中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第一名

030413

飛鏢盤上的金幣

學校名稱： 新北市立永和國民中學

作者：	指導老師：
國二 郭庭華 國二 廖禹璿 國二 徐允澤	蔡承昌

關鍵詞： 等差數列、中垂線、線對稱

得獎感言

一波多折的科展奇幻之旅

這一年來經歷了許多，無數個中午、無數個公假以及無數個想破腦袋的夜晚。當得知我們榮獲第一名時，激動的情緒剎那間湧上心頭，這種感覺是難以言喻的。

剛開始找題目時，我們雜亂無章地摸索，查找了許多資料，卻遲遲無法確定方向，直到看到了學長們的作品「『金金』計較」，才決定要從此作品的另一個方向開始研究。雖然在確立了題目後一開始有相當不錯的進展，但我們在市賽前卻遇到了前所未有的困難，所幸經過了指導老師的教導及鼓勵，讓我們排除萬難，進軍全國。之後也沒有停止研究。在這期間，不僅發現了任意 m 支飛鏢平分金幣的方式，還歸納出了漂亮的 n(T_r) 定理：C_tm (m為飛鏢數,tis even)下，T_r 裡的元素數量皆為t 個；此定理在處理大數字的情況，例如16支飛鏢平分527456 袋金幣(每袋的金幣數量遞增)能確定存在完美平分法：每組內都有 32966 袋，還能找出每組的元素，十分的好用。

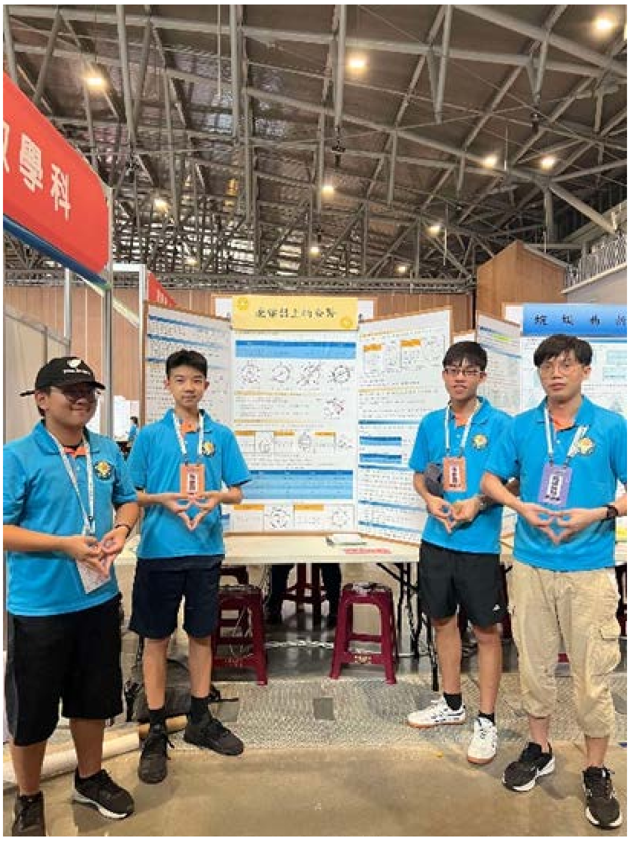
國展的過程中也遇到不少插曲。在比賽的那一周，颱風襲來，導致比賽行程不斷地被更改，最後取消了在台南的實體比賽。在得知比賽更改成線上評審後，我們並沒有就此止步，反而更加努力的練習，生怕作品會因為更改比賽方式的緣故而無法完美呈現給評審老師（雖然在正式比賽中還是遇到了網路斷線的小插曲）不過最終也排除萬難，順利獲得了第一名。

在這整個準備科展的過程中，我們學到了許多，不論是在學術方面上的精熟，亦或者是在生活方面的態度皆有所成長。在學術方面，對於幾何圖形有了更敏銳的直覺，又或者是在名詞定義上更加精熟。至於在生活方面，學到了在面對接二連三的挫折時(比如練習用海報忘在會場)，如何把挫折化為自己養分，並讓自己越挫越勇。

付出的努力能獲得評審們的肯定，就是為這一整個奇幻的旅程畫上完美的句點，除了敬佩我們自己的堅持，也謝謝一路上陪伴的老師、組長和培訓老師們以

及家人們的支持。最後，感謝負責指導的承昌老師秉持教育愛精神鍥而不捨的指引方向，且不辭辛勞地在放學後以及假日繼續與我們一起研究，這段學習旅程因您的付出而更加豐富。

在飯店健身房一邊健身一邊練習



國展佈展，海報貼的很辛苦

總統府前展現教育愛

摘要

本研究是將數學遊戲進行變形，其原本是在線段上分金幣，而我們改成在圓盤上分金幣，規則如下：

在圓盤圓周上等距取 n 個點，依序在點上放置金幣袋，每一袋的金幣數都比前一袋多一枚，每枚金幣皆相等(等值)，金幣總數為 $1+2+3+\cdots+n$。兩人各丟一隻飛鏢在圓盤的相異點上(不可丟在圓周上)，離袋子最近的飛鏢拿到它所有的金幣，若金幣袋距離兩支飛鏢等距，則平分此袋內的金幣；我們想要觀察要如何丟飛鏢能讓分得的金幣數量最接近？並找出一般化的平分手法。

我們證明了在兩支飛鏢的情況下任意 n 袋金幣都可被平分、第一支飛鏢落在圓盤上的任意點皆能找到對應點來使圓盤上的金幣被平分、飛鏢的數量進行變動後依舊能找到平分法及規律。

壹、 前言

一、研究動機

我們看了全國科展第 58 屆的作品:「金金計較」，其規則是 m 袋金幣排在一線段上，每一袋金幣數都比前一袋的多 1 枚，每一枚金幣皆相等(等值/等重)，且相鄰兩袋的距離相等。接著讓兩個人站在這條直線上的相異兩點，離袋子最近的那個人可以拿到那袋所有的金幣，若兩人離同一個袋子一樣近，則他們將平分那袋金幣。他們想要探討的問題是當金幣袋數 m 為已知時，兩名或三名人到底能不能平分全部的金幣，又或者找到所有人拿到的金幣數目最為接近之方法，並找出這個問題的一般性解法，而他們利用代數的手法，將問題轉換成二次函數，並觀察函數的圖形，來找出整數的最佳解。

在此之後，我們對分金幣這個題目產生了興趣，研究的過程中，我們想到了可以在圓盤上分金幣，而且在這種情況下平分金幣的方式會有很大的不同，我們觀察了許多例子後，發現大部分的給定任意點的情況，都能找到另一點使他們平分所有的金幣，感覺有機會能找到一般化的平分方法，以及討論任意點在圓盤上能否找到另一點來平分金幣，於是在指導老師的帶領下，開始著手研究這個題目。

二、研究目的

我們想探討 m 支飛鏢能不能平分圓盤上的金幣，當金幣袋數 n 為已知時($n \in \mathbb{N}$)，我們想解決以下問題：

(一) 在圓盤上找到給定兩點之後平分金幣的分法。

(二) 2 支飛鏢找到至少一種方法平分所有的金幣。

(三) 在 2 支飛鏢的情況下，第一支飛鏢落在任意點之後皆能找到第二支飛鏢需要落的對應點來使金幣可以被平分。

(四) 3 支飛鏢找到至少一種方法平分所有的金幣。

(五) m 支飛鏢找到至少一種方法平分所有的金幣。

(六) 證明特定情況下每隻飛鏢所分到的金幣袋數會相同。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、計算機、*GeoGebra*

參、研究過程或方法

本研究中所有圖片皆為作者使用 *GeoGebra* 軟體繪製。

一、名詞定義

(一) $\boldsymbol{C_n}$：

圓周上等距取 n 個點，依序放裝有 1、2、3、…、n 枚金幣的袋子在這些點上。

(二) $\boldsymbol{P_i}$：

圓周上裝有 i 枚金幣袋子的點。

(三) $\boldsymbol{S_n}$：

C_n 時金幣的總枚數。

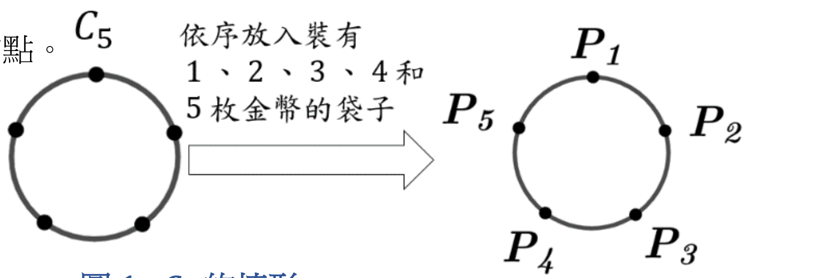


圖 1 - C_5 的情形

此時 $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

以 C_5 為例示意上述名詞 (圖1)

(四) $\boldsymbol{D_m}$：

第 m 支飛鏢在圓盤上的落點。

(五) $\boldsymbol{n(p,q)}$：

$\{\, a \mid a \equiv q\ (mod\ p)$，$a \in \mathbb{N} \,\}$

例：$n(6,3) = 6k + 3$，$k \in \mathbb{N}$

(六) **分組的寫法：**

在 m 支飛鏢的情況，會將圓盤上的金幣分成 m 組，

這 m 個集合分別記作 T_r ($1 \le r \le m$)。

為了方便表示，若集合收集的點在圓周上是連續的點，則以「～」來簡寫。

例：T_3：$\{P_5, P_6, P_7, P_8, P_{17}, P_{18}, P_{19}, P_{20}\}$ 可以簡化為 $\{P_5{\sim}P_8, P_{17}{\sim}P_{20}\}$

(七) $\boldsymbol{T_1}$：

平分時在同一組的金幣袋之金幣枚數是連續整數的組別。

例: C_6 時，T_1 就是 $\{P_3{\sim}P_4\}$。

(八) **平分點：**

當 s 支飛鏢到此點距離一樣時，點上這袋金幣內的金幣會被平分到 s 組，

(若裡面的金幣數量為 $\boldsymbol{i}$ 枚，則這 $\boldsymbol{s}$ 個人各拿 $\boldsymbol{\frac{i}{s}}$ 枚。)

我們根據有哪些組平分此袋將這些組別寫在平分點前，在兩支飛鏢的情況不特別註記。

例：P_5 被 T_4、T_5 平分，則其為 T_4、T_5 平分點，記作 $[P_5：T_4、T_5]$。

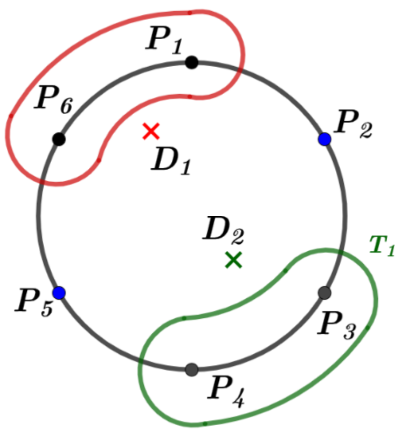
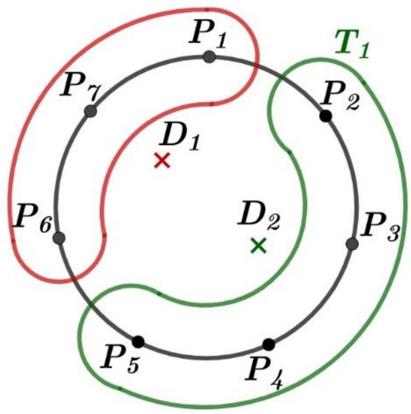
(九) $\boldsymbol{n(T_r)}$：

平分金幣時集合 T_r ($1 \le r \le m$) 中有幾個元素。

例：C_6 時，T_1為 $\{P_3{\sim}P_4\}$，$n(T_1) = 2$

以 C_6、C_7 為例示意上述名詞 (**表1**)

表 1 - C_6 和 C_7 的情形

	C_6	C_7
圓盤上平分金幣時的情況		
分組的寫法	$\{P_3 \sim P_4\}$ 和 $\{P_6 \sim P_1\}$	$\{P_2 \sim P_5\}$和 $\{P_6 \sim P_1\}$
T_1	$\{P_3 \sim P_4\}$	$\{P_2 \sim P_5\}$
$n(T_1)$	2	4
平分點	P_2 、P_5	無

二、平分金幣方式的種類

由於我們是在圓盤上任意決定 D_1 和 D_2 的位置，距離較近的金幣就給它，又離 D_1 和 D_2 一樣近的所有點會形成中垂線，而中垂線會把圓分成兩塊，離 D_1 較近的那側圓周上的金幣就都給它(如圖 2，將 D_1 和 D_2 連線，P_6 對 $\overline{D_1D_2}$ 做垂直線交於垂足點 ω，此時 P_6 、 ω 和 D_1 以及 P_6 、 ω 和 D_2 會形成兩個直角三角形，而他們共用 $\overline{P_6\omega}$ ，又 $\overline{D_1\omega}$ 比 $\overline{D_2\omega}$ 短，故此側上的點離 D_1 較近)，而 D_2 也能用相同方法證明，因中垂線最多只會跟圓周交於兩點，所以底下分成三種情況討論：

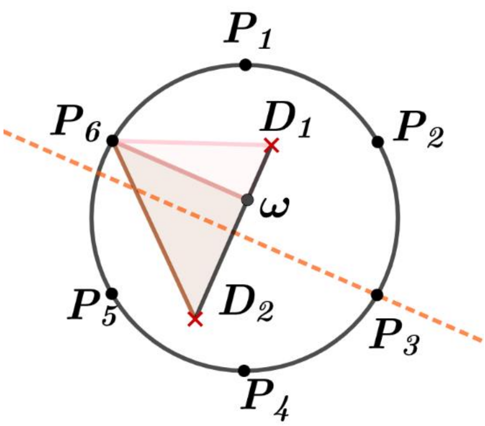


圖 2 -中垂線影響金幣歸屬

(一) 圓周與中垂線交點上的金幣袋數量為 0 ：

此時，圓周上的金幣會分布在中垂線的左右兩側(圖 3)。在 D_1 所在的弓形中所有金幣會離 D_1 較近，而 D_2 所在的弓形上的所有金幣則離 D_2 較近。

(二) 圓周與中垂線交點上的金幣袋數量為 1 ：

圓周上有一袋金幣在圓周與中垂線的交點上(圖 4)，此袋金幣會被 D_1 、 D_2 平分。在 D_1 所在弓形中的金幣會離 D_1 較近，而 D_2 所在弓形中的所有金幣則離 D_2 較近。

(三) 圓周與中垂線交點上的金幣袋數量為 2 ：

圓周上的金幣(圖 5)有兩袋金幣在圓周與中垂線的交點上，此兩袋金幣被 D_1 、 D_2 平分。在 D_1 所在弓形中的金幣會離 D_1 較近，而 D_2 所在弓形中的金幣則離 D_2 較近。

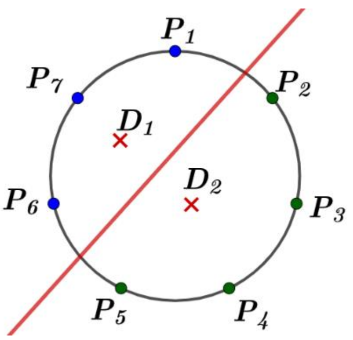


圖 3 -交點數量: 0

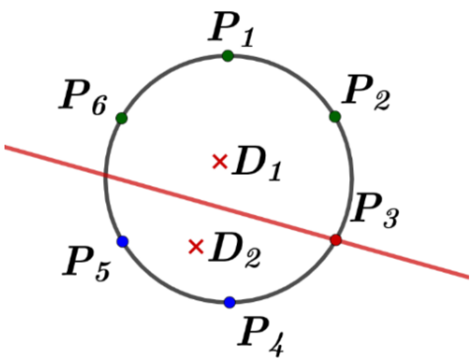


圖 4 -交點數量: 1

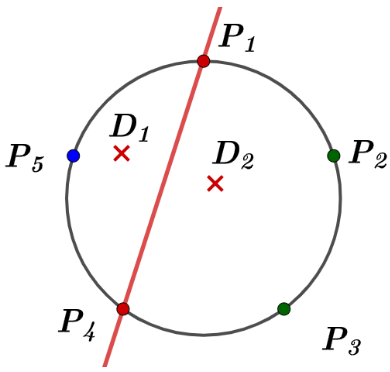


圖 5 -交點數量: 2

因為中垂線與圓盤只會有兩個交點，所以不會有平分三袋金幣以上的情況，亦即兩支飛鏢平分圓盤上金幣的狀況只有這三種可能。接下來要用這三種狀況來平分金幣。

肆、研究結果

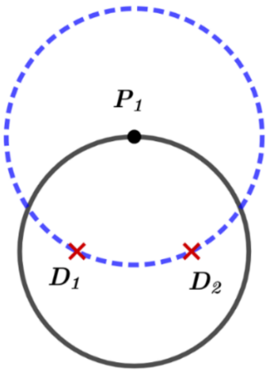
一、尋找兩支飛鏢平分金幣的方式

底下先將 C_1、C_2 的情況獨立出來討論。

(一) 平分 C_1 的方式：

在 C_1 下，不論 D_1 落在圓盤內的何處，只需以 P_1為圓心，P_1 到 D_1 為半徑畫圓，在此圓上任取在圓盤內部的一點為 D_2 即可平分金幣。

表 2 - C_1 平分方式

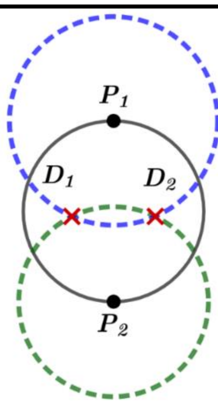
<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>C_1 的平分法：</td></tr>
<tr><td>D_1 、D_2 到 P_1 等距。
D_1 、 D_2 分別會拿到 $\frac{1}{2}$ 枚金幣</td></tr>
</table>

(二) 平分 C_2 的方式：

在 C_2 下，不論 D_1 落在圓盤內的何處，只需以為圓心， P_1 到 D_1 為半徑畫圓，再以 P_2 為圓心， P_2 到 D_1 為半徑畫圓，這兩圓的另一個交點為 D_2 即可平分金幣。

又因 P_1 和 P_2 的連線為圓的直徑，所以 D_2 必定會落在圓盤的內部。

表 3 - C_2 平分方式

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>C_2 的平分法：</td></tr>
<tr><td>D_1 、 D_2 到 P_1 、 P_2 的距離會相等。
D_1 、 D_2 分別會拿到 $\frac{3}{2}$ 枚金幣。</td></tr>
</table>

但是在 C_2 下 D_1 不能落在 $\overline{P_1P_2}$ 上，否則會無法平分。

為了之後的討論，我們利用 $mod\ 4$ 來將剩下的正整數分成四類，也就是 $n(4,1)$、$n(4,2)$、$n(4,3)$、$n(4,0)$；為了方便講解，從 $C_{n(4,3)}$ 開始討論。

(三) 平分 $C_{n(4,3)}$ 的方法：

表 4 - $n(4,3) = 4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$)的情形

k	1	2	3	4	5	6
$n(4,3) = 4k - 1$	3	7	11	15	19	23
$\frac{1}{2}S_{n(4,3)}$	3	14	33	60	95	138
T_1	$\{P_1 \sim P_2\}$	$\{P_2 \sim P_5\}$	$\{P_3 \sim P_8\}$	$\{P_4 \sim P_{11}\}$	$\{P_5 \sim P_{14}\}$	$\{P_6 \sim P_{17}\}$
$n(T_1)$	2	4	6	8	10	12

透過觀察上表，可以觀察出此分法有以下規律：

1. T_1 是 $\{P_k \sim P_{3k-1}\}$

2. $n(T_1) = 2k$

根據規律，我們得知 T_1 是 $\{P_k \sim P_{3k-1}\}$，故 T_1 這組金幣數量的總和是 $k + (k+1) + (k+2) + \cdots\cdots + (3k-1) = 4k^2 - k$，所以我們只要證明 T_1 的總和與 $\frac{1}{2}S_{n(4,3)}$ 相同即可證明此分法能將圓盤上的金幣平分。

底下證明此規律恆成立。

$Proof:$

$$k + (k+1) + (k+2) + \cdots\cdots + (3k-1) = \frac{1}{2}(4k-1)(2k)$$

$$= 4k^2 - k = \frac{1}{2}\left(\frac{4k(4k-1)}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{n(4,3)}$$，得證。

我們已經找到了處理 $C_{n(4,3)}$ 的方法，也就是平分的其中一組為 $\{P_k \sim P_{3k-1}\}$【即為 T_1 】，且 $n(T_1) = 2k$。這種方法**並非是唯一**的分法，但是為能用來找到另外三種情況的分法，接下來將利用此方法來延伸出平分 $C_{n(4,0)}$、$C_{n(4,1)}$、$C_{n(4,2)}$ 的方法。

(四) 平分 $C_{n(4,0)}$ 的方法：

表 5 - $n(4,0)=4k$ ($k\in\mathbb{N}$)的情形

k	1	2	3	4	5	6
$n(4,0)=4k$	4	8	12	16	20	24
$\frac{1}{2}S_{n(4,0)}$	5	18	36	68	105	150
T_1	$\{P_2\sim P_3\}$	$\{P_3\sim P_6\}$	$\{P_4\sim P_9\}$	$\{P_5\sim P_{12}\}$	$\{P_6\sim P_{15}\}$	$\{P_7\sim P_{18}\}$
$n(T_1)$	2	4	6	8	10	12

透過觀察上表，可以觀察出以下規律:

1. T_1 是 $\{P_{k+1}\sim P_{3k}\}$　　2. $n(T_1)=2k$

由於 $S_{n(4,0)}=S_{n(4,3)}+4k$，可推導出 $\frac{1}{2}S_{n(4,0)}=\frac{1}{2}S_{n(4,3)}+2k$，亦即只要確定此分法使得 T_1 的總和為 $\frac{1}{2}S_{n(4,3)}+2k$ 即可，利用 $C_{n(4,3)}$ 的分法來證明此規律恆成立。

$Proof$:

已知在 $C_{n(4,3)}$ 的 $n(T_1)=2k$，只要將 $C_{n(4,3)}$ 的 T_1 中的每一項都加 1 ，就會使 $C_{n(4,3)}$ 的 T_1 的總和加上 $(1\times 2k)$，也就是$4k^2+k$，正好是 $S_{n(4,0)}=8k^2+2k$ 的一半，亦即根據 $n(4,3)=4k-1$ 的分法，推導出 $n(4,0)=4k$ 的情況。

利用上述的方法可得 $C_{n(4,0)}$ 情況下的 T_1 為 $\{P_{k+1}\sim P_{3k}\}$ 且 $n(T_1)=2k$，總和為 $\frac{1}{2}S_{n(4,0)}$，與上述觀察出的規律相符。

(五) 平分 $C_{n(4,1)}$ 的方法：

表 6 - $n(4,1)=4k+1$ ($k\in\mathbb{N}$)的情形

k	1	2	3	4	5	6
$n(4,1)=4k+1$	5	9	13	17	21	25
$\frac{1}{2}S_{n(4,1)}$	7.5	22.5	45.5	76.5	115.5	162.5

T_1	$\{P_2 \sim P_3\}$	$\{P_3 \sim P_6\}$	$\{P_4 \sim P_9\}$	$\{P_5 \sim P_{12}\}$	$\{P_6 \sim P_{15}\}$	$\{P_7 \sim P_{18}\}$
平分點	P_1, P_4	P_2, P_7	P_3, P_{10}	P_4, P_{13}	P_5, P_{16}	P_6, P_{19}
$n(T_1)$	2	4	6	8	10	12

透過觀察上表，可以發現以下規律：

1. T_1 是 $\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$　　2.平分點為：P_k , P_{3k+1}　　3. $n(T_1) = 2k$

利用 $C_{n(4,0)}$ 的分法來證明此規律恆成立。

$Proof$:

使用跟 $C_{n(4,0)}$ 一樣的分法，得到 $T_1 = \{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$，而另一組是 $\{P_{3k+1} \sim P_k\}$，又 $S_{n(4,1)} = S_{n(4,0)} + (4k+1)$，故在 $C_{n(4,1)}$ 的情況下，會比 $C_{n(4,0)}$ 再多出 $4k+1$ 枚的金幣，且 $4k+1$ 會出現在 $\{P_{3k+1} \sim P_k\}$ 裡。(因為在 $k \in \mathbb{N}$ 的前提下， $4k+1 > 3k$) 這會導致 $\{P_{3k+1} \sim P_k\}$ 比 $\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$ 多了 $4k+1$ ，於是選擇將 $\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$ 中的 P_k , P_{3k+1} 提出來當平分點，這樣就可以使兩邊的金幣相等，達到平分的結果。

(六) 平分 $C_{n(4,2)}$ 的方法

表 7 - $n(4,2) = 4k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)的情形

k	1	2	3	4	5	6
$n(4,2) = 4k+2$	6	10	14	18	22	26
$\frac{1}{2}S_{n(4,2)}$	10.5	27.5	52.5	85.5	126.5	175.5
T_1	$\{P_3 \sim P_4\}$	$\{P_4 \sim P_7\}$	$\{P_5 \sim P_{10}\}$	$\{P_6 \sim P_{13}\}$	$\{P_7 \sim P_{16}\}$	$\{P_8 \sim P_{19}\}$
平分點	P_2, P_5	P_3, P_8	P_4, P_{11}	P_5, P_{14}	P_6, P_{17}	P_7, P_{20}
$n(T_1)$	2	4	6	8	10	12

透過觀察上表，可以觀察出以下規律:

1. T_1 是 $\{P_{k+2} \sim P_{3k+1}\}$　　2.平分點為: P_{k+1} , P_{3k+2}　　3.$n(T_1) = 2k$

由於 $S_{n(4,2)} = S_{n(4,1)} + 4k + 2$，可推導出 $\frac{1}{2}S_{n(4,2)} = \frac{1}{2}S_{n(4,1)} + (2k+1)$，亦即確定此分法使一組的和比 $\frac{1}{2}S_{n(4,1)}$ 多 $2k+1$ 即可。我們利用 $C_{n(4,1)}$ 的分法來證明此規律恆成立。

Proof:

已知在$C_{n(4,1)}$ 情況下的 $n(T_1) = 2k$，所以只要將 $C_{n(4,1)}$ 情況下的 T_1 中的每一項都

加 1 ，也就是 T_1 的總和加上 $(1 \times 2k)$，可得到在 $C_{n(4,2)}$ 的情況下，T_1為$\{P_{k+2} \sim P_{3k+1}\}$，

而他的總和是$(4k^2 + 3k)$。並將平分點從P_k ,P_{3k+1} 改為 P_{k+1} ,P_{3k+2} 。將平分點改

變，是為了讓平分後，其中一組多 1。

(因為 $\frac{1}{2}\{[(k+1)+(3k+2)]-[k+(3k+1)]\} = \frac{1}{2}[(4k+3)-(4k+1)] = 1$)

可得到新分組方法：平分點為: P_{k+1} ,P_{3k+2} ，T_1 為 $\{P_{k+2} \sim P_{3k+1}\}$，

此時 $\frac{1}{2}S_{n(4,1)} + (2k+1) = \frac{1}{2}S_{n(4,2)}$，故得證。底下總結兩支飛鏢下的所有情況。

表 8 - C_1 、C_2 情況以外的 C_n $(n \in \mathbb{N})$ 可套用的平分金幣方式。

圓盤狀況	$C_{n(4,1)}$	$C_{n(4,2)}$	$C_{n(4,3)}$	$C_{n(4,0)}$
T_1	$\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$	$\{P_{k+2} \sim P_{3k+1}\}$	$\{P_k \sim P_{3k-1}\}$	$\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$
平分點	P_k 、P_{3k+1}	P_{k+1} 、P_{3k+2}	無	無

至此，在兩隻飛鏢下，對於任意 C_n $(n \in \mathbb{N})$ 皆能找到至少一種的平分方法，只要將 n 依照除以 4 的餘數即可得到平分金幣的方法，也就是說先確定了完美平分手法的存在性，接下來討論圓盤上的任意位置是否都有辦法套用此法。

二、兩支飛鏢下 D_1 為圓盤上的任意一點之情況的探討

由於前面已經說明完了 C_1 和 C_2 的情況，現在只需處理剩餘的情況，分別是 $C_{n(4,1)}$ 、$C_{n(4,2)}$ 、$C_{n(4,3)}$ 、$C_{n(4,0)}$，底下將個別進行討論。

(一)　處理 D_1 在 $C_{n(4,1)}$ 圓盤上情形的方法

我們先處理 $4k+1$ 的情況，也就是 $C_{n(4,1)}$，使用平分法的方式來討論，將點分成兩組 $\{P_{k+1}\sim P_{3k}\}$ 以及 $\{P_{3k+2}\sim P_{k-1}\}$，且平分點為 P_k ,P_{3k+1} ；故 D_1 及 D_2 的中垂線，會是 $C_{n(4,1)}$ 兩個平分點的連線，也就是直線 $\overleftrightarrow{P_kP_{3k+1}}$，以下稱之為 $L_{n(4,1)}$。先觀察圖 6 及圖 7。

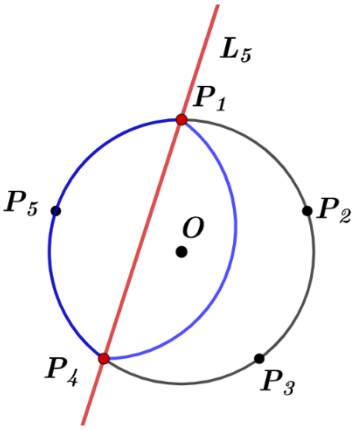


圖 6 - D_1 在 C_5 的限制

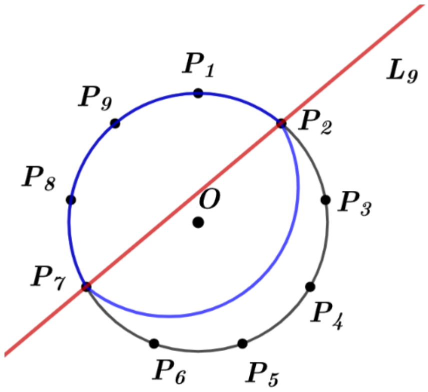


圖 7- D_1 在 C_9 的限制

透過 $k=1$ 與 $k=2$ 的範例，我們發現圖中 $L_{n(4,1)}$ 不會通過圓心，因此當 D_1 落在圓內某些位置時，它對 $L_{n(4,1)}$ 做的對稱點 D_2 會落在圓外。我們知道只有落在較小弓形對此直線的線對稱圖形中(上圖的藍色區域)，才會讓兩隻飛鏢都在圓內。

所以只要 $L_{n(4,1)}$ 不會通過圓心，那麼 D_1 的位置就有限制。

以下證明 $L_{n(4,1)}$ 不會通過圓心：

現在圓周上有 $4k+1$ 個點，相鄰兩點形成的弧的圓心角為 $\frac{360°}{4k+1}$ 。已知 $C_{n(4,1)}$的平分點為 P_k 與 P_{3k+1} ，這兩點所形成的弧(逆時針)的圓心角為 $2k\times\frac{360°}{4k+1}$，設其為 180° (因要讓弧的端點連線通過圓心)。

$Proof$:

Let $2k\cdot\frac{360°}{4k+1}=180°$

$\Rightarrow 2k\cdot 360°=(4k+1)\cdot 180°\ \Rightarrow 720k°=(720k+180)°\ \Rightarrow 0°=180°$　　故矛盾。

所以 $L_{n(4,1)}$一定不會通過圓心，**得證**。

透過以上的證明，發現在 $C_{n(4,1)}$ 下，我們可以將 D_1 對 $L_{n(4,1)}$ 做線對稱，就能找到將金幣平分的 D_2 位置。但是 D_1 的位置會受到限制。

$C_{n(4,1)}$時， D_1 位置的限制：

1. D_1 必須落在較小弓形對 $L_{n(4,1)}$ 線對稱圖形內， D_2 才會在圓內。
2. D_1 不能落在 $L_{n(4,1)}$ 上。(落在 $L_{n(4,1)}$ 上時，目前找不到可平分金幣的 D_2 位置)

D_2 的對應位置(唯一)：

若 D_1 滿足上述限制，則 D_2 會落在 D_1 對 $L_{n(4,1)}$ 作的對稱點上。

(二) 處理 D_1 在 $C_{n(4,2)}$ 圓盤上情形的方法

接著來處理 $4k+2$ 的情況，也就是 $C_{n(4,2)}$，使用平分法的方式來討論，也就是將點分成兩組 $\{P_{3k+2} \sim P_{k-1}\}$ 以及 $\{P_{3k+3} \sim P_k\}$ ，且平分點為 P_{k+1}, P_{3k+2} ；故 D_1 及 D_2 的中垂線，會是 $C_{n(4,2)}$ 兩個平分點的連線，也就是直線 $\overleftrightarrow{P_{k+1}P_{3k+2}}$，以下我們稱之為 $L_{n(4,2)}$。

底下以 $k=1$ 與 $k=2$ 為例：

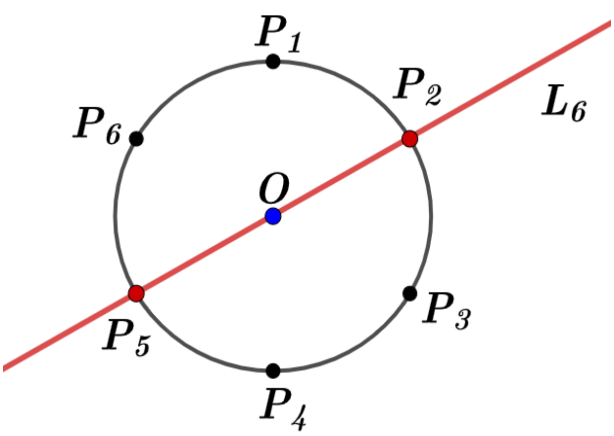


圖 8 - C_6中， L_6 會通過圓心

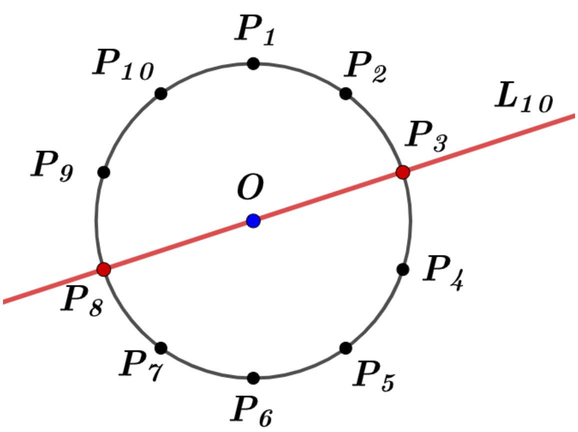


圖 9 - C_{10}中， L_{10} 會通過圓心

通過觀察圖 8 及圖 9，可以發現如果將兩個平分點 (P_2 和 P_5、P_3 和 P_8) 連線，則這條線會通過圓心，所以 D_1 只要不落在 $L_{n(4,2)}$ 上， D_1 與其以 $L_{n(4,2)}$ 做的對稱點，即可平分所有金幣。只需說明任意的 k 所對應到之 $C_{n(4,2)}$ 的 $L_{n(4,2)}$ 皆為通過圓心的直線。

以下是證明:

現在圓周上有 $4k+2$ 個點，這些點將這個圓分成了 $4k+2$ 個圓弧，我們已知平分點是 P_{k+1} 、 P_{3k+2} ，又每一個圓弧的弧度是 $\frac{2\pi}{4k+2}$ ，因此 $\overparen{P_{k+1}P_{3k+2}}$ 的弧度為 $[(3k+2)-(k+1)]\cdot\frac{2\pi}{4k+2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，**故得證。**

$C_{n(4,2)}$時， D_1 位置的限制：

D_1 不能落在 $L_{n(4,2)}$ 上。(落在 $L_{n(4,2)}$ 上時，目前找不到可平分金幣的 D_2 位置)

D_2 的對應位置(唯一)：

若 D_1 滿足上述限制，則 D_2 會落在 D_1 對 $L_{n(4,2)}$ 作的對稱點上。

(三) 處理 D_1 在 $C_{n(4,3)}$ 圓盤上情形的方法

接下來，處理 $4k-1$ 的情況，也就是上述 $C_{n(4,3)}$ 的情形:

我們先以 $k=2$ 及 $k=3$ 來觀察

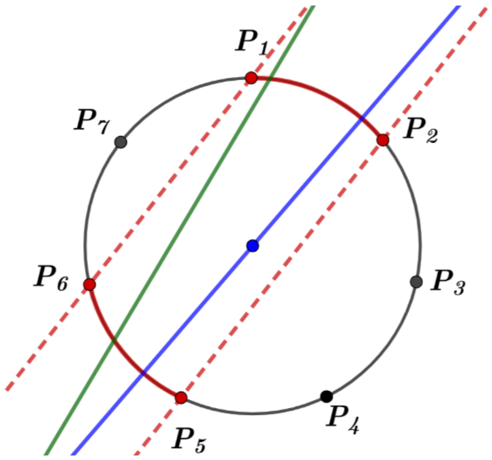


圖 10 - C_7 中垂線範圍限制

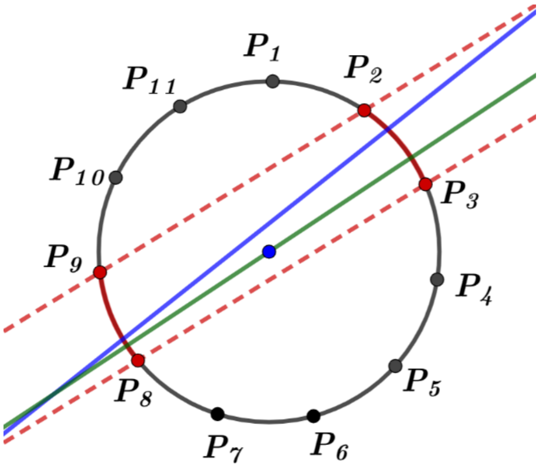


圖 11 - C_{11} 中垂線範圍限制

通過**圖 10** 及**圖 11**，我們發現，由於 $C_{n(4,3)}$ 沒有平分點，所以在 $k=2$ 的情況下，因為D_1 和 D_2 在圓內，所以兩點的中垂線必定交圓於兩點，若要平分圓盤上的金幣，這兩點就會落在 $\overparen{P_1P_2}$ 和 $\overparen{P_5P_6}$ 之間(不含 P_1 、P_2 、P_5 、P_6)，而現在的情況是給定 D_1 後要找到對應的點 D_2 來平分所有金幣，亦即 D_1 以$\overparen{P_1P_2}$ 跟 $\overparen{P_5P_6}$ 上點的連線來作對稱軸找到其對應的 D_2 。

根據 $C_{n(4,2)}$ 的狀況，我們知道要讓 D_1 對直線作的對稱點在圓內，過圓心的直線是最佳選擇，因此要確認兩弧上的點的連線中是否有通過圓心的直線。為了方便討論，將兩個弧上的點的連線寫作 $L_{n(4,3)}$，與上述情況不同的是，滿足條件的直線不唯一。

以下證明，$C_{n(4,3)}$ 下，$L_{n(4,3)}$ 中存在直線通過圓心。

為了證明存在性，相當於要說明著兩個弧上的點能形成最大的圓心角要大於等於 180°；而最小的圓心角要小於等於 180°。等價於以下的兩個條件皆成立：

條件 1：P_{k-1} 到 P_{3k} 之間的弧度 $\geq \pi$　**條件 2**：P_k 到 P_{3k-1} 之間的弧度 $\leq \pi$

現在圓周上有 $4k-1$ 個點，這些點將這個圓的圓周平分成了 $4k-1$ 個圓弧，每個圓弧的弧度是 $\frac{2\pi}{4k-1}$，且 P_{k-1} 與 P_{3k} 兩個點之間點的數目為 $3k-(k-1)-1=2k$(個)，它們之間的弧共有 $2k+1$ 段(兩點一段)，所以我們要計算 $(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{4k-1}$ 與 π 之間的關係。

proof of 條件 1：

$(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{4k-1} \geq (2k+1)\cdot\frac{2\pi}{4k} = \frac{4\pi\cdot k+2\pi}{4k} = \pi+\frac{\pi}{2k} \geq \pi$，

故**條件 1** 成立。

P_k 與 P_{3k-1} 這兩個點之間點的數目為 $(3k-1)-k-1=2k-2$(個)，它們之間的弧共有 $2k-1$ 段，故觀察 $(2k-1)\cdot\frac{2\pi}{4k-1}$ 與 π 之間的關係。

proof of 條件 2：

$(2k-1)\cdot\frac{2\pi}{4k-1} < (2k-1)\cdot\frac{2\pi}{4k-2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$，因此**條件 2** 成立。

因此證得在 $C_{n(4,3)}$ 下，P_{k-1} 與 P_{3k} 之間的弧度 $\geq \pi$ (**條件 1**)，且 P_k 與 P_{3k-1} 之間的弧度 $\leq \pi$ (**條件 2**)，所以在這區間裡的 $L_{n(4,3)}$ 中必存在通過直徑的直線，**得證**。

如果 D_1 沒有在通過圓心的 $L_{n(4,3)}$ 上，就能以其作對稱點，找到 D_2，若 D_1 落在通過圓心的 $L_{n(4,3)}$ 上，則以不通過 D_1 的兩圓弧上任意兩點連線 $(L_{n(4,3)})$ 作對稱點，也能找到 D_2。

也就是說在 $C_{n(4,3)}$ 的情況下，D_1 位置在圓內的任意點皆可以找到 D_2 使金幣被平分。

$C_{n(4,3)}$時， D_1 位置的限制：無。

D_2 的對應位置：

以不通過 $\boldsymbol{D_1}$ 的 $L_{n(4,3)}$ 當對稱軸，D_1 對其對稱即可。

(四) 處理 D_1 在 $C_{n(4,0)}$ 圓盤上情形的方法

接下來，我們先來處理 $4k$ 的情況，也就是上述 $C_{n(4,0)}$ 的情形：

我們先以 $k=1$ 及 $k=2$ 來觀察

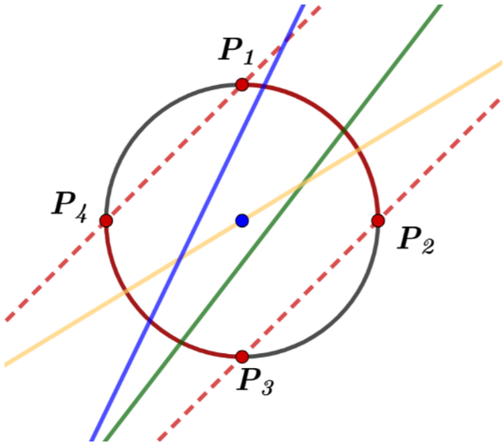


圖 12 - C_4 中垂線範圍限制

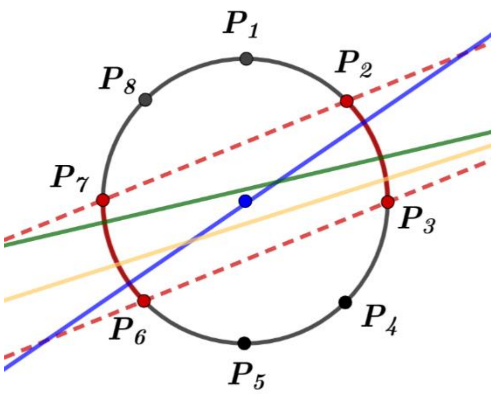


圖 13 - C_8 中垂線範圍限制

通過圖十二及圖十三，可以發現，由於 $C_{n(4,0)}$ 沒有平分點，所以在 $k=1$ 的情況下，若要平分圓盤上的金幣， D_1 和 D_2 的中垂線必定要交圓於兩點，這兩點就會剛好落在 $\widehat{P_1P_2}$ 和 $\widehat{P_3P_4}$ 之間(不含 P_1 、P_2 、P_3 、P_4)，而現在的情況是給定 D_1 後來找到對應的點 D_2 來平分所有金幣，亦即 D_1 以 $\widehat{P_1P_2}$ 跟 $\widehat{P_3P_4}$ 上點的連線作對稱軸找到其對應的 D_2 ，根據 $C_{n(4,2)}$ 、$C_{n(4,3)}$的狀況，我們知道為了讓 D_1 對直線作的對稱點必在圓內，通過圓心的直線是最優解。

因此與 $C_{n(4,3)}$ 的狀況相似，我們想找出兩弧上任意兩點的連線是否通過圓心。我們將兩個弧上的點的連線寫作 $L_{n(4,0)}$，與 $C_{n(4,3)}$ 情況相同，此連線不唯一。

以下證明， $C_{n(4,0)}$ 下，在 $\widehat{P_kP_{k+1}}$、$\widehat{P_{3k}P_{3k+1}}$ 上存在 $L_{n(4,0)}$ 通過圓心。

要確定存在 $L_{n(4,0)}$ 通過圓心，等價於以下的兩個條件皆成立:

條件 1：P_k 與 P_{3k+1} 之間的弧度 $\geq \pi$ **條件 2**：P_{k+1} 與 P_{3k} 之間的弧度 $\leq \pi$

現在圓周上有 $4k$ 個點，這些點將這個圓的圓周平分成了 $4k$ 個圓弧，所以每個圓弧的弧度是 $\frac{2\pi}{4k}$。P_k 與 P_{3k+1} 這兩個點之間點的數目為 $(3k+1)-k-1=2k$ (個)，它們之間的弧共有 $2k+1$ 段，所以需觀察 $(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{4k}$ 與 π 之間關係。

$proof$:

$$(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{4k} = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2k} = \pi+\frac{\pi}{2k}$$

$\because k \geq 1$ $\therefore \pi+\frac{\pi}{2k}=(2k+1)\cdot\frac{2\pi}{4k}\geq\pi$，因此條件 1 成立。

P_{k+1} 與 P_{3k} 這兩個點之間點的數目為 $3k-(k+1)-1=2k-2$ (個)，它們之間的弧共有 $2k-1$ 段，所以我們要觀察 $(2k-1)\cdot\frac{2\pi}{4k}$ 與 π 之間的關係。

$proof$:

$$(2k-1)\cdot\frac{2\pi}{4k}=(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2k}=\pi-\frac{\pi}{2k}$$

$\because k \geq 1$ $\therefore \pi-\frac{\pi}{2k}=(2k-1)\cdot\frac{2\pi}{4k}\leq\pi$，因此條件 2 成立。

故證得在 $C_{n(4,0)}$ 下，P_k 與 P_{3k+1} 之間的弧度 $\geq \pi$ ，且P_{k+1} 與 P_{3k} 之間的弧度 $\leq \pi$ ，所以在這區間裡的 $L_{n(4,0)}$ 必通過圓心。我們可以得知如果 D_1 沒有在通過圓心的 $L_{n(4,0)}$ 上，就能以其作對稱點，找到 D_2 ，若 D_1 落在通過圓心的$L_{n(4,0)}$ 上，則以不通過 D_1 的 $L_{n_{(4,4)}}$ 作對稱點，也能找到 D_2 。

$C_{n(4,0)}$時， D_1 位置的限制：無。

D_2 的對應位置：

以不通過 D_1 的 $L_{n(4,0)}$ 當對稱軸，D_1 對其線對稱即可。

有了上述的證明，可以將兩支飛鏢下完美平分金幣時 D_1 的限制統整成下表。

表 9 - C_1、C_2 情況以外的 C_n（$n \in \mathbb{N}$），對於 D_1 的限制以及對稱軸的位置。

圓盤狀況	$C_{n(4,1)}$	$C_{n(4,2)}$	$C_{n(4,3)}$	$C_{n(4,0)}$
D_1 的限制	有	有	無	無
對稱軸	$\overleftrightarrow{P_kP_{3k+1}}$	$\overleftrightarrow{P_{k+1}P_{3k+2}}$	在 $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$ 和 $\overset{\frown}{P_{3k-1}P_{3k}}$ 上任選兩點連線。	在 $\overset{\frown}{P_kP_{k+1}}$ 和 $\overset{\frown}{P_{3k}P_{3k+1}}$ 上任選兩點連線。

至此討論完畢，可以明顯看出現在平分的方法可以完美的處理 $C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$ 下的平分，而剩下兩種情況可能需要引入別的平分法或討論不能完美平分時趨近平分的方法。

三、$C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$ 平分時的 D_2 範圍探討

前面已經提過在 $C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$ 情況下固定 D_1 所對應的 D_2 是不唯一的。現在要討論固定 D_1 所對應的所有 D_2 所形成的圖形。為了方便講解，將以 P_a 為圓心，$\overline{D_1P_b}$ 為半徑的圓定義為 $O(P_a, R_b)$，將 D_1 與 D_2 的中垂線與圓周的兩交點命名為 E_1、E_2。

(一) $C_{n(4,3)}$ 情況下 D_2 的範圍：

我們知道在 $C_{n(4,3)}$ 平分的情況下，E_1 必落在 $\overset{\frown}{P_{k-1}P_k}$ 上，而 E_2 必會落在 $\overset{\frown}{P_{3k-1}P_{3k}}$ 上。

1. D_2 的範圍：

藉由上述的性質，在圓盤上給定任意 D_1，利用以下手法觀察平分時的中垂線位置。

E_1 固定在 P_{k-1}，E_2 從 P_{3k} 移到 P_{3k-1}。D_2 的移動軌跡為 $O(P_{k-1}, R_{k-1})$ 圓的一部分。

E_2 固定在 P_{3k-1}，E_1 從 P_{k-1} 移到 P_k。D_2 的移動軌跡為 $O(P_{3k-1}, R_{3k-1})$ 圓的一部分。

E_1 固定在 P_k，E_2 從 P_{3k-1} 移到 P_{3k}。D_2 的移動軌跡為 $O(P_k, R_k)$ 圓的一部分。

E_2 固定在 P_{3k}，E_1 從 P_k 移到 P_{k-1}。D_2 的移動軌跡為 $O(P_{3k}, R_{3k})$ 圓的一部分。

利用**圖 14** 來呈現以上步驟。

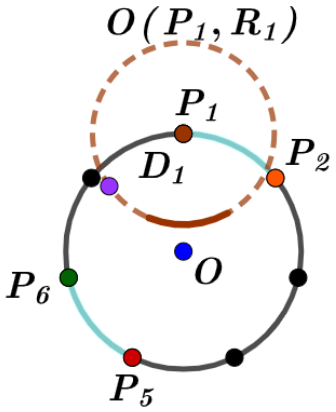


圖 14. 1 - 步驟一

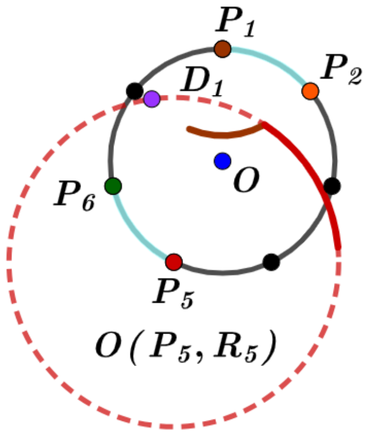


圖 14. 2 - 步驟二

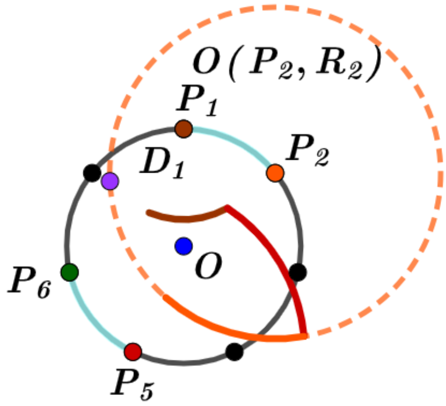


圖 14. 3 - 步驟三

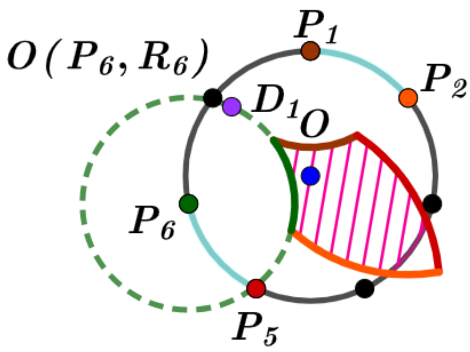


圖 14. 4 - 步驟四

此時，這四道弧與圓周會形成一個封閉圖形，而此圖形就是 D_2 的範圍。

透過上面的手法說明 D_2 都會落在此封閉圖形內。接下來要說明在此封閉圖形內的所有點都是 D_2 。

2.在封閉圖形內的所有點皆可為 D_2 ：

當 D_2 落在封閉圖形外的時候，此時必會發生以下情況的一種：

(1) E_1 落在 $\widehat{P_{k-1}P_k}$ 外

(2) E_2 落在 $\widehat{P_{3k-1}P_{3k}}$ 外

但這並不符合平分 $C_{n(4,3)}$ 的條件，所以在此封閉圖形外的點皆不會是 D_2 。

而當 D_2 落在封閉圖形內的時候，則 E_1 落在 $\widehat{P_{k-1}P_k}$ 內，且 E_2 落在 $\widehat{P_{3k-1}P_{3k}}$ 內

因為這符合平分 $C_{n(4,3)}$ 的條件，所以在此封閉圖形內的所有點皆為 D_2 上。

(二) $C_{n(4,0)}$情況下 D_2 的範圍：

我們知道在 $C_{n(4,0)}$ 平分的情況下，E_1 必落在 $\overset{\frown}{P_k P_{k+1}}$ 上，而 E_2 必會落在 $\overset{\frown}{P_{3k} P_{3k+1}}$ 上。

1. D_2 的範圍：

藉由上述的性質，在圓盤上給定任意 D_1，利用以下手法觀察平分時的中垂線位置。

E_1 固定在 P_k ， E_2 從 P_{3k+1} 移到 P_{3k} 。 D_2 的移動軌跡為 $O(P_k, R_k)$ 圓的一部分。

E_2 固定在 P_{3k} ， E_1 從 P_k 移到 P_{k+1}。D_2 的移動軌跡為 $O(P_{3k}, R_{3k})$圓的一部分。

E_1 固定在 P_{k+1}，E_2 從 P_{3k} 移到 P_{3k+1}。D_2 的移動軌跡為 $O(P_{k+1}, R_{k+1})$ 圓的一部分。

E_2 固定在 P_{3k+1}，E_1 從 P_{k+1} 移到 P_k。D_2 移動軌跡為 $O(P_{3k+1}, R_{3k+1})$ 圓的一部分。

此時，這四道弧與圓周會形成一個封閉圖形，而此圖形就是 D_2 的範圍，利用**圖 15** 來呈現以上步驟。

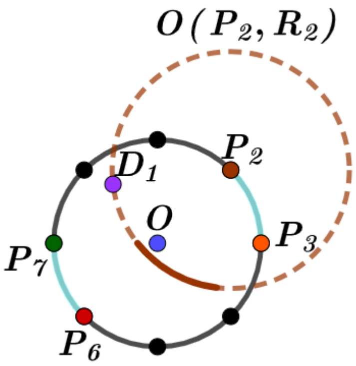


圖 15.1 - 步驟一

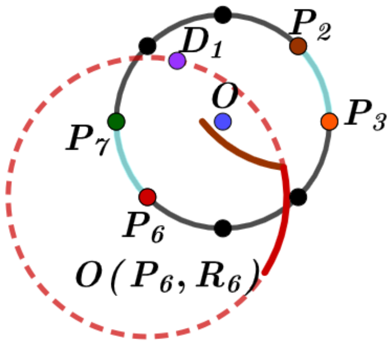


圖 15.2 - 步驟二

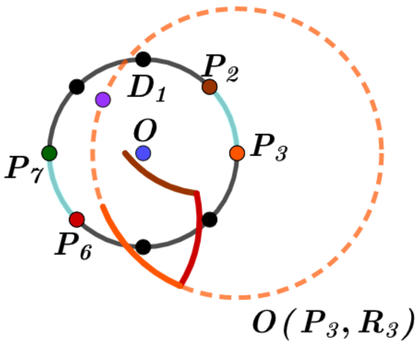


圖 15.3 - 步驟三

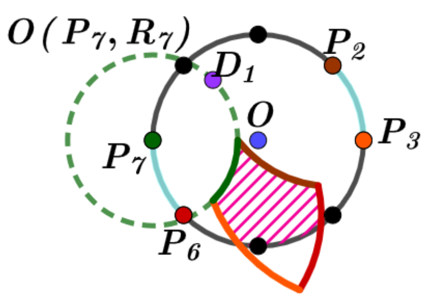


圖 15.4 - 步驟四

2.在封閉圖形內的所有點皆可為 D_2 ：

當 D_2 落在封閉圖形外的時候，此時必會發生以下情況的一種：

(1) E_1 落在 $\overset{\frown}{P_k P_{k+1}}$ 外　　　　　(2) E_2 落在 $\overset{\frown}{P_{3k} P_{3k+1}}$ 外

但這並不符合平分 $C_{n(4,0)}$ 的條件，所以在此封閉圖形外的點皆不會是 D_2。

而當 D_2 落在封閉圖形內的時候，則 E_1 落在 $\overset{\frown}{P_k P_{k+1}}$ 內，且 E_2 落在 $\overset{\frown}{P_{3k} P_{3k+1}}$ 內

因為這符合平分 $C_{n(4,0)}$ 的條件，所以在此封閉圖形內的所有點皆為 D_2 上。

至此討論完畢，得出 $C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$ 情況下 D_2 的範圍。

四、尋找三支飛鏢平分金幣的方式

(一) 平分 C_1 的方法：

在 C_1 下，不論 D_1 落在圓盤內的何處，我們只需以 P_1 為圓心，P_1 到 D_1 為半徑畫圓，在此圓上任取在圓盤內部的兩點，分別為 D_2、D_3 即可平分金幣。(圖 16)

(二) 平分 C_2 的方法：

在 C_2 下，一支飛鏢拿 P_1，剩下兩支飛鏢平分 P_2，即可平分所有金幣。(圖 17)

(三) 平分 C_3 的方法：

在 C_3 下，一支飛鏢拿 P_2，兩支飛鏢平分 P_1、P_3，即可平分所有金幣。(圖 18)

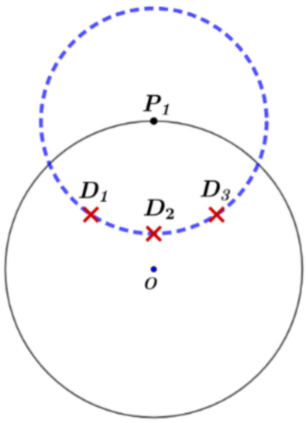


圖 16 - C_1 如何平分

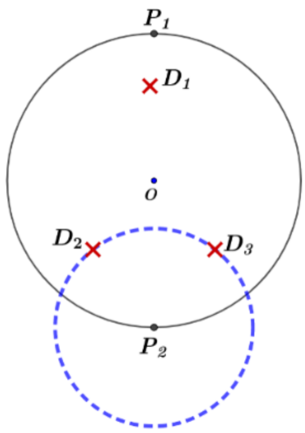


圖 17 - C_2 如何平分

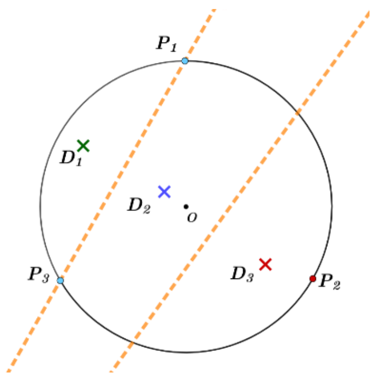


圖 18 - C_3 如何平分

由於前面已經說明，C_1、C_2、C_3的情況皆可找到平分法，接下來只需處理剩下的整數。我們將剩餘的整數分成 6 類，分別是：$C_{n(6,1)}$、$C_{n(6,2)}$、$C_{n(6,3)}$、$C_{n(6,4)}$、$C_{n(6,5)}$、$C_{n(6,0)}$

(四)平分 $C_{n(6,5)}$、$C_{n(6,0)}$的方法：

表 10 - $n(6,5)=6k-1\ (k\in\mathbb{N})$；$n(6,0)=6k\ (k\in\mathbb{N})$的情形

圓盤狀況	$C_{n(6,5)}$	$C_{n(6,0)}$
T_1	$\{P_{2k}\sim P_{4k-1}\}$	$\{P_{2k+1}\sim P_{4k}\}$
T_2	$\{P_k\sim P_{2k-1}$、$P_{4k}\sim P_{5k-1}\}$	$\{P_{k+1}\sim P_{2k}$、$P_{4k+1}\sim P_{5k}\}$
T_3	$\{P_{5k}\sim P_{k-1}\}$	$\{P_{5k+1}\sim P_k\}$
$n(T_1)$	$2k$	$2k$
$n(T_2)$	$2k$	$2k$
$n(T_3)$	$2k-1$	$2k$

觀察後發現不需要平分點即可平分，底下證明此規律恆成立：

只須證明 $T_1=T_3=\frac{1}{3}S_n$ 即可。

Proof of $C_{n(6,5)}$ 的情況：

$$\frac{1}{3}S_{n(6,5)}=\frac{(1+6k-1)(6k-1)}{2}\times\frac{1}{3}=(6k-1)\times k$$

$$T_1=\frac{(2k+4k-1)2k}{2}=(6k-1)\times k=\frac{1}{3}S_{n(6,5)}$$

$$T_3=6k-1+(5k+k-1)\times(k-1)$$

$$=(6k-1)\times(k-1+1)=\frac{1}{3}S_{n(6,5)}$$，得證。

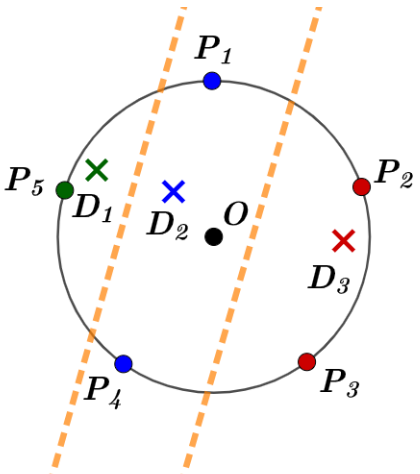


圖 19 -三支飛鏢下的 C_5

以 C_5為例：

圖 19 為 C_5 的情形，此時 $k=1$，

$T_1=\{P_2$、$P_3\}$，$T_2=\{P_1$、$P_4\}$，$T_3=\{P_5\}$。

$Proof\ of\ C_{n(6,0)}$ 的情況：

$$\frac{1}{3}S_{n(6,0)}=\frac{(1+6k)6k}{2}\times\frac{1}{3}=(6k+1)\times k$$

$$T_1=\frac{(2k+1+4k)2k}{2}=(6k+1)\times k=\frac{1}{3}S_{n(6,0)}$$

$T_3=(5k+1+k)\times k=\frac{1}{3}S_{n(6,0)}$，得證。

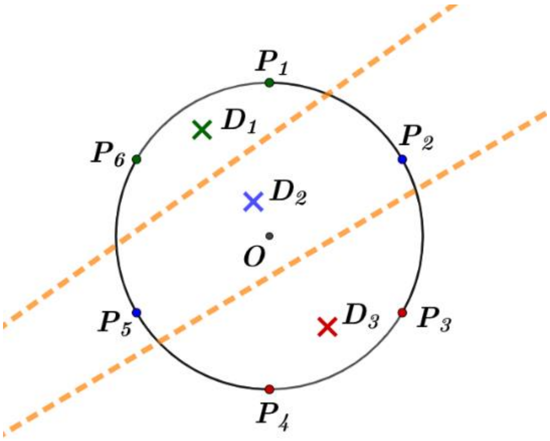


圖 20 -三支飛鏢下的 C_6

以 C_6 為例：

圖 20 為 C_6 的情形，此時 $k=1$，

$T_1=\{P_3、P_4\}$，$T_2=\{P_2、P_5\}$，$T_3=\{P_1、P_6\}$。

(五) 平分 $C_{n(6,2)}$ 和 $C_{n(6,3)}$的方式：

表 11 - $n(6,2)$ 為 $6k+2$ $(k\in\mathbb{N})$、$n(6,3)$ 為 $6k+3$ $(k\in\mathbb{N})$的情形

圓盤狀況	$C_{n(6,2)}$	$C_{n(6,3)}$
T_1	$\{P_{2k+1}\sim P_{4k+1}\}$	$\{P_{2k+2}\sim P_{4k+2}\}$
T_2	$\{P_{k+1}\sim P_{2k}、P_{4k+2}\sim P_{5k+1}\}$	$\{P_{k+2}\sim P_{2k+1}、P_{4k+3}\sim P_{5k+2}\}$
T_3	$\{P_{5k+3}\sim P_{k-1}\}$	$\{P_{5k+4}\sim P_k\}$
$n(T_1)$	$2k+1$	$2k+1$
$n(T_2)$	$2k$	$2k$
$n(T_3)$	$2k-1$	$2k$
T_2、T_3 平分點	P_k、P_{5k+2}	P_{k+1}、P_{5k+3}

底下證明此規律恆成立：

只須證明 T_1、T_3 在考慮平分點的情況下與 $\frac{1}{3}S_n$ 相等即可

$Proof\ of\ C_{n(6,2)}$ 的情況：

$$\frac{1}{3}S_{n(6,2)}=\frac{(6k+2+1)(6k+2)}{2}\times\frac{1}{3}=\big(2k+1\big)\big(3k+1\big)=6k^2+5k+1$$

$$T_1=\frac{\big((2k+1)+4k+1\big)(2k+1)}{2}=(2k+1)(3k+1)=\frac{1}{3}S_{n(6,2)}$$

$$T_3+\frac{k+(5k+2)}{2}=\big((5k+3)+(k-1)\big)\times(k-1)+\frac{k+(5k+2)}{2}$$

$$=(6k+2)(k-1)+3k+1=6k^2+5k+1=\frac{1}{3}S_{n(6,2)}$$ ，得證。

以 C_8 為例：

圖 21 為 C_8 的情形，此時 $k=1$，

$T_1=\{P_3\sim P_5\}$、

$T_2=\big\{P_2\ 、P_6\big\}$、$T_3=\{P_8\}$，

且 T_2、T_3 平分點為 P_1、P_7。

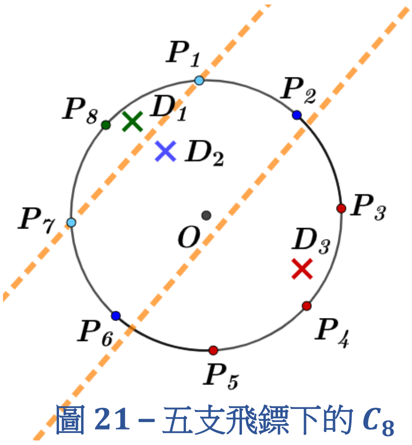


圖 21－五支飛鏢下的 C_8

$Proof\ of\ C_{n(6,3)}$ 的情況：

$$\frac{1}{3}S_{n(6,3)}=\frac{(6k+3+1)(6k+3)}{2}\times\frac{1}{3}=\big(2k+1\big)\big(3k+2\big)=6k^2+7k+2$$

$$T_1=\frac{\big((2k+2)+(4k+2)\big)(6k+3)}{2}=(2k+1)(3k+2)=\frac{1}{3}S_{n(6,3)}$$

$$T_3+\frac{(k+1)+(5k+3)}{2}=\big((5k+4)+k\big)\times k+\frac{(k+1)+(5k+3)}{2}$$

$$=(6k+4)k+3k+2=6k^2+7k+2=\frac{1}{3}S_{n(6,3)}$$ ，得證。

以 C_9 為例：

圖 22 為 C_9 的情形，此時 $k=1$，

$T_1=\{P_4\sim P_6\}$、

$T_2=\big\{P_3\ 、P_7\big\}$、$T_3=\{P_9\sim P_1\}$，

且 T_2、T_3 平分點為 P_2、P_8。

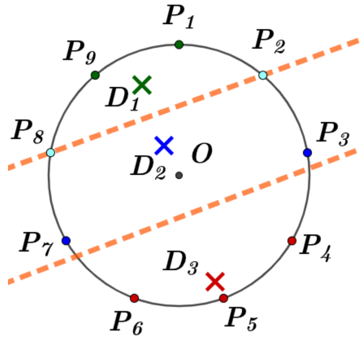


圖 22－五支飛鏢下的 C_9

至此，在三支飛鏢下，對於 $C_n\left(n \equiv 0、2、3、5(mod\ 6)\right)$ 皆能找到至少一種的平分方法。

接下要利用兩支及三支飛鏢在分組時的共同點來進一步進行延伸。

五、尋找任意 m 支飛鏢平分金幣的方式

前面發現了當 $m = 2\ or\ 3$ (飛鏢數)時，都可以完美平分 C_{tm-1} 和 C_{tm} $(\forall t \in \mathbb{N})$ 的情形，而我們希望將此方法推廣到任意 m 支飛鏢的情況下，皆可以處理 C_{tm-1} 和 C_{tm} 的情況。

(一) m 支飛鏢平分 C_{tm-1}

在 C_{tm-1} 的情況下，S_{tm-1} (金幣總數量)為 $\frac{tm(tm-1)}{2}$，所以我們可以把 S_{tm-1} 看作 $tm \times \frac{tm-1}{2}$，P_{tm-1} 上的金幣數量會是兩個 $\frac{tm-1}{2}$。因為要 m 支飛鏢平分，所以每一支飛鏢都要分到 t 個 $\frac{tm-1}{2}$。此時根據 t 是否為偶數分成兩種情況。

1. t 為偶數：

在此情況下，在 $P_{tm-2} \sim P_1$ 中的任意一點找到對應點使兩點之和為 $2 \times \frac{tm-1}{2}$。並將 P_{tm-1} 視為 $2 \times \frac{tm-1}{2}$，此時，會有 $\frac{tm}{2}$ 對 $2 \times \frac{tm-1}{2}$，也就是每組需要拿到 $\frac{t}{2}$ 對。

以 C_{19} (圖 23) 為例：

在 $m = 5$ ，$t = 4$ 的情況下，P_{18}、P_1 一對，P_{17}、P_2 一對，P_{16}、P_3 一對，以此類推。

金幣數量總共會有 10 對 $2 \times \frac{19}{2}$ 。

每一個飛鏢皆須拿到 2 對，

T_1 為 $\{P_8 \sim P_{11}\}$，T_2 為 $\{P_{12} \sim P_{13}, P_6 \sim P_7\}$，

T_3 為 $\{P_{14} \sim P_{15}, P_4 \sim P_5\}$，$T_4$ 為 $\{P_{16} \sim P_{17}, P_2 \sim P_3\}$，

T_5 為 $\{P_{18}, P_{19}, P_1\}$

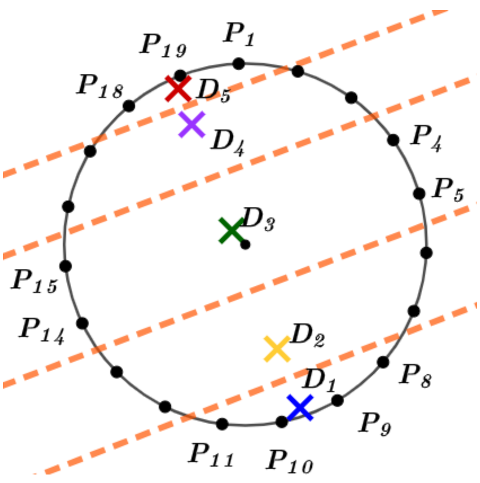


圖 23 – 五支飛鏢下的 C_{19}

2. t 不為偶數：

在這個情況下，我們無法確保在 $P_{tm-2} \sim P_1$ 中的任意一點找到另一點使兩點之和為 $2 \times \frac{tm-1}{2}$。因為在 m 是奇數時， $tm-2$ 不為偶數，而這會導致 $P_{\frac{tm-1}{2}}$ 落單，又因 $P_{\frac{tm-1}{2}}$ 為一個 $\frac{tm-1}{2}$，故將它視為 $\frac{1}{2}$ 對 $2 \times \frac{tm-1}{2}$；可以得知每一個飛鏢皆需分到 $\frac{t}{2}$ 對 $2 \times \frac{tm-1}{2}$，因為 $\frac{t}{2}$ 不為整數，所以需要將其中一組平分，使得每一個飛鏢可以拿到 $\frac{t}{2}$ 對 $2 \times \frac{tm-1}{2}$。

以 C_{24} (**圖 24**) 為例

在 $m=5$ ，$t=5$ 的情況下， P_{23}、P_1 一對，P_{22}、P_2 一對，P_{21}、P_3 一對，以此類推。

金幣數量總共有 $\frac{25}{2}$ 對 $2 \times \frac{24}{2}$。

每一個飛鏢皆須拿到 $\frac{5}{2}$ 對，

此時T_1 為 $\{P_9 \sim P_{14}\}$，T_2 為 $\{P_{15} \sim P_{16}, P_8 \sim P_9\}$，$T_3$ 為 $\{P_{18} \sim P_{19}, P_5 \sim P_6\}$，$T_4$ 為$\{P_{20} \sim P_{21}, P_3 \sim P_4\}$，$T_5$ 為 $\{P_{23}, P_{24}, P_1\}$，而被平分的有 $[P_2: T_4, T_5]$、$[P_7: T_2, T_3]$、$[P_{17}: T_2, T_3]$、$[P_{22}: T_4, T_5]$ 四個點。

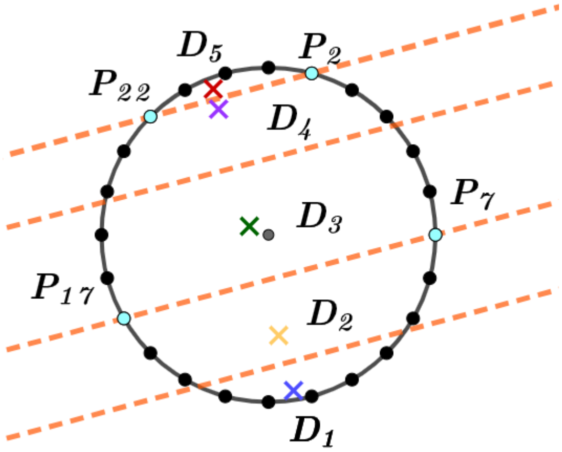


圖 24 – 五支飛鏢下的 C_{24}

(二) m 支飛鏢平分 C_{tm}：

在 C_{tm} 的情況下， $S_{tm} = \frac{tm(km+1)}{2}$，我們可以看成 $tm \times \frac{tm+1}{2}$，又因為有 m 支飛鏢平分，所以每一組會拿 $t \times \frac{tm+1}{2}$，在這個情況下，我們觀察到 P_1 和 P_{tm} 可以湊成 $2 \times \frac{tm+1}{2}$，P_2 和 P_{tm-1} 也能湊成 $2 \times \frac{tm+1}{2}$，以此兩兩成對(當 tm 不為偶數時，則 $P_{\frac{tm+1}{2}}$ 不會成對，後面以**圖 25**、**圖 26** 來分別呈現 tm 為奇偶數的差異)。

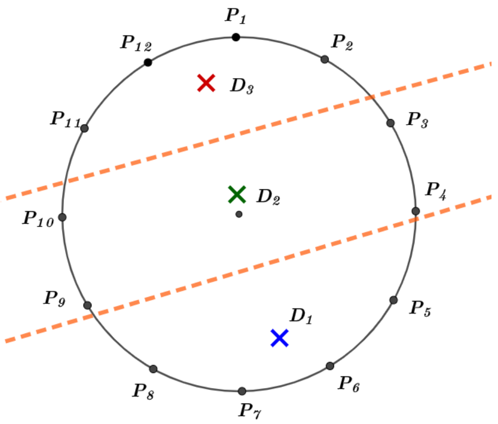


圖 25 - $tm = 12$ 為偶數，皆兩兩成對

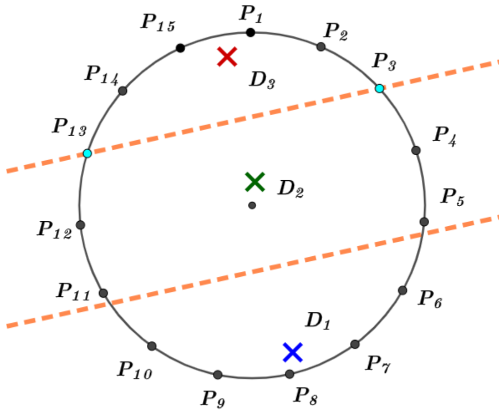


圖 26 - $tm = 15$ 為奇數，P_8 不成對

此時我們根據 t 是否為偶數分為兩種情況。

1. t 為偶數：

在此情況下，圓盤上會有 $\frac{tm}{2}$ 對 $2 \times \frac{tm+1}{2}$，所以每組會拿到 $\frac{t}{2}$ 對。

以 C_{20} (圖 27) 為例：

在 $m = 5$ ，$t = 4$ 的情況下， P_{20} 、P_1 一對，

P_{19} 、P_2 一對，P_{18} 、P_3 一對，以此類推。

金幣數量總共有 10 對 $2 \times \frac{21}{2}$。

每一個飛鏢皆須拿到 2 對，

T_1 為 $\{P_9 \sim P_{12}\}$，T_2 為 $\{P_{13} \sim P_{14}, P_7 \sim P_8\}$，

T_3 為 $\{P_{15} \sim P_{16}, P_5 \sim P_6\}$，$T_4$ 為 $\{P_{17} \sim P_{18}, P_3 \sim P_4\}$，

T_5 為 $\{P_{19}, P_{20}, P_1, P_2\}$

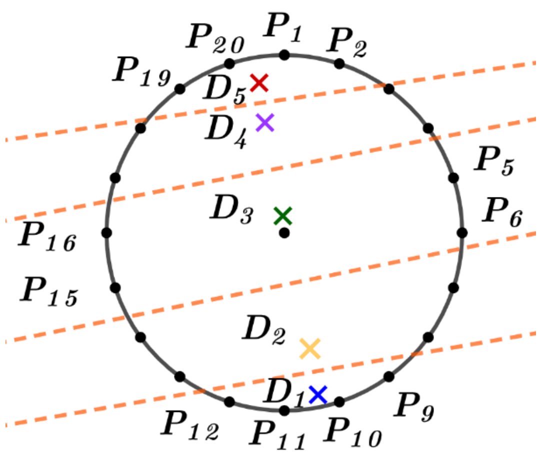


圖 27 - $t = 4, m = 5, C_{20}$ 的平分法

2. t 不為偶數：

在此情況下，與上述情況相同，圓盤上會有 $\frac{tm}{2}$ 對 $2 \times \frac{tm+1}{2}$ ($P_{\frac{tm+1}{2}}$ 視為 $\frac{1}{2}$ 對)

所以每組會拿到 $\frac{t}{2}$ 對，由於 $\frac{t}{2}$ 不為正整數，所以會需要平分點。

以 C_{15} (圖 28) 為例

在 $m=5$ ，$t=3$ 的情況下， P_{15} 、P_1 一對，

P_{14} 、P_2 一對，P_{13} 、P_3 一對，以此類推。

金幣數量總共有 $\frac{15}{2}$ 對 $2\times\frac{24}{2}$。

每一個飛鏢皆須拿到 $\frac{3}{2}$ 對，

此時T_1 為 $\{P_7\sim P_9\}$，T_2 為 $\{P_6,P_{10}\}$，

T_3 為 $\{P_{12},P_4\}$，T_4 為$\{P_{13},P_3\}$，

T_5 為 $\{P_{15},P_1\}$，而被平分的有 $[P_2{:}\,T_4,T_5]$、

$[P_5{:}\,T_2,T_3]$、$[P_{11}{:}\,T_2,T_3]$、$[P_{14}{:}\,T_4,T_5]$ 四個點。

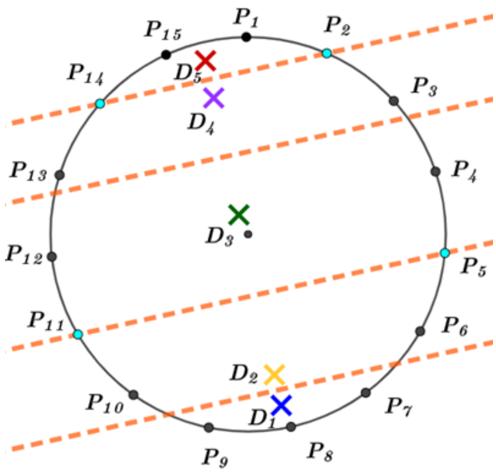


圖 28 - $t=3,m=5,C_{15}$ 的平分法

在觀察 C_{tm-1} 及 C_{tm} 的情況後，發現對於任意的飛鏢，我們皆可找到一種分法，來平分所有金幣，為了一般化，定義 m 為飛鏢的數量，將此歸納成定理 ($\boldsymbol{Thm\ 1.1}$)。

$Thm1.1$：$\forall\, t,m\in\mathbb{N}, m>1$ 在 C_{tm} 及 C_{tm-1} 的情況下，皆可找到一種平分法。

通過這個定理，可以知道不論飛鏢的數量($\boldsymbol{m}$)為何，圓盤上等距取 n 個點依序放入金幣袋(金幣枚數遞增)，只要 $m\mid n$ 或 $m\mid(n+1)$ 一定可以找到完美平分的方法，利用$\boldsymbol{Thm\ 1.1}$ 可以簡單的得到一個有趣的結果：當飛鏢與點數量相同時 $(n=m)$ 存在完美平分的方法。

能有如此漂亮的定理，主因是建立在圓盤上平分金幣的手法能夠使用等差中項的性質，且這種平分法在固定 t 而 m 遞增時，每一組所分到的點及其數量會有規律的變化，接下來我們將針對平分時每組的金幣袋數量【也就是 $n(T_r)$】來進行討論。

六、飛鏢數變動時 T_r 元素數量的規律【$n(T_r)$定理】

接著，我們透過上述的分法，將 C_{tm} 情況，t 為偶數時的分法做成表格。

表 12 - C_{tm} 根據 m (飛鏢數)變動時各組在完美平分狀態的元素

C_{tm}				
m	2	3	4	5
T_1	$\left\{P_{\frac{t}{2}+1}\sim P_{\frac{3}{2}t}\right\}$	$\{P_{t+1}\sim P_{2t}\}$	$\left\{P_{\frac{3}{2}t+1}\sim P_{\frac{5}{2}t}\right\}$	$\{P_{2t+1}\sim P_{3t}\}$
T_2	$\left\{P_{\frac{3}{2}t+1}\sim P_{\frac{t}{2}}\right\}$	$\left\{P_{\frac{t}{2}+1}\sim P_t、P_{2t+1}\sim P_{\frac{5}{2}t}\right\}$	$\left\{P_{t+1}\sim P_{\frac{3}{2}t}、P_{\frac{5}{2}t+1}\sim P_{3t}\right\}$	$\left\{P_{\frac{3}{2}t+1}\sim P_{2t}、P_{3t+1}\sim P_{\frac{7}{2}t}\right\}$
T_3	無	$\left\{P_{\frac{5}{2}t+1}\sim P_{\frac{t}{2}}\right\}$	$\left\{P_{\frac{t}{2}+1}\sim P_t、P_{3t+1}\sim P_{\frac{7}{2}t}\right\}$	$\left\{P_{t+1}\sim P_{\frac{3}{2}t}、P_{\frac{7}{2}t+1}\sim P_{4t}\right\}$
T_4	無	無	$\left\{P_{\frac{7}{2}t+1}\sim P_{\frac{t}{2}}\right\}$	$\left\{P_{\frac{t}{2}+1}\sim P_t、P_{ts+1}\sim P_{\frac{9}{2}t}\right\}$
T_5	無	無	無	$\left\{P_{\frac{9}{2}t+1}\sim P_{\frac{t}{2}}\right\}$

接著，由上表觀察到在 C_{tm} 的情況下，當 $t = 2k$，亦即 t 為偶數時，T_r 裡的元素數量皆為 t 個，也就是 $n(T_r) = 2k$，以下，我們將此歸納成定理 ($\boldsymbol{Thm\ 1.2}$)。

$\boldsymbol{Thm1.2}$ ：在 $\boldsymbol{C_{tm}}$ 的情況下，$\boldsymbol{\forall\, m \in \mathbb{N}, m \geq 2,\ t\ is\ even, n(T_r) = t = 2k\ (1 \leq r \leq m)}$。

以下證明此定理 ：

透過前面的證明可以得知，每支飛鏢需要拿到 $2k \times \frac{2km+1}{2}$ 個金幣，又因一對會是 $2km + 1$，故每組裡會有 $2 \times \frac{1}{(2km+1)} \times 2k \times \frac{2km+1}{2} = 2k$ 個金幣袋，也就是 $n(Tr) = 2k$。

有了上述這兩個定理，我們也不難觀察出為什麼一開始在處理兩支及三支飛鏢的時侯分別以 mod 4 跟 mod 6 來進行分類討論會比較容易，因為會需要以等差中項兩個點一對的方式來達成每一組分到的金幣相等；在 $n = 2km$ ，也就是點的總數為飛鏢數乘 2 的倍數時，能找到完美的平分手法，並且每組的元素數量會相等。

伍、討論

至此，我們已經處理 2 支和 3 支飛鏢中，n 是飛鏢數量的倍數及飛鏢數量的倍數減 1 的情況，並推廣到 m 支，且觀察出在無平分點的情況下 T_1 有規律，將其整理成表格，底下的 $k=\left\lceil \frac{n}{2m} \right\rceil$ (向上取整數)。

一、$C_{n(2m,2m-1)}$ 下的規律

表 13 - $m=2,3,4,5$ 所對應的 T_1

m	2	3	4	5
T_1	$\{P_k \sim P_{3k-1}\}$	$\{P_{2k} \sim P_{4k-1}\}$	$\{P_{3k} \sim P_{5k-1}\}$	$\{P_{4k} \sim P_{6k-1}\}$

觀察上表後，我們發現在此情況下，2 支飛鏢與 3 支飛鏢的 T_1 差為 k，而 3 支飛鏢與 4 支飛鏢和 4 支飛鏢與 5 支飛鏢亦然，所以對於所有的正整數 m，在 $C_{n(2m,2m-1)}$ 的情況，T_1 皆為 $\{P_{(m-1)k} \sim P_{(m+1)k-1}\}$。

二、$C_{n(2m,0)}$ 下的規律

表 14 - $m=2,3,4,5$ 所對應的 T_1

m	2	3	4	5
T_1	$\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$	$\{P_{2k+1} \sim P_{4k}\}$	$\{P_{3k+1} \sim P_{5k}\}$	$\{P_{4k+1} \sim P_{6k}\}$

觀察上表後，我們發現此情況與前一種情況相同，2 支飛鏢、3 支飛鏢、4 支飛鏢與 5 支飛鏢的 T_1 差皆為 k，所以對於所有的正整數 m，在 $C_{n(2m,0)}$ 的情況，T_1 皆為 $\{P_{(m-1)k+1} \sim P_{(m+1)k}\}$。

總結來說，找到能應用在 2 支飛鏢的平分法，並將其拓展至 m 支飛鏢的情況，可以利用此法來找到每個飛鏢需要拿到的點，也就是任意 T_r 內的元素；雖然此分法當 m 愈來愈大時，能處理的 n 會愈來愈少【兩支飛鏢時能處理所有整數，三支時無法處理 $\equiv 1\ (mod 3)$，四支時無法處理 $\equiv 1,2\ (mod 4)$，以此類推】，但我們覺得能找到這樣漂亮的規律十分滿足。

陸、結論

一、將平分金幣的方式依照兩隻飛鏢的中垂線進行分類。

二、在兩支飛鏢下，對於任意的 C_n $(n \in \mathbb{N})$ 的情況下，依金幣的袋數分為 $C_{n(4,1)}$ 、 $C_{n(4,2)}$ 、 $C_{n(4,3)}$ 和 $C_{n(4,0)}$ 四種情況。證明皆存在平分金幣的方法和找到此分法的一般式。

三、證明無論 D_1 落在圓盤內何處，都可找到對應的 D_2 來平分金幣與說明 D_1 的限制。

四、說明在$C_{n(4,3)}$ 和 $C_{n(4,0)}$ 時，給定 D_1 後 D_2 的範圍是由四道弧所圍出的封閉圖形。

五、證明三支飛鏢下 $C_{n(6,2)}$ 、 $C_{n(6,3)}$ 、$C_{n(6,5)}$ 和 $C_{n(6,0)}$ 皆存在完美平分的方法，並找到其一般式。

六、證明 m 支飛鏢下，在 C_{tm} 及 C_{tm-1} 的情況下$(t \in \mathbb{N})$，皆可找到一種平分法。

七、證明 m 支飛鏢在 C_{2km} 的情況下$(k \in \mathbb{N})$， $n(T_r)$ 恆為$2k$ $(1 \leq r \leq m)$。

柒、參考文獻資料

[1] 周代翔 洪銘德 (2018)。「**金金」計較**。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。

[2] 林宥呈 蔡博丞 (2021)。**公正無私-海盜分金幣的最佳平分解**。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。

【評語】030413

此作品將原本是在直線上分金幣，推廣到圓盤上分金幣的問題，尋找一般化的平分方法，討論任意點在圓盤上能否找到另一點來平分金幣的可行答案，並分析圓內以ｍ支飛鏢所在位置平分設在圓周上ｎ袋金幣的情形。作品中，在兩支飛鏢情況下，證明在兩種條件下，平分金幣的兩處對應圓盤落處範圍是由四道弧所圍出的封閉圖形是此研究成果的其中一個亮點。作品以簡易的方法進行數學探討並獲得規律結果，題材有趣有其創新性，是一件很優秀的作品。然而，對於作品中無法處理的情況下所推得的一般化情形，原因可能是初始設定的原因。未來可以加以進一步探究。此外原始問題來自科學研習期刊，必須列入參考資料中，以符合研究的規範。

作品簡報

飛鏢盤上的金幣

壹、前言

參考全國科展第 58 屆的作品:「金金計較」後，
探討的過程中，想到了能在圓盤上分金幣。
觀察出好的規律之後，便開始著手研究這個題目，
最後歸納並得出許多漂亮的性質。

本研究中所有圖片皆為作者繪製。

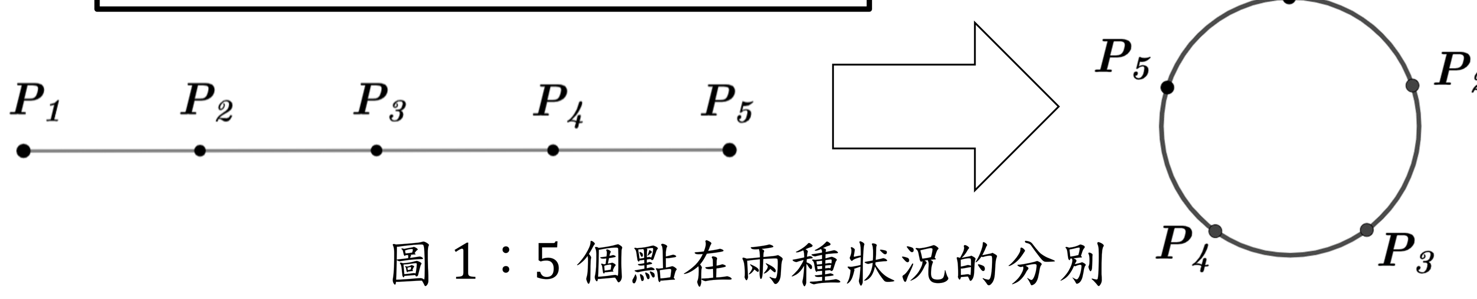


圖 1：5 個點在兩種狀況的分別

貳、研究目的

探討 m 支飛鏢能不能平分圓盤上的金幣，當金幣袋數 n 為已知時($n,m \in \mathbb{N}$)，想解決以下問題：
一、2 支飛鏢找到至少一種方法平分所有的金幣。
二、承(一)，第一支飛鏢落在任意點之後皆能找到第二支飛鏢需要落的對應點來使金幣可以被平分。
三、3 支飛鏢找到至少一種方法平分所有的金幣。
四、m 支飛鏢找到至少一種方法平分所有的金幣。
五、證明特定情況下每隻飛鏢所分到的金幣袋數會相同。

參、研究過程及方法

一、名詞定義

$\boldsymbol{C_n}$：圓周上等距取 n 個點，
依序放裝有 1、2、3、⋯、n 枚金幣的袋子在這些點上。

$\boldsymbol{P_i}$：圓周上內有 i 枚金幣的袋子所在的點。

$\boldsymbol{S_n}$： C_n 時金幣的總枚數。圖 2 以 C_5 舉例：

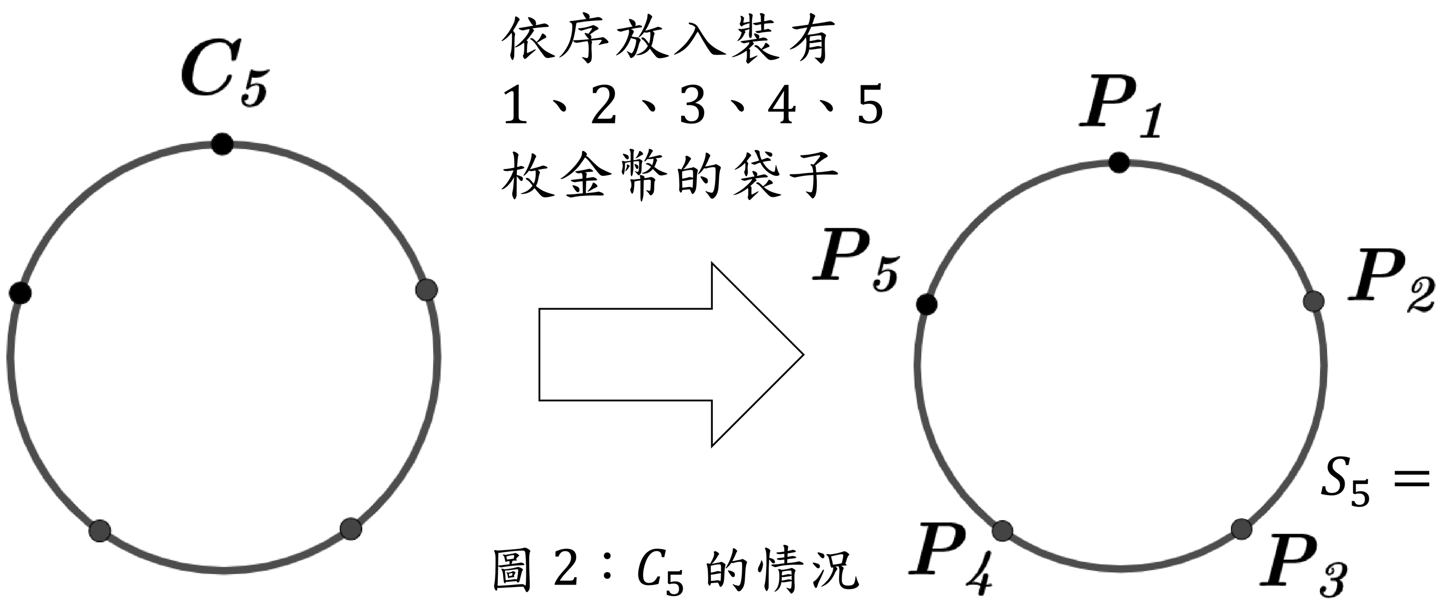


圖 2：C_5 的情況

$\boldsymbol{D_m}$：第 m 隻飛鏢在圓盤上的落點

$\boldsymbol{n(p,q)}$：$\{a \mid a \equiv q \pmod p，a \in \mathbb{N}\}$　例：$23 \equiv 3 \pmod 4$，$23 \in n(4,3)$

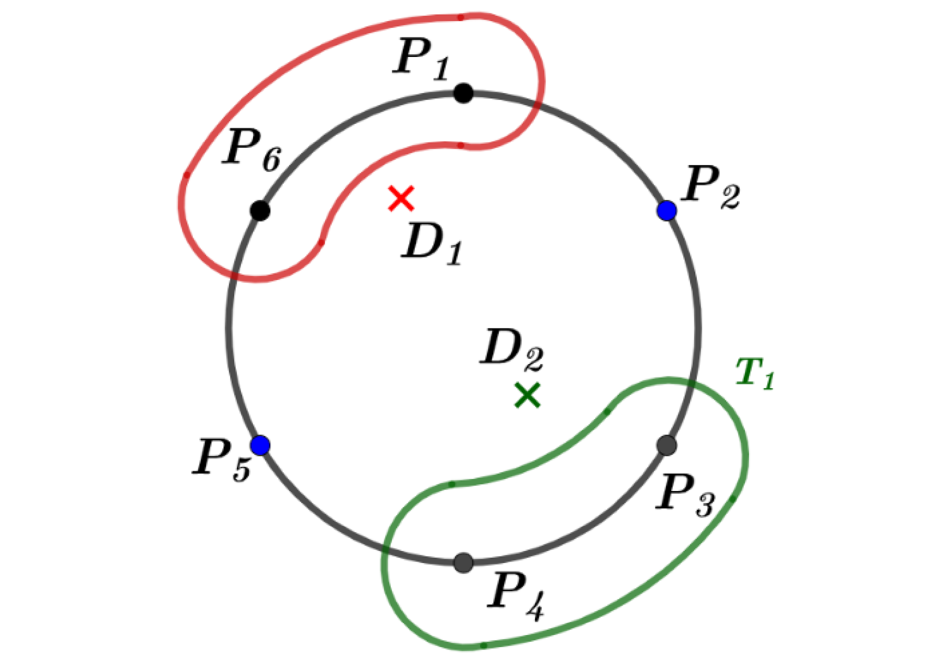
分組的寫法：在 m 支飛鏢的情況，會將圓盤上的金幣分成 m 組，這 m 個集合分別記作 T_r ($1 \le r \le m$)。
為了方便表示，若集合收集的點在圓周上是連續的點，則以「～」來簡寫。
例：T_3：$\{P_5, P_6, P_7, P_8, P_{17}, P_{18}, P_{19}, P_{20}\}$ 可以簡化為 $\{P_5 \sim P_8, P_{17} \sim P_{20}\}$。

$\boldsymbol{T_1}$：平分時在同一組的金幣袋之金幣枚數是連續整數的組別。**(例: $\boldsymbol{C_6}$ 時，$\boldsymbol{T_1}$ 就是 $\boldsymbol{\{P_3 \sim P_4\}}$)**

平分點：當 s 支飛鏢到此點距離一樣時，點上的金幣會被平分到 s 組**(若金幣共有 $\boldsymbol{i}$ 枚，則這 $\boldsymbol{s}$ 個人各拿 $\boldsymbol{\frac{i}{s}}$ 枚。)**
我們根據有哪些組平分此袋將這些組別寫在平分點前，在 2 支飛鏢的情況不特別註記。
例：P_5 被 T_4、T_5 平分，則其為 T_4、T_5 平分點，記作 $[P_5：T_4、T_5]$。

$\boldsymbol{n(T_r)}$：平分金幣時集合 T_r ($1 \le r \le m$) 中有幾個元素。例：C_6 時，T_1 為 $\{P_3 \sim P_4\}$，$n(T_1) = 2$。

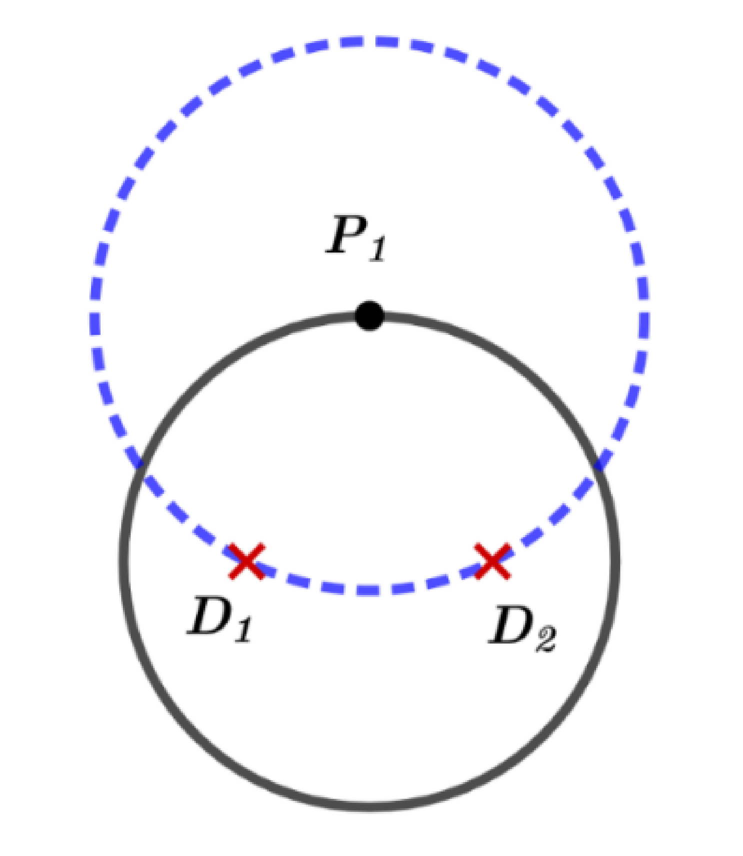
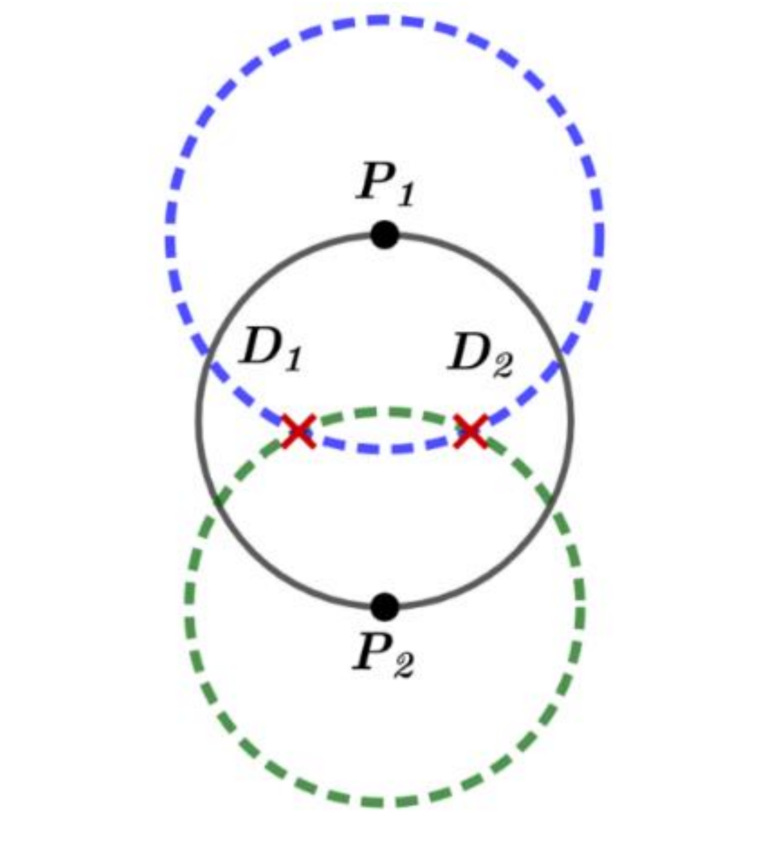
表1:C_6 的情況

	分組的寫法	$\{P_3 \sim P_4\}$ 和 $\{P_6 \sim P_1\}$
	T_1	$\{P_3 \sim P_4\}$
	$n(T_1)$	2
	平分點	P_2、P_5

肆、研究結果

一、尋找 2 支飛鏢平分金幣的方式

表2:平分 C_1和 C_2 的方法

C_1 的平分法：		**C_2 的平分法：**	
D_1 、D_2 到 P_1 等距。 D_1 、 D_2 分別會拿到 $\frac{1}{2}$ 枚金幣		D_1 、D_2 到 P_1、P_2 等距。 D_1 、 D_2 分別會拿到 $\frac{3}{2}$ 枚金幣 **但是在 $\boldsymbol{C_2}$ 下 $\boldsymbol{D_1}$ 不能落在 $\boldsymbol{\overline{P_1P_2}}$ 上，否則會無法平分。**	

在處理完 C_1 和 C_2 的情況後，我們利用 mod 4 來將剩下的正整數分成四類，亦即 $n(4,1)$、$n(4,2)$、$n(4,3)$、$n(4,0)$，並將其整理成表格如下:

表3:兩隻飛鏢的情況統整

圓盤狀況	$C_{n(4,1)}$	$C_{n(4,2)}$	$C_{n(4,3)}$	$C_{n(4,0)}$
$\boldsymbol{T_1}$	$\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$	$\{P_{k+2} \sim P_{3k+1}\}$	$\{P_k \sim P_{3k-1}\}$	$\{P_{k+1} \sim P_{3k}\}$
平分點	P_k、P_{3k+1}	P_{k+1}、P_{3k+2}	無	無

二、D_1 為圓盤上的任意一點之情況的探討

表 4：$C_{n(4,1)}$、$C_{n(4,2)}$、$C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$下 D_1 的情況

$C_{n(4,1)}$	$C_{n(4,2)}$	$C_{n(4,3)}$	$C_{n(4,0)}$
較小弓形對 $\overleftrightarrow{P_kP_{3k+1}}$ 做的線對稱圖形內，且 D_1 不能落在 $\overleftrightarrow{P_kP_{3k+1}}$ 上	D_1不能落在 $\overleftrightarrow{P_{k+1}P_{3k+2}}$ 上。	圓盤內皆可。	圓盤內皆可。

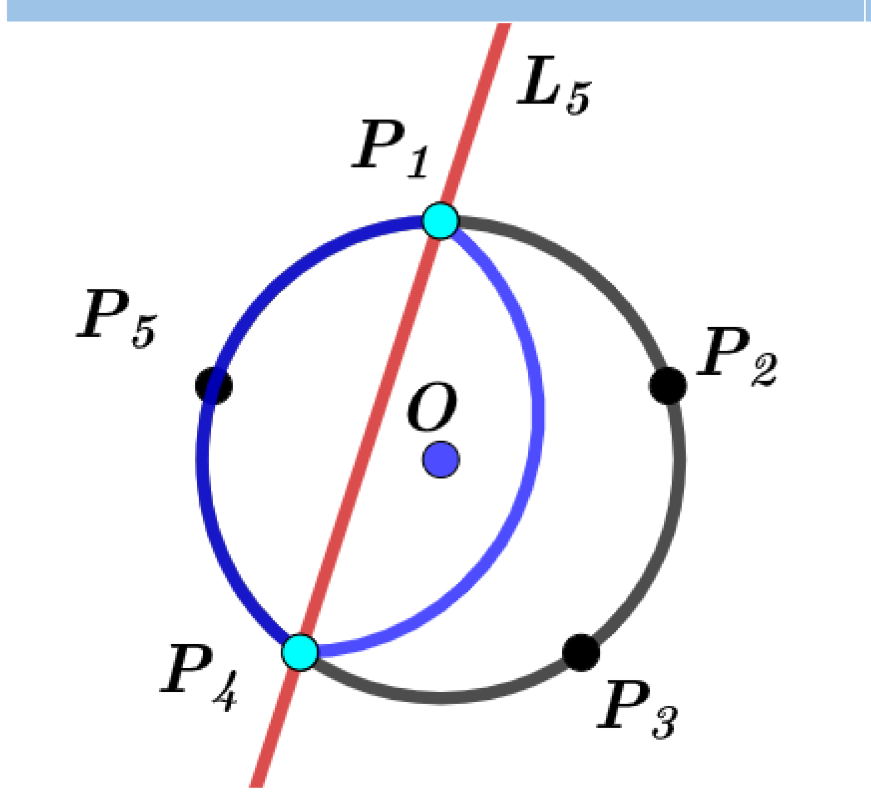


圖 3：$C_{n(4,1)}$下 D_1 的範圍

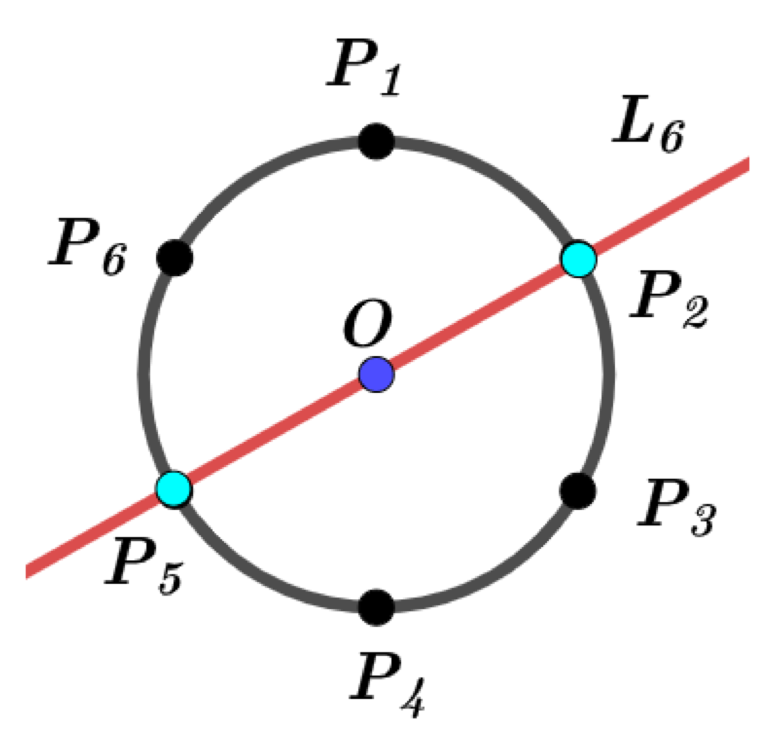


圖 4：$C_{n(4,2)}$下 D_1 的範圍

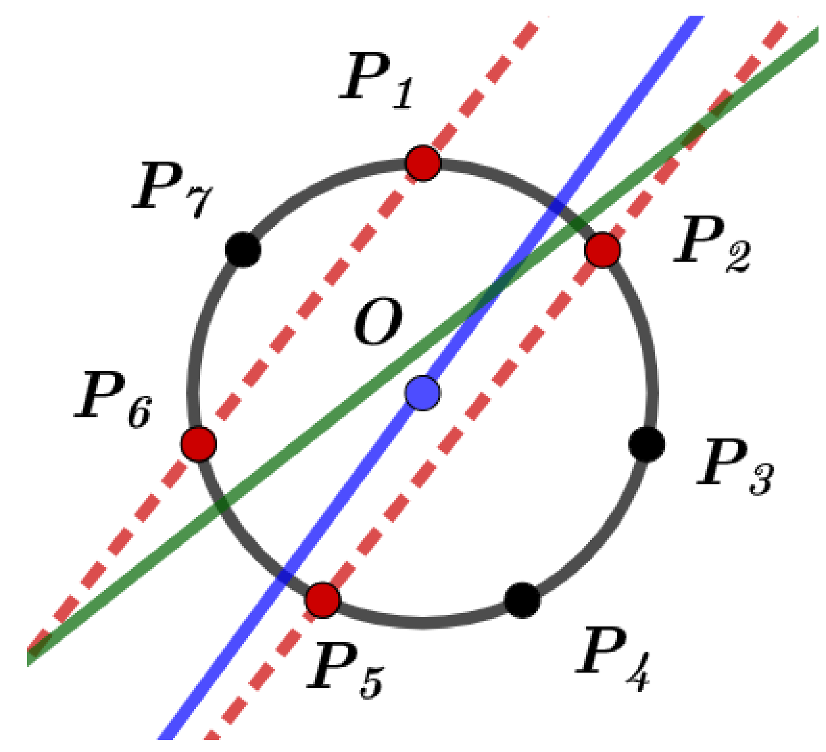


圖 5：$C_{n(4,3)}$下 D_1 的範圍

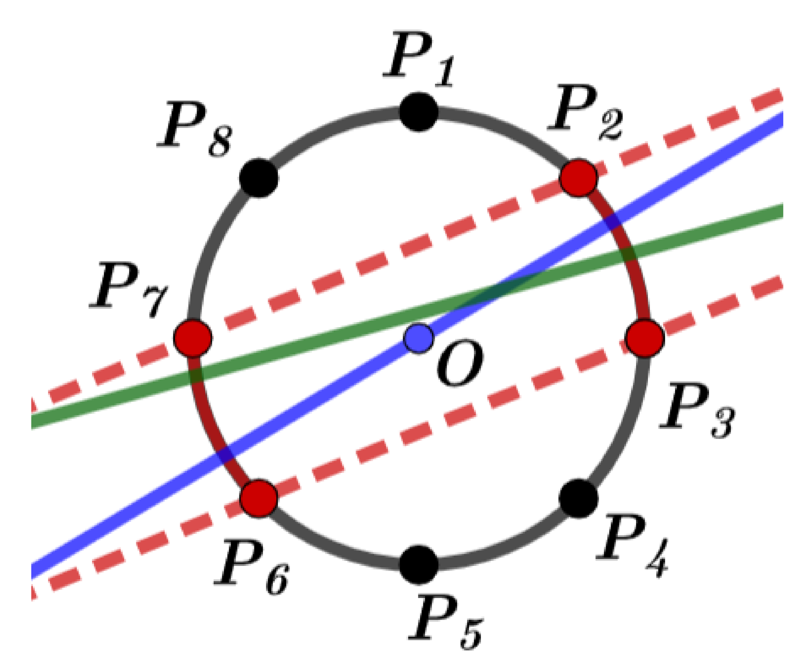


圖 6：$C_{n(4,0)}$下 D_1 的範圍

三、在 $C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$ 下給定 D_1 之後，所有可能 D_2 位置形成的圖形。

因為在 $C_{n(4,3)}$、$C_{n(4,0)}$ 下給定 D_1 之後，D_2不唯一。
經過證明得知 D_2 的範圍是由四個圓弧所圍出的封閉圖形。

一、在$C_{n(4,3)}$的情況下，D_2的範圍是由 P_{k-1}、P_k、P_{3k-1}、P_{3k} 四個點到 D_1 作圓，並取其部分圓弧所形成的封閉圖形。

二、在$C_{n(4,0)}$的情況下，D_2的範圍是由 P_k、P_{k+1}、P_{3k}、P_{3k+1} 四個點到 D_1 作圓，並取其部分圓弧所形成的封閉圖形。

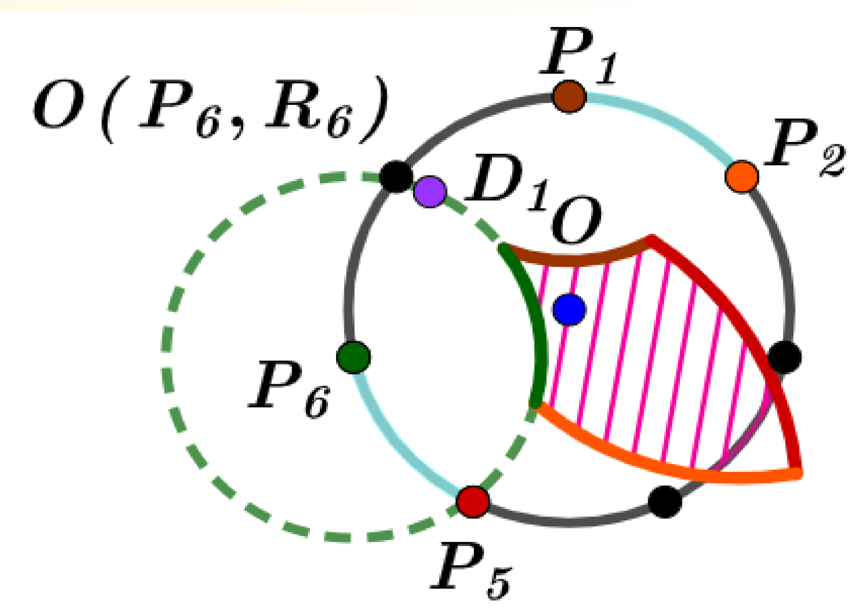
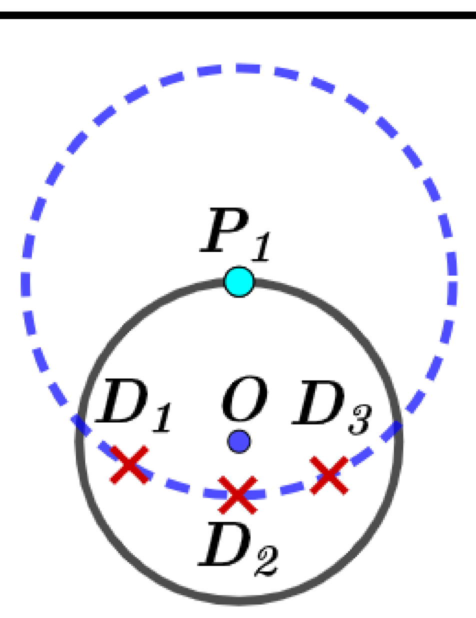
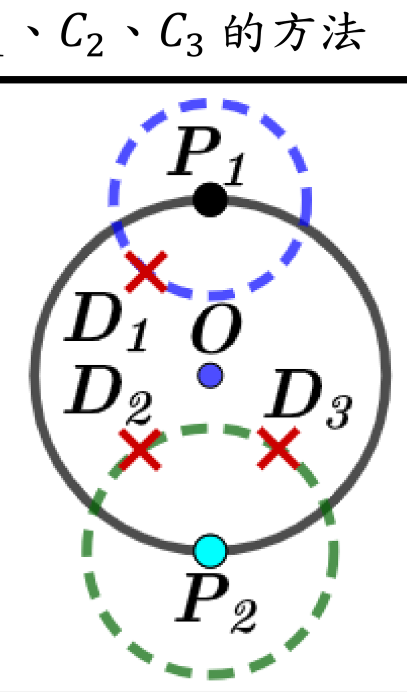
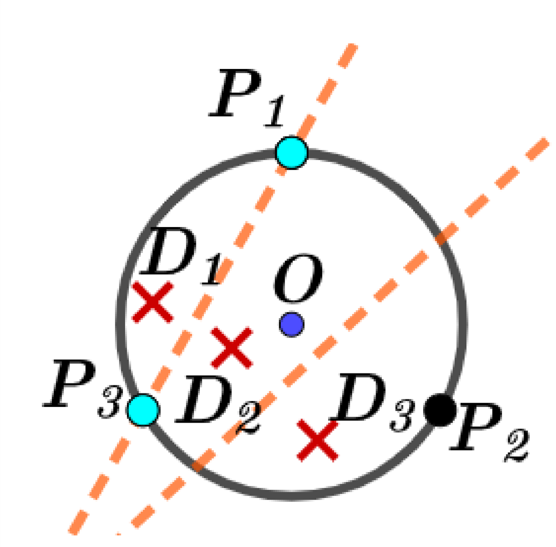


圖 7：C_7下 D_2 的範圍

四、3隻飛鏢平分金幣的方法

我們將三支飛鏢的情況用mod 6來分類。由於 C_1 、C_2 、C_3 不在此規則之中，因此要分開來討論。

表 5：三支飛鏢平分 C_1、C_2、C_3 的方法

平分 C_1 的方法		平分 C_2 的方法		平分 C_3 的方法	
D_1、D_2、D_3 平分 P_1，每支飛鏢各拿 $\frac{1}{3}$ 枚金幣		D_2、D_3 平分 P_2，每支飛鏢各拿 $\frac{2}{3}$ 枚金幣		D_1、D_2 平分 P_1、P_3 每支飛鏢拿 1 枚金幣	

已知 C_1、C_2、C_3 的情況皆可找到平分法，接下來只需處理剩下的整數。

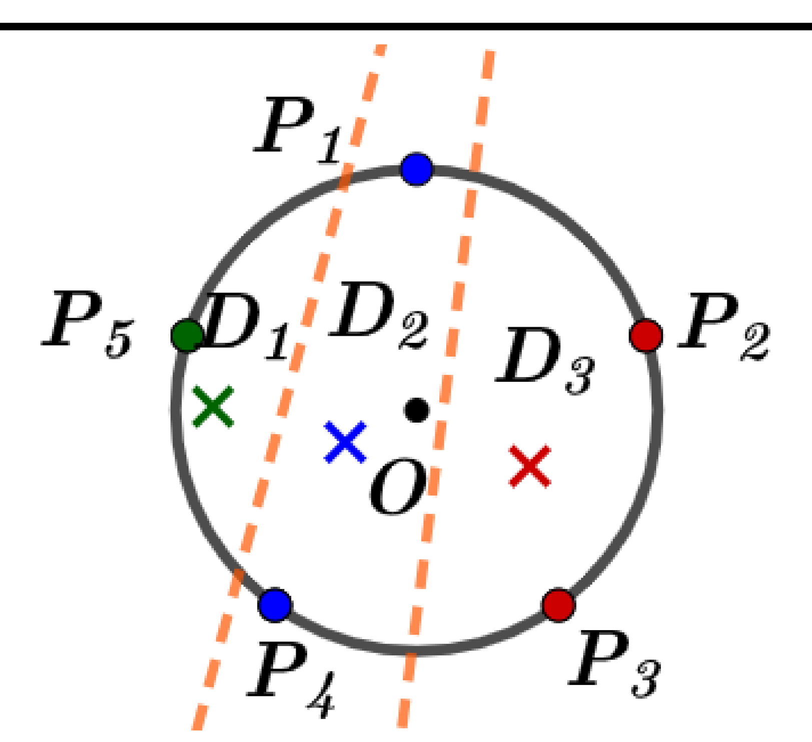
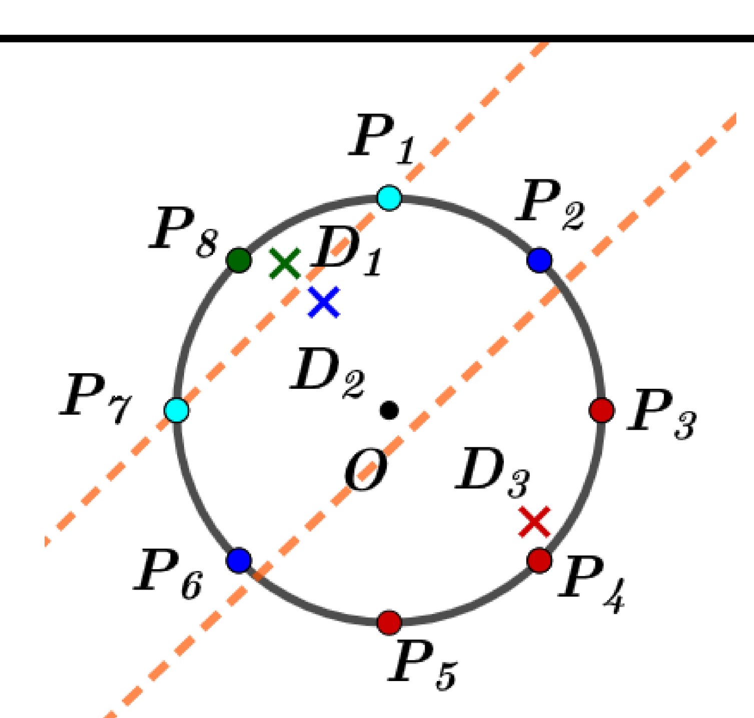
將剩餘的整數分成 6 類，分別是：$C_{n(6,1)}$、$C_{n(6,2)}$、$C_{n(6,3)}$、$C_{n(6,4)}$、$C_{n(6,5)}$、$C_{n(6,0)}$。

經過證明後，發現在$C_{n(6,5)}$、$C_{n(6,0)}$、$C_{n(6,2)}$、$C_{n(6,3)}$ 皆可找到完美平分金幣的的規律。以下是他們的表格統整：

表 6：三支飛鏢情況統整

圓盤狀況	$C_{n(6,5)}$	$C_{n(6,0)}$	$C_{n(6,2)}$	$C_{n(6,3)}$
T_1	$\{P_{2k}\sim P_{4k-1}\}$	$\{P_{2k+1}\sim P_{4k}\}$	$\{P_{2k+1}\sim P_{4k+1}\}$	$\{P_{2k+2}\sim P_{4k+2}\}$
T_2	$\{P_k\sim P_{2k-1}, P_{4k}\sim P_{5k-1}\}$	$\{P_{k+1}\sim P_{2k}, P_{4k+1}\sim P_{5k}\}$	$\{P_{k+1}\sim P_{2k}, P_{4k+2}\sim P_{5k+1}\}$	$\{P_{k+2}\sim P_{2k+1}, P_{4k+3}\sim P_{5k+2}\}$
T_3	$\{P_{5k}\sim P_{k-1}\}$	$\{P_{5k+1}\sim P_k\}$	$\{P_{5k+3}\sim P_{k-1}\}$	$\{P_{5k+4}\sim P_k\}$
$n(T_1)$	$2k$	$2k$	$2k+1$	$2k+1$
T_2、T_3 平分點	無	無	P_k、P_{5k+2}	P_{k+1}、P_{5k+3}

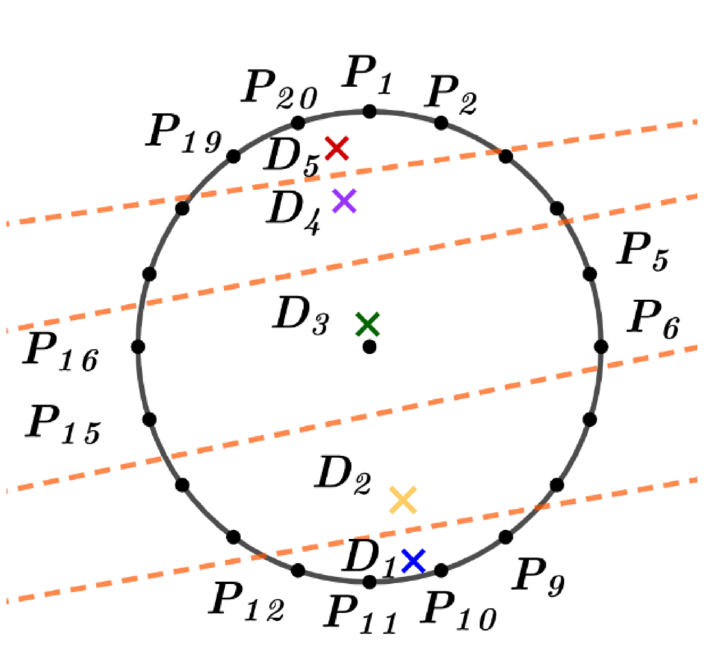
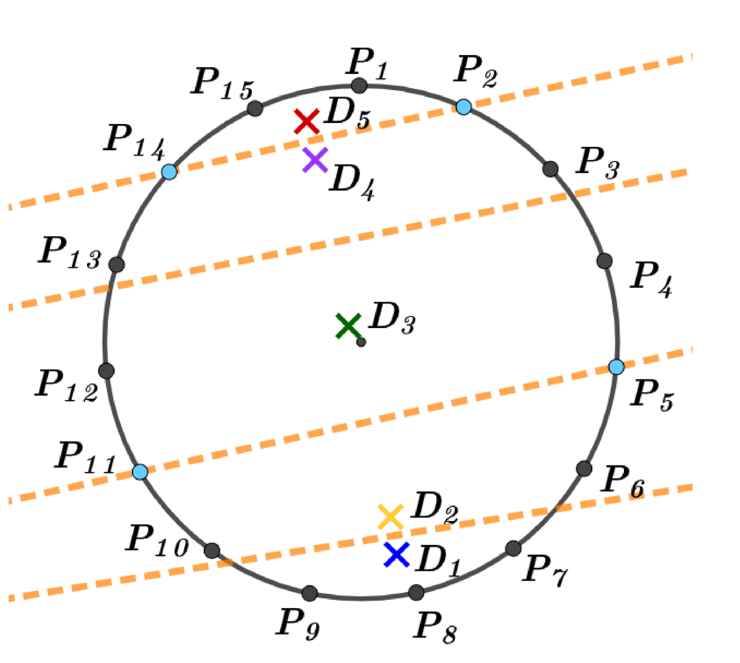
表 7：三支飛鏢平分範例

平分$C_{n(6,5)}$		平分$C_{n(6,2)}$	
此時 $k=1$，且 $T_1=(P_2,P_3)$ $T_2=(P_1,P_4)$，$T_3=(P_5)$		此時 $k=1$，$T_1=\{P_3\sim P_5\}$ $T_2=\{P_2,P_6\}$、$T_3=\{P_8\}$ 且 T_2、T_3 平分點為 P_1、P_7	

五、尋找任意 m 支飛鏢平分金幣的方式

在 C_{tm} 及 C_{tm-1} 兩種情況，可以找到平分法，再根據 t 是否為偶數來決定需不需要平分點。底下以 C_{tm} 為例。

表 8：C_{tm} 情況下的平分方法

$C_{20}(m=5,t=4)$		$C_{15}(m=5,t=3)$	
每組要拿 $4\times\frac{20+1}{2}$ 利用 $P_{10}+P_{11}=P_9+P_{12}\dots\dots$ 以此類推。		每組要拿 $3\times\frac{15+1}{2}$ 利用 $P_7+P_9=2P_8=P_{10}+P_6$ 以此類推，因 t 為奇數，所以需要平分點。	

C_{tm-1} 與上述方法雷同，不一樣的地方為利用 $P_1+P_{tm-2}=2\cdot P_{tm-1}$ ... 以此類推。
（C_{tm} 下是利用 $P_1+P_{tm}=P_2+P_{tm-1}\dots$）。

利用上述的手法來證明並得到定理：

***Thm*1.1**：**$\forall\, t,m\in\mathbb{N}, m>1$ 在 C_{tm} 及 C_{tm-1} 的情況下，皆存在至少一種平分法。**

六、$n(T_r)$ 定理

觀察到在 C_{tm} 的情況下，當 $t=2k$，亦即 t 為偶數時，T_r 裡的元素數量皆為 t 個，也就是 $n(T_r)=2k$。

以下，我們將此歸納成定理 (***Thm* 1.2**)。

***Thm*1.2** ：**在 C_{tm} 的情況下，$\forall\, m\in\mathbb{N}, m\geq 2, t$ 為偶數 , $n(T_r)=t=2k\ (1\leq r\leq m)$**。

證明：

透過前面的證明可以得知，每支飛鏢需要拿到 $2k\times\frac{2km+1}{2}$ 個金幣，又因一對會是 $2km+1$，

故每組裡會有 $2\times\frac{1}{(2km+1)}\times 2k\times\frac{2km+1}{2}=2k$ 個金幣袋，也就是 $n(Tr)=2k$。

伍、討論

再觀察透過 $Thm1.1$ 得出的平分法後，發現在無平分點的情況下 T_1 有規律，將其整理成以下的表格。

一、C_{2km-1}

表 9：C_{2km-1} 情況下，T_1 的一般化

m	2	3	4	5
T_1	$\{P_k\sim P_{3k-1}\}$	$\{P_{2k}\sim P_{4k-1}\}$	$\{P_{3k}\sim P_{5k-1}\}$	$\{P_{4k}\sim P_{6k-1}\}$

觀察表 9 後，發現不同飛鏢之情況的 T_1 差皆為 k；故在 C_{2km-1} 的情況，T_1 皆為 $\{P_{(m-1)k}\sim P_{(m+1)k-1}\}$。

二、C_{2km}

表 10：C_{2km} 情況下，T_1 的一般化

m	2	3	4	5
T_1	$\{P_{k+1}\sim P_{3k}\}$	$\{P_{2k+1}\sim P_{4k}\}$	$\{P_{3k+1}\sim P_{5k}\}$	$\{P_{4k+1}\sim P_{6k}\}$

觀察表 10 後，發現此情況與前一種情況相同，每個不同飛鏢之情況的 T_1 差皆為 k；故在 C_{2km} 的情況，T_1 皆為 $\{P_{(m-1)k+1}\sim P_{(m+1)k}\}$。

陸、結論

一、在 2 支飛鏢下，對於任意的 $C_n\ (n\in\mathbb{N})$ 的情況下，依金幣的袋數分為 $C_{n(4,1)}$、$C_{n(4,2)}$、$C_{n(4,3)}$ 和 $C_{n(4,0)}$ 四種情況。證明皆存在平分金幣的方法和找到此分法的一般式。

二、證明無論 D_1 落在圓盤內何處，都可找到對應的 D_2 來平分金幣與說明 D_1 的限制。

三、說明在 $C_{n(4,3)}$ 和 $C_{n(4,0)}$ 時，給定 D_1 後 D_2 的範圍是由四道弧所圍出的封閉圖形。

四、證明 3 支飛鏢下 $C_{n(6,2)}$、$C_{n(6,3)}$、$C_{n(6,5)}$ 和 $C_{n(6,0)}$ 皆存在完美平分的方法，並找到其一般式。

五、證明 m 支飛鏢下，在 C_{tm} 及 C_{tm-1} 的情況下($t\in\mathbb{N}$)，皆可找到一種平分法。

六、證明 m 支飛鏢在 C_{2km} 的情況下($k\in\mathbb{N}$)，$n(T_r)$ 恆為$2k\ (1\leq r\leq m)$。

柒、未來展望

一、$C_{n(4,1)}$、$C_{n(4,2)}$ 中 D_1 找不到平分點的位置是否能有其他種平分法來平分。

二、找到所有 2 支飛鏢情況下的分法。

三、證明在 3 支飛鏢下，$n\equiv 1(mod\ 3)$的情況，沒有完美平分的方法。

四、凸多邊形邊上等距放金幣後，飛鏢落在內部的平分法。

五、任意 n 支飛鏢平分球體上的金幣。

捌、參考資料

[1] 周代翔、洪銘德（2018）。**金金計較**。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。

[2] 林宥呈、蔡博丞（2021）。**公正無私-海盜分金幣的最佳平分解**。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會。