

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030412

蜿蜒曲折

學校名稱：桃園市立青溪國民中學

作者： 國三 黃悅和 國二 林群峰 國一 陳楚東	指導老師： 林樂廊
---	------------------

關鍵詞：路徑轉折次數、組合幾何、奇偶性

摘要

本作品研究「從幾何圖形問題探究如何以最多或最少的路徑轉折次數通過各類幾何圖形的所有中心」，同時解決科學研習雙月刊的問題。主要將該主題分為：研究各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心、路徑轉折處只能在頂點與路徑轉折處在中心與頂點給定依序輪流條件時，路徑轉折次數的最大值及最小值與邊格數之關係，更可延伸探討長方體及矩形不同路徑走法組合。再者，由路徑的行進方向發現，在將各類幾何圖形的路徑方向化為代數後，可將路徑過程表示為一個代數列。若代數列相鄰的兩項為相同代數，則該路徑為一直線；若相鄰的兩項為不相同代數，則該路徑為路徑轉折處。比較至代數列的最後一項，即可找出該幾何圖形的路徑轉折次數，並用代數列驗證其一般式。

壹、前言

一、研究動機

科學研習雙月刊第六十二卷第三期，第 141 頁[1]。文章敘述如下

將 12 個單位小正方形組成一個 3×4 的矩形，有三個題目：

1. 若要畫一條轉折次數最少的折線通過 12 個小正方形的中心各一次，轉折次數最少是多少？
2. 若要畫一條轉折次數最多的折線通過 12 個小正方形的中心各一次，轉折次數最多是多少？
3. 有哪些可能的轉折次數？

二、文獻探討

(一) 課稅小鎮—稅額最大值走法之最佳解探討[2]，對本研究的幫忙。

找出在長方形及正方形中，對於不同行走路徑與稅額之比較。

(二) 堆集遊戲解法之探討[3]，對本研究的幫忙。

探討棋子移動單向或雙向的最少步數之走法。

如何讓全部的棋子回到最左方的終點處，並達到最少的行走步數？

(三) 蜜蜂路徑—找回失落的數字[4]，對本研究的幫忙。

n 階方陣中，該如何事先填入最少的數字，使其餘數字填入方法唯一。

如何一筆畫將正六邊形及正方形所有切割格子的中心連接？

(四)層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討[5]
對本研究的幫忙。雖然不太能理解文獻的內容，但該作品的評語中提到將古典幾何與代數幾何作連結，使我們從幾何圖形想出組合數學觀點。

三、符號與名詞定義

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

1. 格子：格線與格線所圍起來的區域。
2. V ：頂點，即圖形上格線與格線的交點，如圖 1.3.1。
3. C ：中心，即圖形中每一個格子的重心，如圖 1.3.1。
4. 路徑：本作品中以深藍線表示。路徑不可重疊、不可走出圖形外。
5. 起點與終點：路徑的開頭與結尾，本作品以黑點表示起點，如上圖 1.3.1。
6. T ：路徑轉折次數，圖形路徑轉折處的總數。路徑轉折處即路徑中非平角 (180°)之處，不含起點與終點。例如：上圖 1.3.1， $T=16$ 。

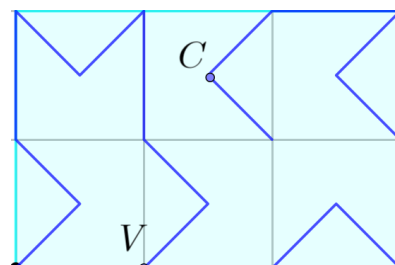


圖 1.3.1

四、研究目的

- (一) 探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心。
- (二) 探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在頂點。
- (三) 探討矩形路徑轉折處在中心與頂點依序輪流。
- (四) 將找出的規律，運用數學邏輯，並利用 Scratch 程式寫出執行驗證。

貳、研究設備及器材

實驗紀錄本、彩色筆及鉛筆、筆電、隨身碟、GeoGebra 繪圖軟體，Scratch 程式軟體

參、研究過程或方法

一、研究架構

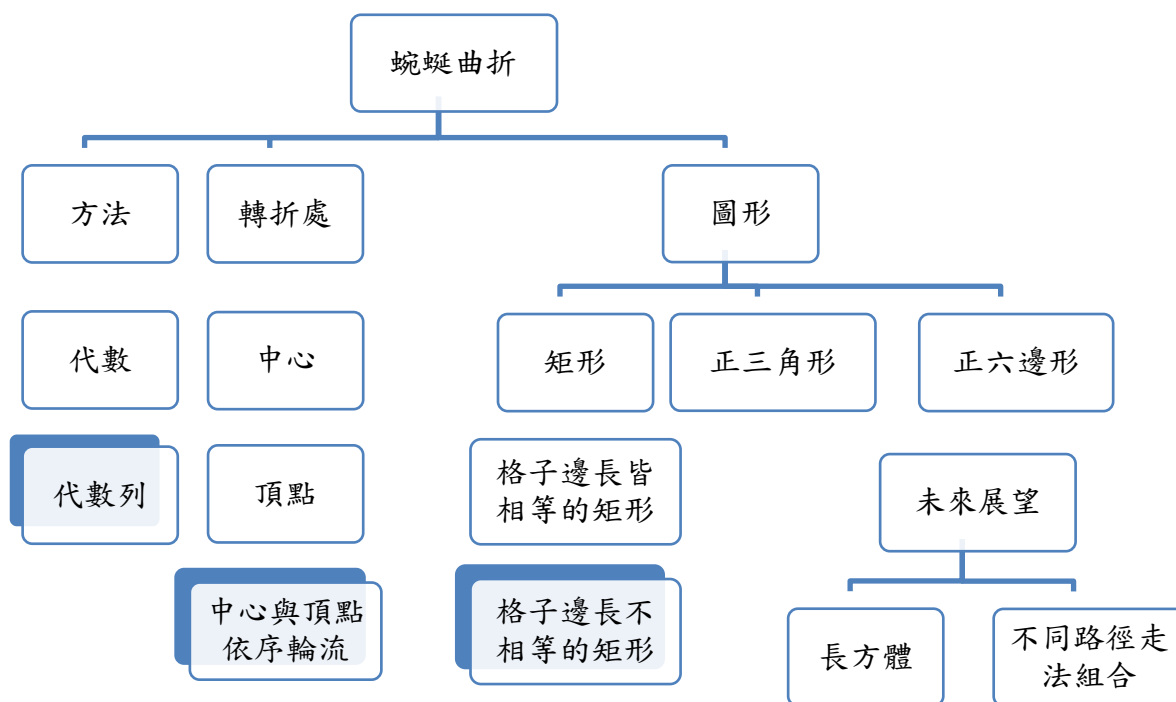


圖 3.1：研究架構圖

二、研究特色

本作品主要分兩個方法，解決如何以最少或最多的路徑轉折次數通過幾何圖形的所有中心的問題。

(一) 幾何圖形觀點：

探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心、路徑轉折處只能在頂點與路徑轉折處在中心與頂點依序輪流時，路徑轉折次數的最大值及最小值與邊格數之關係，進而延伸探討長方體及矩形不同路徑走法組合。

(二) 代數幾何觀點：

此為本作品最重要的突破關鍵。將各類幾何圖形的路徑方向化為代數，並列為一個代數列。接著比較代數列相鄰的兩項，若為相同代數，則該路徑為一直線，因路徑方向相同；若為不相同代數，則該路徑為路徑轉折處，因路徑方向不同。並將此演算法撰寫成程式，可用來驗證路徑轉折次數的最大值與最小值是否正確，亦表示演算法並無錯誤。

綜合上述兩觀點，亦即為組合幾何。也就是將幾何圖形以座標的方式表示，路徑以代數表示，而代數為座標的變化量，最後利用演算法找出路徑轉折次數，進而導出路徑轉折次數的最大值及最小值的一般式。

肆、研究結果

一、代數列

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

1. 代數列：在各類幾何圖形中，路徑移動的方向如圖 4.1.2~圖 4.1.11 所示

(矩形有 8 個方向，正三角形有 12 個方向，正六邊形有 6 個方向)。

路徑移動方向所形成的數列稱為代數列，以 $\{a_k\}$ 表示。例如代數列 $\{3,5,7\}$

為路徑向右移動一個格子的距離，再向下移動一個格子的距離，

再向左移動一個格子的距離，如圖 4.1.1。

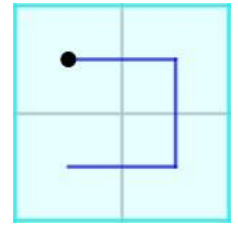


圖 4.1.1

各幾何圖形位於中心的路徑走法：

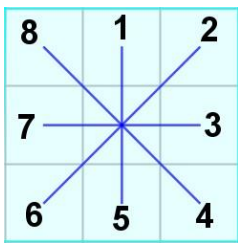


圖 4.1.2

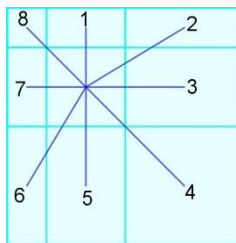


圖 4.1.3

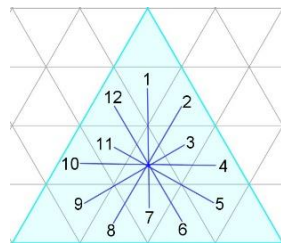


圖 4.1.4

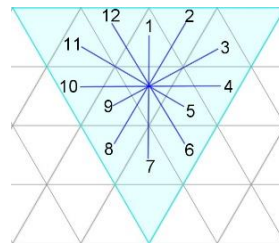


圖 4.1.5

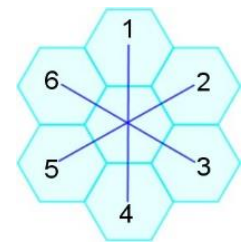


圖 4.1.6

各幾何圖形位於頂點的路徑走法：

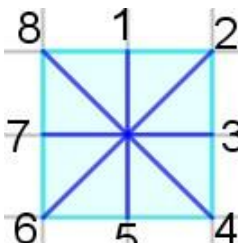


圖 4.1.7

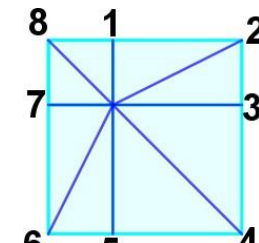


圖 4.1.8

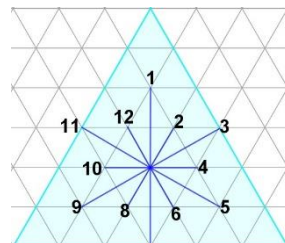


圖 4.1.9

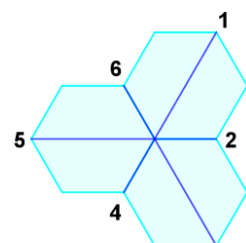


圖 4.1.10

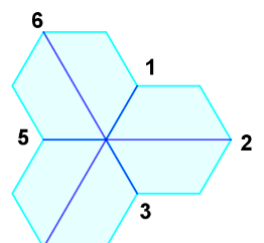


圖 4.1.11

二、演算法(Algorithm)

步驟一：將各類幾何圖形之路徑以代數列 $\{a_k\}$ 表示，令 $k=1$ 和 $T=0$ 。

步驟二：當 $a_k = a_{k+1}$ ，則 $T \leftarrow T+0$ ；當 $a_k \neq a_{k+1}$ ，則 $T \leftarrow T+1$ 。

步驟三：重複步驟二直到 $\{a_k\}$ 的最後一項，對應的 T 即為該圖形的路徑轉折次數。

(我們以資訊工程常用的表示方法來表示演算法)

演算法說明：

步驟一：將各類幾何圖形之路徑方向以代數表示，並列為一個代數列。

步驟二：比較代數列的第 k 項與第 $k+1$ 項， k 由 1 開始。若為相同代數，則該路徑為一直線，因相鄰的兩項為相同代數時，表示路徑走法為同一方向，故該段路徑為一直線；若為不相同代數，則該路徑為轉折處，因相鄰的兩項為不同代數時，表示路徑走法為不同方向，則路徑的方向就會改變，故該段路徑為路徑轉折處。

步驟三：重複步驟二直到最後一項，即可找出該圖形的路徑轉折次數。

例如：代數列 $\{7,7,5,3,3\}$ ，如圖 4.2.1。其中 $a_1 = a_2 = 7$ ， $T = 0 + 0 = 0$ ；

$a_2 = 7 \neq a_3 = 5$ ， $T = 0 + 1 = 1$ ； $a_3 = 5 \neq a_4 = 3$ ， $T = 1 + 1 = 2$ ；

$a_4 = a_5 = 3$ ， $T = 2 + 0 = 2$ 。故其路徑轉折次數為 $T = 2$ 。

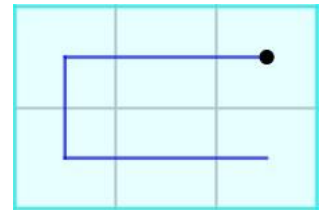


圖 4.2.1

三、組合幾何

(一) 探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心：

1. 矩形

(1) 格子邊長皆相等的矩形 $(m_i \times n_j)$ ($n \geq m$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

a. 矩形 $(m_i \times n_j)$ ：表示矩形由 $m \times n$ 個格子組成($n \geq m$)，其中每一個格子的邊長為 i 和 j 。此時，矩形的邊長為 $i \times m$ ， $j \times n$ 。邊格數為 m, n ， $m_i = i \times m$ ， $n_j = j \times n$ 。

考慮 $m = 3$ ， $n = 4$ ， $i = 3$ ， $j = 2$ ，則矩形 $3_3 \times 4_2$ 如圖 4.3.1 所示。

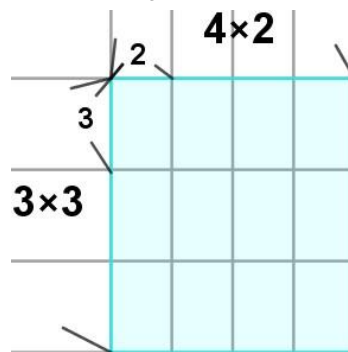


圖 4.3.1

b. $T_{max}^C(m_i \times n_j)$ ：矩形 $(m_i \times n_j)$ 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最大值。

c. $T_{min}^C(m_i \times n_j)$ ：矩形 $(m_i \times n_j)$ 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最小值。

格子邊長皆相等的矩形，每一個格子的邊長皆固定(格子邊長為 i, j)。因此路徑從每個中心到另一中心的距離與角度皆會固定，並不會發生轉折，故格子邊長皆相等的矩形路徑轉折處只能在中心時，不論格子邊長 i, j 為多少，但邊格數皆相同時，例如 $i, j = 2, 3$ 、 $i, j = 2, 5$ 、 $i, j = 3, 7$ ，但邊格數 m, n 皆為 $2, 3$ ，其 $T_{max}^C(2_2 \times 3_3)$ 、 $T_{max}^C(2_2 \times 3_5)$ 、 $T_{max}^C(2_3 \times 3_7)$ 的數值皆相同。同理 $T_{min}^C(2_2 \times 3_3)$ 、 $T_{min}^C(2_2 \times 3_5)$ 、 $T_{min}^C(2_3 \times 3_7)$ 的數值也相同。

性質 4.3.1： $m > 1$ 的格子邊長皆相等的矩形，路徑轉折處只能在中心， $T_{max}^C(m_i \times n_j) = nm - 2$ 。

[證明]：格子邊長皆相等的矩形中心個數為 mn ，將每一段中心到中心的路徑化為代數，則代數列一共 $mn - 1$ 項。由第一項開始，比較代數列中相鄰的兩項，共比較 $mn - 2$ 次，若代數列中任意相鄰的兩個代數皆不同，則路徑轉折次數的最大值為 $mn - 2$ 。 ■

[實例]：路徑轉折處只能在中心的格子邊長皆相等的矩形 $T_{max}^C(m_i, n_j)$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.2 $T_{max}^C(2_i \times 3_j) = 4$ 其代數列為 $\{4, 2, 5, 8, 6\}$

圖 4.3.3 $T_{max}^C(2_i \times 4_j) = 6$ 其代數列為 $\{4, 2, 4, 1, 6, 8, 6\}$

圖 4.3.4 $T_{max}^C(2_i \times 5_j) = 8$ 其代數列為 $\{4, 2, 4, 2, 5, 8, 6, 8, 6\}$

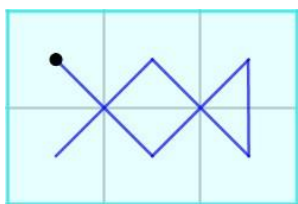


圖 4.3.2

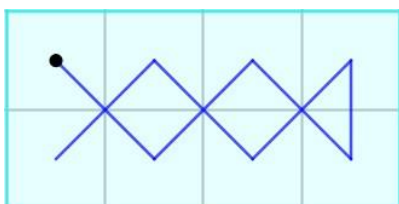


圖 4.3.3

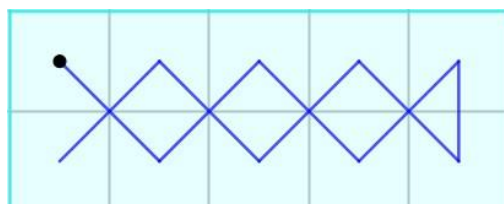


圖 4.3.4

由上述三圖及其代數列可發現，代數列中的任兩相鄰的代數皆不相同，可判斷路徑在圖形上的每個中心都轉折，且圖形上的表現亦是如此。

性質 4.3.2： 格子邊長皆相等的矩形路徑轉折處只能在中心， $T_{min}^C(m_i \times n_j) = 2m - 2$ 。

[證明]：首先，當代數列中任意相鄰的兩個代數皆相同時，路徑轉折次數的最小值應為 0，但在此情形下，路徑只可向同一方向前進。因路徑不可走出圖形外，且原題要求路徑須通過所有中心，但在 $m > 1$ 時，路徑需向下通過其它中心，故路徑轉折次數的最小值不可能為 0。

接著，先以平行邊長 n (因 $n \geq m \geq 1$) 的路徑通過中心，經轉折再通過另一排平行邊長 n 的中心，如圖 4.3.5。可發現 $T_{min}^C(m_i \times n_j)$ 的路徑是以平行邊長 n 的路徑通過中心，直到圖形邊界才轉折(因路徑不可走出圖形外)，共通過 m 排平行邊長 n 的中心，且每通過 1 排平行邊長 n 的中心時就須轉折，轉折次數即增加 2。故可知矩形路徑轉折處只能在中心

$$T_{min}^C(m_i \times n_j) = 2m - 2。$$

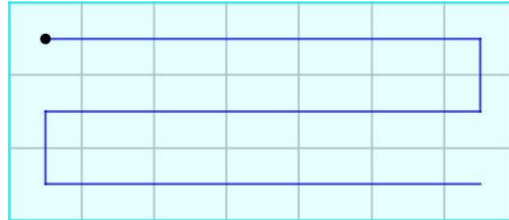


圖 4.3.5

[實例]：路徑轉折處只能在中心的格子邊長皆相等的矩形 $T_{min}^C(m_i \times n_j)$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.6 $T_{min}^C(2_i \times 4_j) = 2$ 其代數列為 $\{3,3,3,5,7,7,7\}$

圖 4.3.7 $T_{min}^C(2_i \times 5_j) = 2$ 其代數列為 $\{3,3,3,3,5,7,7,7,7\}$

圖 4.3.8 $T_{min}^C(3_i \times 5_j) = 4$ 其代數列為 $\{3,3,3,3,5,7,7,7,7,5,3,3,3,3\}$

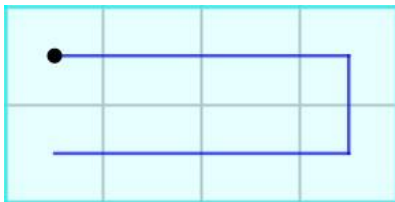


圖 4.3.6

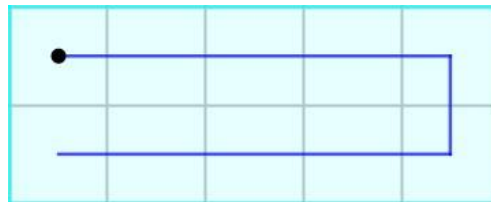


圖 4.3.7

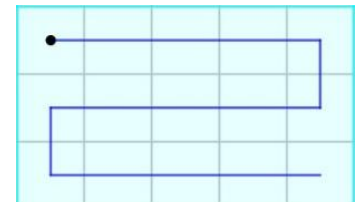


圖 4.3.8

由上述三圖及其代數列可發現，當邊格數 m 不變且 n 增加時， $T_{min}^C(m_i \times n_j)$ 不會改變；當邊格數 m 增加且 n 不變時，因路徑需多通過一排平行 n 的中心， $T_{min}^C(m_i \times n_j)$ 會增加 2。

(2) 格子邊長不相等的矩形 $(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)})(n \geq m)$

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

a. 矩形 $(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)})$ ：表示由 $m \times n$ 個格子組合的矩形 $(n \geq m)$ ，其中第 (s, t) 位置的格子邊長為 s, t 。此時，矩形的邊長為 $1+2+3...+m$ ， $1+2+3...+n$ ，邊格數為 $m \times n$ 個。

考慮 $n=3, m=2$ ，則矩形 $(2_{(1,2)} \times 3_{(1,2,3)})$ 如圖 4.3.9 所示。

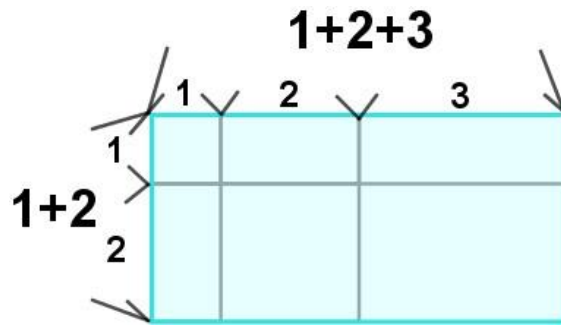


圖 4.3.9

b. $T_{max}^C(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)})$: 矩形($m_{(1...m)} \times n_{(1...n)}$) 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最大值。

c. $T_{min}^C(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)})$: 矩形($m_{(1...m)} \times n_{(1...n)}$) 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最小值。

若代數列中相鄰的兩項為相同代數且該代數為路徑走法 2、4、6、8，因格子的邊長不相同，該段路徑為路徑轉折處，如下圖 4.3.10。除了格子邊長不相等的矩形對稱軸斜線，因比例化簡後皆為 1:1，如下圖 4.3.11。若因中心在同一直線上且直線平行邊長 n ，如圖下 4.3.12，因此，格子邊長不相等的矩形，路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最大值及最小值的結果同格子邊長皆相等的矩形。

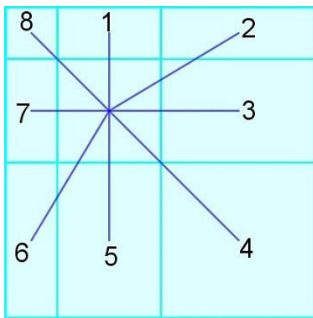


圖 4.3.10



圖 4.3.11

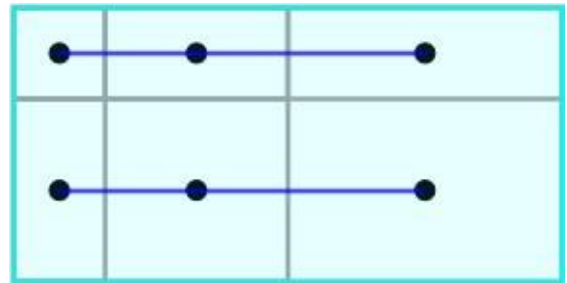


圖 4.3.12

2. 正三角形 (n_{tri}) ($n > 1$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) 正三角形 (n_{tri}) : 邊格數為 n 的正三角形 ($n > 1$)。

(2) $T_{max}^C(n_{tri})$: 正三角形 (n_{tri}) 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最大值。

(3) $T_{min}^C(n_{tri})$: 正三角形 (n_{tri}) 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最小值。

雖然正三角形中心會分為正立的正三角形中心與倒立的正三角形中心，因路徑的方向不會改變，不會因此而產生路徑轉折處。例如下圖 4.3.13，代數列 $\{6,11,9,5,5,10,10,3\}$ ，其中代數 5 與 5 分別為路徑從正立的正三角形中心走到倒立的正三角形中心與路徑從倒立的正三角形中心走到正立的正三角形中心，因路徑的方向不變，故路徑轉折次數不變。

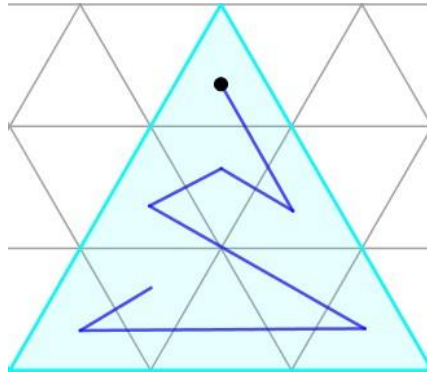


圖 4.3.13

性質 4.3.3：正三角形路徑轉折處只能在中心， $T_{max}^C(n_{tri}) = n^2 - 2$ 。

[證明]：同性質 4.3.1 證明，雖然代數不相同，但代數列項數最大值為 $n^2 - 1$ 。由第一項開始，比較代數列中相鄰的兩項，共比較 $n^2 - 2$ 次，故 $T_{max}^C(n_{tri}) = n^2 - 2$ 。 ■

[實例]：路徑轉折處只能在中心的正三角形 $T_{max}^C(n_{tri})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.14 $T_{max}^C(3_{tri}) = 7$ 其代數列為 $\{6,11,9,8,3,5,3,5\}$

圖 4.3.15 $T_{max}^C(4_{tri}) = 14$ 其代數列為 $\{6,11,9,8,3,5,3,5,6,11,9,11,9,11,9\}$

圖 4.3.16 $T_{max}^C(5_{tri}) = 23$ 其代數列為 $\{6,11,9,8,3,5,3,5,6,11,9,11,9,11,9,8,3,5,3,5,3,5,3,5\}$

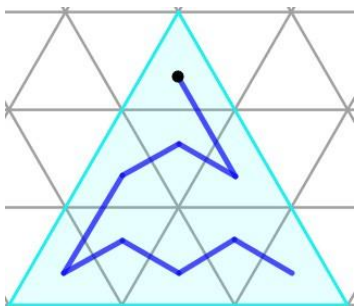


圖 4.3.14

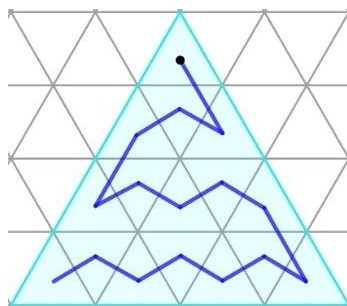


圖 4.3.15

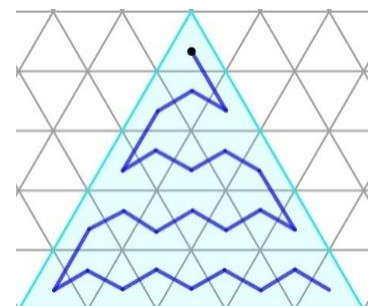


圖 4.3.16

由上述三圖之路徑代數列可發現，代數列中的任兩個相鄰的代數皆不相同，即路徑在圖形上的每一個中心都轉折。由此可知正三角形路徑轉折處只能在中心， $T_{min}^C(n_{tri}) = n^2 - 2$ 。

性質 4.3.4：正三角形路徑轉折處只能在中心， $n=3k$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-3$ ； $n=3k-1$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-6$ ； $n=3k-2$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-9$ 。

[證明]：同性質 4.3.2 證明，路徑轉折次數的最小值不可能為 0。且路徑可隨著正三角形的邊框來通過中心，直到圖形邊界才轉折。例如圖 4.3.17，因正三角形的正中心可分為：倒立的小正三角形、正立的小正三角形與一個點三種，如下圖 4.3.18、圖 4.3.19、圖 4.3.20。故可知正三角形路徑轉折處只能在中心路徑轉折次數也分三類， $n=3k$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-3$ ； $n=3k-1$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-6$ ； $n=3k-2$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-9$ 。

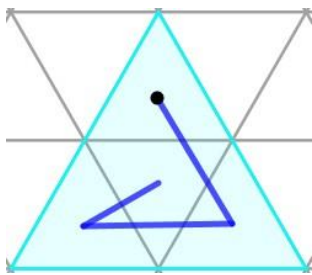


圖 4.3.17

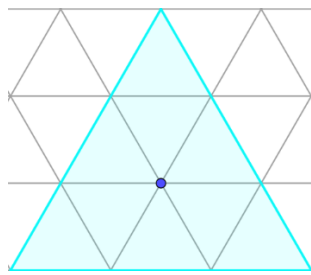


圖 4.3.18

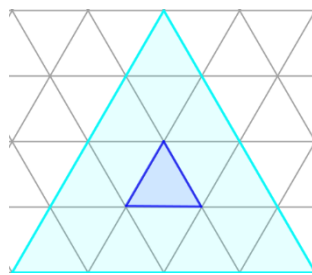


圖 4.3.19

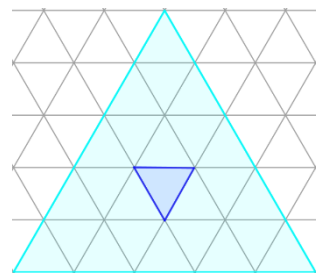


圖 4.3.20 ■

[實例]：路徑轉折處只能在中心的正三角形 $T_{min}^C(n_{tri})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.21 $T_{min}^C(3_{tri})=5$ 其代數列為 $\{6,6,10,10,2,3,6,10\}$

圖 4.3.22 $T_{min}^C(4_{tri})=7$ 其代數列為 $\{6,6,6,10,10,10,2,2,3,6,6,10,10,2,5\}$

圖 4.3.23 $T_{min}^C(5_{tri})=10$ 其代數列為 $\{6,6,6,6,10,10,10,10,2,2,2,3,6,6,6,10,10,10,2,2,5,6,10,3\}$

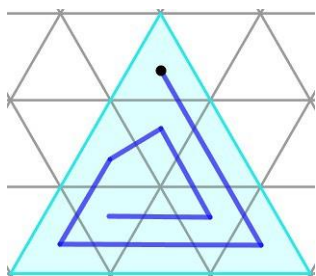


圖 4.3.21

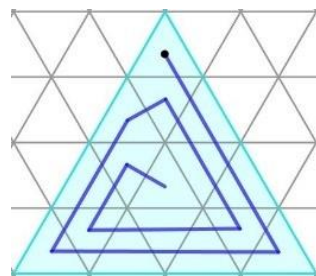


圖 4.3.22

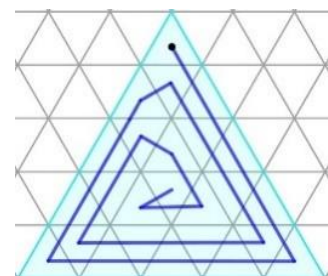


圖 4.3.23

由上述三圖之路徑代數列可發現，路徑皆隨著正三角形的邊框來通過中心，直到圖形邊界才轉折。但因正三角形的正中心可分為，倒立的正三角形、點、正立的正三角形，故可知正三角形路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數也分三類， $n=3k$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-3$ ； $n=3k-1$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-6$ ； $n=3k-2$ ， $T_{min}^C(n_{tri})=8k-9$ 。

3. 正六邊形 (n_{hex}) ($n > 1$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) 正六邊形 (n_{hex})：邊格數為 n 的正六邊形 ($n > 1$)。

(2) $T_{max}^C(n_{hex})$ ：正六邊形 (n_{hex}) 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最大值。

(3) $T_{min}^C(n_{hex})$ ：正六邊形 (n_{hex}) 路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最小值。

性質 4.3.5：正六邊形路徑轉折處只能在中心， $T_{max}^C(n_{hex}) = 3n^2 - 3n - 1$ 。

[證明]：同性質 4.3.1 證明，雖然代數不相同，但代數列項數最大值為 $3n^2 - 3n$ 。由第一項開始，比較代數列中相鄰的兩項，共比較 $3n^2 - 3n - 1$ 次，故 $T_{max}^C(n_{hex}) = 3n^2 - 3n - 1$ 。 ■

[實例]：路徑轉折處只能在中心的正六邊形 $T_{max}^C(n_{hex})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.24 $T_{max}^C(2_{hex}) = 4$ 其代數列為 $\{5, 4, 2, 4, 2, 1\}$

圖 4.3.25 $T_{max}^C(3_{hex}) = 8$ 其代數列為 $\{5, 4, 6, 4, 3, 4, 3, 2, 4, 2, 1, 3, 1, 6, 2, 6, 5, 4\}$

圖 4.3.26 $T_{max}^C(4_{hex}) = 12$ 其代數列為 $\{5, 4, 6, 5, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 4, 2, 4, 3, 2, 6, 2, 3, 2, 6, 2, 6, 2, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 1, 3\}$

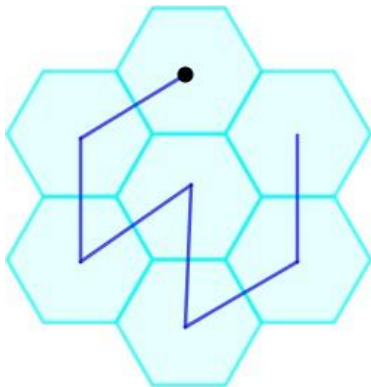


圖 4.3.24

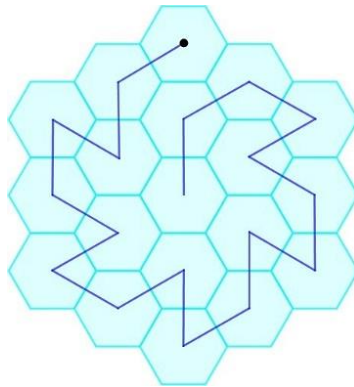


圖 4.3.25

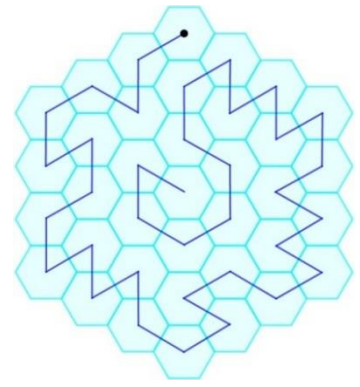


圖 4.3.26

由上述三圖之路徑代數列可發現，當邊格數 n 增加時，代數列中的任兩相鄰的代數皆不相同，故可判斷路徑在圖形上的每個中心都轉折，且圖形上的表現亦是如此。由此可知正六邊形路徑轉折處只能在中心時， $T_{max}^C(n_{hex}) = 3n^2 - 3n - 1$ 。

性質 4.3.6：正六邊形路徑轉折處只能在中心， $T_{min}^C(n_{hex}) = 4n - 4$ 。

[證明]：同性質 4.3.2 證明，路徑轉折次數的最小值不可能為 0，且以平行邊長 n 的路徑通過中心，直到圖形邊界才轉折，如下圖 4.3.27。共通過 $2n-1$ 排中心，且每通過 1 排中心時就須轉折 2 次，故可知正六邊形路徑轉折處只能在中心， $T_{min}^C(n_{hex}) = 2(2n-1) - 2 = 4n - 4$ 。

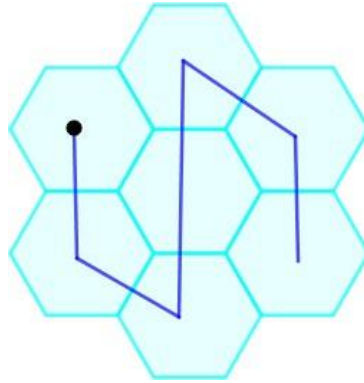


圖 4.3.27

[實例]：路徑轉折處只能在中心的正六邊形 $T_{min}^C(n_{hex})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.28 $T_{min}^C(2_{hex}) = 4$ 其代數列為 $\{4, 3, 1, 1, 3, 4\}$

圖 4.3.29 $T_{min}^C(3_{hex}) = 8$ 其代數列為 $\{4, 4, 3, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 3, 4, 4\}$

圖 4.3.30 $T_{min}^C(4_{hex}) = 12$ 其代數列為
 $\{4, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 4\}$

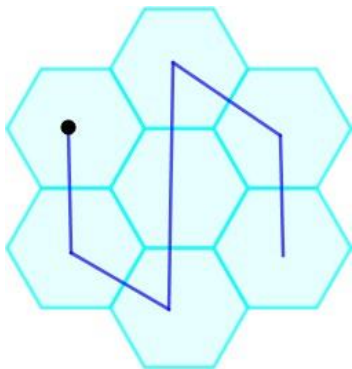


圖 4.3.28

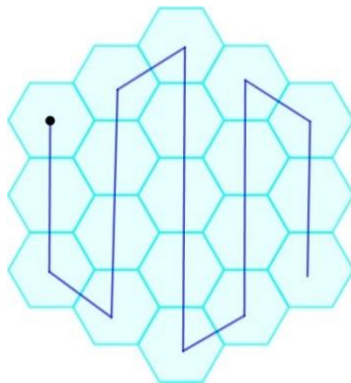


圖 4.3.29

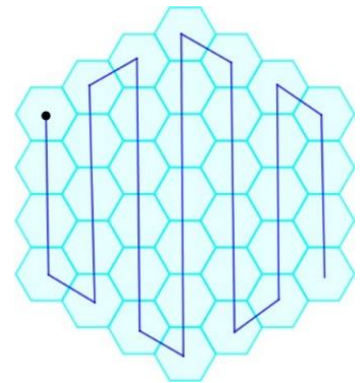


圖 4.3.30

由上述三圖之路徑代數列可發現，當邊格數 n 增加時，路徑需多通過 2 排中心，可知邊格數 n 增加時，路徑轉折次數需增加 4，故正六邊形路徑轉折處只能在中心時， $T_{min}^C(n_{hex}) = 4n - 4$ 。

(二) 探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在頂點：

1. 矩形

(1) 格子邊長皆相等的矩形 $(m_i \times n_j)$ ($n \geq m$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

a. $T_{max}^V(m_i \times n_j)$ ：矩形 $(m_i \times n_j)$ 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最大值。

b. $T_{min}^V(m_i \times n_j)$ ：矩形 $(m_i \times n_j)$ 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最小值。

因每一個格子的邊長皆固定，因此路徑從頂點到另一頂點的距離與角度皆會固定，並不會發生轉折。故格子邊長皆相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點時，不論格子邊長 i, j 為多少，當在 m, n 皆相同時， $T_{max}^V(m_i \times n_j)$ 的數值會相同，同理 $T_{min}^V(m_i \times n_j)$ 的數值也相同。而格子邊長皆相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點時，只有路徑走法 2、4、6、8 可通過中心，如下圖 4.3.31，且原題目要求路徑需通過所有中心，故代數列中，路徑走法為 2、4、6、8 的項數需與中心的個數相同。

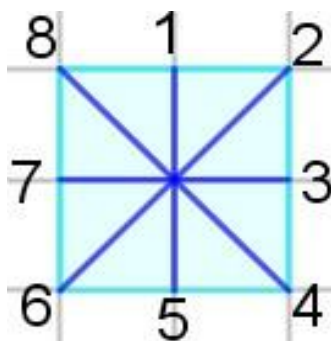


圖 4.3.31

性質 4.3.7：格子邊長皆相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點， $T_{max}^V(m_i \times n_j) = (m+1)n$ 。

[證明]：格子邊長皆相等的矩形，頂點個數為 $(m+1)(n+1)$ ，將每一段頂點到頂點的路徑化為代數，則代數列總共 $(m+1)(n+1)-1$ 項。由第一項開始，比較代數列中相鄰的兩項，共比較 $(m+1)(n+1)-2$ 次，路徑轉折次數應為 $(m+1)(n+1)-2$ 。但若代數列中，相鄰任兩項皆為不同代數時，如圖 4.3.32，路徑並無通過所有中心，因路徑需通過所有中心，如圖 4.3.33，會使路徑沒通過 $m-1$ 個頂點，故格子邊長皆相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{max}^V(m_i \times n_j) = (m+1)(n+1) - (m-1) - 2 = (m+1)(n+1) - m - 1 = (m+1)n。$$

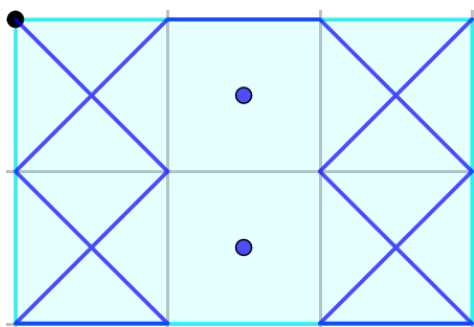


圖 4.3.32

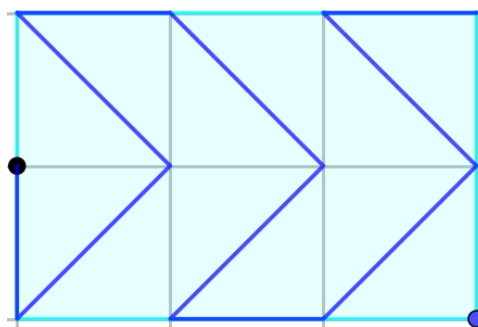


圖 4.3.33

■

[實例]：路徑轉折處只能在頂點的格子邊長皆相等的矩形 $T_{max}^V(m_i \times n_j)$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.34 $T_{max}^V(2_i \times 3_j) = 9$ 其代數列為 $\{5, 2, 8, 3, 4, 6, 3, 2, 8, 3\}$

圖 4.3.35 $T_{max}^V(2_i \times 4_j) = 12$ 其代數列為 $\{5, 2, 8, 3, 4, 6, 3, 2, 8, 3, 4, 6, 3\}$

圖 4.3.36 $T_{max}^V(3_i \times 4_j) = 16$ 其代數列為 $\{5, 2, 8, 2, 3, 6, 4, 6, 3, 2, 8, 2, 3, 6, 4, 6, 3\}$

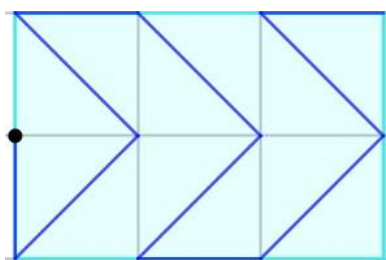


圖 4.3.34

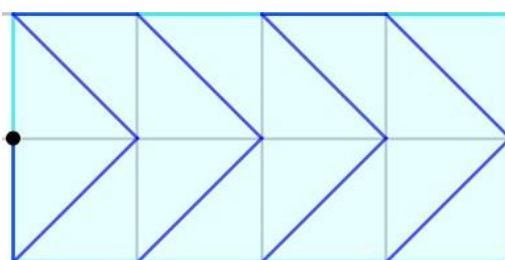


圖 4.3.35

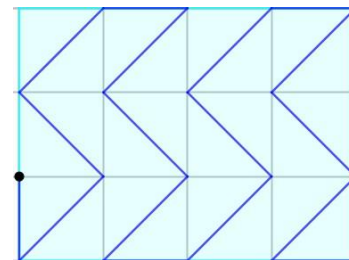


圖 4.3.36

由上述三圖之路徑代數列可發現，當邊格數 m 不變且 n 增加時，因路徑須向後通過 m 個中心， $T_{max}^V(m_i \times n_j)$ 會增加 $m+1$ ；當邊格數 m 增加且 n 不變時，則因路徑需多通過 n 個中心， $T_{max}^V(m_i \times n_j)$ 會增加 n 。可知矩形路徑轉折處只能在頂點， $T_{max}^V(m_i \times n_j) = (m+1)n$ 。

性質 4.3.8： $m > 1$ 的格子邊長皆相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{min}^V(m_i \times n_j) = 2m + 2n - 4。$$

[證明]：當代數列中任意相鄰的兩項皆相同時，路徑轉折次數的最小值應為 0，但在此情形下，路徑只可向同一方向前進，且原題要求路徑須通過所有中心，故路徑轉折次數的最小值不可能為 0。因路徑走法 2、4、6、8 需有 $m \times n$ 個，而路徑走法 2、4、6、8 都是格子邊長皆相等的矩形每一個格子的對角線，因此可將每一個格子的對角線相連，如圖 4.3.37。總共

$m+n-1$ 條對角線，且每利用對角線通過1排中心時就須轉折，故可知矩形路徑轉折處只能在頂點， $T_{min}^V(m_i \times n_j) = 2(m+n-1) - 2 = 2m+2n-4$ 。

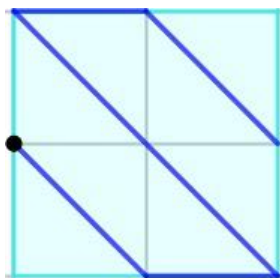


圖 4.3.37

[實例]：路徑轉折處只能在頂點的格子邊長皆相等的矩形 $T_{min}^V(m_i \times n_j)$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.38 $T_{min}^V(2_i \times 3_j) = 6$ 其代數列為 $\{4,3,8,8,3,4,4,1,8\}$

圖 4.3.39 $T_{min}^V(2_i \times 4_j) = 8$ 其代數列為 $\{4,3,8,8,3,4,4,3,8,8,3,4\}$

圖 4.3.40 $T_{min}^V(3_i \times 4_j) = 10$ 其代數列為 $\{4,3,8,8,1,4,4,4,3,8,8,8,3,4,4,1,8\}$

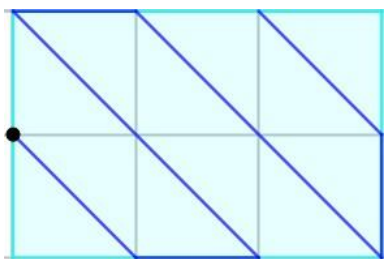


圖 4.3.38

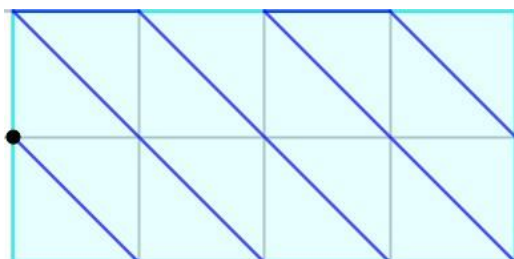


圖 4.3.39

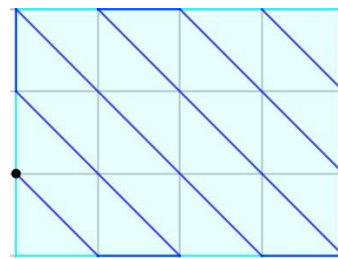


圖 4.3.40

由上述三圖之路徑代數列可發現，不論邊格數 m 增加或邊格數 n 增加，路徑皆須利用對角線多通過一排中心，且每次的轉折，路徑轉折次數皆會增加2，故可知矩形路徑轉折處只能在頂點， $T_{min}^V(m_i \times n_j) = 2m+2n-4$ 。

(2) 格子邊長不相等的矩形 $(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ ($n \geq m$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

- a. $T_{max}^V(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)})$ ：矩形 $(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最大值。
- b. $T_{min}^V(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ ：矩形 $(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最小值。

若代數列中兩個相鄰的項為相同代數，且該代數為路徑走法 2、4、6、8，因格子邊長不相等的矩形每一個格子的比例不盡相同，該段路徑為路徑轉折處，如下圖 4.3.41。除了格子邊長不相等的矩形對稱軸的斜線，因比例化簡後皆為 1：1，如下圖 4.3.42。

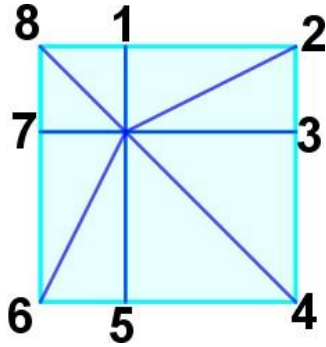


圖 4.3.41

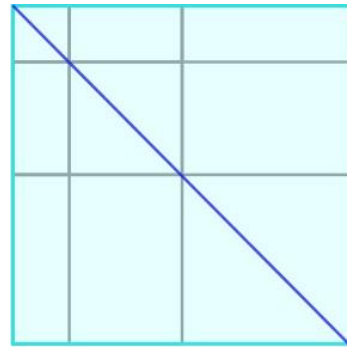


圖 4.3.42

性質 4.3.9： 格子邊長不相等的矩形路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{max}^V(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)}) = (m+1)(n+1) - 2。$$

[證明]：格子邊長不相等的矩形，頂點個數為 $(m+1)(n+1)$ ，將每一段頂點到頂點的路徑化為代數，則代數列總共 $(m+1)(n+1) - 1$ 項。由第一項開始，比較代數列中相鄰的兩項，共比較 $(m+1)(n+1) - 2$ 次，若代數列中任意相鄰的兩個代數皆不同且代數列中的路徑走法 2、4、6、8 共有 $m \times n$ 個，則格子邊長不相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{max}^V(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)}) = (m+1)(n+1) - 2。 \quad \blacksquare$$

[實例]：路徑轉折處只能在頂點的格子邊長不相等的矩形 $T_{max}^V(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.43 $T_{max}^V(2_{(1,2)}, 2_{(1,2)}) = 7$ 其代數列為 $\{3, 6, 5, 2, 2, 5, 6, 3\}$

圖 4.3.44 $T_{max}^V(2_{(1,2)}, 3_{(1,2,3)}) = 10$ 其代數列為 $\{3, 6, 5, 2, 2, 3, 6, 6, 3, 2, 5\}$

圖 4.3.45 $T_{max}^V(3_{(1,2,3)}, 3_{(1,2,3)}) = 14$ 其代數列為 $\{3, 6, 5, 2, 2, 3, 6, 6, 6, 3, 2, 2, 5, 6, 3\}$

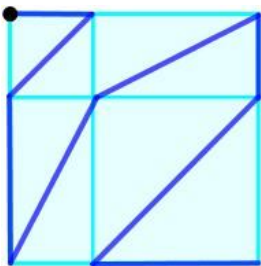


圖 4.3.43

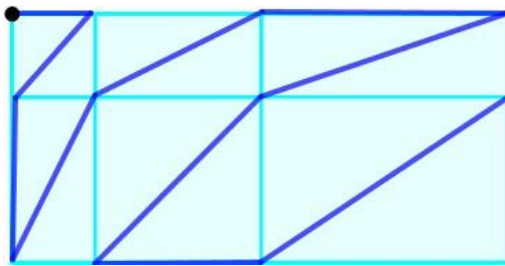


圖 4.3.44

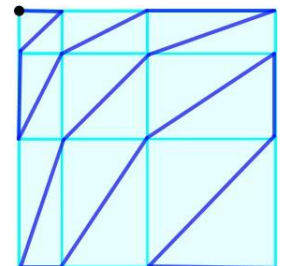


圖 4.3.45

由上述三圖之路徑代數列可發現，不論邊格數 n 增加或邊格數 m 增加，若代數列中兩個相鄰的項為相同代數且該代數為路徑走法 2、4、6、8，可將其視為不同代數，故可判斷路徑在圖形上的每個頂點都轉折(除了起點與終點)。由此可知格子邊長不相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點， $T_{max}^V(m_{(1...m)} \times n_{(1...n)}) = (m+1)(n+1) - 2$ 。

性質 4.3.10：格子邊長不相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{min}^V(m_{(1...m)}, n_{(1...n)}) = m(n+1) - 2。$$

[證明]：格子邊長不相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點時，通過中心的路徑，除了格子邊長不相等的矩形對稱軸斜線外，不論路徑怎麼走都一定會轉折。因此，若路徑每次轉折都通過中心，則代數列總共 $m \times n$ 項。但路徑每次轉折都通過中心時，會出現如下圖 4.3.46 的情形，路徑會重複通過同一個頂點，則需再多一個轉折，使路徑不會重複通過同一個頂點。最終會使代數列的總項數增加 $m-1$ 項，故代數列總項數為 $m \times (n+1) - 1$ ，則格子邊長不相等的矩形，路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最小值為 $m(n+1) - 2$ 。

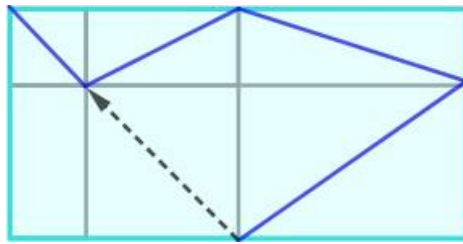


圖 4.3.46

[實例]：路徑轉折處只能在頂點的格子邊長不相等的矩形 $T_{min}^V(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.47 $T_{min}^V(2_{(1,2)}, 2_{(1,2)}) = 4$ 其代數列為 $\{4, 2, 5, 6, 8\}$

圖 4.3.48 $T_{min}^V(2_{(1,2)}, 3_{(1,2,3)}) = 6$ 其代數列為 $\{4, 2, 4, 5, 8, 6, 8\}$

圖 4.3.49 $T_{min}^V(3_{(1,2,3)}, 3_{(1,2,3)}) = 10$ 其代數列為 $\{4, 2, 4, 5, 8, 6, 8, 5, 4, 2, 4\}$

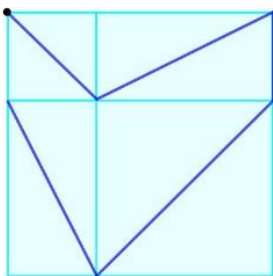


圖 4.3.47

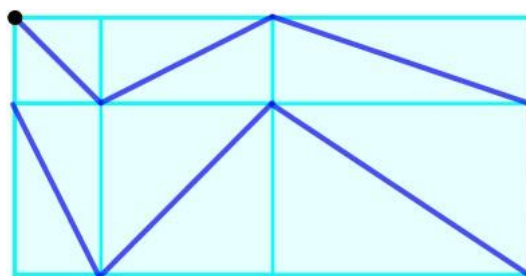


圖 4.3.48

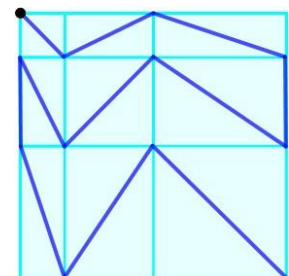


圖 4.3.49

由上述三圖之路徑代數列可發現，當邊格數 m 不變且 n 增加時，因路徑須向後通過 m 個中心 (邊格數 n 增加)， $T_{min}^V(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ 會增加 m 。當邊格數 m 增加且 n 不變時，路徑需向下多通過 n 個中心，可知 $T_{min}^V(m_{(1...m)}, n_{(1...n)})$ 會增加 $n+1$ 。故可知矩形路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{min}^V(m_{(1...m)}, n_{(1...n)}) = m(n+1) - 2。$$

2. 正三角形 (n_{tri}) ($n > 1$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^V(n_{tri})$ ：正三角形 (n_{tri}) 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最大值。

(2) $T_{min}^V(n_{tri})$ ：正三角形 (n_{tri}) 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最小值。

正三角形路徑轉折處只能在頂點時，中心會重複經過，如下圖 4.3.50 及圖 4.3.51。但原題目要求每一個中心只能經過一次，故不存在正三角形路徑轉折處只能在頂點的 $T_{max}^V(n_{tri})$ 與 $T_{min}^V(n_{tri})$ 。

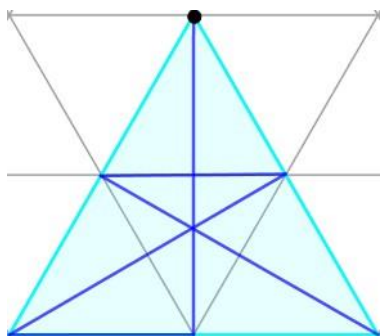


圖 4.3.50

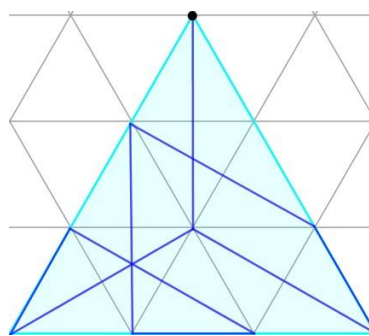


圖 4.3.51

3. 正六邊形 (n_{hex}) ($n > 0$)

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^V(n_{hex})$ ：正六邊形 (n_{hex}) 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最大值。

(2) $T_{min}^V(n_{hex})$ ：正六邊形 (n_{hex}) 路徑轉折處只能在頂點，路徑轉折次數的最小值。

正六邊形路徑轉折處只能在頂點時，路徑從頂點到另一個頂點共有六種走法，而正六邊形頂點會分為兩種，如下圖 4.3.52 圖 4.3.53。但路徑的角度不會改變，不會因此而產生路徑轉折處。

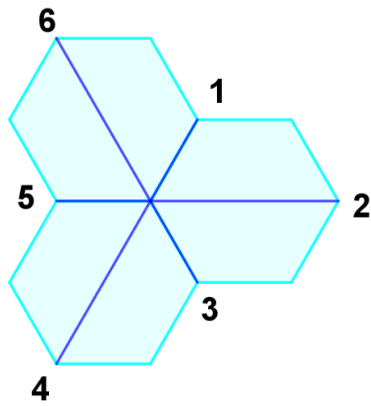


圖 4.3.52

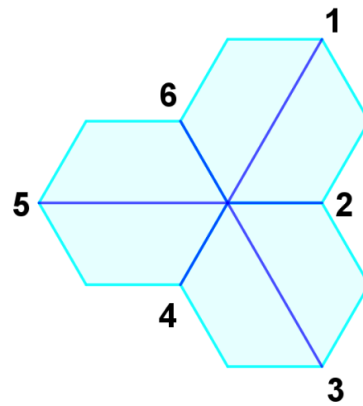


圖 4.3.53

性質 4.3.11：正六邊形路徑轉折處只能在頂點， $T_{max}^V(n_{hex}) = 6n^2 - 2n$ 。

[證明]：同性質 4.3.7 證明，正六邊形頂點個數為 $6n^2$ ，將每一段頂點到頂點的路徑化為代數，則代數列總共 $6n^2 - 1$ 項。由第一項開始，比較代數列中相鄰的兩項，共比較 $6n^2 - 2$ 次，路徑轉折次數應為 $6n^2 - 2$ 。但路徑並無通過 $2n - 2$ 個頂點，故正六邊形路徑轉折處只能在頂點， $T_{max}^V(n_{hex}) = 6n^2 - (2n - 2) - 2 = 6n^2 - 2n$ 。 ■

[實例]：路徑轉折處只能在頂點的正六邊形 $T_{max}^V(n_{hex})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.54 $T_{max}^V(1_{hex}) = 4$ 其代數列為 $\{3, 2, 6, 2, 3\}$

圖 4.3.55 $T_{max}^V(2_{hex}) = 20$ 其代數列為 $\{3, 2, 6, 2, 6, 2, 1, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 1, 2, 6, 2, 6, 2, 3\}$

圖 4.3.56 $T_{max}^V(3_{hex}) = 48$ 其代數列為 $\{3, 2, 6, 2, 6, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 1, 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 3\}$

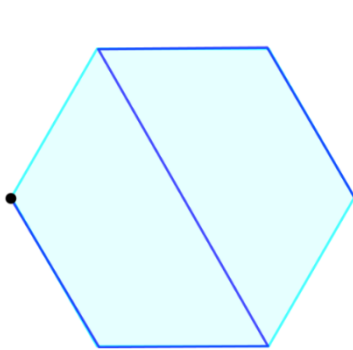


圖 4.3.54

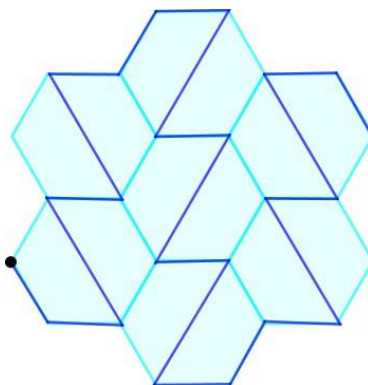


圖 4.3.55

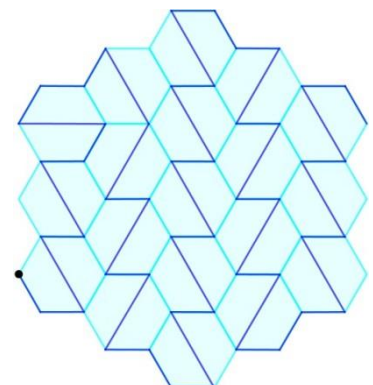


圖 4.3.56

由上述三圖之路徑代數列可發現，代數列中的任兩相鄰的代數皆不相同，但路徑並無通過所有頂點，會有 $2n-2$ 個頂點沒通過。故正六邊形路徑轉折處只能在頂點，

$$T_{max}^V(n_{hex}) = 6n^2 - (2n-2) - 2 = 6n^2 - 2n。$$

性質 4.3.12： $n > 2$ 的正六邊形路徑轉折處只能在頂點， $T_{min}^V(n_{hex}) = 8n - 8。$

[證明]：同性質 4.3.8 證明，路徑轉折次數的最小值不可能為 0，而路徑走法 2、4、6 皆為格子邊長皆相等的矩形每一個格子的對角線，因此可將每一個格子的對角線相連，總共 $4n-3$ 條對角線，且每利用對角線通過 1 排中心時就須轉折 2 次。故可知正六邊形路徑轉折處只能在頂點， $T_{min}^V(n_{hex}) = 2(4n-3) - 2 = 8n - 8。$ ■

[實例]：路徑轉折處只能在頂點的正六邊形 $T_{min}^V(n_{hex})$ ，路徑方向的代數列比較如下：

圖 4.3.57 $T_{min}^V(1_{hex}) = 0$ 其代數列為 $\{6\}$

圖 4.3.58 $T_{min}^V(2_{hex}) = 6$ 其代數列為 $\{6, 1, 2, 3, 4, 6, 1\}$

圖 4.3.59 $T_{min}^V(3_{hex}) = 16$ 其代數列為

$\{6, 6, 1, 3, 3, 3, 3, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 6, 6, 6, 6, 6, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 6, 6\}$

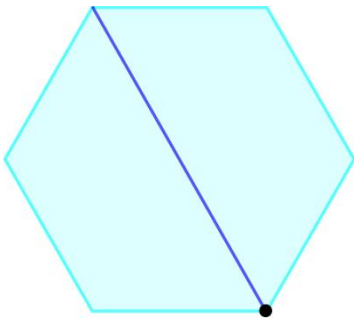


圖 4.3.57

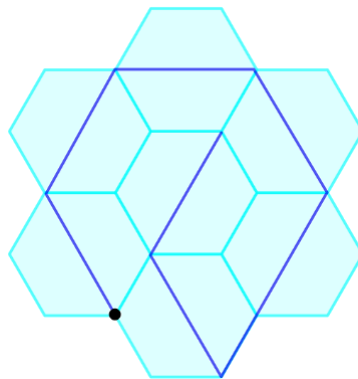


圖 4.3.58

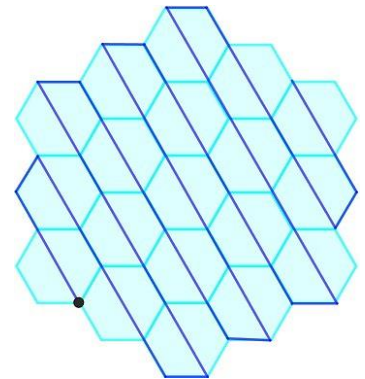


圖 4.3.59

由上述三圖之路徑代數列可發現，在 $n \leq 2$ 的正六邊形中，路徑可沿著圖形的邊框轉折，如上圖 4.3.58，但在 $n > 2$ 的正六邊形中因中心個數的增加，路徑利用數條對角線通過中心，轉折路徑轉折次數會較少，其路徑總共 $4n-3$ 條對角線，且利用對角線通過 1 排中心時就須轉折 2 次，故可知 $n > 2$ 的正六邊形路徑轉折處只能在頂點， $T_{min}^V(n_{hex}) = 2(4n-3) - 2 = 8n - 8。$

(三) 探討矩形路徑轉折處在中心與頂點依序輪流

路徑轉折處的依序(中心 C 與頂點 V 依序輪流)，共分八種，兩個中心或頂點依序輪流： $(C、V)$ 、 $(V、C)$ ，以及三個中心或頂點依序輪流： $(C、C、V)$ 、 $(C、V、C)$ 、 $(V、C、C)$ 、 $(V、V、C)$ 、 $(V、C、V)$ 、 $(C、V、V)$ 。因 $(C、C)$ 、 $(V、V)$ 、 $(C、C、C)$ 、 $(V、V、V)$ 這四種中心或頂點依序輪流的組合，會與路徑轉折都在中心或路徑轉折都在頂點相同，故不討論 $(C、C)$ 、 $(V、V)$ 、 $(C、C、C)$ 、 $(V、V、V)$ 依序輪流的情形。因設定的路徑是路徑轉折處依序輪流，故路徑的起點由中心或頂點開始皆可，路徑的終點亦可由中心或頂點結束。

1. 路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{CV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

(2) $T_{min}^{CV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

性質 4.3.13：矩形路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流， $T_{max}^{CV}(m_i \times n_j) = 2nm$ 。

[證明]：矩形路徑轉折處 $C、V$ 依序輪流時，因中心個數 $m \times n$ 較頂點個數 $(m+1)(n+1)$ 多，故要找出路徑轉折次數的最大值，起點與終點須為頂點。將路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流的規律列出如下： V (起點) $\rightarrow C \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow V$ (終點)。因要找出路徑轉折次數的最大值，路徑轉折處須有 $m \times n$ 在中心，且因路徑轉折處在中心時，下一個路徑轉折處必為頂點，故共有 $m \times n$ 個路徑轉折處在頂點。若格子個數延伸到 $m = k, n = s$ ，則路徑轉折處有 $k \times s$ 個在中心、 $k \times s$ 個在頂點，因此可推得 $T_{max}^{CV}(m_i \times n_j) = 2mn$ 。 ■

性質 4.3.14： $m > 3$ 的矩形路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流， $T_{min}^{CV}(m_i \times n_j) = 2m + 2n - 6$ 。

[證明]：矩形路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流時，因中心個數 $m \times n$ 較頂點個數 $(m+1)(n+1)$ 少，故要找出路徑轉折次數的最小值，起點與終點須為中心。且因對角線可同時通過中心與頂點，故路徑可用格子的對角線由上而下，通過所有中心。又路徑共通過 $m+n-3$ 次對角線，故 $m > 3$ 的矩形路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流， $T_{min}^{CV}(m_i \times n_j) = 2(m+n-3) = 2m + 2n - 6$ 。 ■

2. 路徑轉折處(V、C)依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{VC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(V、C)依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{VC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(V、C)依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.15：矩形路徑轉折處(V、C)依序輪流， $T_{max}^{VC}(m_i \times n_j) = 2mn + 1$ 。

[證明]：同性質 4.3.13 證明，將路徑轉折處(V、C)依序輪流的規律列出： V (起點) $\rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow V$ (終點)。路徑轉折處有 $m \times n$ 在中心、 $m \times n + 1$ 個路徑轉折處在頂點，因此可推得 $T_{max}^{VC}(m_i \times n_j) = 2mn + 1$ 。 ■

性質 4.3.16： $m > 1$ 的矩形路徑轉折處(V、C)依序輪流， $T_{min}^{VC}(m_i \times n_j) = 2m + 2n - 6$ 。

[證明]：同性質 4.3.14 證明，矩形路徑轉折處(V、C)依序輪流時，要找出路徑轉折次數的最小值，起點與終點須為中心。且因對角線可同時通過中心與頂點，又路徑共通過 $m + n - 3$ 次對角線，故 $m > 1$ 的矩形路徑轉折處(V、C)依序輪流，

$$T_{min}^{VC}(m_i \times n_j) = 2(m + n - 3) = 2m + 2n - 6。 \quad \blacksquare$$

3. 路徑轉折處(C、C、V)依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{CCV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(C、C、V)依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{CCV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(C、C、V)依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.17：矩形路徑轉折處(C、C、V)依序輪流， nm 為偶數， $T_{max}^{CCV}(m_i \times n_j) = \frac{3mn}{2}$ ；

nm 為奇數， $T_{max}^{CCV}(m_i \times n_j) = \frac{3mn - 1}{2}$ 。

4. 路徑轉折處(C、V、C)依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{CVC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(C、V、C)依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{CVC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(C、V、C)依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.19：矩形路徑轉折處(C、V、C)依序輪流， mn 為偶數， $T_{max}^{CVC}(m_i \times n_j) = \frac{3mn}{2}$ ；

mn 為奇數， $T_{max}^{CVC}(m_i \times n_j) = \frac{3mn+1}{2}$ 。

[證明]：同性質 4.3.17 證明，雖然路徑轉折處依序輪流的方式不相同，但作法相同。

性質 4.3.20：矩形路徑轉折處(C、V、C)依序輪流， $T_{min}^{CVC}(m_i \times n_j) = 3m - 3$ 。

[證明]：同性質 4.3.18 證明，(C、V、C)依序輪流的路徑可平行邊長 n ，但因兩個路徑轉折處在中心後，須有一個路徑轉折處在頂點，故每通過 1 排平行邊長 n 的中心時就須轉折三次。故可知矩形路徑轉折處(C、V、C)依序輪流， $T_{min}^{CVC}(m_i \times n_j) = 3m - 3$ 。 ■

5. 路徑轉折處(V、C、C)依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{VCC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(V、C、C)依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{VCC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(V、C、C)依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.21：矩形路徑轉折處(V、C、C)依序輪流， mn 為偶數， $T_{max}^{VCC}(m_i \times n_j) = \frac{3mn+2}{2}$ ；

mn 為奇數， $T_{max}^{VCC}(m_i \times n_j) = \frac{3mn+1}{2}$ 。

[證明]：同性質 4.3.17 證明，雖然路徑轉折處依序輪流的方式不相同，但作法相同。

性質 4.3.22： $m \geq 2, n > 2$ 的矩形路徑轉折處 $(V、C、C)$ 依序輪流， $T_{min}^{VCC}(m_i \times n_j) = 3m - 1$ 。

[證明]：同性質 4.3.18 證明， $(V、C、C)$ 依序輪流的路徑可平行邊長 n ，但因兩個路徑轉折處在中心後，須有一個路徑轉折處在頂點，故每通過 1 排平行邊長 n 的中心時就須轉折三次。故可知 $m > 2$ 的矩形路徑轉折處 $(V、C、C)$ 依序輪流， $T_{min}^{VCC}(m_i \times n_j) = 3m - 1$ 。 ■

6. 路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{VVC}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.23：矩形路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流，

$(m+1)(n+1)$ 為偶數且 $mn < m+n+5$ ， $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = 2mn + m + n - 1$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為偶數且 $mn \geq m+n+5$ ， $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)}{2}$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為奇數且 $mn < m+n+4$ ， $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = 2mn + m + n - 1$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為奇數且 $mn \geq m+n+4$ ， $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)-1}{2}$ 。

[證明]：將路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流的規律列出，

若 $(m+1)(n+1)$ 為偶數：

C (起點) $\rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow C$ (終點)。

路徑轉折處有 $(m+1)(n+1)$ 個在頂點，且因路徑轉折處在中心的個數與路徑轉折處在頂點的個數比例為 1:2，共有 $\frac{(m+1)(n+1)}{2}$ 個路徑轉折處在中心。但因起點與終點皆為中心，故在

$mn \geq m+n+5$ ($mn \geq \frac{(m+1)(n+1)}{2} + 2 \Rightarrow 2mn \geq mn + m + n + 5 \Rightarrow mn \geq m+n+5$) 時，

$T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)}{2}$ ；而 $mn < m+n+5$ 的路徑可在圖形上的所有中心與頂點轉折，

故 $mn < m+n+5$ 時， $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = mn + (m+1)(n+1) - 2 = 2mn + m + n - 1$ 。

若 $(m+1)(n+1)$ 為奇數：

C (起點) $\rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow V \rightarrow C$ (終點)。

路徑轉折處有 $(m+1)(n+1)$ 個在頂點，且因路徑轉折處在中心的個數與路徑轉折處在頂點的

個數比例為 1:2，但因頂點個數 $(m+1)(n+1)$ 為奇數，故共有 $\frac{(m+1)(n+1)-1}{2}$ 個路徑轉折處

在中心。但因起點與終點皆為中心，故在 $mn \geq m+n+4$

($mn \geq \frac{(m+1)(n+1)-1}{2} + 2 \Rightarrow 2mn \geq mn+m+n+4 \Rightarrow mn \geq m+n+4$) 時，

$T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)-1}{2}$ ；而 $mn < m+n+4$ 的路徑可在圖形上的所有中心與頂點轉折，

故 $nm < n+m+4$ 時， $T_{max}^{VVC}(m_i \times n_j) = mn + (m+1)(n+1) - 2 = 2mn + m + n - 1$ 。 ■

性質 4.3.24： $m > 1$ 的矩形路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流， $T_{min}^{VVC}(m_i \times n_j) = 2m + 2n - 6$ 。

[證明]：同性質 4.3.14 證明，矩形路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流時，起點與終點須為中心，且對角線可同時通過中心與頂點，又路徑共通過 $m+n-3$ 次對角線，故 $m > 1$ 的矩形路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流， $T_{min}^{VVC}(m_i \times n_j) = 2(m+n-3) = 2m + 2n - 6$ 。 ■

7. 路徑轉折處 $(V、C、V)$ 依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{VCV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處 $(V、C、V)$ 依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{VCV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處 $(V、C、V)$ 依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.25：矩形路徑轉折處 $(V、C、V)$ 依序輪流，

$(m+1)(n+1)$ 為偶數且 $mn < m+n+5$ ， $T_{max}^{VCV}(m_i \times n_j) = 2mn + m + n - 1$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為偶數且 $mn \geq m+n+5$ ， $T_{max}^{VCV}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)}{2}$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為奇數且 $mn < m+n+6$ ， $T_{max}^{VCV}(m_i \times n_j) = 2mn + m + n - 1$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為奇數且 $mn \geq m+n+6$ ， $T_{max}^{VCV}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)+1}{2}$ 。

[證明]：同性質 4.3.23 證明，雖然路徑轉折處依序輪流的方式不相同，但作法相同。

性質 4.3.26： $m > 1$ 的矩形路徑轉折處(V 、 C 、 V)依序輪流， $T_{min}^{VCV}(m_i \times n_j) = 2m + 2n - 6$ 。

[證明]：同性質 4.3.14 證明，矩形路徑轉折處(V 、 C 、 V)依序輪流時，起點與終點須為中心，且對角線可同時通過中心與頂點，又路徑共通過 $m+n-3$ 次對角線，故 $m > 1$ 的矩形路徑轉折處(V 、 C 、 V)依序輪流， $T_{min}^{VCV}(m_i \times n_j) = 2(m+n-3) = 2m + 2n - 6$ 。 ■

8. 路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

(1) $T_{max}^{CVV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流，路徑轉折次數的最小值。

(2) $T_{min}^{CVV}(m_i \times n_j)$ ：矩形路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

性質 4.3.27：矩形路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流，

$(m+1)(n+1)$ 為偶數且 $mn < m+n+5$ ， $T_{max}^{CVV}(m_i \times n_j) = 2mn + m + n - 1$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為偶數且 $mn \geq m+n+5$ ， $T_{max}^{CVV}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)}{2}$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為奇數且 $mn < m+n+6$ ， $T_{max}^{CVV}(m_i \times n_j) = 2mn + m + n - 1$ ；

$(m+1)(n+1)$ 為奇數且 $mn \geq m+n+6$ ， $T_{max}^{CVV}(m_i \times n_j) = \frac{3(m+1)(n+1)+1}{2}$ 。

[證明]：同性質 4.3.23 證明，雖然路徑轉折處依序輪流的方式不相同，但作法相同。

性質 4.3.28： $m > 2$ 的矩形路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流， $T_{min}^{CVV}(m_i \times n_j) = 2m + 2n - 6$ 。

[證明]：同性質 4.3.14 證明，矩形路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流時，起點與終點須為中心，且對角線可同時通過中心與頂點，又路徑共通過 $m+n-3$ 次對角線，故 $m > 2$ 的矩形路徑轉折處(C 、 V 、 V)依序輪流， $T_{min}^{CVV}(m_i \times n_j) = 2(m+n-3) = 2m + 2n - 6$ 。 ■

四、程式 Scratch 執行驗證：

將中心與頂點座標化，以利電腦程式辨識路徑是否通過該中心或頂點。並利用對稱性找出必須驗證的起點，使搜尋的範圍縮小。接著，將每個起點找出的路徑方向列為代數列，運用演算法，找出路徑轉折次數。最後比較每一種路徑的路徑轉折次數，而最大值與最小值即我們要驗證的結果。下圖 4.4.1 與圖 4.4.2 為程式的呈現，圖 4.4.1 是矩形 $(2_i, 3_j)$ 路徑轉折處只能在中心，圖 4.4.2 是矩形 $(2_i, 3_j)$ 路徑轉折處只能在頂點。其中 total 是利用對稱性找出的起點中，所有路徑結果的總數；清單 T 即表示所有可能的路徑轉折次數，可發現介於最大值與最小值之間的數值，皆可在圖形上呈現該路徑轉折次數之數值的路徑。



圖 4.4.1：矩形路徑轉折處只能在中心的程式

圖 4.4.2：矩形路徑轉折處只能在頂點的程式

伍、討論與結論

表 5.1：各類幾何圖形路徑轉折處在中心(C)、頂點(V)，路徑轉折次數的最大值及最小值

	路徑轉折處只能在中心		路徑轉折處只能在頂點	
	T_{max}^C	T_{min}^C	T_{max}^V	T_{min}^V
矩形 $(m_i \times n_j)$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ mn-2 & m>1 \end{cases}$	$2m-2$	$(m+1)n$	$\begin{cases} n-1 & m=1 \\ 2m+2n-4 & m>1 \end{cases}$
矩形 $(m_{(1\dots m)} \times n_{(1\dots n)})$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ mn-2 & m>1 \end{cases}$	$2m-2$	$(m+1)(n+1)-2$	$m(n+1)-2$
正三角形 (n_{tri})	n^2-2	$\begin{cases} 8k-3 & n=3k \\ 8k-6 & n=3k-1 \\ 8k-9 & n=3k-2 \end{cases}$	因中心會重複通過，故不討論正三角形路徑轉折處只能在中心。	
正六邊形 (n_{hex})	$3n^2-3n-1$	$4n-4$	$6n^2-2n$	$\begin{cases} 3n^2-3n & n \leq 2 \\ 8n-8 & n > 2 \end{cases}$

表 5.2：矩形 $(m_i \times n_j)$ 路徑轉折處在中心(C)與頂點(V)不同的依序輪流下，

路徑轉折次數的最大值及最小值

依序輪流	$T_{max}(m_i \times n_j)$	$T_{min}(m_i \times n_j)$
CV	$2mn$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$
VC	$2mn+1$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$
CCV	$\begin{cases} \frac{3mn}{2} & mn=2k \\ \frac{3mn-1}{2} & mn=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2 & m=2 \\ 5 & m=3, n=3 \\ 3m-2 & m \geq 3, n > 3 \end{cases}$
CVC	$\begin{cases} \frac{3mn}{2} & mn=2k \\ \frac{3mn+1}{2} & mn=2k+1 \end{cases}$	$3m-3$
VCC	$\begin{cases} \frac{3mn+2}{2} & mn=2k \\ \frac{3mn+1}{2} & mn=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2 & m=2, n=2 \\ 3m-1 & m \geq 2, n > 2 \end{cases}$
VVC	$\begin{cases} 2mn+m+n-1 & mn < m+n+4 \\ \frac{3(m+1)(n+1)}{2} & mn \geq m+n+4, (m+1)(n+1)=2k \\ \frac{3(m+1)(n+1)-1}{2} & mn \geq m+n+4, (m+1)(n+1)=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$
VCV	$\begin{cases} 2mn+m+n-1 & mn < m+n+5 \\ \frac{3(m+1)(n+1)}{2} & mn \geq m+n+5, (m+1)(n+1)=2k \\ \frac{3(m+1)(n+1)+1}{2} & mn \geq m+n+5, (m+1)(n+1)=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$
CVV	$\begin{cases} 2mn+m+n-1 & mn < m+n+6 \\ \frac{3(m+1)(n+1)+2}{2} & mn \geq m+n+6, (m+1)(n+1)=2k \\ \frac{3(m+1)(n+1)+1}{2} & mn \geq m+n+6, (m+1)(n+1)=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2 & m=2, n=2 \\ 4 & m=2, n>2 \\ 2m+2n-6 & m>2 \end{cases}$

陸、未來展望

一、長方體

若將平面的矩形延伸至立體的長方體，
是否會與原本矩形的路徑轉折次數有相同或相似的結果？
因增加一個維度，路徑走法種類變多，
路徑從中心或頂點向外最多共 26 種走法，如右圖 6.1.1，
是否會因此改變路徑轉折次數的結果？

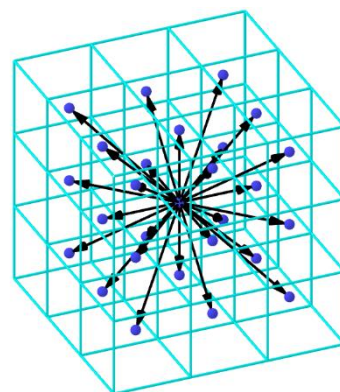


圖 6.1.1

二、矩形不同路徑走法組合

矩形路徑轉折處只能在中心與路徑轉折處只能在頂點，其不同路徑走法的組合如下圖 6.2.1、圖 6.2.2，共可排列出 10 種路徑走法的組合：a,b、a,c、a,d、a,e、b,c、b,d、b,e、c,d、c,e 與 d,e，而路徑走法組合 a,b 即為本作品所探討的，因此想探究在矩形中，其他路徑走法組合時，路徑轉折次數的最大值及最小值與本作品路徑走法 a,b 有何差異？

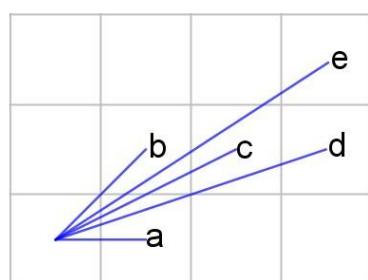


圖 6.2.1

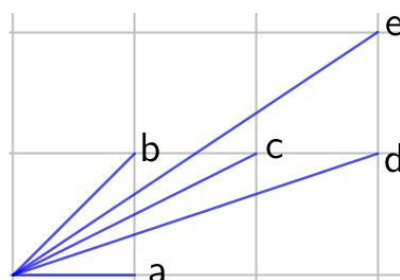


圖 6.2.2

柒、參考文獻資料

- [1] 游森棚(2023)。特約專欄〈森棚教官的數學題—蜿蜒曲折〉。科學研習雙月刊，62-3，頁 141。
- [2] 江恩碩、梁惟煊、張宏羽、周譽佳(2022)。課稅小鎮—稅額最大值走法之最佳解探討。第六十二屆全國科展國小組數學科。
- [3] 邱韋齊(2018)。堆集遊戲解法之探討。第五十八屆全國科展國小組數學科。
- [4] 鄧宜欣、朱雅琪(2014)。蜜蜂路徑—找回失落的數字。第五十四屆全國科展高中組數學科。
- [5] 張霈萱(2016)。層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討。2016 年臺灣國際科學展覽會數學科。

註:整份作品中的照片及圖片，均為作者親自製作。

【評語】 030412

此作品的主要目的是探究如何以最多或最少的路徑轉折次數通過各類幾何圖形的所有中心。研究方法的一個亮點是將幾何圖形以座標表示，路徑以代數表示，代數為座標的變化量，並利用演算法找出路徑轉折次數，導出路徑轉折次數的最大值及最小值的一般式。

作者主要將該主題分為：分別研究各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心、只能在頂點，以及在中心與頂點依序輪流的條件下，路徑轉折次數的最大值及最小值與邊格數之關係，並延伸探討長方體及矩形不同路徑走法的組合，進而利用 Scratch 程式來進行驗證。作品中以類似圖論的方式來計算轉折次數，邏輯性完整，是一不錯的數學處理法。但類似的極值問題要證明直覺所得的結果的確是極值，常常是最困難的部分，本作品論証不多，是比較可惜的。

作品簡報

蜿

蜒

曲

折

摘要

本作品研究「如何以最多或最少的路徑轉折次數通過各類幾何圖形的所有中心」，同時解決科學研習雙月刊的蜿蜒曲折問題。由路徑的行進方向發現，將各類幾何圖形的路徑方向表示為代數，即可將路徑過程表示為一個代數列，並可利用代數列找出該幾何圖形的路徑轉折次數，證明其一般式。

壹、前言

一、名詞定義：

本研究定義以下列名詞：

1. 格子：格線與格線所圍起來的區域。
2. V ：頂點，即圖形上格線與格線的交點，如右圖1.1。
3. C ：中心，即圖形中每一個格子的重心，如右圖1.1。
4. 路徑：本作品中以深藍線表示。路徑不可重疊、不可走出圖形外。
5. 起點與終點：路徑的開頭與結尾，本作品以黑點表示起點，如右圖1.1。
6. T ：路徑轉折次數，圖形路徑轉折處的總數。路徑轉折處即路徑中非平角(180°)之處，不含起點與終點。
7. $T_{\substack{\text{(路徑轉折處)} \\ \text{(最大值或最小值)}}}$ (圖形)：此為組合符號。給定一個圖形與路徑轉折處，此符號表示其路徑轉折次數最小值或最大值。

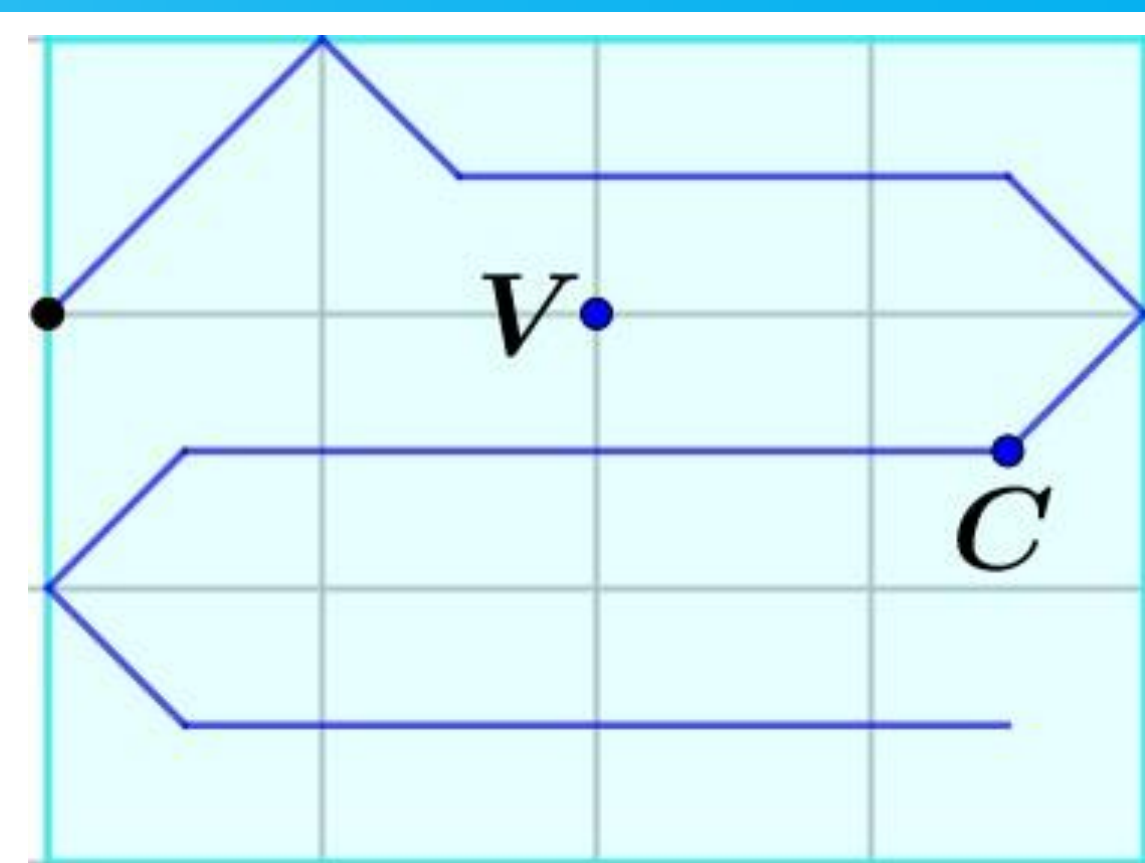


圖1.1： $T = 8$

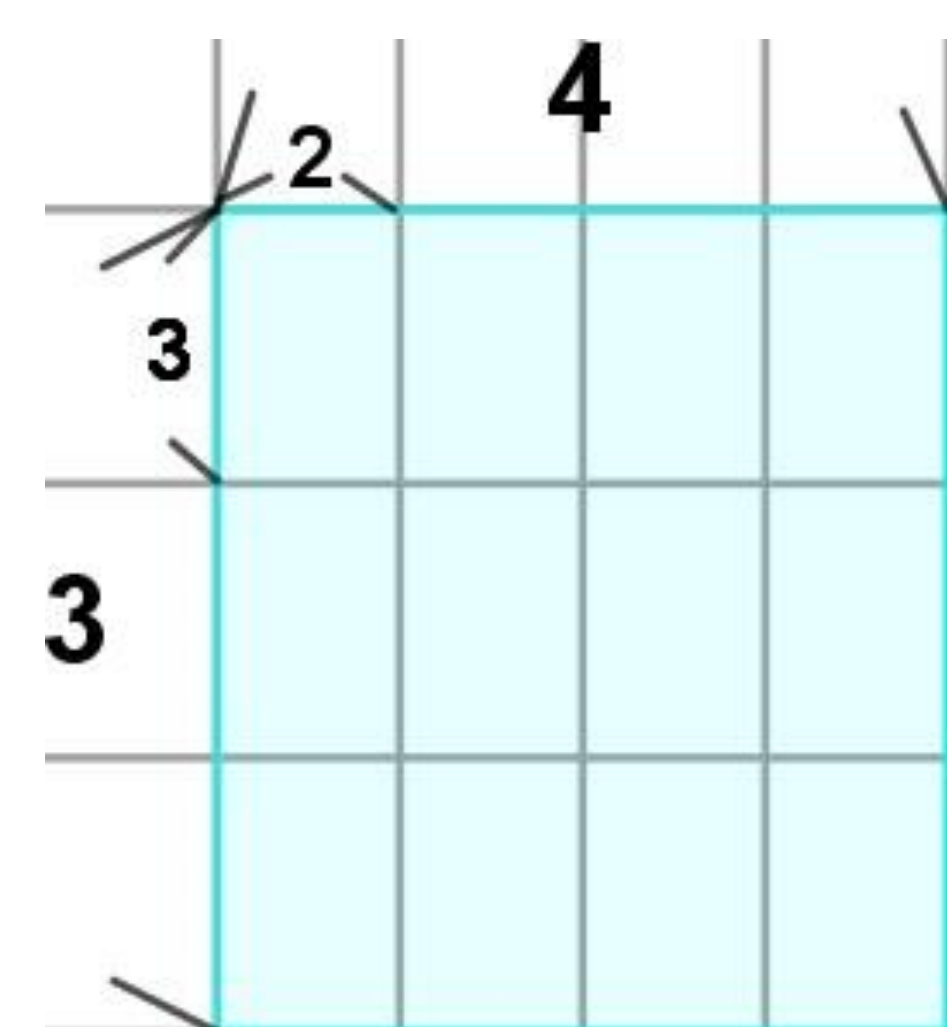


圖1.2

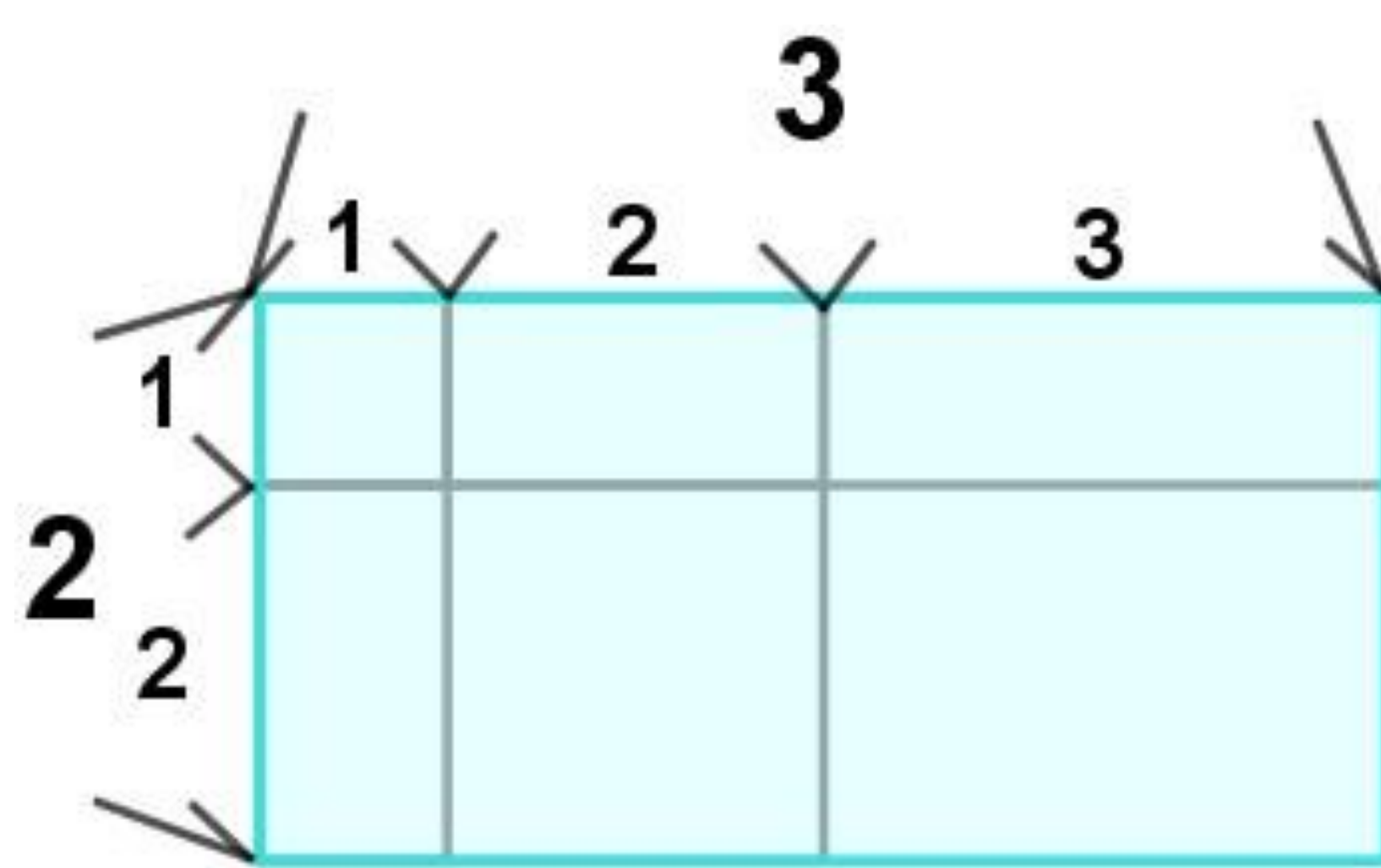


圖1.3

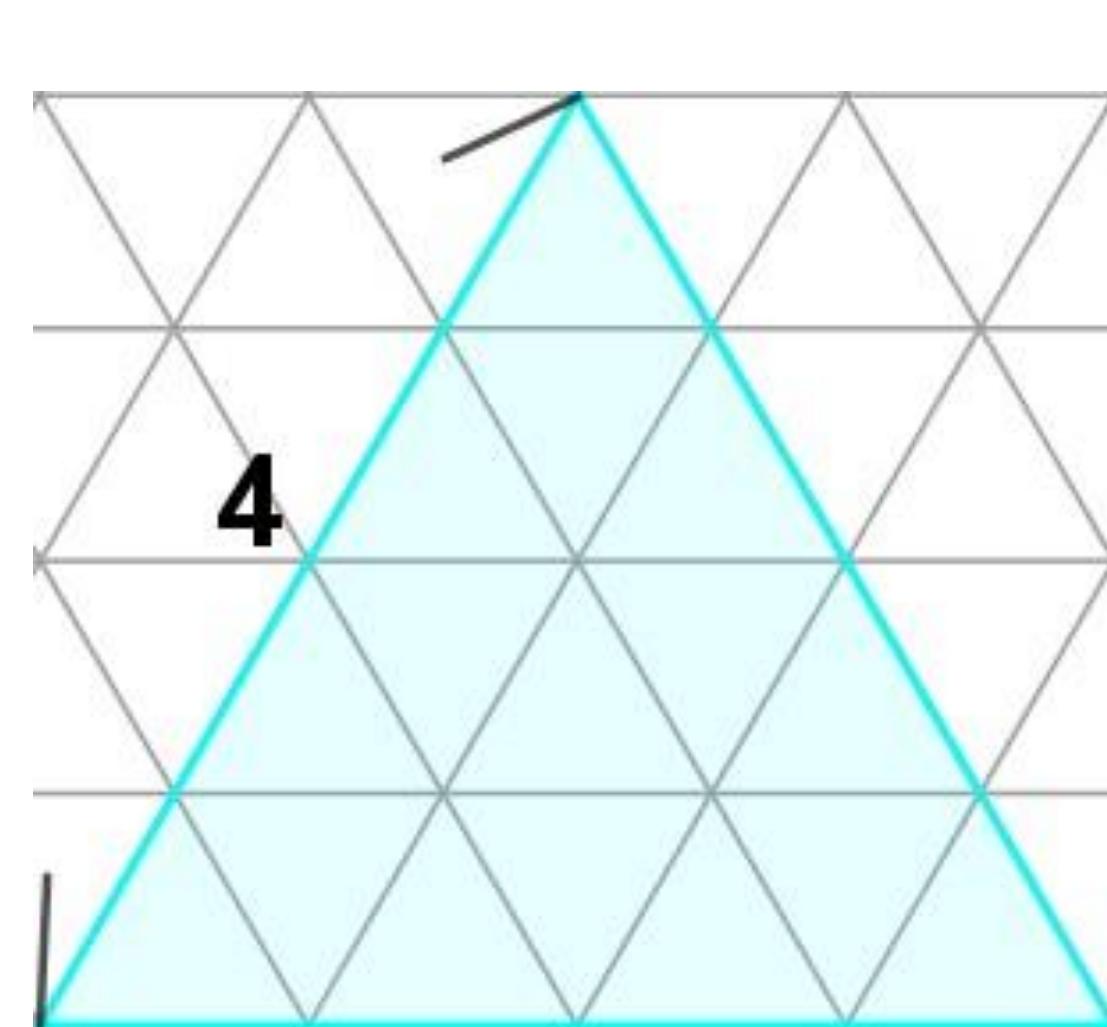


圖1.4

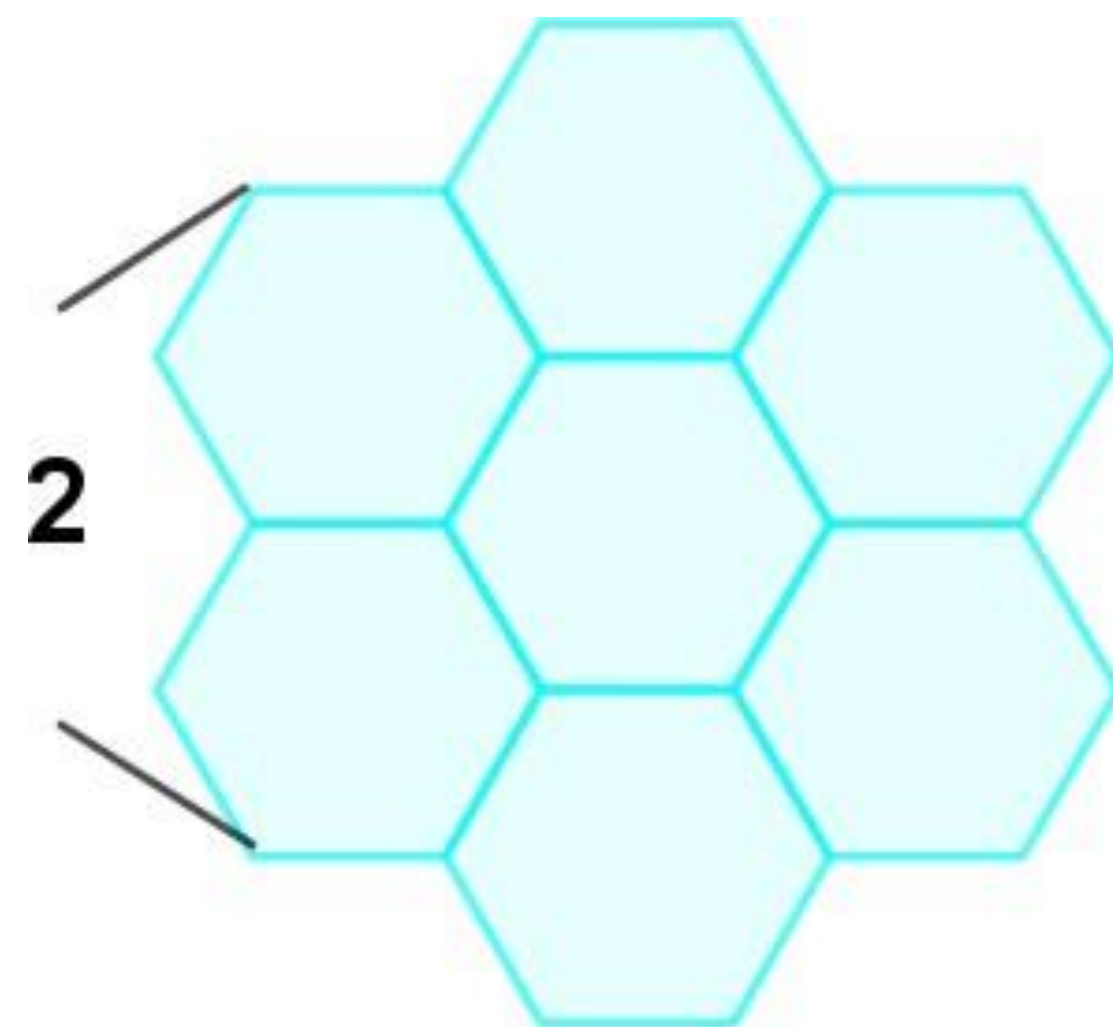


圖1.5

8. 格子邊長皆相等的矩形($m_i \times n_j$)：總格子個數為 $m \times n$ 個，每一個格子的邊長皆固定，皆為 i, j 。
圖1.2為 $m = 3, n = 4, i = 3, j = 2$ 的格子邊長皆相等的矩形。
9. 格子邊長不相等的矩形($m_{(1...m)} \times n_{(1...n)}$)：總格子個數為 $m \times n$ 個，其中第 (s, t) 位置的格子邊長為 s, t 。
圖1.3為 $m = 2, n = 3$ 的格子邊長不相等的矩形。
10. 正三角形(n_{tri})：總格子個數為 n^2 個，每一邊的格子個數為 n 。圖1.4為 $n = 4$ 的正三角形。
11. 正六邊形(n_{hex})：總格子個數為 $3n^2 - 3n + 1$ 個，每一邊的格子個數為 n 。圖1.5為 $n = 2$ 的正六邊形。

二、研究目的：

探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心、頂點及矩形路徑轉折處在中心與頂點依序輪流，路徑轉折次數的最大值或最小值與邊格數之關係。

貳、研究過程或方法

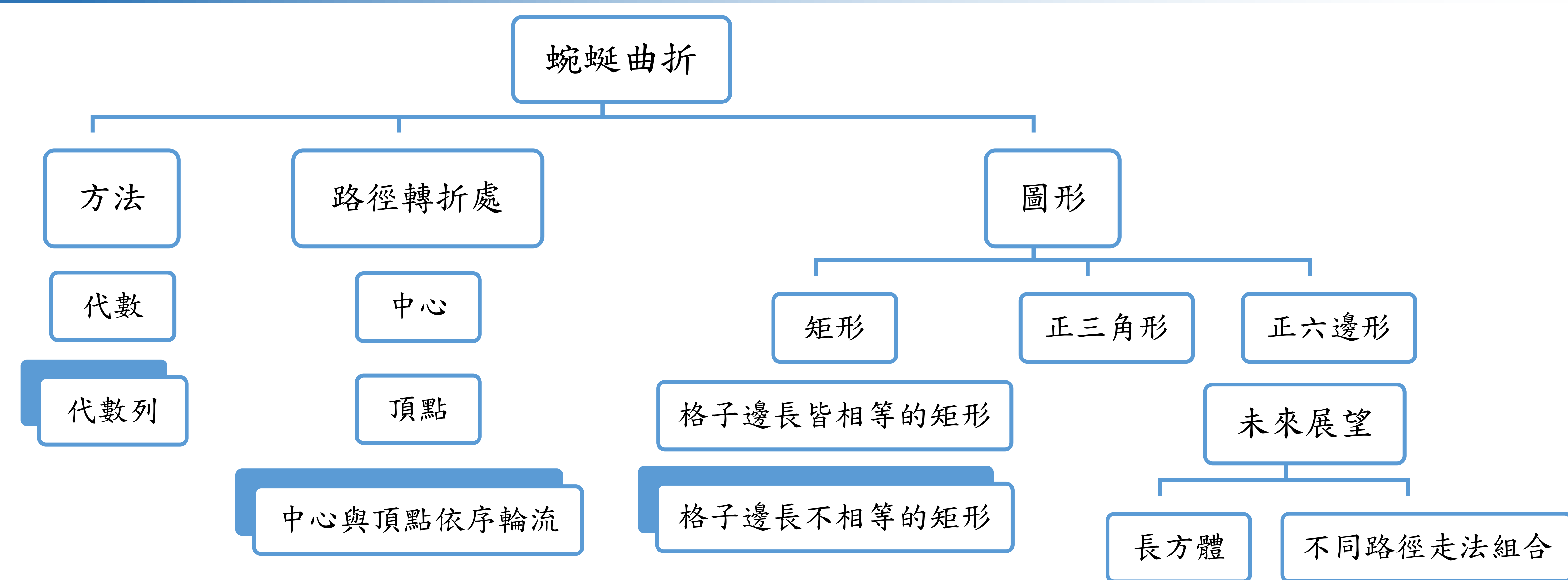


圖2.1：研究架構圖

參、研究結果

一、代數列：

為了研究的進行，我們定義下列名詞：

代數列：在各類幾何圖形中，路徑移動方向所形成的數列稱為代數列，以 $\{a_k\}$ 表示。
例如代數列 $\{3, 5, 7\}$ 為路徑向右移動一個格子的距離，再向下移動一個格子的距離，再向左移動一個格子的距離，如圖3.2。

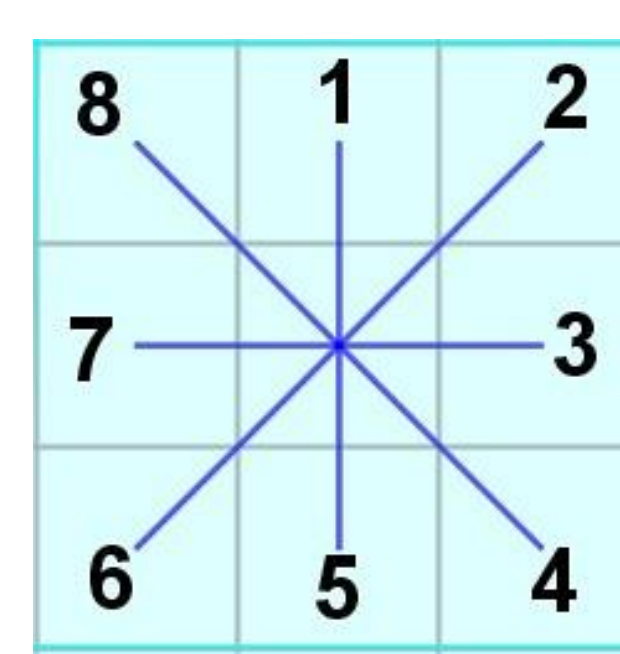


圖3.1

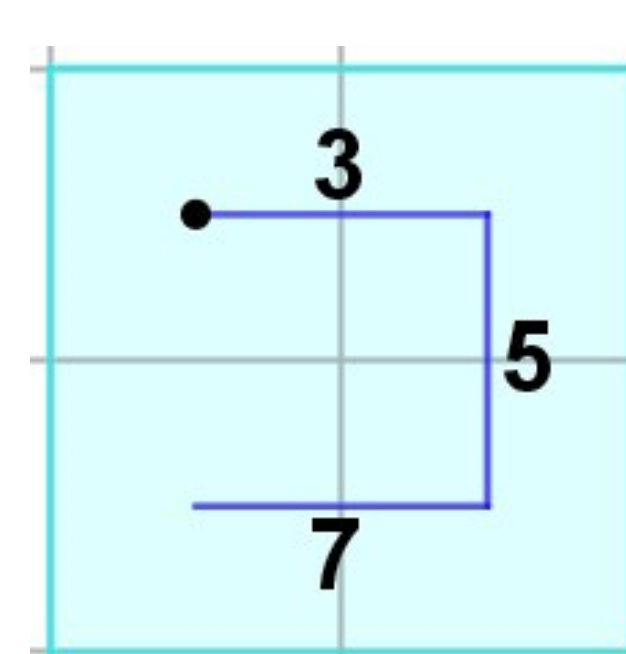


圖3.2

二、演算法(Algorithm)：

- 步驟一：將各類幾何圖形之路徑以代數列 $\{a_k\}$ 表示，令 $k = 1$ 和 $T = 0$ 。
- 步驟二：當 $a_k = a_{k+1}$ ，則 $T \leftarrow T + 0$ ；當 $a_k \neq a_{k+1}$ ，則 $T \leftarrow T + 1$ 。
- 步驟三：重複步驟二直到 $\{a_k\}$ 的最後一項，對應的 T 即為該圖形的路徑轉折次數。
如圖3.3，代數列為 $\{7, 7, 5, 3, 3\}$ ， $T = 2$ 。

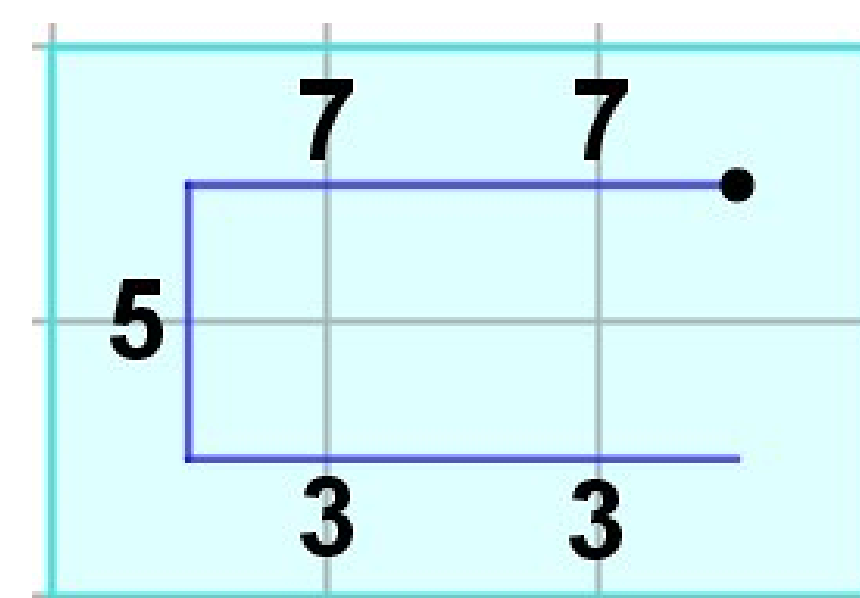


圖3.3

三、組合幾何：

(一) 探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心：

1. 矩形

(1) 格子邊長皆相等的矩形

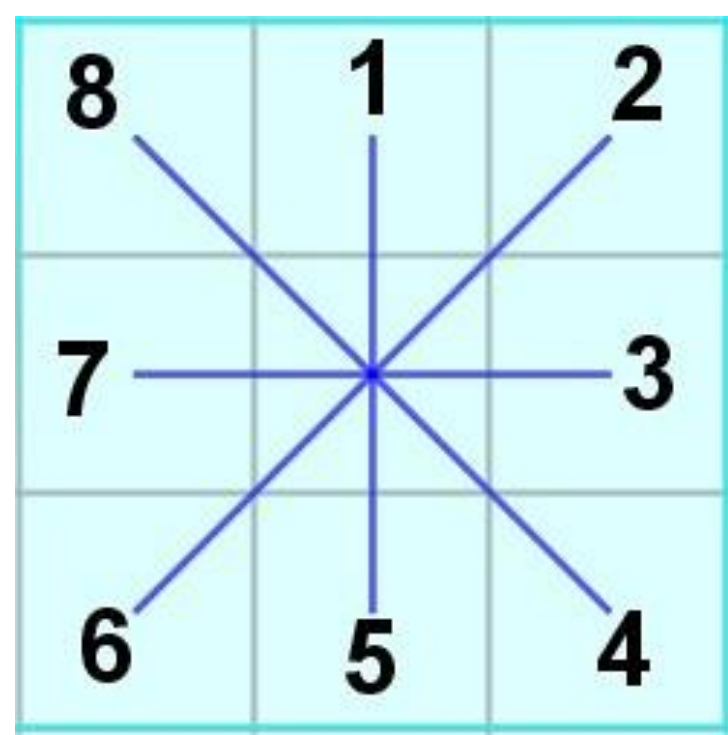


圖3.4

(2) 格子邊長不相等的矩形

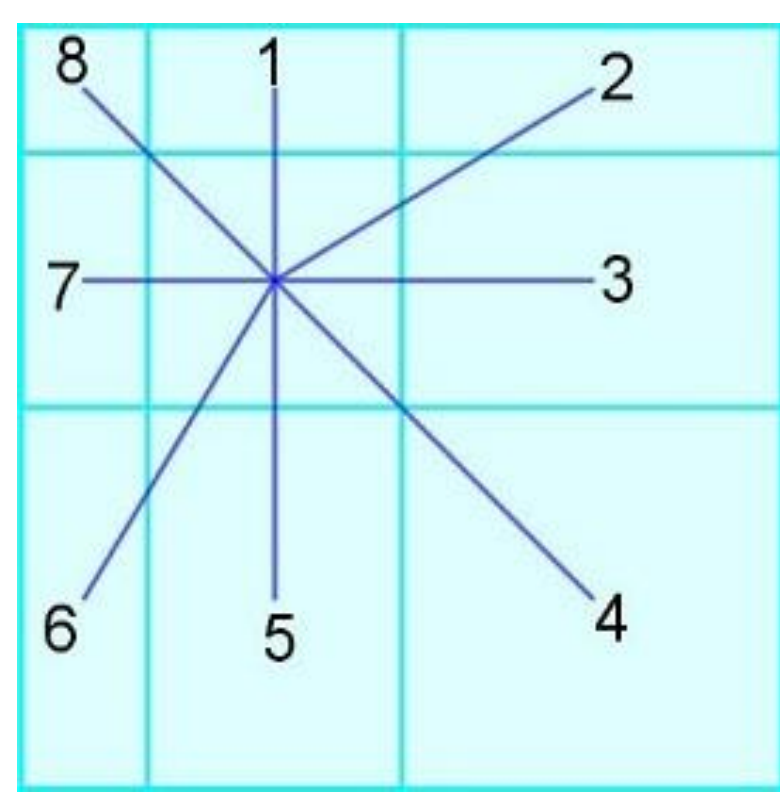


圖3.7

2. 正三角形

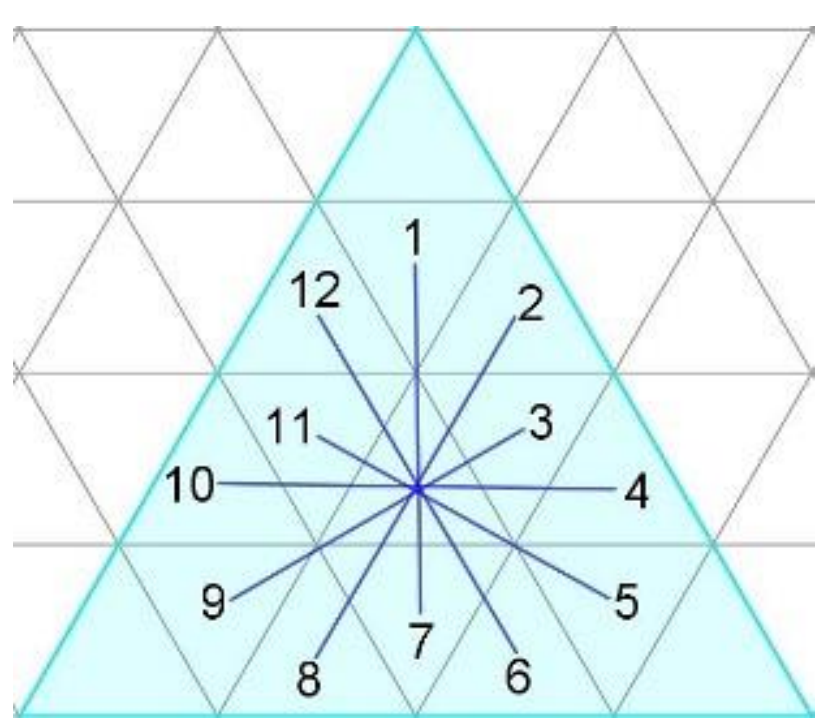


圖3.10

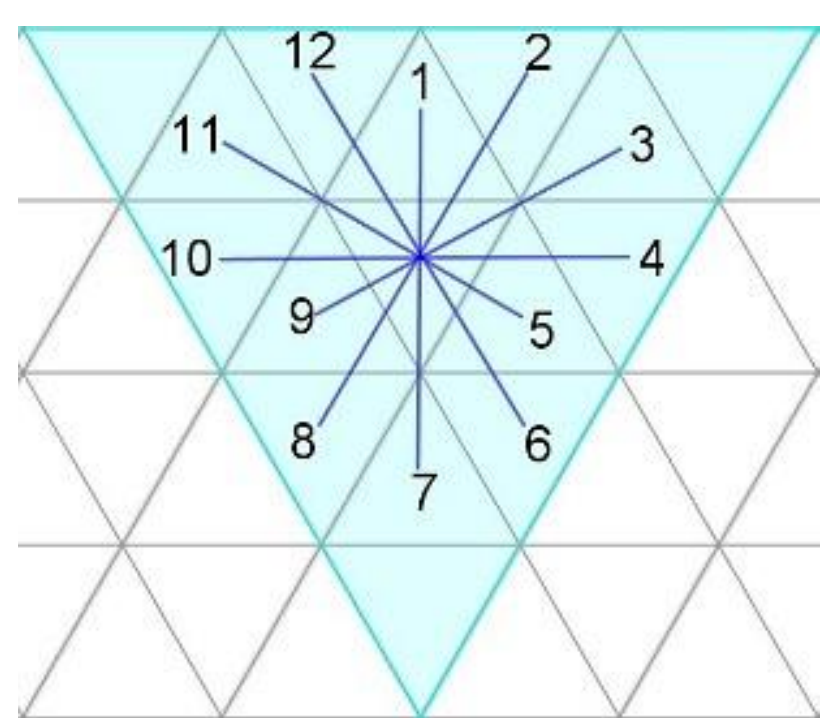


圖3.11

3. 正六邊形

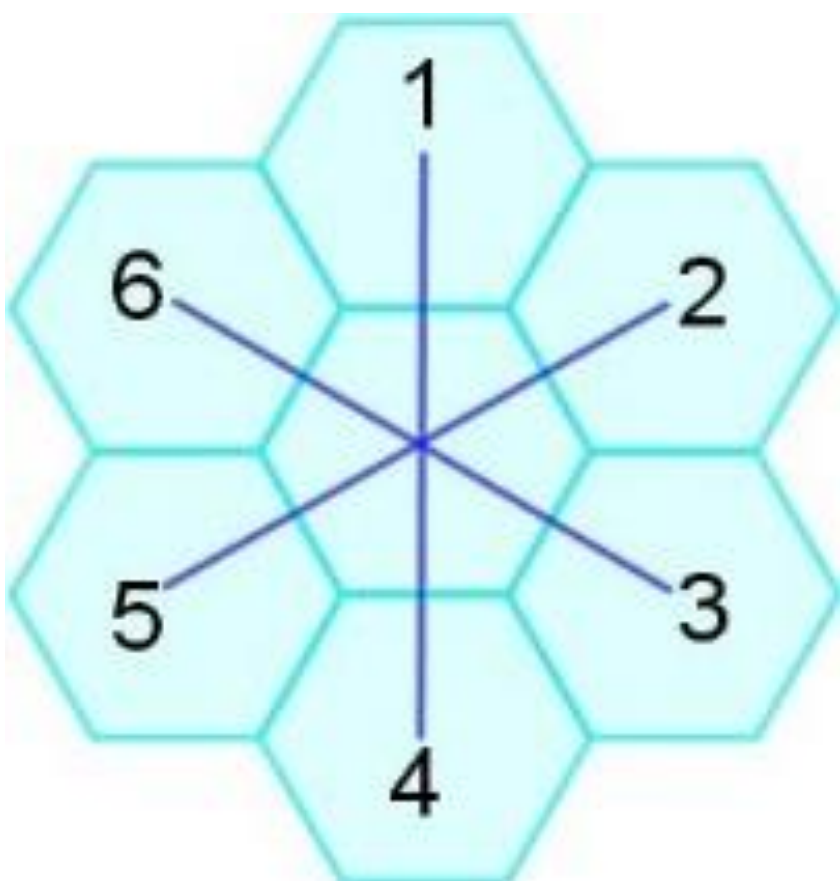


圖3.14

(二) 探討各類幾何圖形路徑轉折處只能在頂點：

1. 矩形

(1) 格子邊長皆相等的矩形

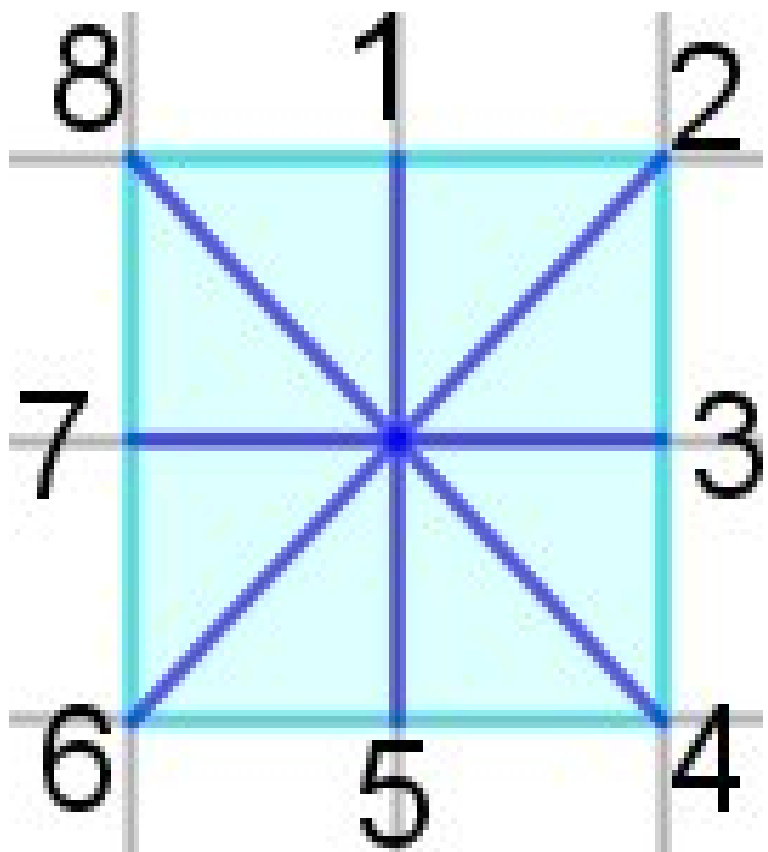


圖3.17

(2) 格子邊長不相等的矩形

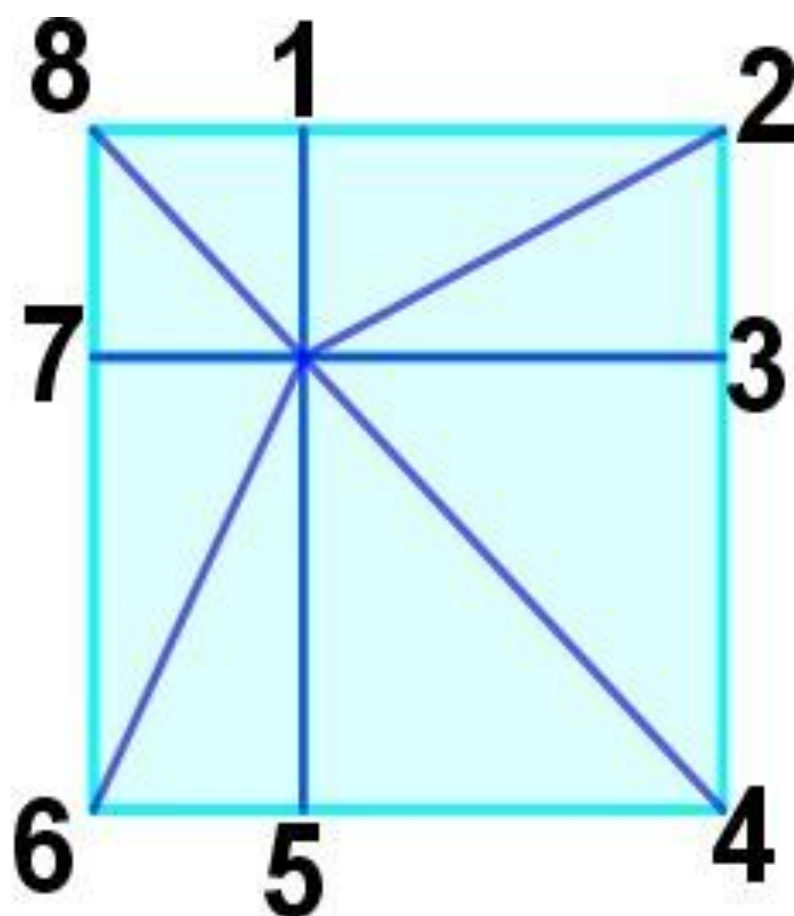


圖3.20

2. 正三角形

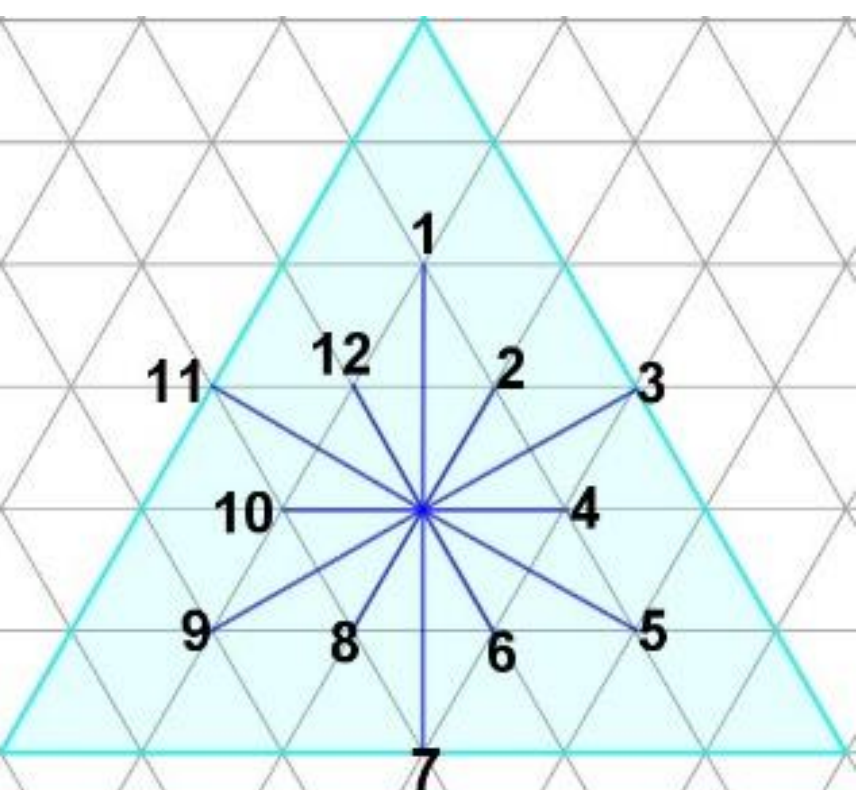


圖3.23

3. 正六邊形

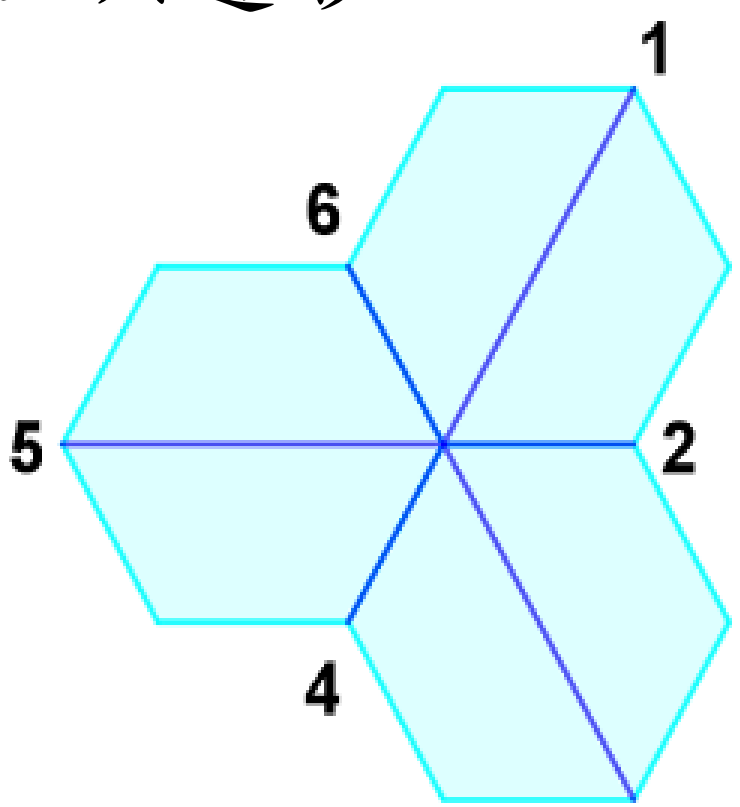


圖3.26

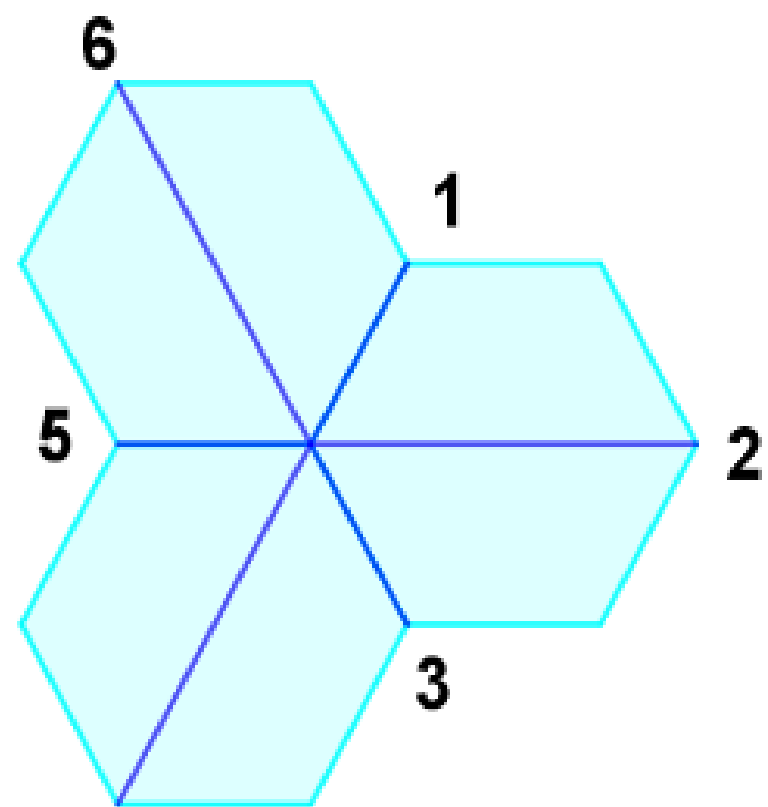


圖3.27

圖3.5： $T_{max}^C(2_i \times 4_j) = 6$ 其代數列為{4,2,4,1,6,8,6}

圖3.6： $T_{min}^C(2_i \times 4_j) = 2$ 其代數列為{3,3,3,5,7,7,7}

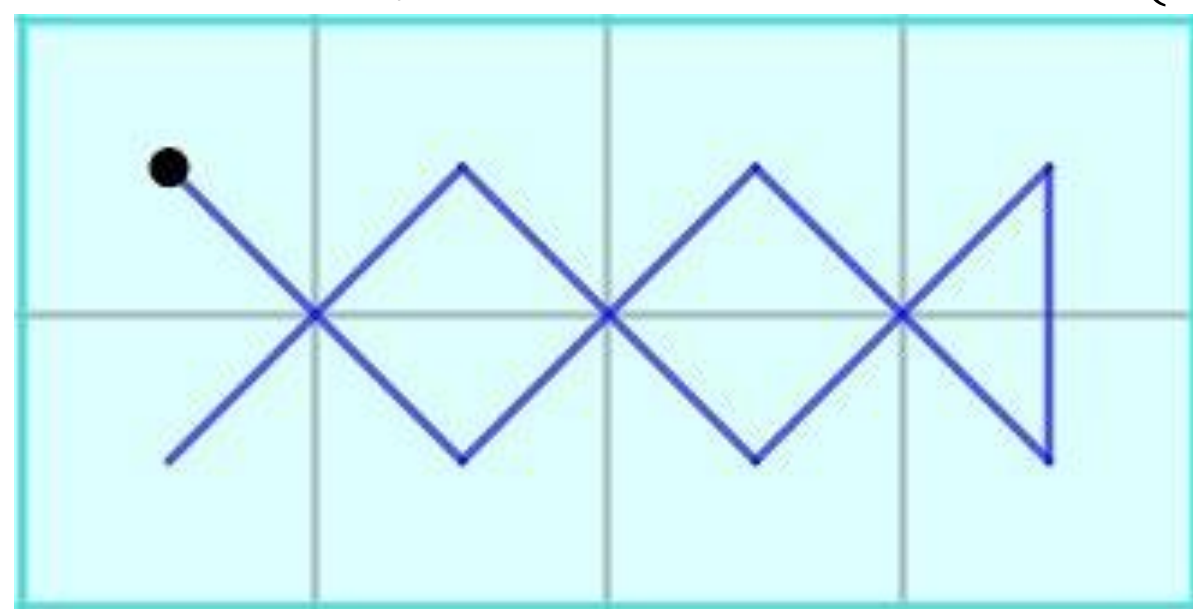


圖3.5

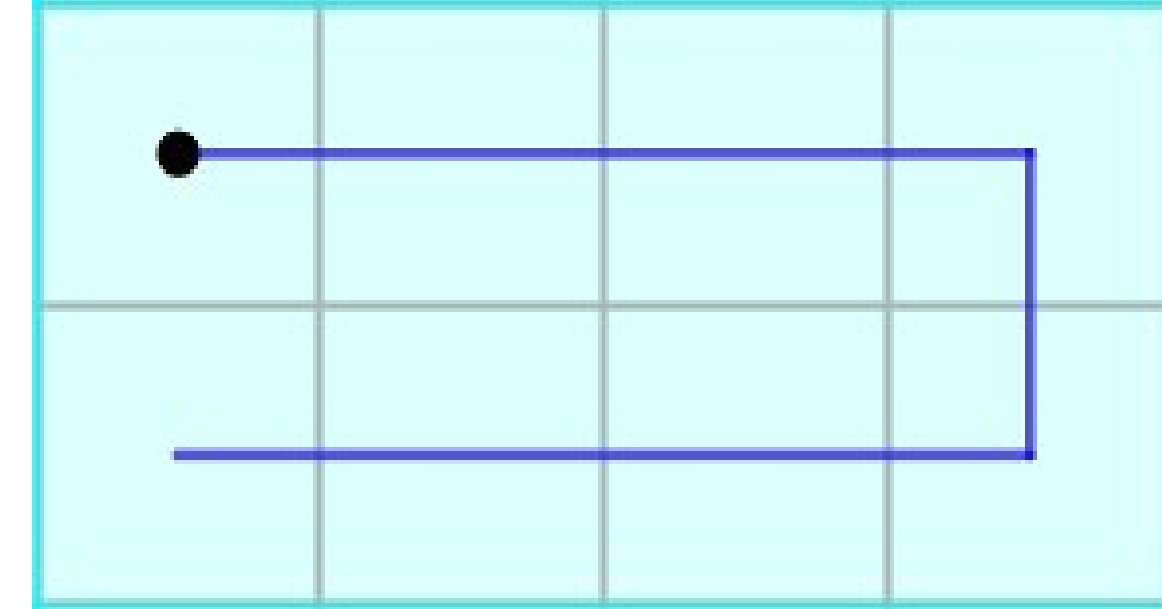


圖3.6



圖3.8

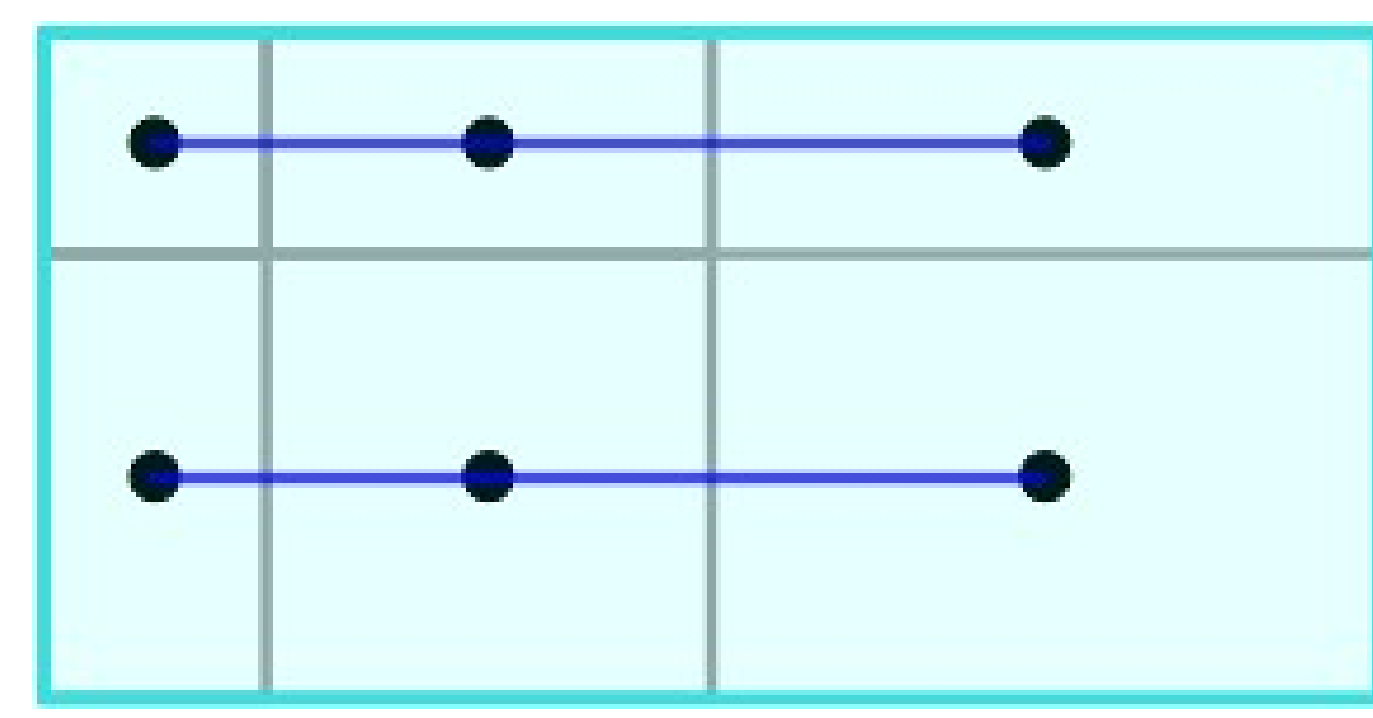


圖3.9

格子邊長不相等的矩形路徑轉折處只能在中心，路徑轉折次數的最大值及最小值的結果與格子邊長皆相等的矩形相同。

圖3.12： $T_{max}^C(4_{tri}) = 14$ 其代數列為{6,11,9,8,3,5,3,5,6,11,9,11,9,11,9}

圖3.13： $T_{min}^C(4_{tri}) = 7$ 其代數列為{6,6,6,10,10,10,2,2,3,6,6,10,10,2,5}

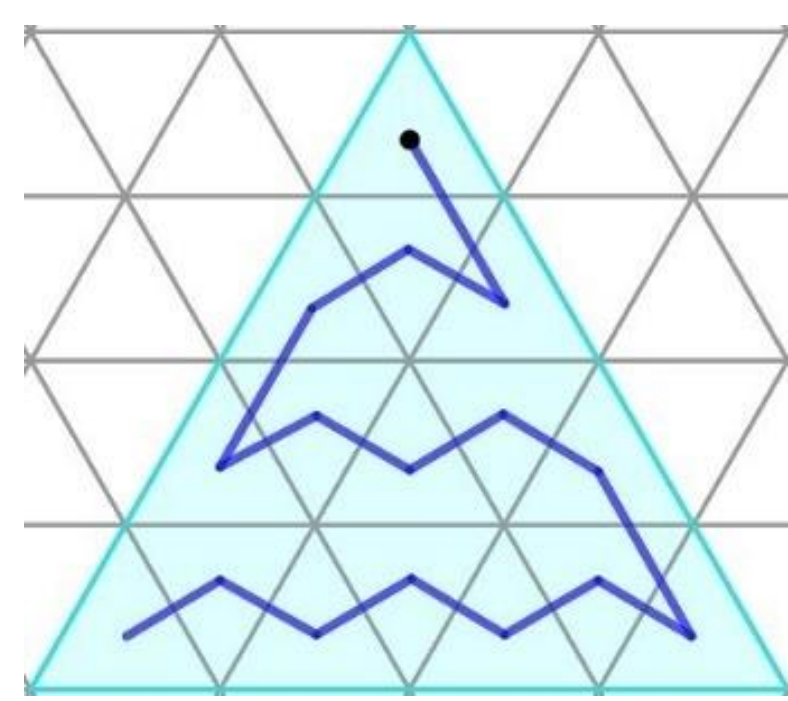


圖3.12

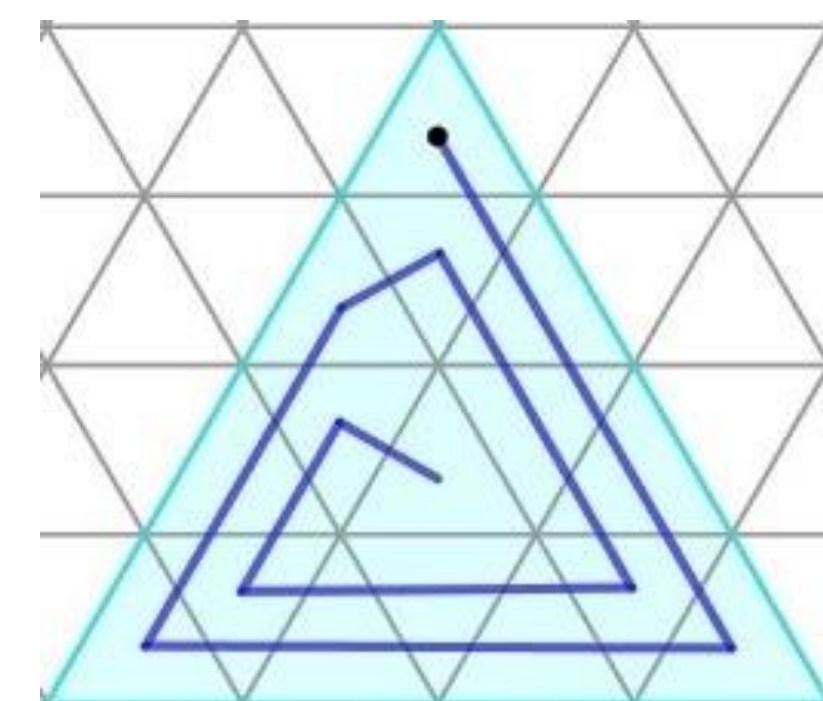


圖3.13

圖3.15： $T_{max}^C(2_{hex}) = 5$ 其代數列為{5,4,2,4,2,1}

圖3.16： $T_{min}^C(2_{hex}) = 4$ 其代數列為{4,3,1,1,3,4}

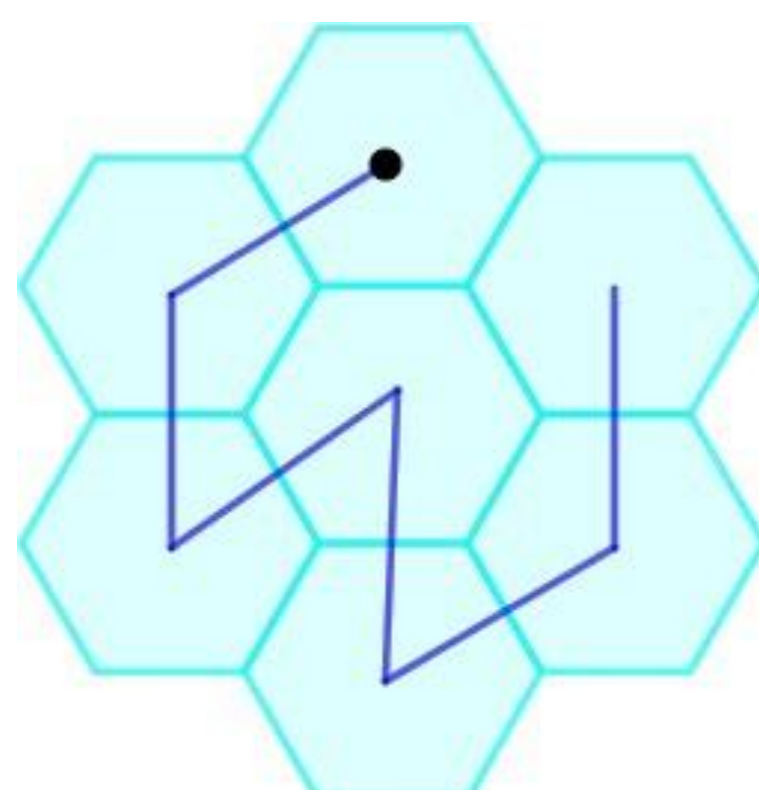


圖3.15

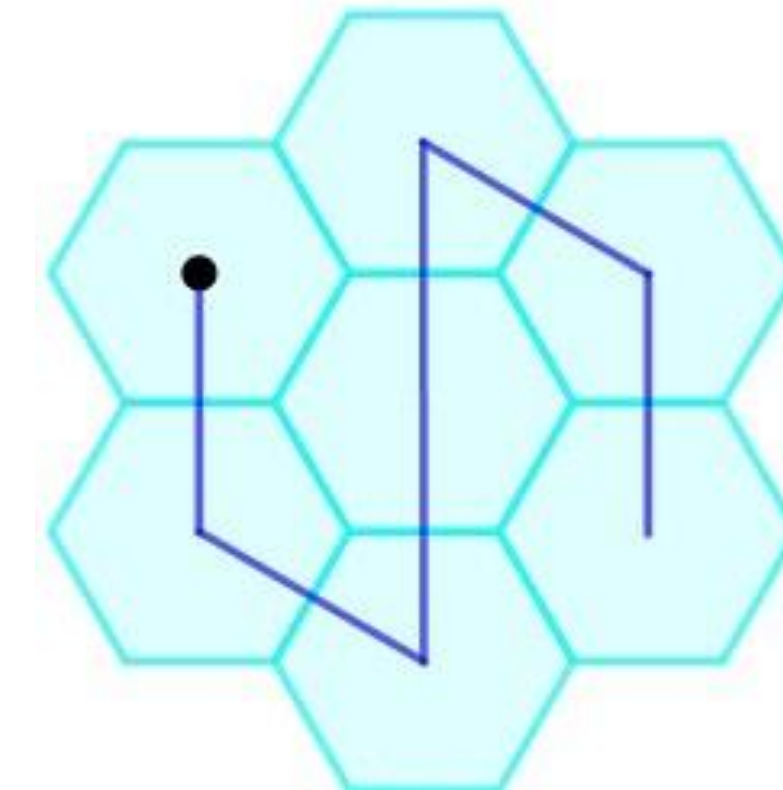


圖3.16

圖3.18： $T_{max}^V(2_i \times 4_j) = 12$ 其代數列為{5,2,8,3,4,6,3,2,8,3,4,6,3}

圖3.19： $T_{min}^V(2_i \times 4_j) = 8$ 其代數列為{4,3,8,8,3,4,4,3,8,8,3,4}

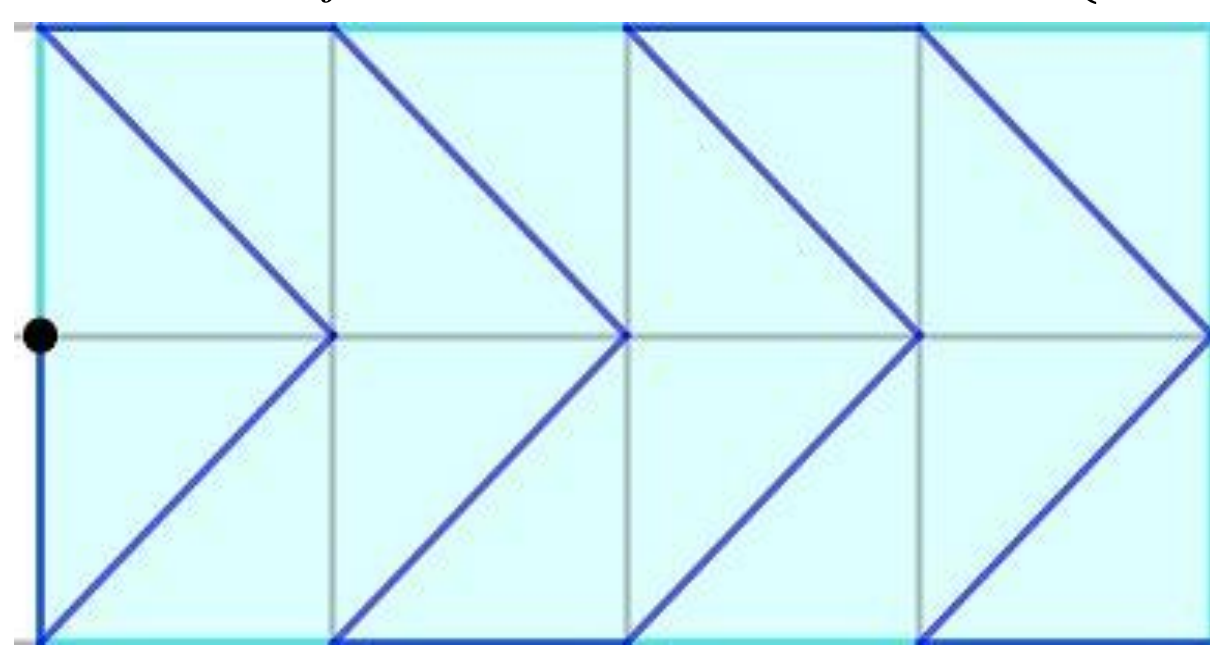


圖3.18

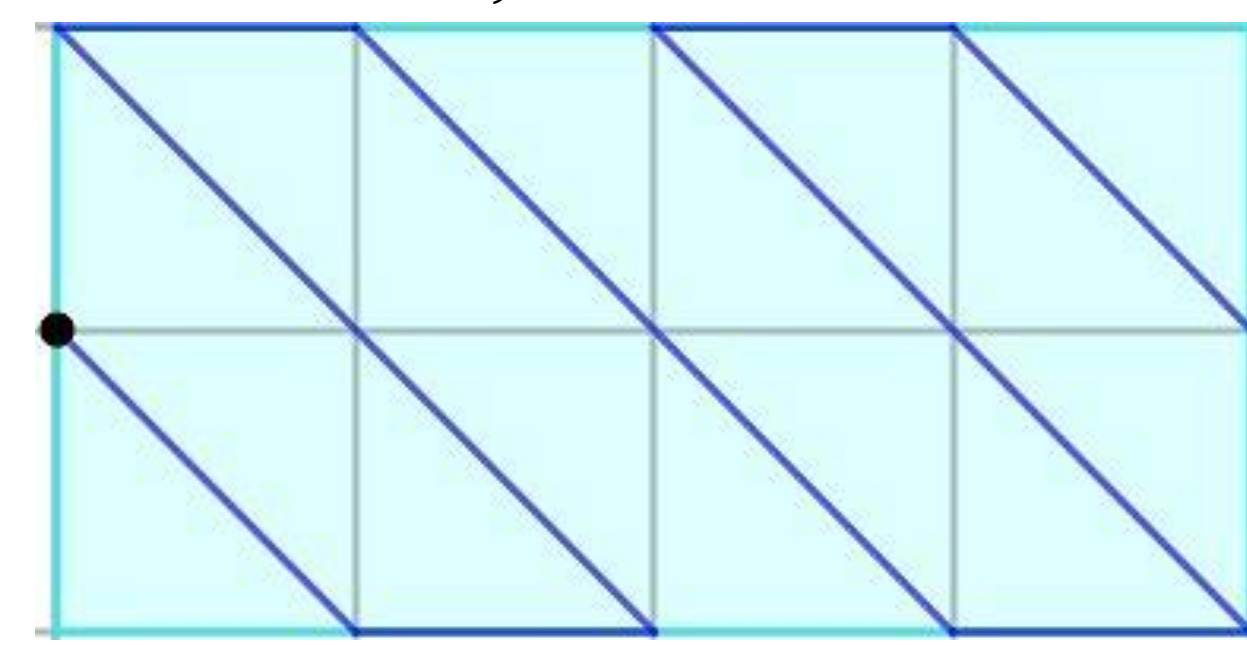


圖3.19

圖3.21： $T_{max}^V(2_{(1,2)}, 3_{(1,2,3)}) = 10$ 其代數列為{3,6,5,2,2,3,6,6,3,2,5}

圖3.22： $T_{min}^V(2_{(1,2)}, 3_{(1,2,3)}) = 6$ 其代數列為{4,2,4,5,8,6,8}

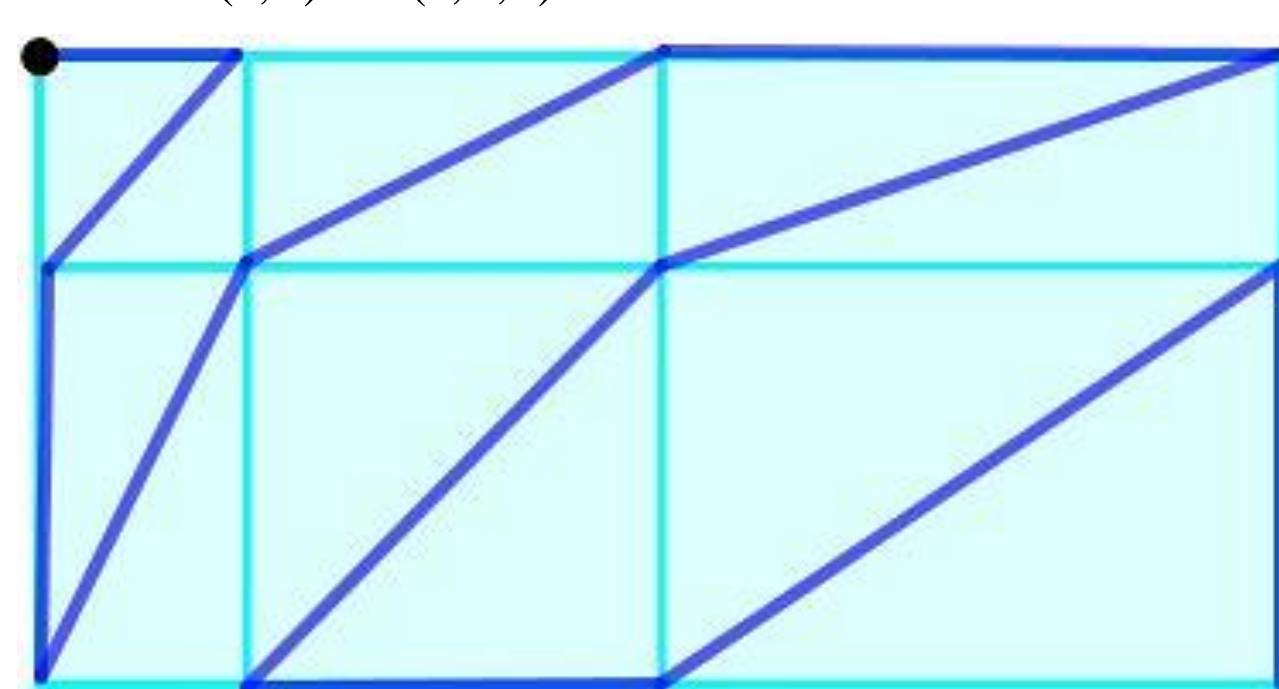


圖3.21

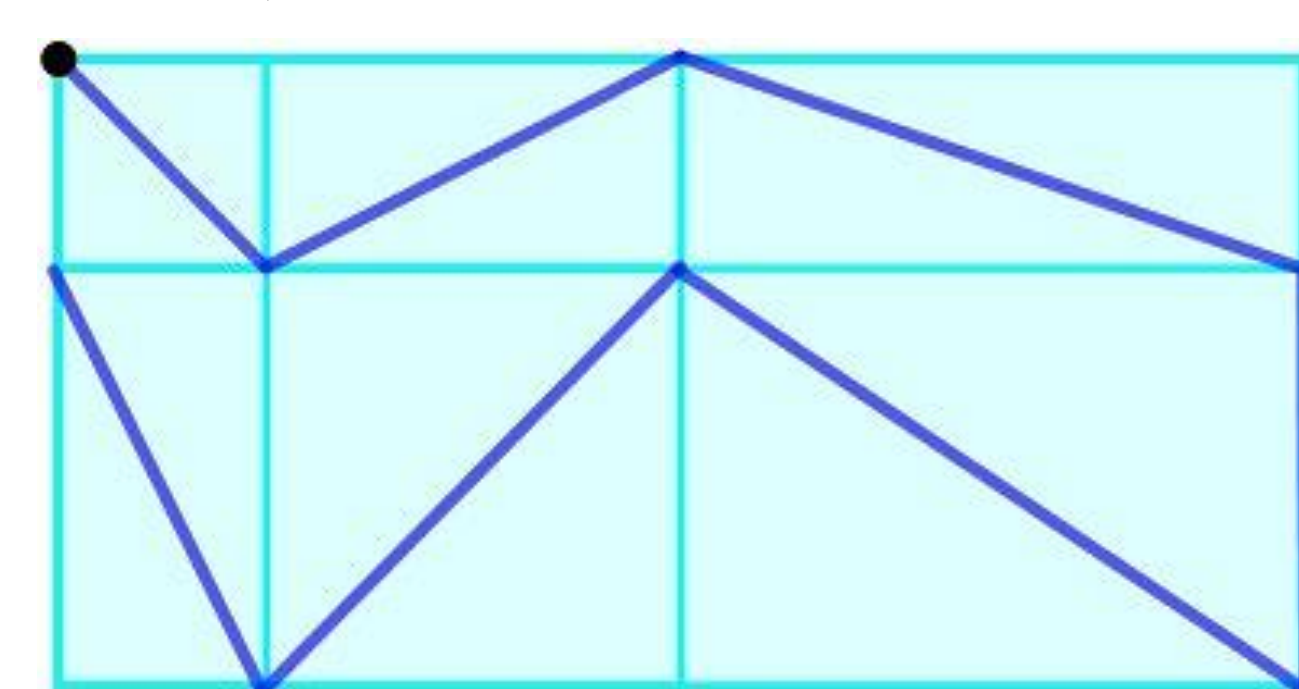


圖3.22

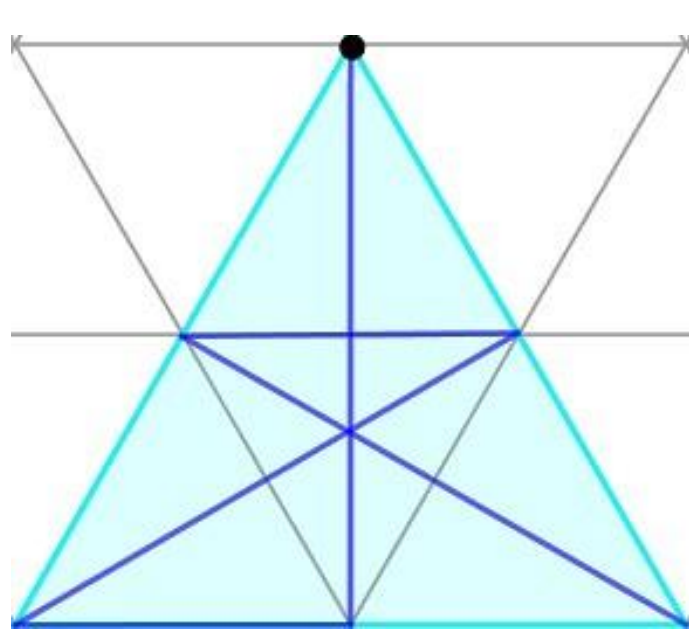


圖3.24

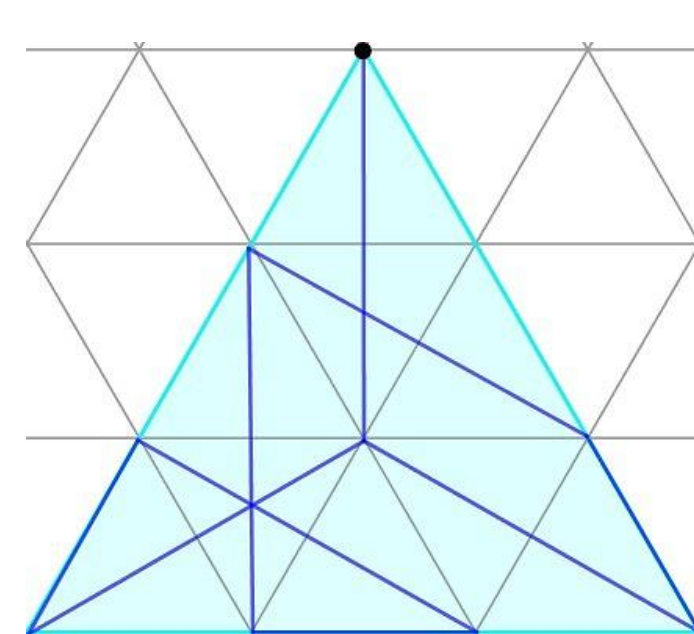


圖3.25

正三角形路徑轉折處只能在頂點時，中心會重複經過，如圖3.24及圖3.25。但原題目要求每一個中心只能經過一次，故不存在正三角形路徑轉折處只能在頂點的 $T_{max}^V(n_{tri})$ 與 $T_{min}^V(n_{tri})$ 。

圖3.28： $T_{max}^V(2_{hex}) = 20$ 其代數列為{3,2,6,2,6,2,1,2,4,2,4,2,4,2,1,2,6,2,6,2,3}

圖3.29： $T_{min}^V(2_{hex}) = 6$ 其代數列為{6,1,2,3,4,4,6,1}

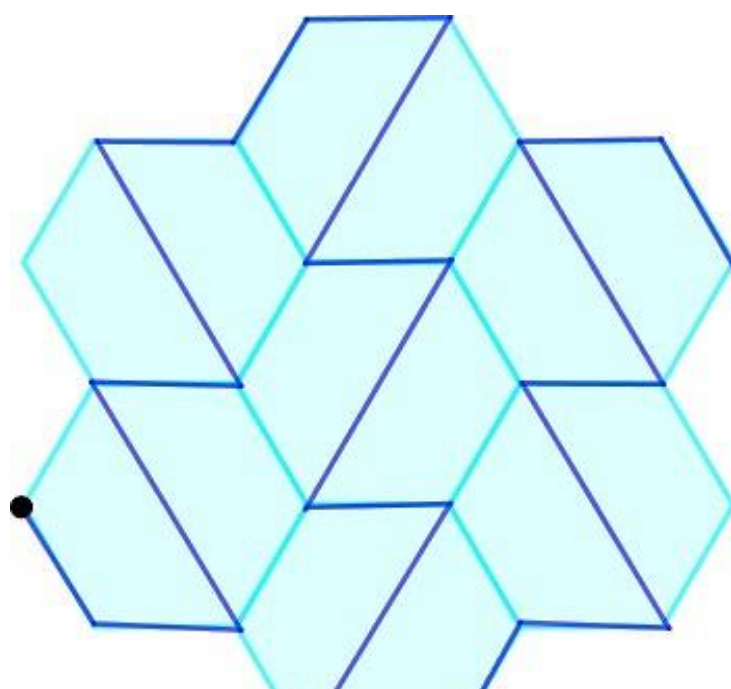


圖3.28

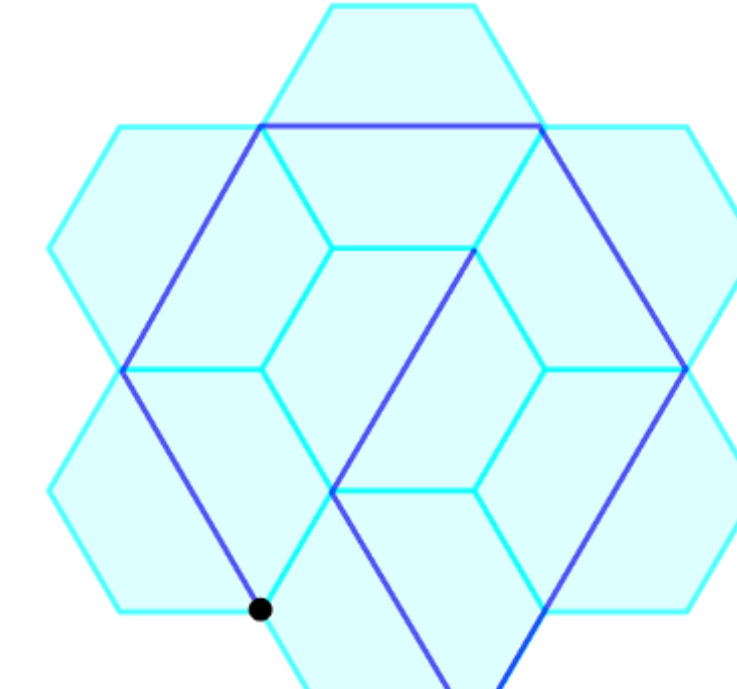
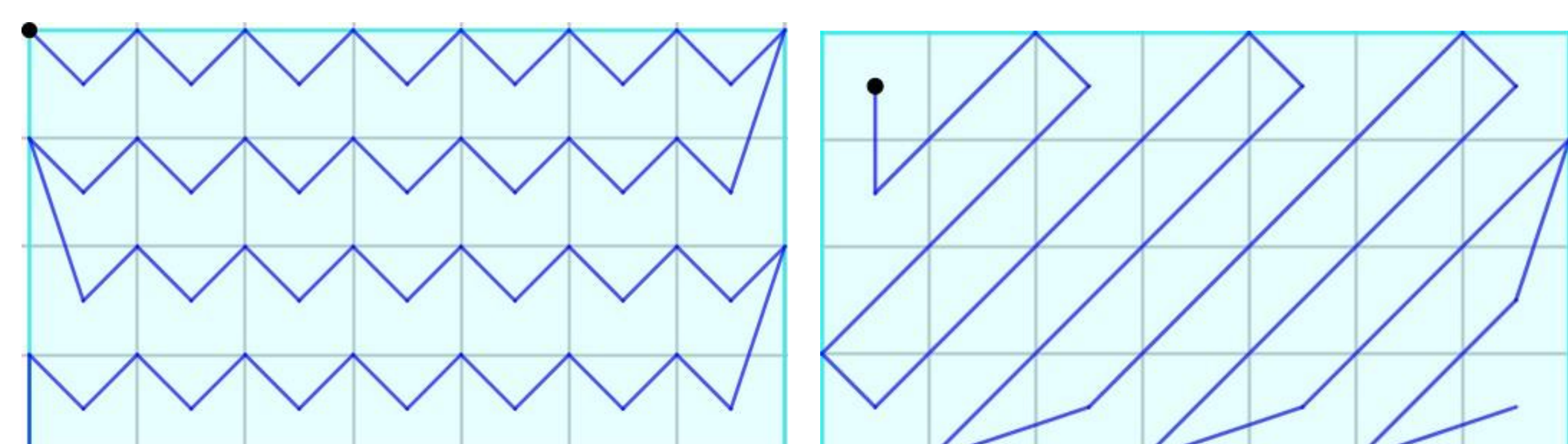


圖3.29

(三) 探討矩形路徑轉折處在中心與頂點依序輪流：

矩形路徑轉折處的依序共分八種，兩個中心或頂點依序輪流： $(C、V)$ 、 $(V、C)$ ，以及三個中心或頂點依序輪流： $(C、C、V)$ 、 $(C、V、C)$ 、 $(V、C、C)$ 、 $(V、V、C)$ 、 $(V、C、V)$ 、 $(C、V、V)$ 。

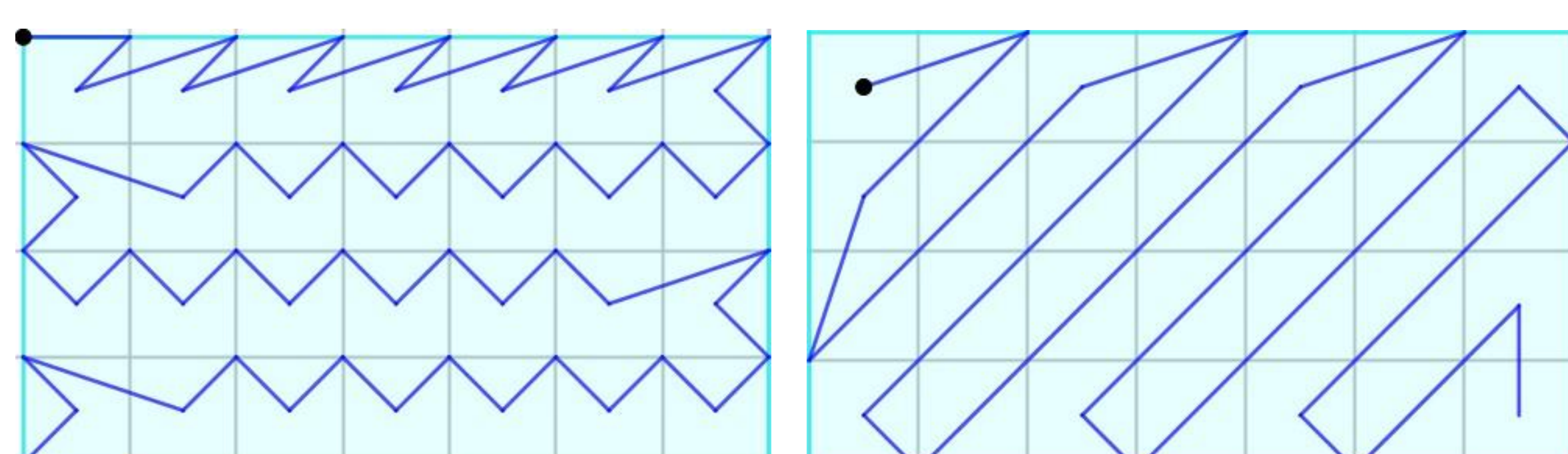
1. 路徑轉折處 $(C、V)$ 依序輪流



$$T_{max}^{CV}(4_i \times 7_j) = 56$$

$$T_{min}^{CV}(4_i \times 7_j) = 16$$

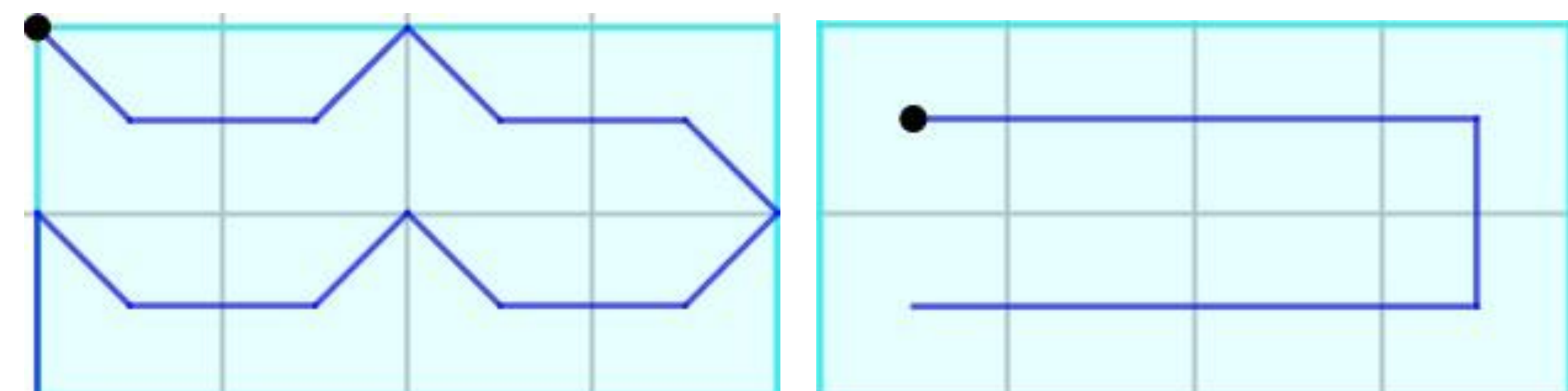
2. 路徑轉折處 $(V、C)$ 依序輪流



$$T_{max}^{VC}(4_i \times 7_j) = 57$$

$$T_{min}^{VC}(4_i \times 7_j) = 16$$

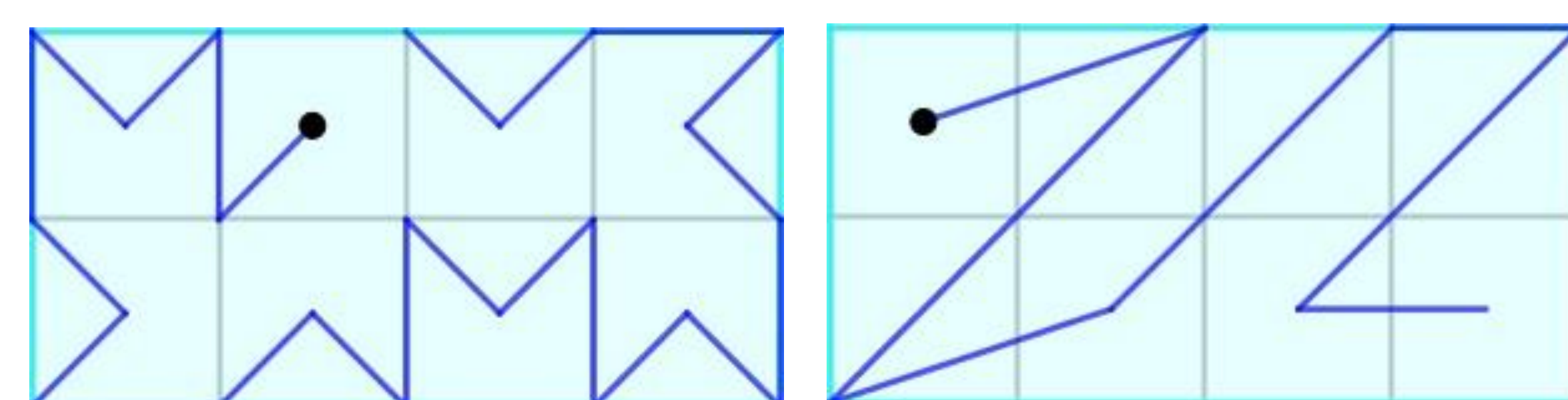
3. 路徑轉折處 $(C、C、V)$ 依序輪流



$$T_{max}^{CCV}(2_i \times 4_j) = 12$$

$$T_{min}^{CCV}(2_i \times 4_j) = 2$$

4. 路徑轉折處 $(V、V、C)$ 依序輪流



$$T_{max}^{VVC}(2_i \times 4_j) = 21$$

$$T_{min}^{VVC}(2_i \times 4_j) = 6$$

肆、討論與結論

定理一：各類幾何圖形路徑轉折處只能在中心時，除了 $m=1$ 的矩形外，路徑轉折次數的最大值必為中心個數減二。

定理二：利用中心個數與頂點個數的比例與奇偶性質，可找出矩形中心與頂點依序輪流，路徑轉折次數的最大值。

表4.1：各類幾何圖形路徑轉折處在中心、頂點，路徑轉折次數的最大值及最小值

	路徑轉折處只能在中心		路徑轉折處只能在頂點	
	T_{max}^C	T_{min}^C	T_{max}^V	T_{min}^V
矩形($m_i \times n_j$)	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ mn-2 & m>1 \end{cases}$	$2m-2$	$(m+1)n$	$\begin{cases} n-1 & m=1 \\ 2m+2n-4 & m>1 \end{cases}$
矩形($m_{(1..m)} \times n_{(1..n)}$)	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ mn-2 & m>1 \end{cases}$	$2m-2$	$(m+1)(n+1)-2$	$m(n+1)-2$
正三角形(n_{tri})	n^2-2	$\begin{cases} 8k-3 & n=3k \\ 8k-6 & n=3k-1 \\ 8k-9 & n=3k-2 \end{cases}$	因中心會重複通過，故不討論正三角形路徑轉折處只能在頂點。	
正六邊形(n_{hex})	$3n^2-3n-1$	$4n-4$	$6n^2-2n$	$\begin{cases} 3n^2-3n & n \leq 2 \\ 8n-8 & n > 2 \end{cases}$

表4.2、4.3：矩形路徑轉折處在中心與頂點不同的依序輪流下，路徑轉折次數的最大值及最小值

依序輪流	$T_{max}(m_i \times n_j)$	$T_{min}(m_i \times n_j)$	依序輪流	$T_{max}(m_i \times n_j)$	$T_{min}(m_i \times n_j)$	
CV	$2mn$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$	VVC	$\begin{cases} 2mn+m+n-1 & mn < m+n+4 \\ \frac{3(m+1)(n+1)}{2} & mn \geq m+n+4, (m+1)(n+1)=2k \\ \frac{3(m+1)(n+1)-1}{2} & mn \geq m+n+4, (m+1)(n+1)=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$	
VC	$2mn+1$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$		VCV	$\begin{cases} 2mn+m+n-1 & mn < m+n+5 \\ \frac{3(m+1)(n+1)}{2} & mn \geq m+n+5, (m+1)(n+1)=2k \\ \frac{3(m+1)(n+1)+1}{2} & mn \geq m+n+5, (m+1)(n+1)=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2m+2n-6 & m>1 \end{cases}$
CCV	$\begin{cases} \frac{3mn}{2} & mn=2k \\ \frac{3mn-1}{2} & mn=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2 & m=2 \\ 5 & m=3, n=3 \\ 3m-2 & m \geq 3, n > 3 \end{cases}$			CVV	$\begin{cases} 2mn+m+n-1 & mn < m+n+6 \\ \frac{3(m+1)(n+1)+2}{2} & mn \geq m+n+6, (m+1)(n+1)=2k \\ \frac{3(m+1)(n+1)+1}{2} & mn \geq m+n+6, (m+1)(n+1)=2k+1 \end{cases}$
CVC	$\begin{cases} \frac{3mn}{2} & mn=2k \\ \frac{3mn+1}{2} & mn=2k+1 \end{cases}$	$3m-3$				
VCC	$\begin{cases} \frac{3mn+2}{2} & mn=2k \\ \frac{3mn+1}{2} & mn=2k+1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & m=1 \\ 2 & m=2, n=2 \\ 3m-1 & m \geq 2, n > 2 \end{cases}$				

伍、未來展望

一、長方體

若將平面的矩形延伸至立體的長方體，是否會與原本矩形的路徑轉折次數有相同或相似的結果？

二、不同路徑走法組合

探討在矩形中，其他路徑走法組合時，路徑轉折次數的最大值及最小值與本作品路徑走法組合a,b有何差異？

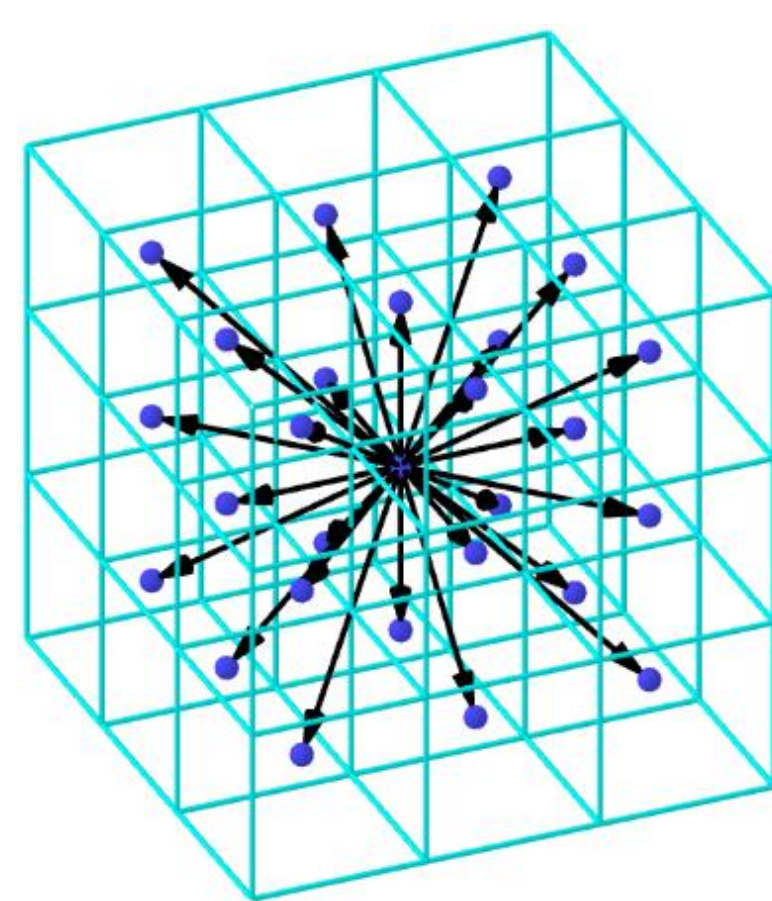


圖5.1

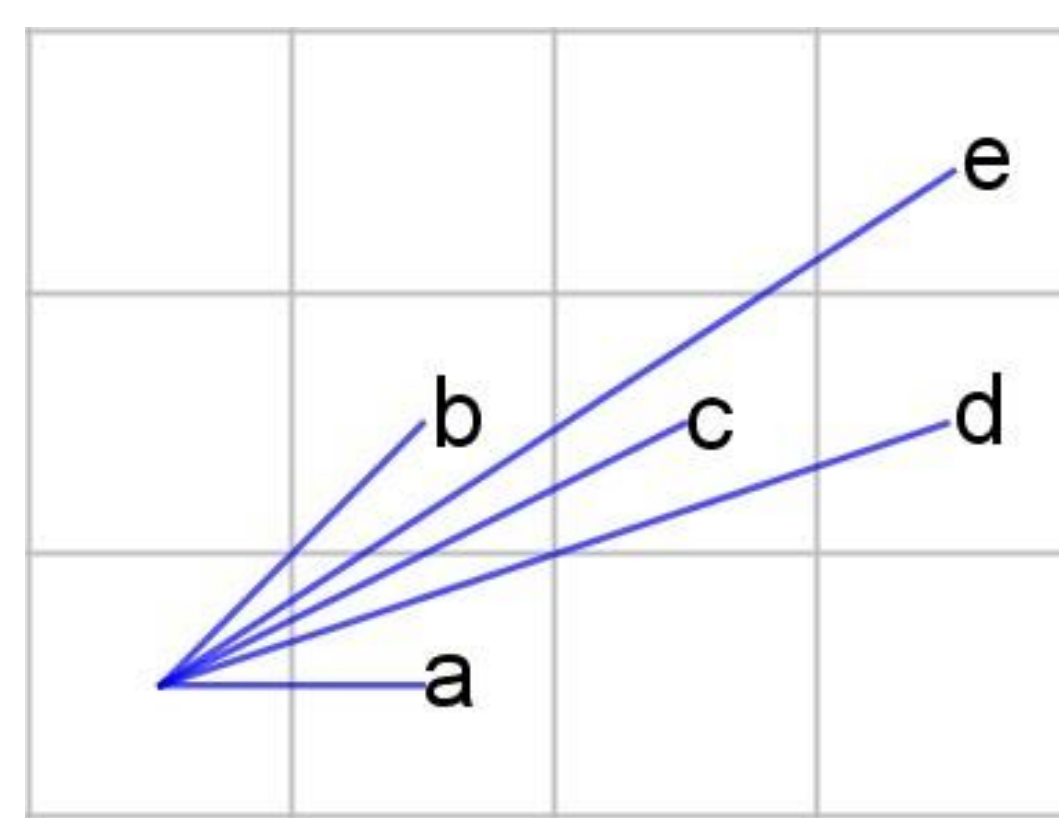


圖5.2

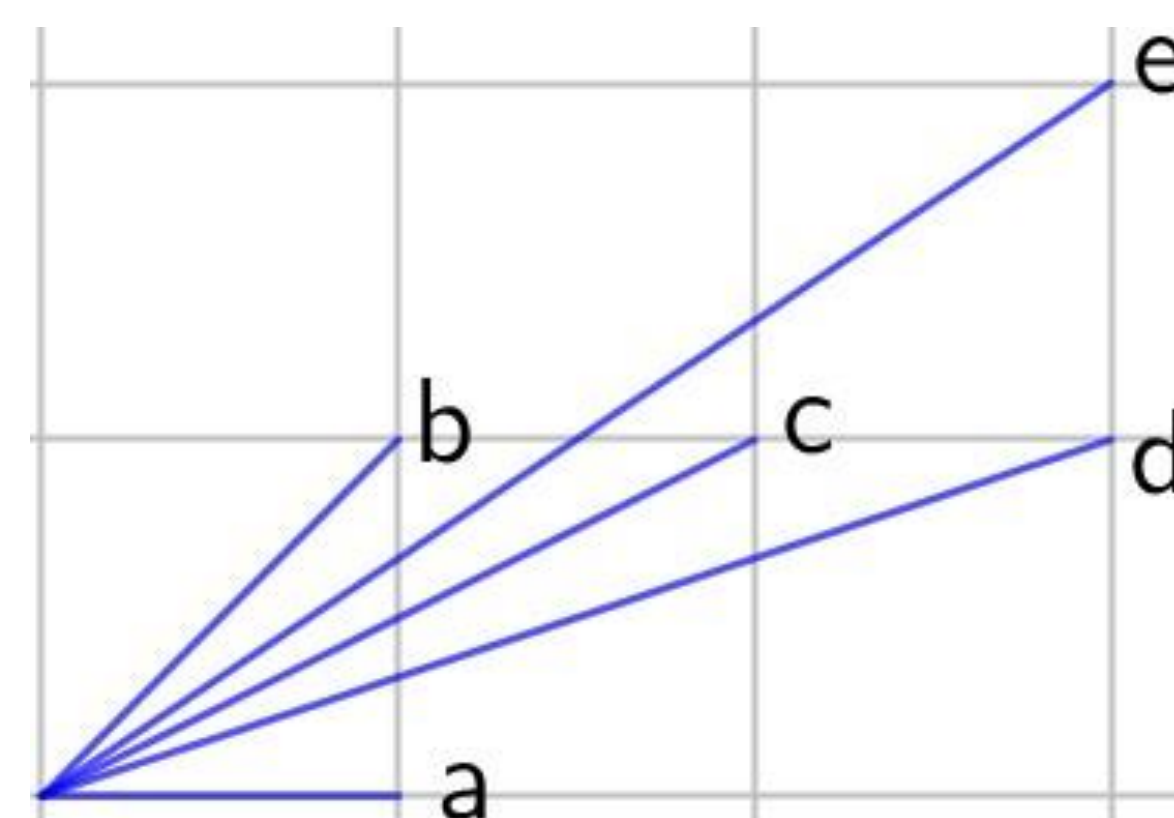


圖5.3

陸、參考文獻資料

[1] 游森棚(2023)。特約專欄〈森棚教官的數學題—蜿蜒曲折〉。科學研習雙月刊，62-3，頁141。