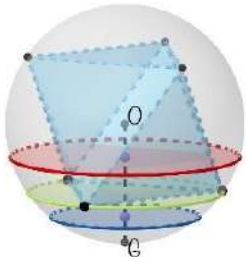
$\therefore$隨機一截圓大於球內接正方體一面的外接圓的機率為$\frac{\sqrt{3}}{9}$

圖形三：正八面體

法一：隨機半徑垂直面法：隨機作一半徑垂直面，即為所求之截圓。

WLOG 假設此截圓平行正八面體一面，則此半徑垂直此截圓與正八面體一面，如圖。

顯而易見地，當此截圓垂直半徑$\overline{OG}$於球心 O 和正△ABC 之間（不在正△ABC 上），此截圓大於正八面體一面的外接圓。因此，我們只消得知球心 O 到正△ABC 的距離和半徑的比值，即可求出機率，如下圖。




令正八面體邊長=a Λ 球心 O 到正△ABC 的距離=r

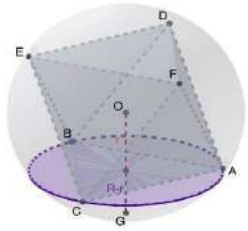
由上述可知正八面體外接球半徑為$\frac{\sqrt{2}a}{2}$

四面體 A-OBC 體積= $\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OA}}{6} = \frac{r\triangle ABC}{3}$

$$\frac{\sqrt{2}a^3}{24} = \frac{\sqrt{3}a^2 r}{12}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}a}{6}$$

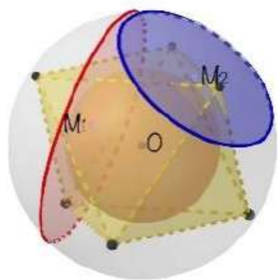
$$\because \frac{r}{R} = \frac{\frac{\sqrt{6}a}{6}}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$




法二：隨機圓心法：球 O 內隨機取一點 M，連接$\overline{MO}$，過 M 做一平面垂直$\overline{MO}$，與球交會處為一圓，且 M 為圓之圓心，如圖。

顯而易見地，當 M 在內切球內，圓 M 大於正八面體一面的外接圓。且除球心外，球內每一點皆對應一截圓。但是因為球內隨機一點恰選到球心之機率趨近於 0，故不須考慮球心。

由上述可知內切球和外接球半徑比值為$\frac{\sqrt{3}}{3}$




∵正八面體內切球半徑為外接球的$\frac{\sqrt{3}}{3}$

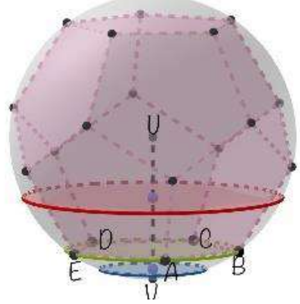
∴體積為$(\frac{\sqrt{3}}{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$倍

∴隨機一截圓大於球內接正八面體一面的外接圓的機率為$\frac{\sqrt{3}}{9}$

圖形四：正十二面體

法一：隨機半徑垂直面法：隨機作一半徑垂直面，即為所求之截圓。

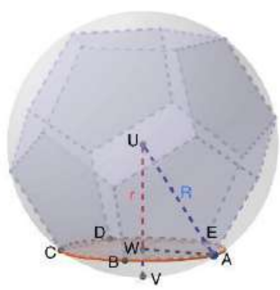
WLOG 假設此截圓平行正十二面體一面，則此半徑垂直此截圓與正十二面體一面，如圖。




顯而易見地，當此截圓垂直半徑$\overline{UV}$於球心 U 和正五邊形 ABCDE 之間（不在正五邊形 ABCDE 上），此截圓大於正十二面體一面的外接圓。因此，我們只消得知球心 U 到正五邊形 ABCDE 的距離和半徑的比值，即可求出機率。

$$r = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a)^2 - (\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}a)^2} = \frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a$$

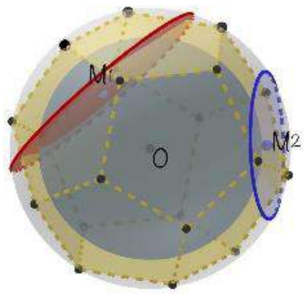
$$\because \frac{r}{R} = \frac{\frac{\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{20}a}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a} = \frac{5\sqrt{150+66\sqrt{5}} - \sqrt{750+330\sqrt{5}}}{60} = \frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$$



∴隨機一截圓大於球內接正十二面體一面的外接圓的機率為$\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$

法二：隨機圓心法：球 O 內隨機取一點 M，連接$\overline{MO}$，過 M 做一平面垂直$\overline{MO}$，與球交會處為一圓，且 M 為圓之圓心，如圖。

顯而易見地，當 M 在內切球內，圓 M 大於正十二面體一面的外接圓。且除球心外，球內每一點皆對應一截圓。但是因為球內隨機一點恰選到球心之機率趨近於 0，故不須考慮球心。




由上述可知內切球和外接球半徑比值為$\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$

∵正十二面體內切球半徑為外接球的$\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$

∴體積為$(\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15})^3=\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$倍

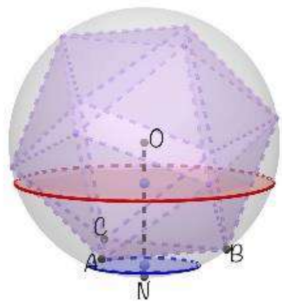
∴隨機一截圓大於球內接正十二面體一面的外接圓的機率為

$\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$

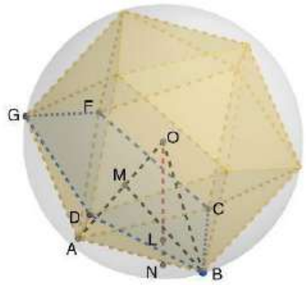
圖形五：正二十面體

法一：隨機半徑垂直面法：隨機作一半徑垂直面，即為所求之截圓。

WLOG 假設此截圓平行正二十面體一面，則此半徑垂直此截圓與正二十面體一面，如圖。




顯而易見地，當此截圓垂直半徑$\overline{ON}$於球心 O 和正△ABC 之間（不在正△ABC 上），此截圓大於正二十面體一面的外接圓。因此，我們只消得知球心 O 到正△ABC 的距離和半徑的比值，即可求出機率，如下圖。




$$r=\sqrt{R^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a)^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a$$

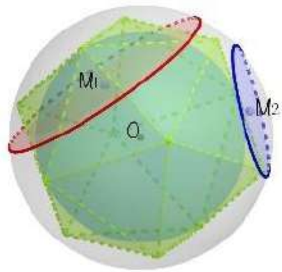
$$\because \frac{r}{R}=\frac{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}a}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a}=\frac{3\sqrt{150-30\sqrt{5}}+5\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{60}=\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$$

∴隨機一截圓大於球內接正二十面體一面的外接圓的機率為$\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$

法二：隨機圓心法：球 O 內隨機取一點 M，連接$\overline{MO}$，過 M 做一平面垂直$\overline{MO}$，與球交會處為一圓，且 M 為圓之圓心，如下圖。

顯而易見地，當 M 在內切球內，圓 M 大於正二十面體一面的外接圓。且除球心外，球內每一點皆對應一截圓。但是因為球內隨機一點恰選到球心之機率趨近於 0，故不須考慮球心。

由上述可知內切球和外接球半徑比值為$\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$




$\because$正二十面體內切球半徑為外接球的$\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$

$\therefore$體積為$(\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15})^3=\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$倍

$\therefore$隨機一截圓大於球內接正二十面體一面外接圓的機率為$\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$

| 隨機對象 / 多面體 | 隨機半徑垂直面 | 隨機圓心 | 隨機直徑 |
|---|---|---|---|
| 正四面體 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 正方體 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{9}$ | 略 |
| 正八面體 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{9}$ | 略 |
| 正十二面體 | $\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$ | $\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$ | 略 |
| 正二十面體 | $\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$ | $\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$ | 略 |

問題六：悖論發生的原因

伯特蘭在自己著作中的解釋是這些方法對機率分配（隨機對象）的理解不同，題目並沒有指明是哪一個量的機率分配，故導致此題有多個解。

# 陸、結論

1. 將原問題中的正三角形替換為其他正多邊形，悖論依然發生。而且正 n 邊形隨機半徑垂直線法、隨機中點法和隨機端點法通式分別為$cos\frac{180°}{n},cos^2\frac{180°}{n},\frac{n-2}{n}$

2. 使用推廣後的隨機端點法選擇弦時可以透過改變$\frac{R}{r}$構造連續函數，在範圍內任意產生無限多種機率。

3. 悖論也發生在立體空間，隨機一弦大於球內接凸正多面體邊長和隨機一截圓大於球內接正多面體一面的外接圓的機率如表格所示

# 柒、未來展望

1. 將推廣後的隨機端點法延伸至立體
2. 檢查悖論是否發生在四維空間

# 捌、參考資料

[1]約瑟・伯特蘭：機率計算(Joseph Bertrand: Calcul des probabilités)

[2]神奇的伯特蘭悖論：一道概率題竟然有三個不同的答案！

[3]伯特蘭悖論 Bertrand's Paradox (with 3blue1brown) - Numberphile

[4]中華民國第 60 屆中小學科學展覽會國中組數學 030413 足球有多圓－多面體的表面積與體積探究（學校名稱：臺中市立清水國民中學；作者：陳熹、洪偉晉、蕭羽希；指導老師：洪嘉祥、王永賢）

## 【評語】030414

此作品探討幾何機率中的伯特蘭悖論問題，提出在正多邊形、正面體體及球內凸正多面體，歸納出其中的規律，進而將對應的解法推廣到可以在範圍內任意產生無限多種機率值。對於正 n 邊形的探討作者們提出"推廣後的隨機端點法"，得到另一種一般化的答案。基本上伯特蘭悖論（Bertrand paradox）主要是因為在不同的機率測度空間上考慮同一事件，會得到不同的機率值。此作品利用目前所學到的數學工具來探究此相關悖論主題。然而，往後若能加入含機率測度論等數學相關工具來進一步探討緣由，定能更加深研究內容。

# 作品簡報

# 伯特蘭悖論

## 摘要：（本研究所用之圖形皆為自行繪製）

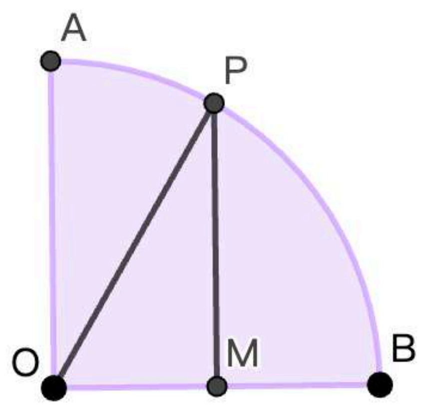
1889年，約瑟．伯特蘭(Joseph Bertrand)展示了以下問題：「圓內隨機一弦大於圓內接正三角形邊長機率為何？」並提出三種解法，而每一種解法都分別得到不同的答案。我們發現其他正多邊形也有類似情況，歸納出其中的規律，並且將伯特蘭的解法推廣為第四種，這種解法可以在範圍內任意產生無限多種機率。接著推廣到立體空間中探討，也同樣發生悖論，這些不一致的情況蓋提議敘述不清所致。


## 壹、研究動機

何謂悖論？我們可以從這個簡單的例子談起。如圖，$\angle AOP=30°\wedge\angle BOP=60°\wedge\overline{PM}\perp\overline{OB}$ 隨機做一$\overline{OB}$垂線，則此垂線和$\overline{OM}$相交的機率為何？

法一：過$\overline{OB}$上隨機一點作垂線。此題解為 $\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{1}{2}$

法二：過$\widehat{AB}$上隨機一點作垂線。此題解為 $\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}=\frac{1}{3}$




像這樣一題的兩個解法分別帶來不同的答案，我們把這種不一致的情況稱為「悖論」。再來看以下問題「隨機一弦大於圓內接正三角形邊長機率為何？」[1] [2] [3] 這題看似平凡的機率題，竟然能由多種不同的計算方法得出不同的答案，檢查後卻驚覺計算過程無誤。究竟為什麼一個題目可以得出多個正確答案呢？即便過了一百多年，這仍然是個耐人尋味又值得深思的問題。

## 貳、研究目的

目的一：將伯特蘭悖論推廣至其他正多邊形或立體空間。
目的二：尋找產生無限多種機率的方法。
目的三：歸納推廣後的規律。
目的四：探討可能導致伯特蘭悖論發生的原因。

## 參、研究器材

紙筆、尺規、電腦、計算機、GeoGebra

## 肆、問題討論

- 隨機一弦大於圓內接正三角形邊長的機率為何？
- 有沒有其他可能的答案？
- 隨機一弦大於圓內接其他正多邊形邊長的機率為何？
- 隨機一弦大於球內接各種凸正多面體邊長的機率為何？
- 隨機一截圓大於球內接各種凸正多面體一面的外接圓之機率為何？
- 為什麼會產生悖論？

## 伍、研究內容

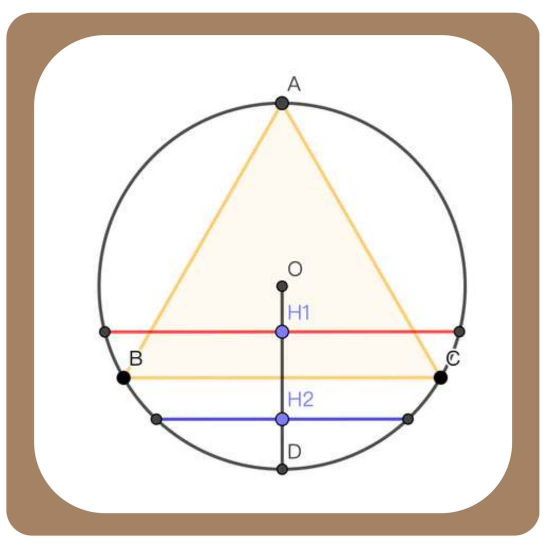
### 正三角形之討論 / 正n邊形之討論

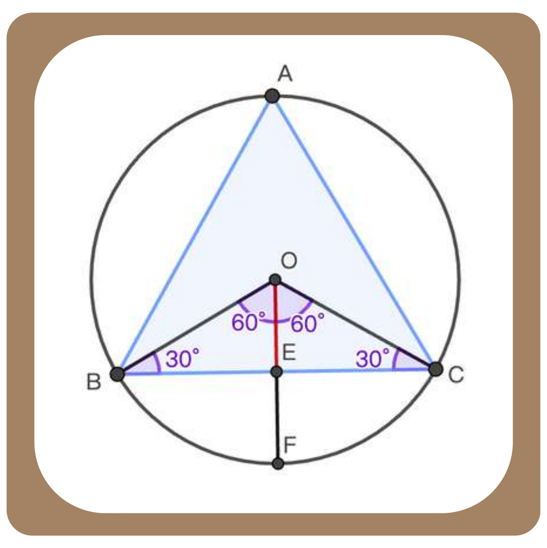
#### 隨機半徑垂直線法

**正三角形之討論**

定義：隨機作一半徑垂直線，即為所求之弦

推導：WLOG假設此弦平行正三角形一邊，則此半徑垂直弦與正三角形一邊，如圖。當此弦垂直半徑$\overline{OD}$於圓心和正三角形一邊$\overline{BC}$之間(不在$\overline{BC}$上)，則此弦>正△ABC一邊$\overline{BC}$。因此我們只需要得知圓心O到正三角形一邊的距離與半徑的比值，即可求出機率為 $\frac{1}{2}$。




**正n邊形之討論**

WLOG假設此弦平行正n邊形一邊，則此半徑垂直弦與正n邊形一邊。若此弦垂直半徑於圓心和圓內接正n邊形一邊之間，此弦長度>正n邊形一邊，因此我們只需要知道圓心與圓內接正n邊形一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

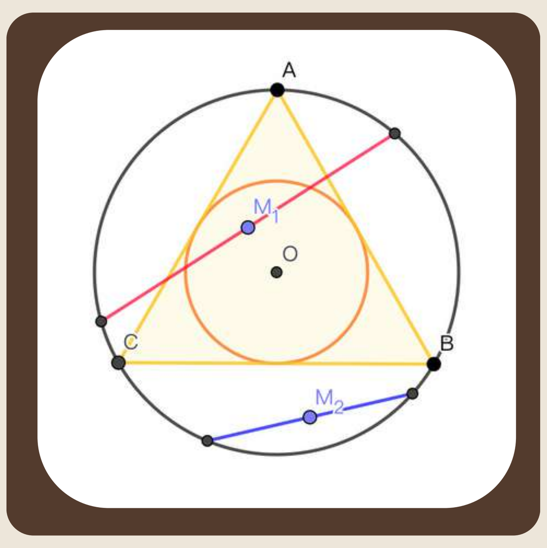
連接圓心和圓內接正n邊形一邊的一端點可得一半徑，且和原半徑夾 $\frac{\frac{360°}{n}}{2}=\frac{180°}{n}$，所以圓心與圓內接正n邊形一邊的距離為半徑的$\cos\frac{180°}{n}$，因此隨機一弦長度>圓內接正n邊形邊長機率為 $\cos\frac{180°}{n}$。

#### 隨機中點法

**正三角形之討論**

定義：圓內隨機取一點作為弦之中點。

作法：圓O內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M作之垂線交圓於D、E，即為所求之弦，且M為中點，如圖。




推導：當M在正△ABC的內切圓內，此弦>正△ABC邊長。因此，隨機一弦大於圓內接正三角形邊長的機率為內切圓和外接圓之面積比值。根據上述可知內切圓和外接圓半徑比值為 $\frac{1}{2}$。

∵正三角形內切圓的半徑是外接圓的 $\frac{1}{2}$

∴面積為$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$倍

∴隨機一弦大於圓內接正三角形邊長之機率為 $\frac{1}{4}$

**正n邊形之討論**

當此點位於正n邊形內切圓內，弦長度>正n邊形邊長。因此，隨機一弦大於圓內接正n邊形邊長的機率為內切圓和外接圓之面積比值。由上述可知正n邊形內切圓和外接圓半徑比值為 $\cos\frac{180°}{n}$。

∵正n邊形內切圓的半徑為外接圓的 $\cos\frac{180°}{n}$

∴面積為$\cos^2\frac{180°}{n}$倍

∴隨機一弦長度>圓內接正n邊形邊長機率為 $\cos^2\frac{180°}{n}$

#### 隨機端點法

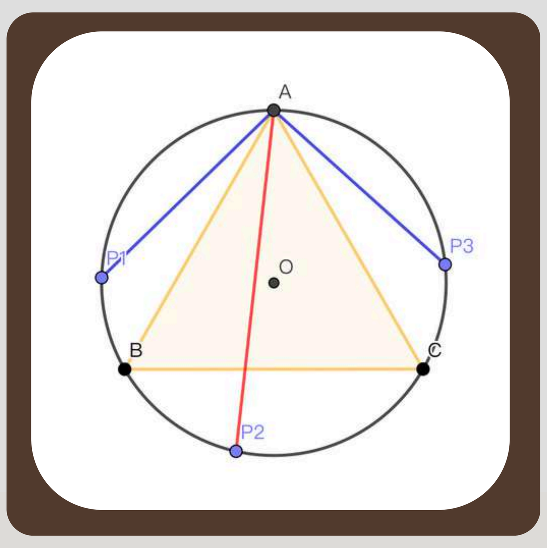
**正三角形之討論**

定義：在圓上隨機取2點作為弦的2端點。

推導：WLOG假設其中一端點在正△ABC頂點A上，如圖。當另一端點P落在$\widehat{BC}$上，則$\overline{AP}$>正△ABC邊長。

∵$\widehat{BC}=\frac{1}{3}$圓周

∴隨機一弦大於圓內接正三角形邊長之機率為 $\frac{1}{3}$。




**正n邊形之討論**

正n邊形每邊皆對應一等弧，這n個等弧恰構成正n邊形的外接圓。WLOG假設其中一端點在正n邊形頂點上，則若另一端點在此頂點相鄰兩邊對應之優弧上(亦即此端點在另外n-2個優弧上)，此弦>正n邊形邊長 $\frac{n-2}{n}$

∵這n-2個優弧圓周=$\frac{n-2}{n}$圓周

∴隨機一弦長度>圓內接正n邊形邊長機率為 $\frac{n-2}{n}$

| 隨機對象 / 多邊形 | 隨機半徑垂直線法 | 隨機中點法 | 隨機端點 | 推廣後的隨機端點 |
|---|---|---|---|---|
| 正三角形 | $\frac{1}{2}=0.500$ | $\frac{1}{4}=0.250$ | $\frac{1}{3}\approx0.333$ | $\dfrac{\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |
| 正方形 | $\frac{\sqrt{2}}{2}\approx0.707$ | $\frac{1}{2}=0.500$ | $\frac{1}{2}=0.500$ | $\dfrac{\frac{\pi}{4}-arcsin\frac{\sqrt{2}q-2\sqrt{2}}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |
| 正五邊形 | $\cos 36°\approx0.809$ | $\cos^2 36°\approx0.655$ | $\frac{3}{5}=0.600$ | $\dfrac{\frac{3\pi}{10}-arcsin\frac{(q-2)sin\frac{3\pi}{10}}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |
| 正n邊形 | $\cos\frac{180°}{n}$ | $cos^2\frac{180°}{n}$ | $\frac{n-2}{n}$ | $\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)-arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$ |

# Summary & Generalization

## 隨機端點法之推廣

推廣後的隨機端點法：隨機在半徑為r的圓$O_1$上取一點P，過其作直徑$\overline{PT}$。過T作半徑為R之圓$O_2, R \geq r$，使兩圓內切或重合。過P作切線交圓$O_2$於D、E，將大圓截成兩弧。在$\widehat{DTE}$上隨機取一點Q，$\overline{PQ}$交圓$O_1$於R，$\overline{PR}$即為所求之弦。

### (1)正三角形

WLOG假設P與正三角形一頂點A重合，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$分別交圓$O_2$於F、G。當Q在$\widehat{FG}$上，則R在$\widehat{BC}$上。此時$\overline{PR}$ >正三角形一邊。

$\frac{R}{r} = q, q \geq 1$

$\angle AO_2D = arccos\frac{\overline{AO_2}}{\overline{DO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{q-2}{q}$

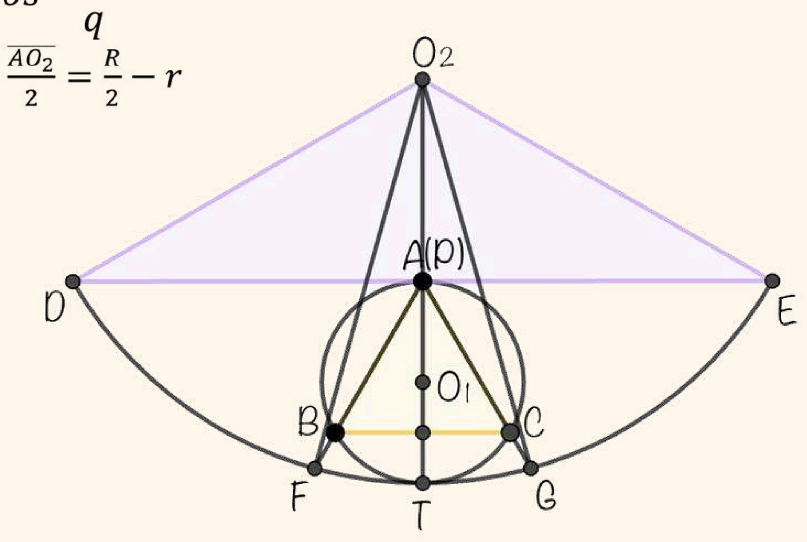
$\therefore \triangle AHO_2$為30°-60°-90°三角形 → $\overline{O_2H} = \frac{\overline{AO_2}}{2} = \frac{R}{2} - r$

$\angle O_2FH = arcsin\frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_2F}} = arcsin\frac{\frac{R}{2}-r}{R} = arcsin\frac{q-2}{2q}$

$\angle FO_2A = \frac{\pi}{6} - \angle O_2FH = \frac{\pi}{6} - arcsin\frac{q-2}{2q}$

$\frac{\widehat{FG}}{\widehat{DTE}} = \frac{\angle FO_2G}{\angle DO_2E} = \frac{\angle FO_2A}{\angle AO_2D} = \frac{\frac{\pi}{6} - arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

$\therefore$所求機率為 $\frac{\frac{\pi}{6}-arcsin\frac{q-2}{2q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

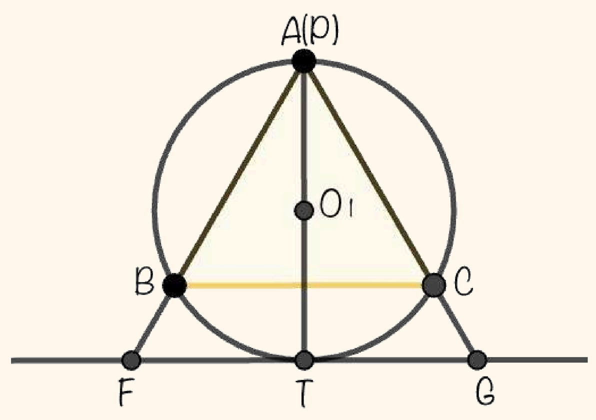



$\frac{R}{r} \to \infty$

$\widehat{DTE}$變成一條直線，當Q在$\overline{FG}$上，則R在$\widehat{BC}$上，此時$\overline{PR}$ >正三角形一邊

如圖所示，直線的長度是無限的，而$\overline{FG}$的長度有限，因此機率趨近於0

也可以用極限作為驗證。




### (2)正n邊形

WLOG假設P與正n邊形一頂點$V_1$重合，$\overrightarrow{V_1V_2}, \overrightarrow{V_1V_n}$分別交圓$O_2$於C、D。當Q在$\widehat{CD}$上，則R在$V_2\widehat{V_3 \ldots\ldots}V_n$上。由前述可知，此時$\overline{PR}$ >正n邊形一邊。

$\frac{R}{r} = q, q \geq 1$

$$\angle V_1O_2A = arccos\frac{\overline{V_1O_2}}{\overline{AO_2}} = arccos\frac{R-2r}{R} = arccos\frac{q-2}{q}$$

作$\overline{O_2H} \perp \overrightarrow{CV_1}$交$\overrightarrow{CV_1}$於H

$$\because \angle O_2V_1H = \angle CAT = 90° - \frac{180°}{n} \wedge \angle V_1HO_2 = 90°$$

$$\therefore \overline{O_2H} = (R-2r)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$\angle CO_2V_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) - \angle HCO_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) - arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)}{q}$$

$$\because \frac{\widehat{CD}}{\widehat{ATB}} = \frac{\angle CO_2D}{\angle AO_2B} = \frac{\angle CO_2V_1}{\angle AO_2V_1} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) - arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$$

$\therefore$隨機一弦大於圓內接正n邊形一邊的機率為 $\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)-arcsin\frac{(q-2)sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)}{q}}{arccos\frac{q-2}{q}}$

## 立體線段

| 隨機對象 / 多面體 | 隨機半徑垂直線法 | 隨機中點法 | 隨機端點法 |
|---|---|---|---|
| 正四面體 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$≈0.577 | $\frac{\sqrt{3}}{9}$≈0.192 | $\frac{1}{6}$≈0.167 |
| 正方體 | $\frac{\sqrt{6}}{3}$≈0.816 | $\frac{2\sqrt{6}}{9}$≈0.544 | $\frac{2}{3}$≈0.667 |
| 正八面體 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$≈0.707 | $\frac{\sqrt{2}}{4}$≈0.354 | $\frac{1}{2}$=0.500 |
| 正十二面體 | $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$≈0.934 | $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{9}$≈0.815 | $\frac{3-\sqrt{2}}{3}$≈0.529 |
| 正二十面體 | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}$≈0.688 | $\frac{\sqrt{85+38\sqrt{5}}}{40}$≈0.326 | $\frac{20+\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{20}$≈0.855 |

## 立體截面

對偶多面體

| 隨機對象 / 多面體 | 隨機半徑垂直面法 | 隨機圓心法 | 隨機直徑法 |
|---|---|---|---|
| 正四面體 | $\frac{1}{3}$≈0.333 | $\frac{1}{27}$≈0.037 | $\frac{1}{9}$≈0.111 |
| 正方體 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$≈0.577 | $\frac{\sqrt{3}}{9}$≈0.192 | $\frac{1}{3}$≈0.333 |
| 正八面體 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$≈0.577 | $\frac{\sqrt{3}}{9}$≈0.192 | $\frac{1}{3}$≈0.333 |
| 正十二面體 | $\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$≈0.797 | $\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$≈0.502 | $\frac{5+2\sqrt{5}}{15}$≈0.631 |
| 正二十面體 | $\frac{\sqrt{75+30\sqrt{5}}}{15}$≈0.797 | $\frac{\sqrt{255+114\sqrt{5}}}{45}$≈0.502 | $\frac{5+2\sqrt{5}}{15}$≈0.631 |

## 悖論發生的原因

為什麼會產生悖論?合理的解釋是這些方法對機率分配（隨機對象）的理解不同，題目並沒有指明是哪一個量的機率分配，故導致此題有多個解。

## 陸、結論

1.將原問題中的正三角形替換為其他正多邊形，悖論依然發生。而且正n邊形隨機半徑垂直線法、隨機中點法和隨機端點法通式分別為$\cos\frac{180°}{n}$，$cos^2\frac{180°}{n}$，$\frac{n-2}{n}$

2.使用推廣後的隨機端點法選擇弦時可以透過改變$\frac{R}{r}$構造連續函數，在範圍內任意產生無限多種機率。

3.悖論也發生在立體空間，隨機一弦大於球內接凸正多面體邊長和隨機一截圓大於球內接正多面體一面的外接圓的機率如表格所示

## 參考資料


[1]約瑟．伯特蘭：機率計算(Joseph Bertrand: Calcul des probabilités)

[2]神奇的伯特蘭悖論：一道概率題竟然有三個不同的答案！（來源——Youtube頻道：李永樂）

[3]伯特蘭悖論Bertrand's Paradox (with 3blue1brown) - Numberphile

[4]中華民國第60屆中小學科學展覽會國中組數學030413足球有多圓－多面體的表面積與體積探究（學校名稱：臺中市立清水國民中學；作者：陳熹、洪偉晉、蕭羽希；指導老師：洪嘉祥、王永賢）

如附圖，令正四面體邊長=a

$\overline{DE}$ 垂直△ABC於H

∵H為△ABC之外心∧△ABC為正△

∴H為△ABC之重心和垂心

∴$\overleftrightarrow{AH} \perp \overline{BC}$ 於F∧$\overline{AH} = \frac{2\overline{AF}}{3}$

$$\overline{AH} = \frac{2\overline{AF}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}a}{3}$$

連結 $\overline{OA}$，得$\overline{OA} = \overline{OD} = \overline{OE}$，令其=R

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + (\overline{DH} - \overline{OD})^2$$

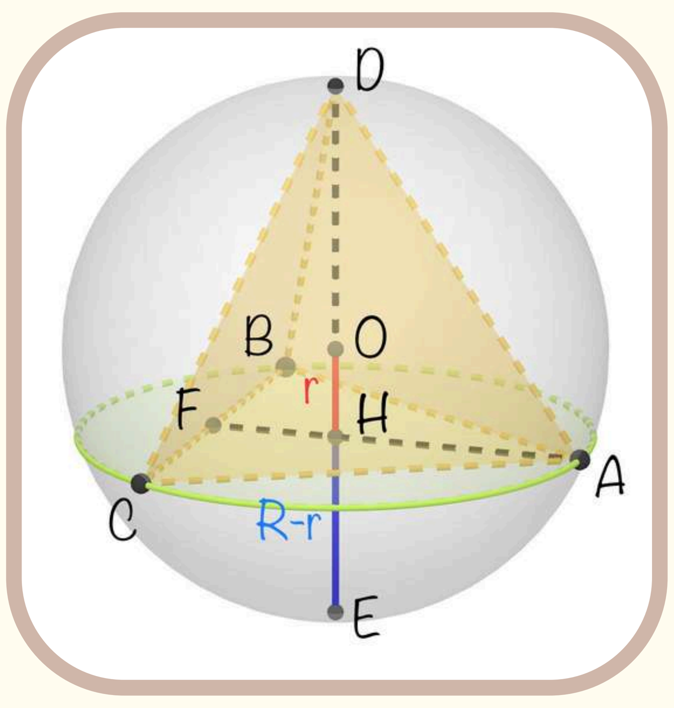
$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}a}{3} - R\right)^2$$

$$R = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

令 $\overline{OH} = r$

$$\overline{OH} = \overline{DH} - \overline{OD}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}a}{3} - \frac{\sqrt{6}a}{4} = \frac{\sqrt{6}a}{12}$$




## 隨機半徑垂直線法

定義：隨機作一半徑垂直線，即為所求之弦。

推導：WLOG假設此半徑垂直正四面體一邊，當弦$\overline{GJ}$ 垂直半徑$\overline{OE}$於球心和正四面體一邊$\overline{AB}$之間時(不在其上)，則弦$\overline{GJ}$>正四面體一邊$\overline{AB}$。因此，我們只需要得知球心O到正四面體一邊的距離和半徑的比值，即可求出機率。

$\overline{OE}$交$\overline{AB}$於F，連接圓心O和正四面體兩頂點A、B，a為正四面體邊長

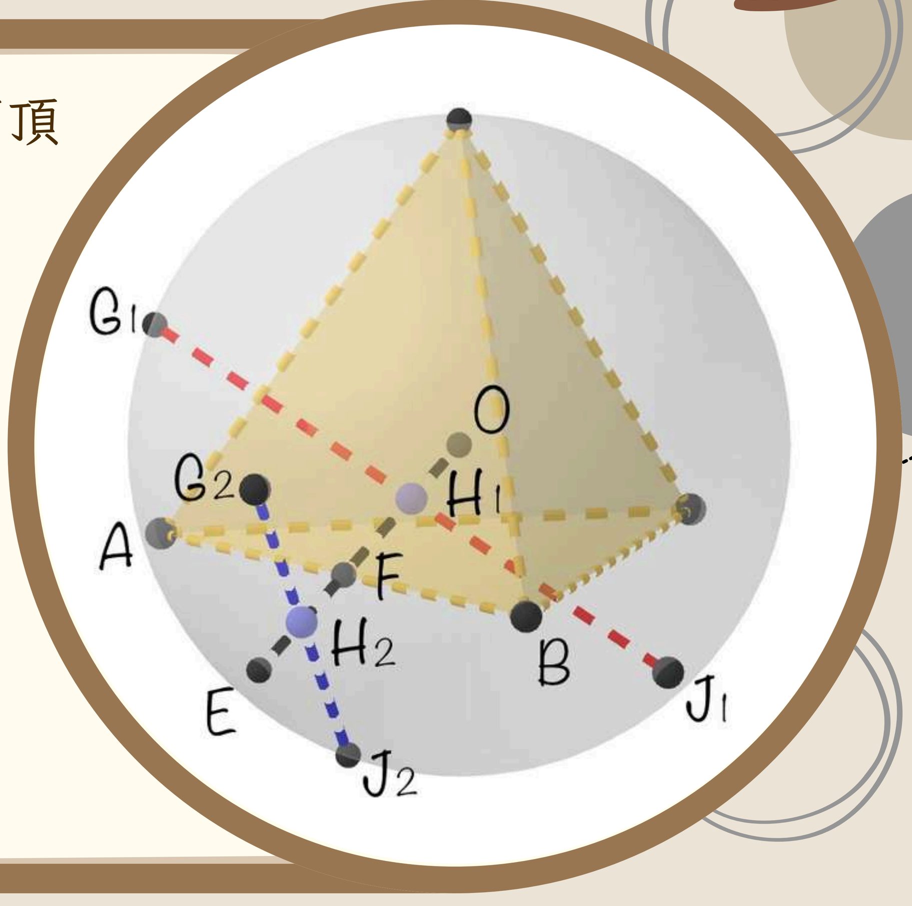
∵ $\overline{OA} = \overline{OE} = \overline{OB}$ =正四面體外接球半徑

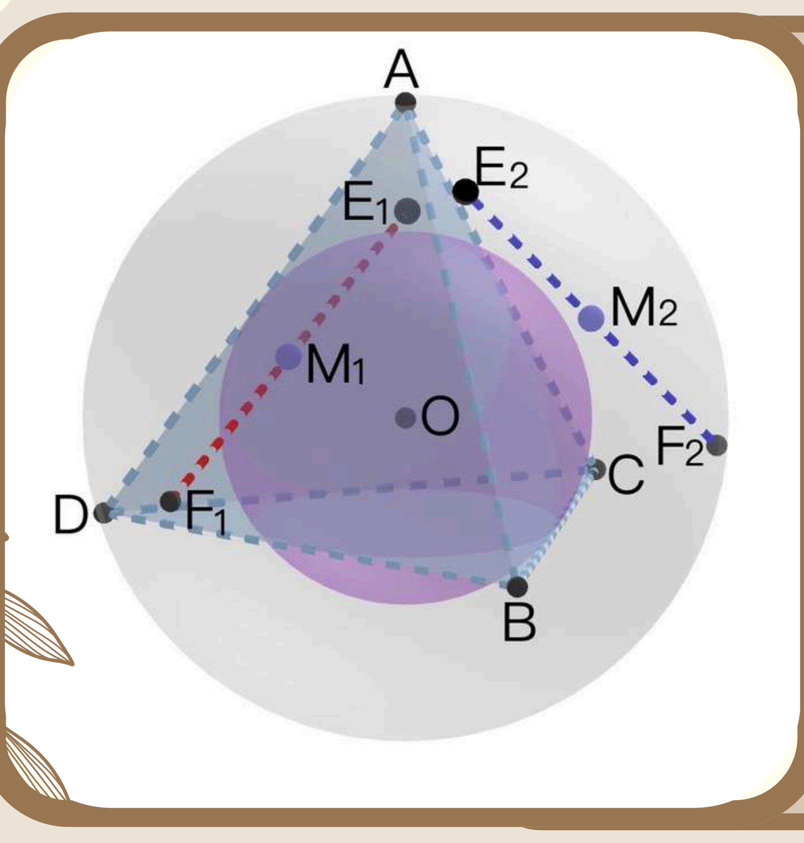
$R = \frac{\sqrt{6}a}{4} \wedge \overline{AF} = \overline{BF} = \frac{a}{2}$

$$\therefore \overline{OF} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$$

$$\because \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{\sqrt{6}a}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

∴隨機一弦大於球內接正四面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{3}}{3}$




## 隨機中點法

定義：在球內隨機取一點作為弦之中點。

作法：球O內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M隨機做$\overline{MO}$之垂線交圓於E、F，$\overline{EF}$即為所求之弦，且M為$\overline{EF}$中點。

推導：當M在正四面體六邊所切之球內，弦>正四面體邊長。因此，隨機一弦大於球內接正四面體邊長的機率為正四面體四邊所切之球和外接球之體積比值。

根據上述可知兩球半徑比值為 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

∵正四面體六邊所切之球的半徑是外接球的$\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴體積為$(\frac{\sqrt{3}}{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$倍

∴隨機一弦大於球內接正四面體邊長之機率為$\frac{\sqrt{3}}{9}$

## 隨機端點法

定義：在球面上隨機取兩點作為弦之兩端點。

推導：WLOG假設其中一端點在正四面體的一頂點A上，當另一端點M落在以對面正△BCD外接圓為底的球冠上，則$\overline{AM}$>正四面體邊長。因此，機率即為此球冠表面積和外接球表面積之比值。

由計算可知球冠表面積$S = 2\pi RH$ ，其中正四面體外接球半徑$R = \frac{\sqrt{6}a}{4}$；正四面體內切球半徑$= \frac{\sqrt{6}a}{12}$

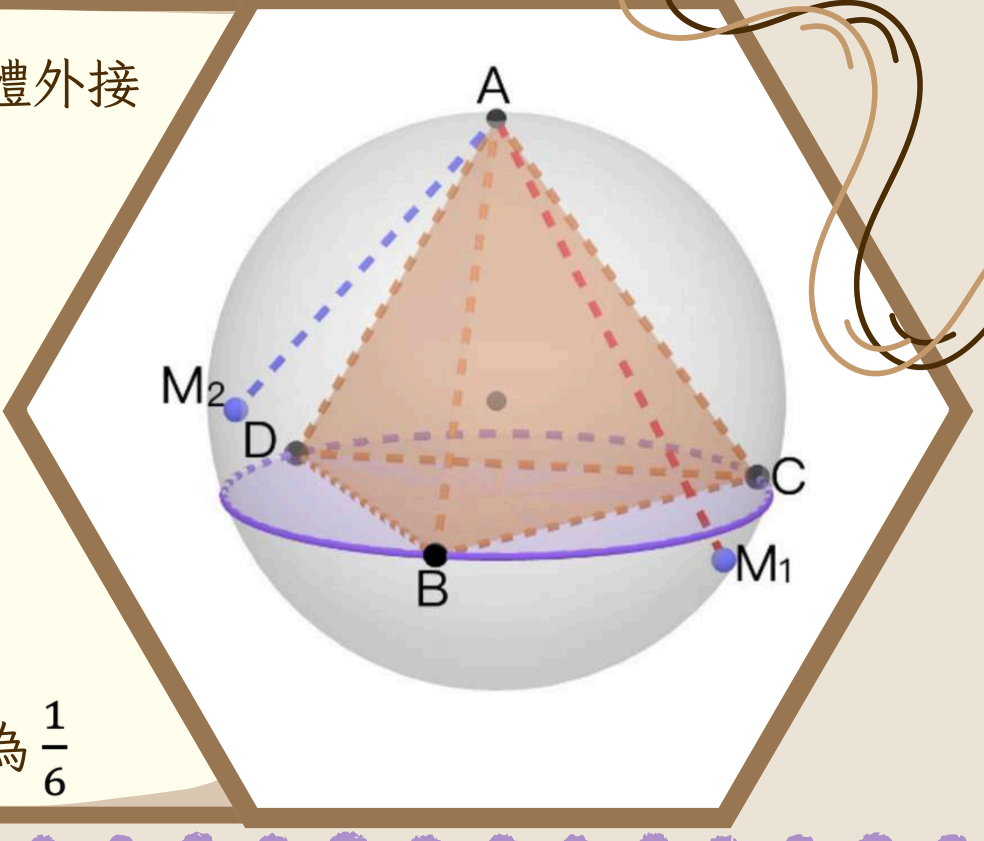
$$H = \frac{\sqrt{6}a}{4} - \frac{\sqrt{6}a}{12} = \frac{\sqrt{6}a}{6}$$

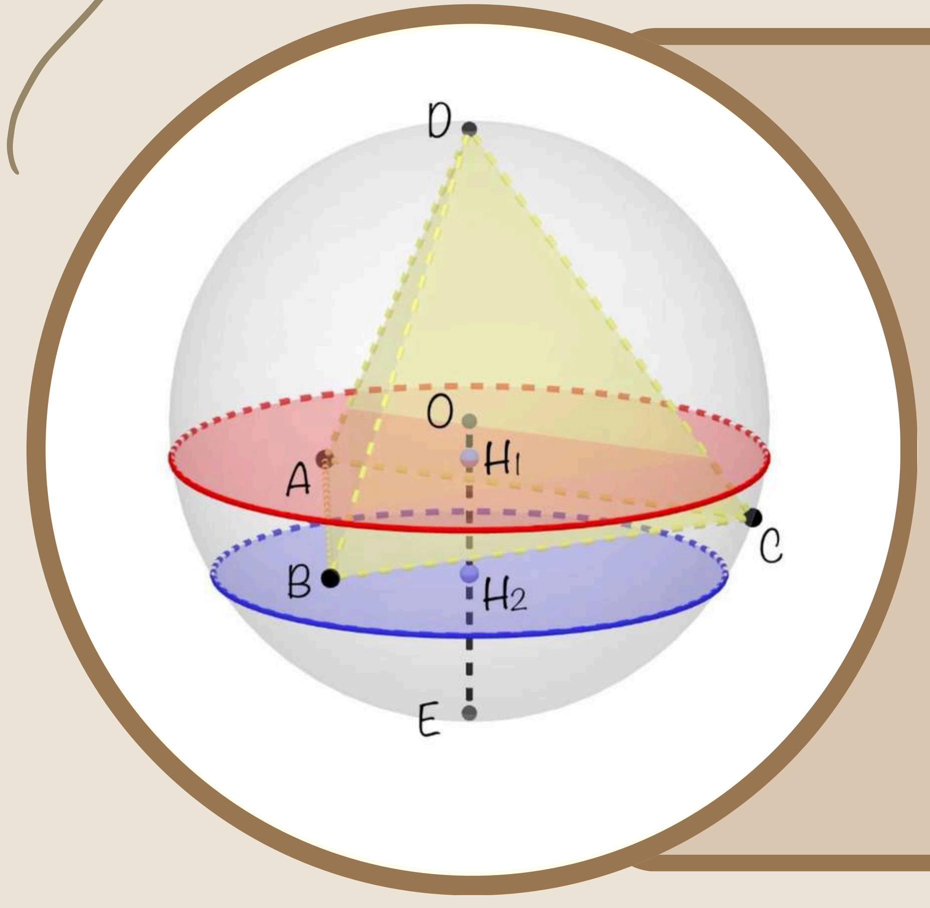
$$2\pi RH = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{6}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{12} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$4\pi R^2 = \frac{3\pi a^2}{2}$$

$$\because \frac{2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{\frac{\pi a^2}{4}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \frac{1}{6}$$

∴隨機一弦大於球內接正四面體邊長之機率為 $\frac{1}{6}$




## 隨機半徑垂直面法

定義：隨機作一半徑垂直面，和球交會之處即為所求之截圓。

推導：WLOG假設此截圓平行正四面體一面。當此截圓垂直半徑於球心O和△ABC之間（不在△ABC上），此截圓大於正四面體一面所截之截圓。因此，我們只需要得知球心O到△ABC的距離和半徑的比值，即可求出機率。

$$\because \frac{\overline{OH}}{\overline{OE}} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{\sqrt{6}a}{12}}{\frac{\sqrt{6}a}{4}} = \frac{1}{3}$$

∴隨機一截圓大於球內接正四面體一面的外接圓的機率為$\frac{1}{3}$

## 隨機圓心法

定義：在球內隨機取一點作為截圓之圓心

作法：球O內隨機取一點M，連接$\overline{MO}$，過M做一平面垂直$\overline{MO}$，與球交會處為一圓，且M為圓之圓心。

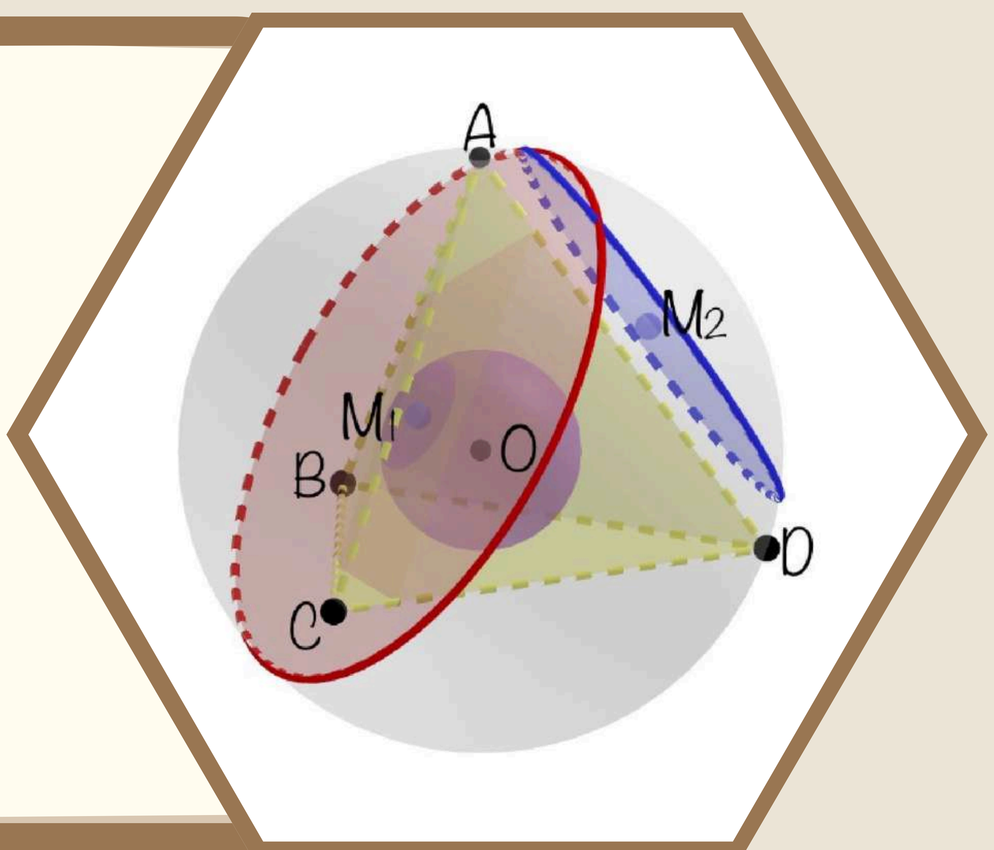
推導：當M在內切球內，圓M大於正四面體一面所截之截圓。

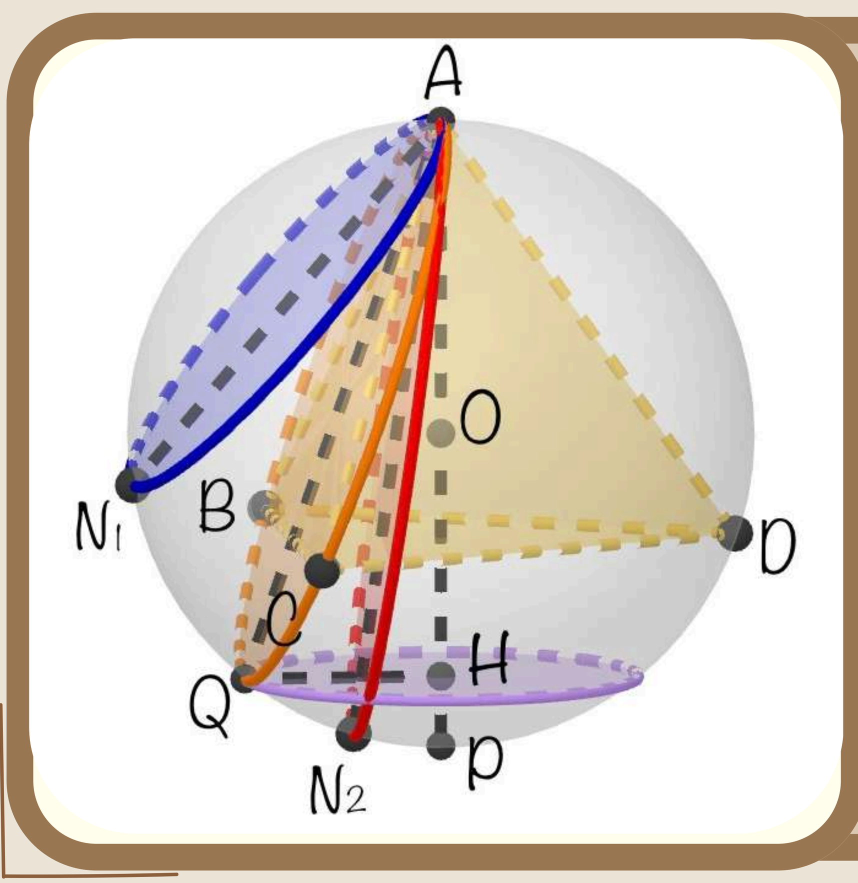
由上述可知內切球和外接球半徑比值為 $\frac{1}{3}$

∵正四面體內切球半徑為外接球的 $\frac{1}{3}$

∴體積為 $(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$ 倍

∴隨機一截圓大於球內接正四面體一面的外接圓的機率為 $\frac{1}{27}$




## 隨機直徑法

定義：在球面上隨機取2點作為截圓的直徑。

作法：在球面上隨機取2點M、N，以$\overline{MN}$為直徑作一球與球面交會處即為所求之截圓。

推導：WLOG假設M與正四面體一頂點A重合過A作△ABC外接圓直徑$\overline{AQ}$，過Q做△BCD的平行面，截出一球冠。當N在此球冠上時，截圓大於正四面體一面之外接圓，因此我們所求的就是球冠和正四面體外接球的表面積比值。

∵ $\overline{AP}$為外接球直徑∴∠AQP=90°

$\overline{QH} \perp \overline{AP}$交$\overline{AP}$於H

∵△APQ~△QPH

∴$\frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PH}}$

令正四面體邊長=a。由前述可知，正四面體外接球直徑=$\frac{\sqrt{6}}{2}a$，正三角形外接圓直徑$= \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

$$\overline{QH} = \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{6}}{18}a \qquad \frac{2\pi RH}{4\pi R^2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{18}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{1}{9}$$

∴隨機一截圓大於球內接正四面體一面的外接圓的機率為$\frac{1}{9}$。