中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第二名

030411

心之所「向」—多個旋轉中心旋轉任意點的形心性質

學校名稱： 臺北市立蘭雅國民中學

作者：	指導老師：
國三 陳寬	林靖捷

關鍵詞： 旋轉、向量、 形心

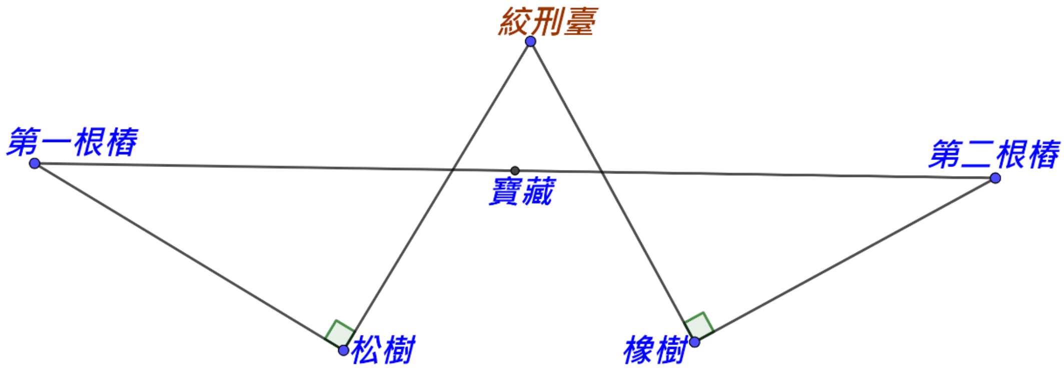
摘要

從《虛數：從零開始徹底搞懂虛數 少年伽利略 1》中的問題作為出發點，主要探討如何透過簡單的方式證明當給定樹的位置後，絞刑臺的位置不影響樁所形成的寶藏位置。在過程中，發現並證明了旋轉角度改變時，樁所形成的寶藏位置之移動軌跡為圓形。其中不論樹的數量和位置如何改變，皆能利用三角形全等和向量的概念證明樁的所形成的寶藏位置不受絞刑臺位置影響。後來我改變旋轉的程序，在n棵樹的位置任意與旋轉角度任意的條件下，推得寶藏的位置形成兩個正n邊形，可用於對寶藏位置進行加密與解密。

壹、前言

一、研究動機

我在閱讀《虛數：從零開始徹底搞懂虛數 少年伽利略 1》時，看到一個有趣的問題(如下圖)：「有座島上埋有寶藏，在暗示寶藏位置的藏寶圖指示如下：『島上有一絞刑臺、一棵橡樹、一棵松樹。先站在絞刑臺前，向橡樹筆直前進，碰到橡樹後，順時針轉90°，向前走相同的步數，然後打下第一根樁，接著回到絞刑臺，向松樹筆直前進，碰到松樹後，逆時針轉90°，再向前走相同的步數，然後打下第二根樁，寶藏就埋在第一根樁和第二根樁的中點。』。一位探險家拿到這張圖，便到島上尋寶，卻發現絞刑臺已經消失了。不過，倘若會虛數運算的話，即使不知道絞刑臺的位置，也可以找到寶藏，寶藏究竟在哪裏呢？」。在我看完了這個問題後，覺得它的證明方式過於複雜，我就想使用更簡單的方法來證明寶藏的位置和絞刑臺的位置無關，然後使用樹的位置及旋轉角度進行加密與解密。



(作者自行繪製)

二、研究目的

(一)證明在n棵樹及分別逆時針旋轉$a°$、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times 2}{n})°$、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$的條件下，若給定樹的位置，則加密的寶藏位置($n$根樁的形心)與絞刑臺的位置無關。(形心：在平面上若M點的座標為n個點的座標相加再除以n，則M點稱為此n個點的形心)

(二)證明在n棵樹及分別逆時針旋轉$a°$、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times 2}{n})°$、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$的條件下，若給定樹的位置，改變$a$的數值，則加密的寶藏位置($n$根樁的形心)的移動軌跡為圓，且$n$棵樹的形心為此圓的圓心。

(三)證明從n棵樹之中任取x棵樹，且此n棵樹以不同順序取x次，分別逆時針旋轉$a°$、$(a+\frac{360}{x})°$、$(a+\frac{360\times 2}{x})°$、…、$(a+\frac{360\times(x-1)}{x})°$，如此操作$n$次後，$nx$根樁的形心和$n$棵樹的形心之位置相同。

(四)證明若依序在三棵樹之中取相鄰兩棵樹，分別逆時針旋轉$90°$、$270°$打樁後將兩樁中點(加密的寶藏位置)與第三棵樹連成直線，則此三條直線共點。

(五)證明在n棵樹的條件下，逐次各以順、逆時針旋轉$a°$、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times 2}{n})°$、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$，推得的$2n$個寶藏之兩兩連線圍成正$n$邊形，且其形心與寶藏的形心、$n$棵樹的形心位置相同。

(六) 證明3棵樹為旋轉中心，由絞刑臺對第一棵樹分別順、逆時針旋轉$a°$、$(a+120)°$、$(a+240)°$打樁做寶藏時，6個寶藏之兩兩連線，將此6個寶藏對應，連成3條線，此3條線三線共點。

三、文獻回顧

決定以加密作為本次研究的主軸後，我上網搜尋有無相關的文章，找到了《藏寶旋跡》，它是第52屆全國科展的作品，但是它使用了三角函數、複數及極式，對於多數國中生過於艱澀難以理解，於是我便想嘗試使用較簡單的方法證明。

下表是本作品與上述兩個文獻的差異：

性質	本作品	文獻	
		少年伽利略	藏寶旋跡
$T=2$（原題）	✓	✓	✓
$T=n$（延伸）	✓	×	✓
軌跡證明	✓	×	✓
多次旋轉	✓ （絞刑臺相同）	×	✓ （絞刑臺為上一個寶藏位置）
上述使用證明方式	三角形全等、向量	複數	三角函數、複數、極式
三線共點(3 樹取 2)	✓	×	×
三線共點 （$2n$ 個寶藏）	✓	×	×
$2n$ 個寶藏共點軌跡	✓	×	×

本作品使用三角形全等和向量的方式證明，和《藏寶旋跡》的大量三角函數計算不同，另外，本作品也證明出在部分情況會出現三線共點。

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GeoGebra 動態幾何繪圖軟體。

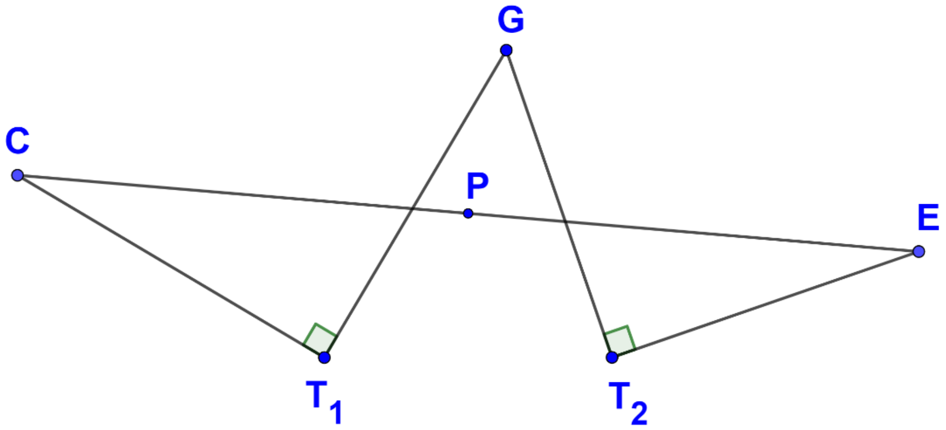
參、研究過程或方法

首先，為了方便使用幾何的方式證明，我將原題目的敘述用 GeoGebra 動態幾何繪圖軟體繪圖，將絞刑臺的位置設為 G (gallows)，樹的位置設為 T_1、T_2，寶藏的位置設為 P (precious deposits)，來證明僅使用樹及角度就能找到寶藏的唯一位置。

一、原題

【已知】

如圖，在平面上任取三點 G 、T_1 、T_2 ，連接 $\overline{T_1G}$ 、$\overline{T_2G}$ ，以 T_1 為旋轉中心將 G 點逆時針旋轉 $90°$ 得到 C 點，以 T_2 為旋轉中心將 G 點順時針旋轉 $90°$ 得到 E 點，連接 $\overline{CE}$ ，作 $\overline{CE}$ 的中點 P 。



(作者自行繪製)

【求證】當 G 點的位置改變時， P 點的位置不變。

【證明】

分別過 C 、 P 、 G 、 E 點，作 $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 的垂線交 $\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 於 B,F,A,D 點，再連接 $\overline{BD}$

$\because \angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3=90°$　　$\therefore \angle 1=\angle 3$

又 $\angle B=\angle T_1AG, \overline{T_1C}=\overline{T_1G}$

$\therefore \Delta GAT_1 \cong \Delta T_1BC\ (AAS)$

$\therefore \overline{T_1B}=\overline{AG}, \overline{BC}=\overline{T_1A}$

同理 $\Delta GAT_2 \cong \Delta T_2DE\ (AAS)$

$\therefore \overline{T_2D}=\overline{AG}, \overline{DE}=\overline{T_2A}$

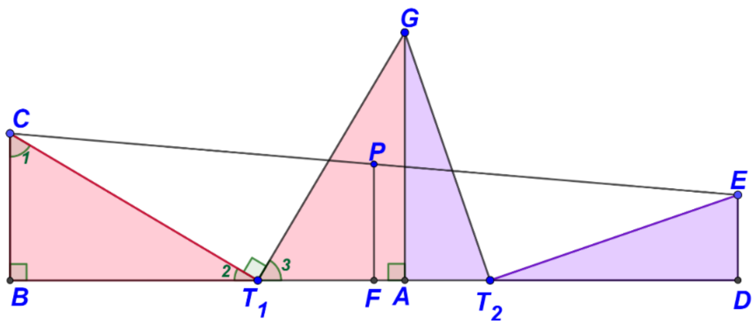
$\therefore \overline{T_1B}=\overline{T_2D}$

$\because \overline{PC}=\overline{PE}, \overline{DE}//\overline{PF}//\overline{CB}$

$\therefore \overline{FB}=\overline{FD}$

$\overline{T_1F}=\overline{FB}-\overline{T_1B}=\overline{FD}-\overline{T_2D}=\overline{T_2F}$

$\therefore \overline{T_1F}=\overline{T_2F}$



(作者自行繪製)

$$\because \overline{PF}=\frac{\overline{DE}+\overline{BC}}{2}=\frac{\overline{T_2A}+\overline{T_1A}}{2}=\frac{\overline{T_1T_2}}{2}=\overline{T_1F}=\overline{T_2F}$$

又 $\overline{PF} \perp \overline{T_1T_2}$

$$\therefore \overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \sqrt{(\frac{\overline{T_1T_2}}{2})^2 + (\frac{\overline{T_1T_2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{T_1T_2}$$

$\therefore P$ 點的位置會在分別以 T_1 點、T_2 點為圓心，$\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{T_1T_2}$ 為半徑畫弧的交點上

$\therefore G$ 點的位置不會影響 P 點的位置 □

根據上述推論可知有以下性質。

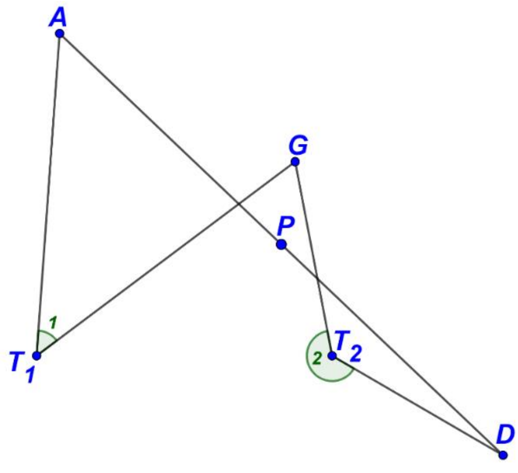
性質 1：當以兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $90°$ 、順時針旋轉 $90°$ 打樁時，寶藏的位置(兩樁的中點)與絞刑臺位置無關。

二、分別以兩棵樹為旋轉中心，旋轉任意角度打樁。

接下來，我將原題目限制的角度進行改變，讓角度能夠任意設定，僅將兩角度的差設為 $180°$ 進行加密。

【已知】

如圖，在平面上任取三點 G 、T_1 、T_2 ，連接 $\overline{T_1G}$ 、$\overline{T_2G}$ ，以 T_1 為旋轉中心將 G 點逆時針旋轉 $a°$ 得到 A 點，以 T_2 為旋轉中心將 G 點逆時針旋轉 $(a+180)°$ 得到 D 點，即 $\angle 1 = a°$ ，$\angle 2 = (a+180)°$ ，連接 $\overline{AD}$ ，作 $\overline{AD}$ 的中點 P 。



(作者自行繪製)

【求證】當 G 點的位置改變時，P 點的位置不變。

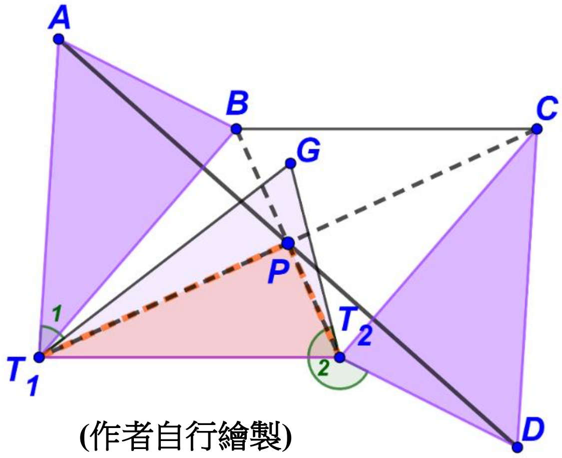
【證明】

如圖，連接 $\overline{T_1T_2}$ ，將 ΔGT_1T_2 以 T_1 為旋轉中心逆時針旋轉 $a°$

得到 ΔAT_1B ，再將 ΔGT_1T_2 以 T_2 為旋轉中心逆時針轉 $(a+180)°$ 得到 ΔDCT_2

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{T_2D}$

$= (\overrightarrow{T_1A} - \overrightarrow{T_1B}) + (\overrightarrow{T_1D} - \overrightarrow{T_1T_2})$



(作者自行繪製)

$=(\overrightarrow{T_1A}+\overrightarrow{T_1D})-(\overrightarrow{T_1B}+\overrightarrow{T_1T_2})$

$=\overrightarrow{T_1C}-\overrightarrow{T_1C}=\vec{0}$

$\overrightarrow{T_1A}+\overrightarrow{T_2D}=\overrightarrow{T_1B}=\overrightarrow{T_2C}$

$\because \overline{AP}:\overline{PD}=1:1$

根據分點公式

$\overrightarrow{T_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{T_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{T_1D}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{T_1B}+\overrightarrow{BA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2D})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{T_1B}+\overrightarrow{T_1T_2})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{T_2D})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{T_1B}+\overrightarrow{T_1T_2})+\frac{1}{2}\vec{0}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{T_1B}+\overrightarrow{T_1T_2})$

$\therefore \overline{PB}:\overline{PT_2}=1:1$

$\therefore P$點是B點和T_2點的中點

$\therefore P$點的位置不會受到G點的位置影響 □

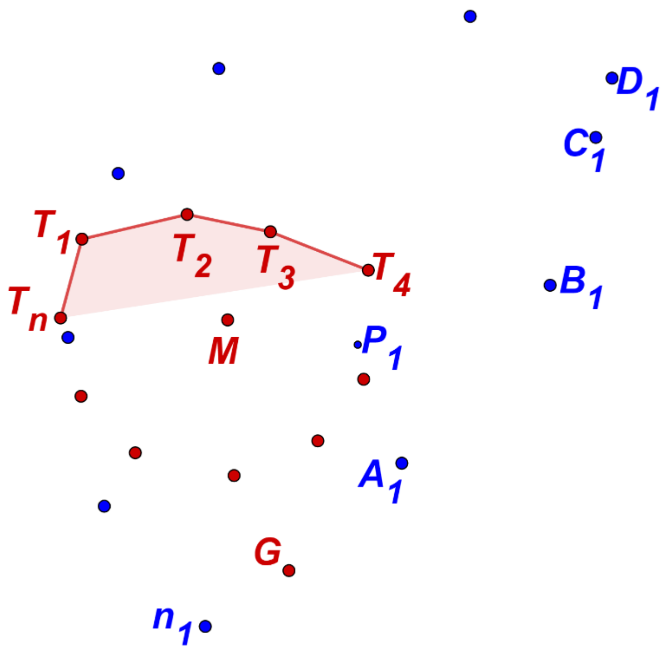
性質 2：當以兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉$a°$、$(a+180)°$打樁時，寶藏的位置(兩樁的中點)與絞刑臺位置無關。

三、分別以n棵樹為旋轉中心，旋轉任意角度打樁。

我將樹的數量改為n進行證明，代表無論樹的數量為何，此性質皆成立，能夠在給出任一棵樹和角度後推出寶藏位置。

【已知】

如圖，在平面上任取$n+1$點、T_1、T_2、T_3、…、T_n、G_1，連接$\overline{T_1T_2}$、$\overline{T_2T_3}$、$\overline{T_3T_4}$、⋯、$\overline{T_nT_1}$，以T_1為旋轉中心將G_1點逆時針旋轉$a°$得到A_1點，以T_2為旋轉中心將G_1點逆時針旋轉$(a+\frac{360}{n})°$得到B_1點，以T_3為旋轉中心將G_1點逆時針旋轉$(a+\frac{360\times 2}{n})°$得到$C_1$點，…依此類推，以$T_n$為旋轉中心將$G_1$點逆時針旋轉$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$得到$n_1$點，作$A_1B_1C_1...n_1$的形心$P_1$。

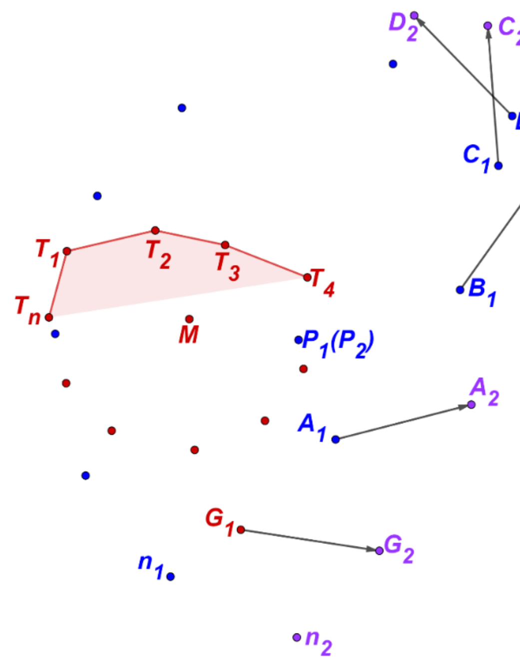


(作者自行繪製)

【求證】當G_1點的位置改變時，P_1點的位置不變。

【證明】

如圖，在平面上任取一點G_2，以T_1為旋轉中心將G_2點逆時針旋轉$a°$得到A_2點，以T_2為旋轉中心將G_2點逆時針旋轉$(a+\dfrac{360}{n})°$得到B_2點，以T_3為旋轉中心將G_2點逆時針旋轉$(a+\dfrac{360\times 2}{n})°$得到$C_2$點，…依此類推，以$T_n$為旋轉中心將$G_2$點逆時針旋轉$(a+\dfrac{360\times(n-1)}{n})°$得到$n_2$點，作$A_2B_2C_2...n_2$的形心$P_2$。連接$\overrightarrow{A_1A_2}$、$\overrightarrow{B_1B_2}$、$\overrightarrow{C_1C_2}$、…、$\overrightarrow{n_1n_2}$。



(作者自行繪製)

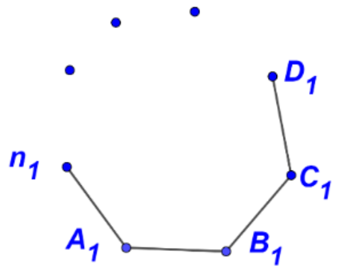
設 O 為原點

$\because \overrightarrow{OP_1}=\dfrac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+...+\overrightarrow{On_1}}{n}$ ， $\overrightarrow{OP_2}=\dfrac{\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}+...+\overrightarrow{On_2}}{n}$

$$\therefore \overrightarrow{P_1P_2}=\frac{\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}+...+\overrightarrow{On_2}}{n}-\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+...+\overrightarrow{On_1}}{n}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OB_1})+(\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OC_1})+...+(\overrightarrow{On_2}-\overrightarrow{On_1})}{n}$$

$$=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+...+\overrightarrow{n_1n_2}}{n} \quad — ①$$



(作者自行繪製)

$\because \overline{G_1T_1}=\overline{A_1T_1}, \overline{G_2T_1}=\overline{A_2T_1}, \angle G_1T_1G_2=\angle A_1T_1A_2$

所以 $\Delta G_1T_1G_2 \cong \Delta A_1T_1A_2\ (SAS)$

同理 $\Delta G_1T_2G_2 \cong \Delta B_1T_2B_2, \Delta G_1T_3G_2 \cong \Delta C_1T_3C_2, ..., \Delta G_1T_nG_2 \cong \Delta n_1T_nn_2$

$\therefore \overline{G_1G_2}=\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}=...=\overline{n_1n_2}$

如圖，將 $\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{B_1B_2}$ 、 $\overline{C_1C_2}$ 、⋯、 $\overline{n_1n_2}$ 平移後，使 A_2 和 B_1 重疊、 B_2 和 C_1 重疊、 C_2 和 D_1 重疊、…、 n_2 和 A_1 重疊，則連接 $\overline{A_1B_1}$ 、 $\overline{B_1C_1}$ 、 $\overline{C_1D_1}$ 、⋯、 $\overline{n_1A_1}$ 可圍成 n 邊形。

$\because$ 每個外角為 $(a+\dfrac{360}{n})^\circ-a^\circ=(\dfrac{360}{n})^\circ$

$\overline{G_1G_2}=\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}=\cdots=\overline{n_1n_2}$

$\therefore$ 此 n 邊形為正 n 邊形

$\therefore \overline{G_1G_2}=\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}=\cdots=\overline{n_1n_2}$

$\therefore \overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\cdots+\overrightarrow{n_1n_2}=\vec{0}$ — ②

由①②可知 $\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{0}$

$\therefore P$ 點的位置不會受到 G_1 點的位置影響 □

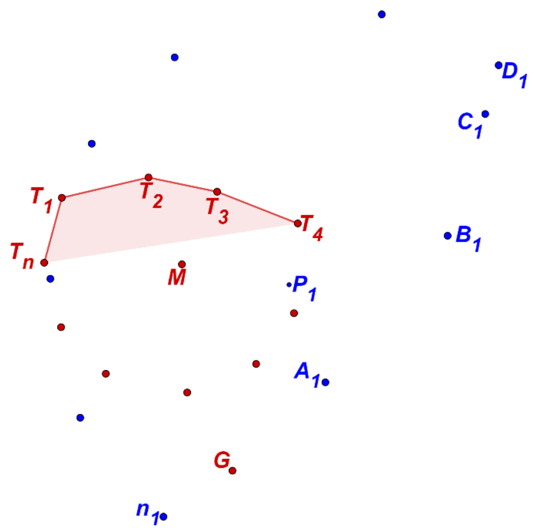
性質 3：當以 n 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 a° 、 $(a+\dfrac{360}{n})^\circ$ 、 $(a+\dfrac{360\times 2}{n})^\circ$ 、…、 $(a+\dfrac{360\times(n-1)}{n})^\circ$ 打樁時，寶藏的位置(n 根樁的形心)與絞刑臺位置無關。 註：打樁時，旋轉角度的順序不影響結果，相當於兩棵樹換了位置。

四、分別以n棵樹為旋轉中心旋轉任意角度打樁，旋轉角度改變時，寶藏位置的移動軌跡。

在上述的證明過程中，我發現將角度改變時，寶藏移動的軌跡為圓，而且圓心還是所有樹所組成的形心，所以我決定來證明此事。

【已知】

如圖，在平面上任取$n+1$點T_1、T_2、T_3、…、T_n、G，連接$\overline{T_1T_2}$、$\overline{T_2T_3}$、$\overline{T_3T_4}$、⋯、$\overline{T_nT_1}$，以T_1為旋轉中心將G點逆時針旋轉$a_1°$得到A_1點，以T_2為旋轉中心將G點逆時針旋轉$(a_1+\frac{360}{n})°$得到B_1點，以T_3為旋轉中心將G點逆時針旋轉$(a_1+\frac{360\times 2}{n})°$得到$C_1$點， …依此類推，以$T_n$為旋轉中心將$G$點逆時針旋轉$(a_1+\frac{360\times(n-1)}{n})°$得到$n_1$點，作$A_1B_1C_1...n_1$的形心$P_1$，作$T_1T_2T_3...T_n$的形心$M$ 。

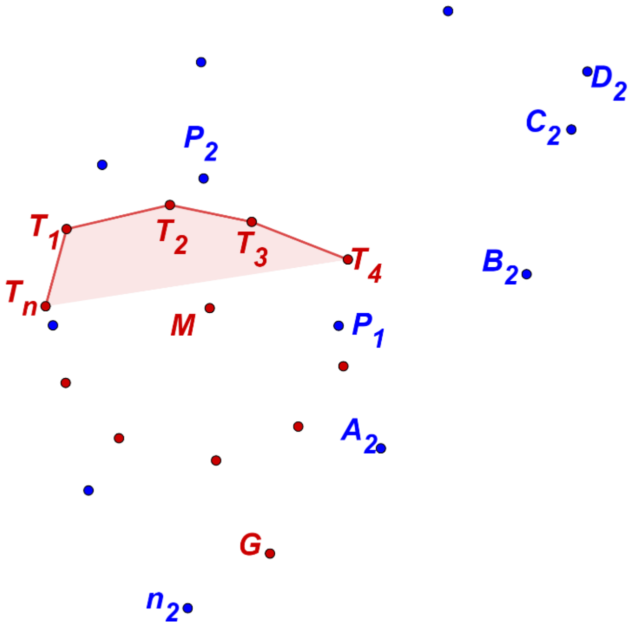


(作者自行繪製)

【求證】當a_1的數值改變時，不動點位置的移動軌跡為圓形，且M 為此圓的圓心 。

【證明】

如圖，以T_1為旋轉中心將G點逆時針旋轉$a_2°$得到A_2點，以T_2為旋轉中心將G點逆時針旋轉$(a_2+\frac{360}{n})°$得到B_2點，以T_3為旋轉中心將G點逆時針旋轉$(a_2+\frac{360\times 2}{n})°$得到$C_2$點， …依此類推，以$T_n$為旋轉中心將$G$點逆時針旋轉$(a_2+\frac{360\times(n-1)}{n})°$得到$n_2$點，作$A_2B_2C_2...n_2$的形心$P_2$ 。



(作者自行繪製)

根據性質 4，G 點的位置不影響 P_1 、 P_2 點的位置，我們假設 G 點的位置不變

$\because \overline{A_1T_1}=\overline{GT_1}=\overline{A_2T_1}$

同理 $\overline{B_1T_2}=\overline{GT_2}=\overline{T_2B_2},\overline{C_1T_3}=\overline{GT_3}=\overline{T_3C_2},...,\overline{n_1T_n}=\overline{GT_n}=\overline{T_nn_2}$

$$\because \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_3}+...+\overrightarrow{OT_n}}{n}$$

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+...+\overrightarrow{On_1}}{n}$$

$$\overrightarrow{MP_1}=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OM}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OT_1})+(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OT_2})+(\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OT_3})+...+(\overrightarrow{On_1}-\overrightarrow{OT_n})}{n}$$

$$=\frac{\overrightarrow{T_1A_1}+\overrightarrow{T_2B_1}+\overrightarrow{T_3C_1}+...+\overrightarrow{T_nn_1}}{n}$$

同理 $\overrightarrow{MP_2}=\dfrac{\overrightarrow{T_1A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_3C_2}+...+\overrightarrow{T_nn_2}}{n}$

又 $\overrightarrow{T_1A_2}$ 是 $\overrightarrow{T_1A_1}$ 逆時針轉 $(a_2-a_1)°$

$\overrightarrow{T_2B_2}$ 是 $\overrightarrow{T_2B_1}$ 逆時針轉 $(a_2-a_1)°$

$\overrightarrow{T_3C_2}$ 是 $\overrightarrow{T_3C_1}$ 逆時針轉 $(a_2-a_1)°$

$\vdots$

$\overrightarrow{T_nn_2}$ 是 $\overrightarrow{T_nn_1}$ 逆時針轉 $(a_2-a_1)°$

$\overrightarrow{MP_2}$ 是 $\overrightarrow{MP_1}$ 逆時針轉 $(a_2-a_1)°$

$\overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{MP_2}$

$\therefore P$點的位置移動軌跡為圓形，且M 為此圓的圓心 。 □

性質 4：當以n棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉$a°$、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times 2}{n})°$、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$打樁，改變$a°$的數值時寶藏的位置($n$根樁的形心) 移動軌跡為圓，且所有樹的形心為此圓的圓心 。

五、在兩棵樹轉任意角度情況下，給出寶藏位置，反推樹可能的位置。

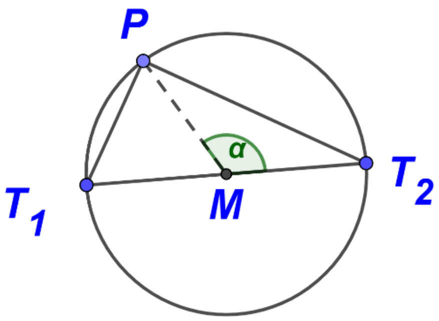
我想找出在兩棵樹轉任意角度情況下，給出寶藏位置時，所有樹可能存在的位置。由性質 4 可知，兩棵樹以及寶藏所能構成的三角形必為直角三角形(如圖)(半圓圓周角 90 度)，因此，假設寶藏位置為P點，T_1、T_2為同一平面上的兩點，若$\angle T_1PT_2 = 90°$，則T_1、T_2為樹可能的位置其中，我們分為以下四種情況討論：我們分為以下四種情況討論：

(1) $a = 0 \Rightarrow P$與T_2共點($\because \overrightarrow{GT_1} = \vec{0}$)

(2) $a = 180 \Rightarrow P$與T_1共點($\because \overrightarrow{GT_2} = \vec{0}$)

(3) $0 < a < 180 \Rightarrow \angle T_2MP = a°$ (如圖)

(4) $180 < a < 360 \Rightarrow \angle T_2MP = (360-a)°$



(作者自行繪製)

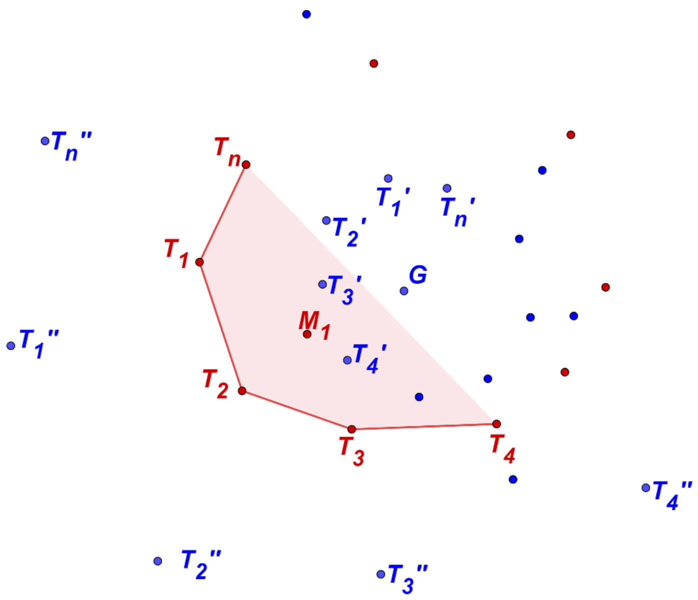
性質 5：當以兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉$a°$、$(a+180)°$打樁時，寶藏的位置(兩樁的中點)必定能與兩棵樹構成直角三角形。

六、在n棵樹中任取 2 棵樹為旋轉中心，且此n棵樹以不同順序取兩次、旋轉任意角度打樁。

我發現若是在n棵樹之中任取 2 棵樹為旋轉中心，且此n棵樹以不同順序各取兩次、旋轉任意角度打樁，打樁的$2n$個點的形心位置和所有樹的形心位置相同，於是決定證明這件事。

【已知】

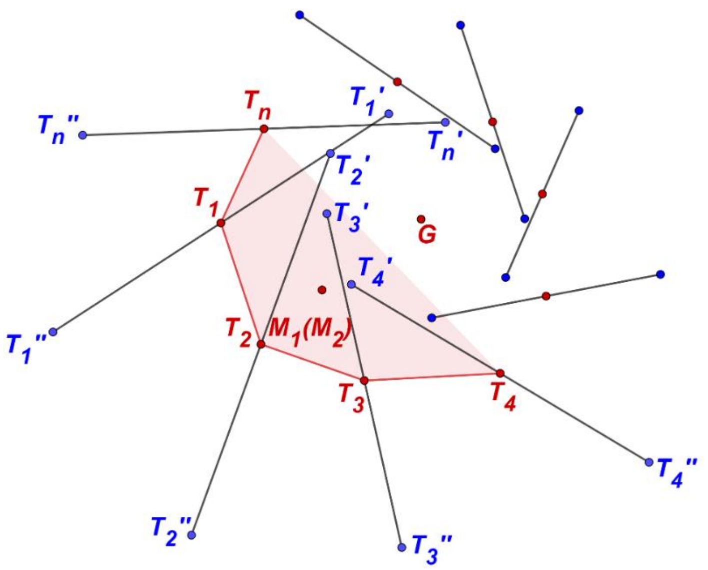
如圖，在平面上作$n+1$個點T_1、T_2、T_3、…、T_n、G，連接$\overline{T_1T_2}$、$\overline{T_2T_3}$、$\overline{T_3T_4}$、⋯、$\overline{T_nT_1}$，作$T_1T_2T_3 ... T_n$的形心M_1，在n個點T_1、T_2、T_3、…、T_n中任取兩個點，分別以這兩個點為旋轉中心將G點旋轉$a°$、$(a+180)°$得到兩點，作n次後使每個點都以不同順序被取中 2 次($a°$、$(a+180)°$各轉一次) ，然後作此$2n$個樁的形心M_2 。



【求證】M_1 和 M_2 位置相同。

(作者自行繪製)

【證明】



如圖

(作者自行繪製)

設 O 為原點

$$\because \overrightarrow{OM_1}=\frac{\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_3}+\ldots+\overrightarrow{OT_n}}{n}$$

$$\overrightarrow{OM_2}=\frac{\overrightarrow{OT_1'}+\overrightarrow{OT_1''}+\overrightarrow{OT_2'}+\overrightarrow{OT_2''}+\overrightarrow{OT_3'}+\overrightarrow{OT_3''}+\ldots+\overrightarrow{OT_n'}+\overrightarrow{OT_n''}}{2n}$$

$$\therefore \overrightarrow{M_1M_2}=\frac{\overrightarrow{OT_1'}+\overrightarrow{OT_1''}+\overrightarrow{OT_2'}+\overrightarrow{OT_2''}+\overrightarrow{OT_3'}+\overrightarrow{OT_3''}+\ldots+\overrightarrow{OT_n'}+\overrightarrow{OT_n''}}{2n}-\frac{\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_3}+\ldots+\overrightarrow{OT_n}}{n}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{OT_1'}+\overrightarrow{OT_1''})-2\overrightarrow{OT_1}+(\overrightarrow{OT_2'}+\overrightarrow{OT_2''})-2\overrightarrow{OT_2}+\ldots+(\overrightarrow{OT_n'}+\overrightarrow{OT_n''})-2\overrightarrow{OT_n}}{2n}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{T_1T_1'}+\overrightarrow{T_1T_1''})+(\overrightarrow{T_2T_2'}+\overrightarrow{T_2T_2''})+\ldots+(\overrightarrow{T_nT_n'}+\overrightarrow{T_nT_n''})}{2n}$$

$$=\frac{\vec{0}+\vec{0}+\ldots+\vec{0}}{2n}=\frac{\vec{0}}{2n}=\vec{0}$$

$\therefore M_1$ 和 M_2 位置相同 □

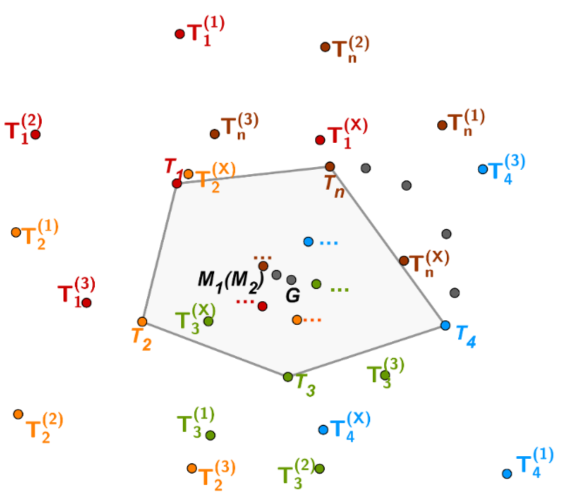
性質 6：當在 n 棵樹之中任取 2 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$、$(a+180)°$ 打樁時，若 n 棵樹的形心為 M_1、$(a+180)°$，$2n$ 個樁的形心為 M_2，則 M_1 和 M_2 位置相同。

七、在 n 棵樹中任取 x 棵樹為旋轉中心，且此 n 棵樹以不同順序取 x 次、旋轉任意角度打樁。

我將任取的點之數量增加為 $x(x\le n)$，來證明不論取幾個旋轉中心，樹的形心和樁的形心位置都相同。(多次旋轉)

【已知】

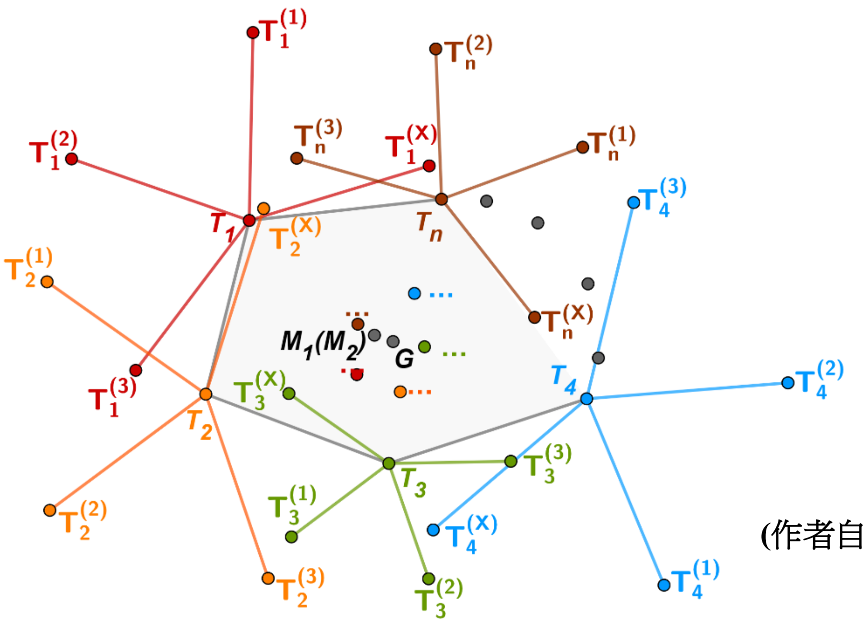
如圖，在平面上，作 $n+1$ 個點 T_1、T_2、T_3、…、T_n、G， 作 $T_1T_2T_3\ldots T_n$ 的形心 M ，在 n 個點 T_1、T_2、T_3、…、T_n 中以不同順序任取 x 個點。分別以這 x 個點為旋轉中心將 G 旋轉 $a°$、$(a+\frac{360}{x})°$、$(a+\frac{360\times 2}{x})°$、…、$(a+\frac{360\times(x-1)}{x})°$，得到 x 個點，作 n 次，使每個點都以不同順序被取中 x 次($a°$、$(a+\frac{360}{x})°$、$(a+\frac{360\times 2}{x})°$、…、$(a+\frac{360\times(x-1)}{x})°$ 各轉一次) ，作此 xn 個點的形心 M_2 。



(作者自行繪製)

【求證】M_1 和 M_2 位置相同

【證明】



(作者自行繪製)

設 T_1 以不同順序被取中 x 次旋轉後得到的點為 T_1' 、T_1'' 、T_1''' 、…、$T_1^{(x)}$

設 T_2 以不同順序被取中 x 次旋轉後得到的點為 T_2' 、T_2'' 、T_2''' 、…、$T_2^{(x)}$

設 T_3 以不同順序被取中 x 次旋轉後得到的點為 T_3' 、T_3'' 、T_3''' 、…、$T_3^{(x)}$

$\vdots$

設 T_n 以不同順序被取中 x 次旋轉後得到的點為 T_n' 、T_n'' 、T_n''' 、…、$T_n^{(x)}$

如圖，連接 $\overline{T_1T_1'}$ 、$\overline{T_1T_1''}$ 、$\overline{T_1T_1'''}$ 、…、$\overline{T_nT_n^{(x)}}$

設 O 為原點

$$\because \overrightarrow{OM_1}=\frac{\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_3}+\ldots+\overrightarrow{OT_n}}{n}$$

$$\overrightarrow{OM_2}=\frac{\overrightarrow{OT_1'}+\overrightarrow{OT_1''}+\ldots+\overrightarrow{OT_1^{(x)}}}{xn}+\frac{\overrightarrow{OT_2'}+\overrightarrow{OT_2''}+\ldots+\overrightarrow{OT_2^{(x)}}}{xn}+\ldots+\frac{\overrightarrow{OT_n'}+\overrightarrow{OT_n''}+\ldots+\overrightarrow{OT_n^{(x)}}}{xn}$$

$$\therefore \overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OT_1'}+\overrightarrow{OT_1''}+\ldots+\overrightarrow{OT_1^{(x)}}}{xn}+\frac{\overrightarrow{OT_2'}+\overrightarrow{OT_2''}+\ldots+\overrightarrow{OT_2^{(x)}}}{xn}+\ldots+\frac{\overrightarrow{OT_n'}+\overrightarrow{OT_n''}+\ldots+\overrightarrow{OT_n^{(x)}}}{xn}$$

$$-\frac{\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_2}+\overrightarrow{OT_3}+\ldots+\overrightarrow{OT_n}}{n}$$

$$=\frac{(\overrightarrow{OT_1'}+\overrightarrow{OT_1''}+\ldots+\overrightarrow{OT_1^{(x)}})-x\overrightarrow{OT_1}}{xn}+\frac{(\overrightarrow{OT_2'}+\overrightarrow{OT_2''}+\ldots+\overrightarrow{OT_2^{(x)}})-x\overrightarrow{OT_2}}{xn}$$

$$+\ldots+\frac{(\overrightarrow{OT_n'}+\overrightarrow{OT_n''}+\ldots+\overrightarrow{OT_n^{(x)}})-x\overrightarrow{OT_n}}{xn}$$

$$=\frac{\overrightarrow{T_1T_1'}+\overrightarrow{T_1T_1''}+\ldots+\overrightarrow{T_1T_1^{(x)}}}{xn}+\frac{\overrightarrow{T_2T_2'}+\overrightarrow{T_2T_2''}+\ldots+\overrightarrow{T_2T_2^{(x)}}}{xn}+\ldots+\frac{\overrightarrow{T_nT_n'}+\overrightarrow{T_nT_n''}+\ldots+\overrightarrow{T_nT_n^{(x)}}}{xn} — ①$$

$\because \overline{GT_1}=\overline{T_1T_1'}=\overline{T_1T_1''}=\cdots=\overline{T_1T_1^{(x)}}$

$\angle T_1'T_1T_1''=\angle T_1''T_1T_1'''=\ldots=\angle T_1^{(x-1)}T_1T_1^{(x)}=\angle T_1^{(x)}T_1T_1'=(\frac{360}{x})^\circ$

又正 x 邊形的每一個外角為 $(\frac{360}{x})^\circ$

將 $\overline{T_1T_1'}$ 、$\overline{T_1T_1''}$ 、$\overline{T_1T_1'''}$ 、⋯、$\overline{T_nT_n^{(x)}}$ 平移後可圍成正 x 邊形

$\therefore \overrightarrow{T_1T_1'}+\overrightarrow{T_1T_1''}+\ldots+\overrightarrow{T_1T_1^{(x)}}=\vec{0}$

同理

$\overrightarrow{T_2T_2'}+\overrightarrow{T_2T_2''}+\ldots+\overrightarrow{T_2T_2^{(x)}}=\vec{0}$

⋮

$\overrightarrow{T_nT_n'}+\overrightarrow{T_nT_n''}+\ldots+\overrightarrow{T_nT_n^{(x)}}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{T_1T_1'}+\overrightarrow{T_1T_1''}+\ldots+\overrightarrow{T_1T_1^{(x)}}+\overrightarrow{T_2T_2'}+\overrightarrow{T_2T_2''}+\ldots+\overrightarrow{T_2T_2^{(x)}}+\ldots+\overrightarrow{T_nT_n'}+\overrightarrow{T_nT_n''}+\ldots+\overrightarrow{T_nT_n^{(x)}}=\vec{0}$ —②

由①②可知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{0}$

$\therefore P$ 點的位置不會受到 G_1 點的位置影響　　$\therefore M_1$ 和 M_2 位置相同 □

性質 7：當在 n 棵樹之中任取 x 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 a° 、$(a+\frac{360}{n})^\circ$、$(a+\frac{360\times 2}{n})^\circ$、…、$(a+\frac{360\times(x-1)}{n})^\circ$ 打樁時，若 n 棵樹的形心為 M_1、xn 個樁的形心為 M_2 ，則 M_1 和 M_2 位置相同。

八、在 3 棵樹之中任取 2 棵樹為旋轉中心，分別旋轉 90° 、 270° 打樁，可得三線共點。

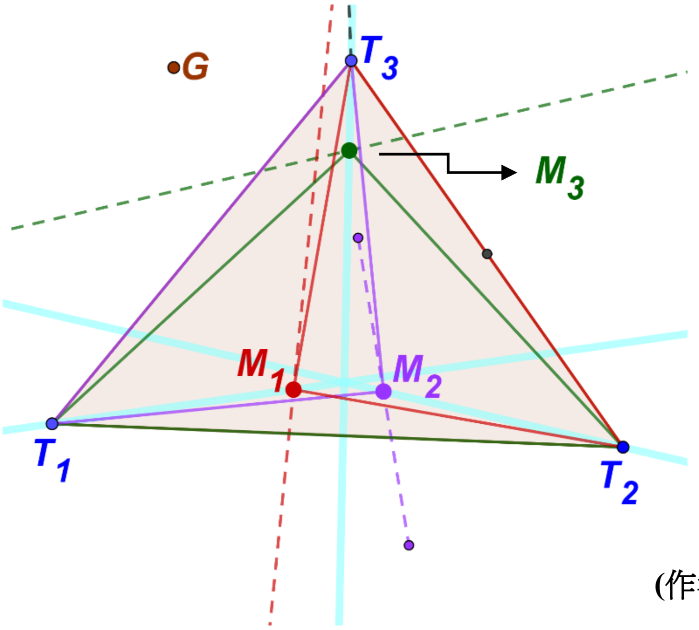
我在將性質 6 的 n 設為 3、a 設為 90 時，發現若是以兩棵樹打的樁之中點與第三顆樹連成直線作三次，此三線共點，以下我使用座標化的方式證明。

(一) 旋轉 90° 、 270° 打樁

【已知】

如圖，在平面上，作G、T_1、T_2、T_3四點，分別以T_1、T_2為旋轉中心，將G點逆時針旋轉$90°$、$270°$打兩樁，作兩樁的中點M_3，再作$\overleftrightarrow{T_3M_3}$。

分別以T_2、T_3為旋轉中心，將G點逆時針旋轉$90°$、$270°$打兩樁，作兩樁的中點M_1，再作$\overleftrightarrow{T_1M_1}$。分別以$T_3$、$T_1$為旋轉中心，將$G$點逆時針旋轉$90°$、$270°$打兩樁，作兩樁的中點$M_2$，再作$\overleftrightarrow{T_2M_2}$。



(作者自行繪製)

【求證】$\overleftrightarrow{T_1M_1}$、$\overleftrightarrow{T_2M_2}$、$\overleftrightarrow{T_3M_3}$三線共點。

【證明】

將T_1的座標設為原點$(0,0)$，$\overleftrightarrow{T_1T_2}$設為$x$軸，將$T_2$的座標設為$(2a,0)$，將$T_3$的座標設為$(2b,2c)$，則$M_3$的座標為$(a,a)$，$M_2$的座標為$(b+c,c-b)$，$M_1$的座標為$(a+b-c,c+b-a)$。

假設$\overleftrightarrow{T_2M_2}$、$\overleftrightarrow{T_3M_3}$交於$(x,y)$

根據兩點式可得

$\overleftrightarrow{T_2M_2}$的方程式為$\dfrac{x-a}{2b-a}=\dfrac{y-a}{2c-a}$ — ①

$\overleftrightarrow{T_3M_3}$的方程式為$\dfrac{x-2a}{b+c-2a}=\dfrac{y-0}{c-b-0}$ —②

由①可得$(x-a)(2c-a)=(y-a)(2b-a)$

$\Rightarrow 2cx-2ac-ax+a^2=2by-2ab-ay+a^2$

$\Rightarrow 2cx-2ac-ax+2ab+ay-2by=0$ —③

由②可得 $(x-2a)(c-b)=(b+c-2a)y$

$\Rightarrow cx-bx-2ac+2ab=(b+c-2a)y$ —④

由④－③可得 $ax-bx-cx-ay+2by=(b+c-2a)y$

$\Rightarrow (a-b-c)x=(c-a-b)y$

$\Rightarrow (b+c-a)x=(a+b-c)y$ —⑤

又 $\overleftrightarrow{T_1M_1}$ 的方程式為 $\dfrac{x-0}{a+b-c-0}=\dfrac{y-0}{b+c-a-0}$

即 $(b+c-a)x=(a+b-c)y$ —⑥

由⑤⑥可得 $\overleftrightarrow{T_1M_1}$ 、$\overleftrightarrow{T_2M_2}$ 、$\overleftrightarrow{T_3M_3}$ 三線共點 □

證明完之後，我想證明在角度為 $270°$ 時的情況也會相同。

(二）旋轉 270°、90° 打椿

【已知】

如圖，在平面上，作 G 、T_1 、T_2 、T_3 四點，分別以 T_1 、T_2 為旋轉中心，將 G 點逆時針旋轉 $270°$ 、$90°$ 打兩樁，作兩樁的中點 M_3 ，再作 $\overleftrightarrow{T_3M_3}$ 。

分別以 T_2 、T_3 為旋轉中心，將 G 點逆時針旋轉 $270°$ 、$90°$ 打兩樁，作兩樁的中點 M_1 ，再作 $\overleftrightarrow{T_1M_1}$ 。分別以 T_3 、T_1 為旋轉中心，將 G 點逆時針旋轉 $270°$ 、$90°$ 打兩樁，作兩樁的中點 M_2 ，再作 $\overleftrightarrow{T_2M_2}$ 。

【求證】$\overleftrightarrow{T_1M_1}$ 、$\overleftrightarrow{T_2M_2}$ 、$\overleftrightarrow{T_3M_3}$ 三線共點。

【證明】

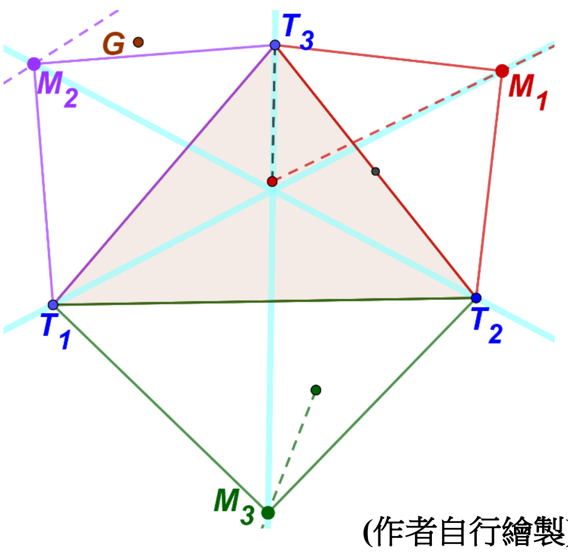
將 T_1 的座標設為原點 $(0,0)$ ，$\overleftrightarrow{T_1T_2}$ 設為 x 軸，將 T_2 的座標設為 $(2a,0)$ ，將 T_3 的座標設為 $(2b,2c)$

則 M_3 的座標為 $(a,-a)$ ，

M_2 的座標為 $(b-c,b+c)$ ，

M_1 的座標為 $(a+b+c,a-b+c)$

根據兩點式可得



(作者自行繪製)

$\overleftrightarrow{T_2M_2}$ 的方程式為 $\dfrac{x-2a}{b-c-2a}=\dfrac{y-0}{b+c-0}$ — ①

$\overleftrightarrow{T_3M_3}$ 的方程式為 $\dfrac{x-a}{2b-a}=\dfrac{y+a}{2c+a}$ — ②

由 2 可得 $(2b-a)(y+a)=(2c+a)(x-a)$

$\Rightarrow 2by-ay+2ab-a^2=2cx+ax-2ac-a^2$

$\Rightarrow 2by-ay+2ab+2ac-2cx-ax=0$ —③

由①可得 $(b-c-2a)y=(x-2a)(b+c)$

$\Rightarrow 2ab+2ac-2ay+by-cy-bx-cx=0$ —④

由④－③可得 $-y(a+b+c)+x(a-b+c)=0$

$\Rightarrow x(a-b+c)=y(a+b+c)$ —⑤

證明第三條線會通過 $k(x,y)$

$\dfrac{x-0}{a+b+c-0}=\dfrac{y-0}{a-b+c-0}$ $\Rightarrow x(a-b+c)=y(a+b+c)$ —⑥

由⑤⑥可得 $\overleftrightarrow{T_1M_1}$ 、$\overleftrightarrow{T_2M_2}$ 、$\overleftrightarrow{T_3M_3}$ 三線共點 □

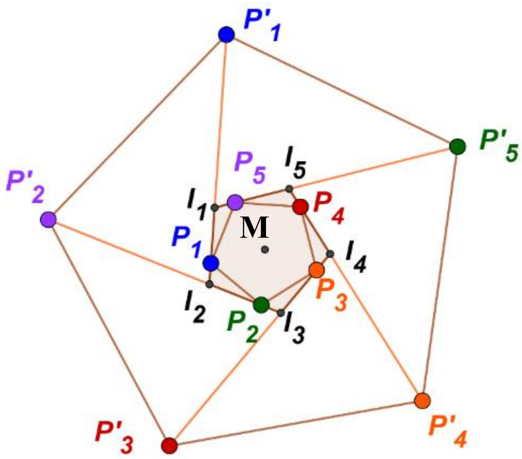
性質 8：當在三棵樹之中任取兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 90°、270° (或 270° 、 90°)打樁後，再將其中點與第三棵樹連成的三條直線共點。

九、 2*n* 個寶藏之兩兩連線圍成正 *n* 邊形，且其形心與寶藏的形心、 *n* 棵樹的形心位置相同

接下來，我將絞刑臺分別對 n 顆樹順逆時針旋轉，每次旋轉角度與前一次相差 $(\dfrac{360}{n})°$，且依序改變 n 棵樹的選取方式，得到 $2n$ 個寶藏，再將此 $2n$ 個寶藏依照規律兩兩連成 n 條直線，如圖，則此 n 條直線的交點可圍成一個正 n 邊形。

【已知】

在平面上，作$n+1$個點T_1、T_2、T_3、…、T_n、G，然後將G分別對T_1、T_2、T_3、…、T_n順逆時針旋轉，每次旋轉角度與前一次相差$(\frac{360}{n})°$，且依序改變n棵樹的選取方式，作出$2n$個寶藏(順逆時針各n個)得到$2n$個點P_1、P_2、P_3、…、P_n和P_1'、P_2'、P_3'、…、P_n'，如圖，將點分別依逆時針順序連線，得到n個交點I_1、I_2、I_3、…、I_n。



(作者自行繪製)

【求證】

(1) n邊形$I_1I_2I_3...I_n$為正n邊形

(2) n邊形$P_1P_2P_3...P_n$的形心M_1、n邊形$P_1'P_2'P_3'...P_n'$的形心M_2、n邊形$T_1T_2T_3...T_n$的形心M_3、n邊形$I_1I_2I_3...I_n$的形心M_4四點共點

【證明】

(1)

$$\angle P_1MP_2 = \angle P_2MP_3 = \angle P_3MP_4 = ... = \angle P_nMP_1 = (\frac{360}{n})°$$

$$\therefore \angle P_1P_2P_3 = \angle P_2P_3P_4 = \angle P_3P_4P_5 = ... = \angle P_{n-1}P_nP_1 = (360 - \frac{360}{n})°$$

$\angle P_1P_2P_3$、$\angle P_2P_3P_4$、$\angle P_3P_4P_5$、⋯、$\angle P_{n-1}P_nP_1$的外角為$(\frac{360}{n})°$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = ... = \overline{P_nP_1}$$

$\therefore$ n邊形$P_1P_2P_3...P_n$為正n邊形

同理可證n邊形$P_1'P_2'P_3'...P_n'$為正n邊形

又$\overrightarrow{P_2P_2'}$是$\overrightarrow{P_1P_1'}$逆時針轉$(\frac{360}{n})°$加上$\overrightarrow{P_1P_2}$

$\overrightarrow{P_3P_3'}$是$\overrightarrow{P_2P_2'}$逆時針轉$(\frac{360}{n})°$加上$\overrightarrow{P_2P_3}$

⋮

$\overrightarrow{P_1P_1'}$ 是 $\overrightarrow{P_nP_n'}$ 逆時針轉 $(\frac{360}{n})°$ 加上 $\overrightarrow{P_nP_1}$

$\overrightarrow{P_1P_1'}+\overrightarrow{P_2P_2'}+\overrightarrow{P_3P_3'}+\ldots+\overrightarrow{P_nP_n'}=\vec{0}$

$\therefore$ 交點 $I_1I_2I_3\ldots I_n$ 所構成的 n 邊形外角為 $(\frac{360}{n})°$

此 n 邊形的每個內角角度相等

如圖，透過三角形全等 (ASA) 可以證出此 n 邊形的每邊邊長相等

此 n 邊形為正 n 邊形

(2)

根據性質 5，寶藏位置的移動軌跡為圓，且 M_3 為此圓的圓心

$\therefore M_1$ 、 M_2 、 M_3 共點

$\overrightarrow{M_1M_4}=\overrightarrow{P_1'I_n}+\overrightarrow{P_2'I_1}+\overrightarrow{P_3'I_2}+\ldots+\overrightarrow{P_n'I_{n-1}}$

$\because \Delta P_1'I_2P_2' \cong \Delta P_2'I_3P_3' \cong \Delta P_3'I_4P_4' \cong \ldots \cong \Delta P_n'I_1P_1' (ASA)$

$\therefore \overline{P_1'I_2}=\overline{P_2'I_3}=\overline{P_3'I_4}=\ldots=\overline{P_n'I_1}$

$\overline{P_1'I_1}=\overline{P_2'I_2}=\overline{P_3'I_3}=\ldots=\overline{P_n'I_n}$ (同減 $\overline{I_1I_2}$)

$\because$ 每個外角為 $(\frac{360}{n})°$

$\therefore$ 平移後， $\overline{P_1'I_1}$ 、 $\overline{P_2'I_2}$ 、 $\overline{P_3'I_3}$ 、⋯、 $\overline{P_n'I_n}$ 可圍成 n 邊形

此 n 邊形為正 n 邊形

$\overrightarrow{P_1'I_1}+\overrightarrow{P_2'I_2}+\overrightarrow{P_3'I_3}+\ldots+\overrightarrow{P_n'I_n}=\vec{0}$

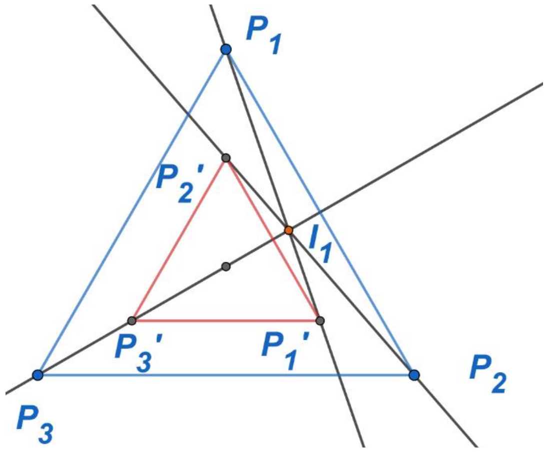
由上式可知 $\overrightarrow{M_1M_4}=\vec{0}$

$\therefore M_1$ 、 M_2 、 M_3 、 M_4 共點 □

性質 9：當以 n 棵樹為旋轉中心，由絞刑臺對第一棵樹分別順、逆時針旋轉 $a°$、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times2}{n})°$ 、…、 $(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ 打樁做寶藏時， $2n$ 個寶藏(順逆時針各 n 個)之兩兩連線圍成正 n 邊形，其 n 個交點連線圍成正 n 邊形，且其形心與寶藏的形心、n 棵樹的形心位置相同。

十、6個寶藏之兩兩連線三線共點。

我將寶藏位置分別設為順逆時針旋轉，每次旋轉角度與前一次相差$120°$，得到6個寶藏將此6個寶藏對應，連成3條線，如圖，此3條線三線共點。



(作者自行繪製)

【已知】

在平面上，作$n+1$個點T_1、T_2、T_3、…、T_n、G，然後由此點作6個寶藏(順逆時針各3個)得到6個點$P_1,P_2,P_3,P_1',P_2',P_3'$，如圖，將寶藏一一對應(將順、逆時針旋轉$a°$的寶藏相連，順、逆時針旋轉$(a+120)°$的寶藏相連；順、逆時針旋轉$(a+240)°$的寶藏相連)

【求證】$\overleftrightarrow{P_1P_1'}$、$\overleftrightarrow{P_2P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_3P_3'}$三線共點

【證明】如圖，設P_1座標為$(0,2)$，P_2座標為$(\sqrt{3},-1)$，P_3座標為$(-\sqrt{3},-1)$

M點座標為$(0,0)$，M到點P_1',P_2',P_3'距離皆為r

則P_1'座標為$(r\cos\theta,r\sin\theta)$，$P_2'$座標為$(r\cos(\theta+120),r\sin(\theta+120))$；$P_3'$座標為$(r\cos(\theta+240),r\sin(\theta+240))$

$\overleftrightarrow{P_1P_1'}$方程式為$\dfrac{y-2}{x-0}=\dfrac{r\sin\theta-2}{r\cos\theta-2}$

$\overleftrightarrow{P_2P_2'}$方程式為$\dfrac{y+1}{x-\sqrt{3}}=\dfrac{r\sin(\theta+120)+1}{r\cos(\theta+120)-\sqrt{3}}$

$\overleftrightarrow{P_3P_3'}$方程式為$\dfrac{y+1}{x+\sqrt{3}}=\dfrac{r\sin(\theta+240)+1}{r\cos(\theta+240)+\sqrt{3}}$

將$\overleftrightarrow{P_2P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_3P_3'}$聯立解得交點座標如下

$$x=\frac{4r\cos\theta(-r^2+r^2\cos^2\theta+r\sin\theta+2+\sqrt{3}r^2\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}r\cos\theta)}{(r^2-4)(r\sin\theta-\sqrt{3}r\cos\theta-2)}$$

$$y=\frac{2r(2\sin\theta+2r^2\cos^2\theta-r)}{r^2-4}$$

將此交點座標代入$\overleftrightarrow{P_1P_1'}$時成立，故$\overleftrightarrow{P_1P_1'}$、$\overleftrightarrow{P_2P_2'}$、$\overleftrightarrow{P_3P_3'}$三線共點 □

性質10：當以3棵樹為旋轉中心，由絞刑臺對第一棵樹分別順、逆時針旋轉$a°$、$(a+120)°$、$(a+240)°$打樁做寶藏時，6個寶藏之兩兩連線，將此6個寶藏對應，連成3條線，此3條線三線共點。

肆、研究結果

性質 1：當以兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $90°$、順時針旋轉 $90°$ 打樁時，寶藏的位置(兩樁的中點)與絞刑臺位置無關。

性質 2：當以兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$ 、$(a+180)°$ 打樁時，寶藏的位置(兩樁的中點)與絞刑臺位置無關。

性質 3：當以 n 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$ 、$(a+\frac{360}{n})°$ 、$(a+\frac{360\times 2}{n})°$ 、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ 打樁時，寶藏的位置(n 根樁的形心)與絞刑臺位置無關。

註：打樁時，旋轉角度的順序不影響結果，相當於兩棵樹換了位置。

性質 4：當以 n 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$ 、$(a+\frac{360}{n})°$ 、$(a+\frac{360\times 2}{n})°$ 、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ 打樁，改變 $a°$ 的數值時寶藏的位置(n 根樁的形心) 移動軌跡為圓，且所有樹的形心為此圓的圓心。

性質 5：當以兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$ 、$(a+180)°$ 打樁時，寶藏的位置(兩樁的中點)必定能與兩棵樹構成直角三角形，分為以下四種情況：

(1) $a=0 \Rightarrow P$ 與 T_2 共點($\because \overrightarrow{GT_1}=\vec{0}$)

(2) $a=180 \Rightarrow P$ 與 T_1 共點($\because \overrightarrow{GT_2}=\vec{0}$)

(3) $0<a<180 \Rightarrow \angle T_2MP=a°$

(4) $180<a<360 \Rightarrow \angle T_2MP=(360-a)°$

性質 6：當在 n 棵樹之中任取 2 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$、$(a+180)°$ 打樁時，若 n 棵樹的形心為 M_1，$2n$ 個樁的形心為 M_2，則 M_1 和 M_2 位置相同。

性質 7：當在 n 棵樹之中任取 x 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$、$(a+\frac{360}{x})°$ 、$(a+\frac{360\times 2}{x})°$ 、…、$(a+\frac{360\times(x-1)}{x})°$ 打樁時，若 n 棵樹的形心為 M_1 、 xn 個樁的形心為 M_2 ，則 M_1 和 M_2 位置相同。

性質 8：當在三棵樹之中任取兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $90°$、$270°$ (或 $270°$、$90°$)打樁後，再將其中點與第三棵樹連成的三條直線共點。

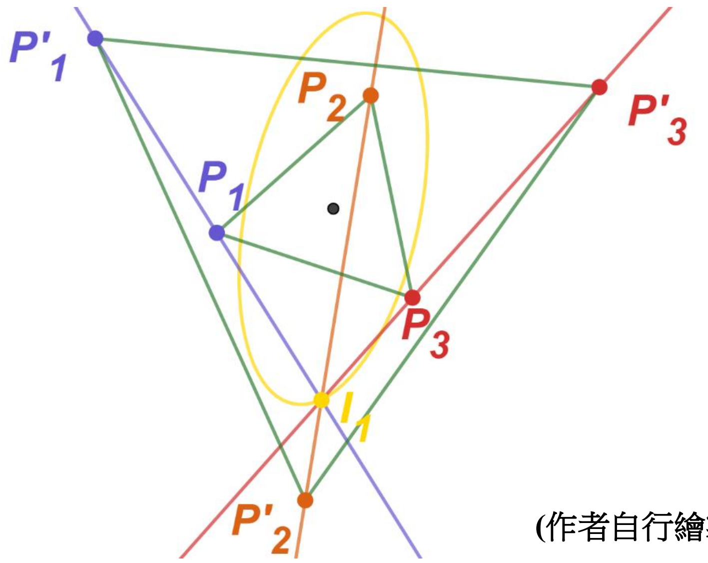
性質 9：當以 n 棵樹為旋轉中心，由絞刑臺對第一棵樹分別順、逆時針旋轉 $a°$、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times2}{n})°$、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ 打樁做寶藏時，$2n$ 個寶藏(順逆時針各 n 個)之兩兩連線圍成正 n 邊形，其 n 個交點連線圍成正 n 邊形，且其形心與寶藏的形心、n 棵樹的形心位置相同。

性質 10：當以 3 棵樹為旋轉中心，由絞刑臺對第一棵樹分別順、逆時針旋轉 $a°$、$(a+120)°$、$(a+240)°$ 打樁做寶藏時，6 個寶藏之兩兩連線，將此 6 個寶藏對應，連成 3 條線，此 3 條線三線共點。

伍、討論

一、未來展望：

(一) 證明在三棵樹時，分別順逆時針旋轉，改變角度時，寶藏兩兩連線之(三線)交點軌跡為橢圓，如圖。



(作者自行繪製)

(二) 在任意角度、n 棵樹時，分別順逆時針旋轉，改變角度時，兩個寶藏軌跡產生的兩個圓半徑大小之關係。

(三) 探究在 n 棵樹位置不同的情況下，分別順逆時針旋轉，能否使得兩組寶藏軌跡相同(是否存在多對一的加密方法)。

(四) 將題目從二維平面改為三維空間，再證明無論絞刑臺的位置如何改變，寶藏的位置不變。

二、應用：

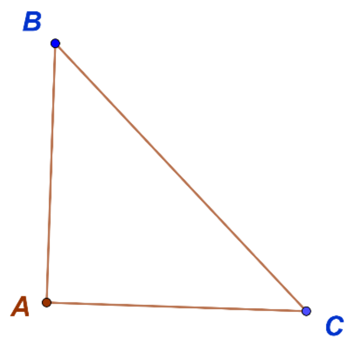
用來當作一種加密的方法。由寶藏位置(要加密的座標)依照性質給出密碼(樹的座標、角度)。解密時則使用研究中的性質推出寶藏位置(要加密的座標)。

(一)

使用性質 1 進行加密：

作出一個等腰直角三角形(寶藏在直角上)，然後將寶藏和線隱藏，如圖(將棕色的點、線隱藏)。

解密：由第一棵樹走到中點，然後向逆時針方向走相同的距離，即為寶藏位置。



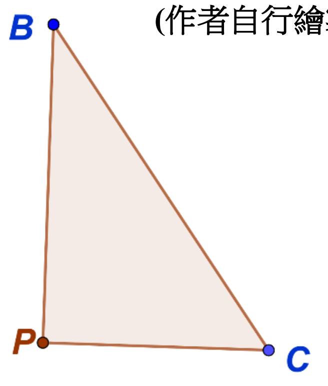
(作者自行繪製)

(二)

使用性質 2 進行加密：

作出一個直角三角形(寶藏在直角上)，然後將寶藏和線隱藏，如圖(將棕色的點、線隱藏)。

解密： 我們分為以下四種情況討論。



(作者自行繪製)

1. $a=0 \Rightarrow P$ 與 T_2 共點($\because \overrightarrow{GT_1}=\vec{0}$)

2. $a=180 \Rightarrow P$ 與 T_1 共點($\because \overrightarrow{GT_2}=\vec{0}$)

3. $0<a<180 \Rightarrow \angle T_2MP=a^\circ$ (如圖) ，由第二棵樹面向第一棵樹順時針旋轉 a° 直走直到走的距離的平方和到第一棵樹的距離的平方相加等於第二棵樹到第一棵樹距離的平方。

4. $180<a<360 \Rightarrow \angle T_2MP=(360-a)^\circ$ ，由第二棵樹面向第一棵樹逆時針旋轉 $(a-90)^\circ$ 直走直到走的距離的平方和到第一棵樹的距離的平方相加等於第二棵樹到第一棵樹距離的平方。

(三)

使用性質 7 進行加密：

任意作出一個 n 邊形(此 n 邊形的形心為寶藏位置)。

解密：將所有樹的座標相加後除以 n ，即為寶藏位置。

陸、結論

一、證出 n 棵樹為旋轉中心的情況下，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$ 、 $(a+\frac{360}{n})°$ 、 $(a+\frac{360\times2}{n})°$ 、…、 $(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ 打樁時，寶藏的位置(n 根樁的形心)與絞刑臺位置無關。

二 、證出 n 棵樹為旋轉中心的情況下，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$ 、 $(a+\frac{360}{n})°$ 、 $(a+\frac{360\times2}{n})°$ 、…、 $(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ 打樁，改變的 a 數值時寶藏的位置(n 根樁的形心)移動軌跡為圓，且所有樹的形心為此圓的圓心 。

三、證出 n 棵樹之中任取 x 棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $a°$、$(a+\frac{360}{x})°$、$(a+\frac{360\times2}{x})°$ 、…、 $(a+\frac{360\times(x-1)}{x})°$ 度打樁時，若 n 棵樹的形心為 M_1 ， xn 個樁的形心為 M_2 ，則 M_1 和 M_2 位置相同。

四、證出在三棵樹之中任取兩棵樹為旋轉中心，將絞刑臺位置分別逆時針旋轉 $90°$ 、 $270°$ (或 $270°$ 、 $90°$)打樁後，再將其中點與第三棵樹連成的三條直線共點。

五、證出在 n 棵樹的條件下，逐次各以順、逆時針旋轉 $a°$ 、$(a+\frac{360}{n})°$、$(a+\frac{360\times2}{n})°$、…、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})°$ ，推得的 $2n$ 個寶藏之兩兩連線圍成正 n 邊形，且其形心與寶藏的形心、 n 棵樹的形心位置相同。

六、證出 3 棵樹為旋轉中心，由絞刑臺對第一棵樹分別順、逆時針旋轉 $a°$ 、 $(a+120)°$ 、 $(a+240)°$ 打樁做寶藏時，6 個寶藏之兩兩連線，將此 6 個寶藏對應，連成 3 條線，此 3 條線三線共點。

柒、參考文獻資料

一、日本 Newton press （2021）。虛數：從零開始徹底搞懂虛數 少年伽利略 1（賴貞秀譯）。人人出版。

二、游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明（主編）（2020）。普通型高級中等學校數學 3A（初版）。翰林。

三、王敏齊、詹雨安、鄭丞傑（2012）。藏寶旋跡。第 52 屆全國中小學科學展覽會。

【評語】030411

此作品主要目的是探討如何透過簡單的方式證來明當給定樹的位置後，絞刑臺的位置不影響樁所形成的寶藏位置，論證採用中學生較能理解的解析幾何與向量工具，問題有趣且有做出很多延伸的推廣。

研究分成六個情況來作探討:證明在 n 棵樹及分別逆時針旋轉醫角度時，若給定樹的位置，則加密的寶藏位置(n 根樁的形心)與絞刑臺的位置無關；改變角度時，則加密的寶藏位置(n 根樁的形心)的移動軌跡為圓，且 n 棵樹的形心為此圓的圓心:從 n 棵樹之中任取 x 棵樹，其形心與寶藏相對應的幾何關係等。

作者將原來兩個基準點的方法，推廣到 n 個基準點的情形，並將此問題應用在加密解密的可能性，是很好的發想，此研究的成果具完整性，作者展現了相當好的數學潛力，未來可繼續努力。

作品簡報

心之所「向」

—多個旋轉中心旋轉任意點的形心性質

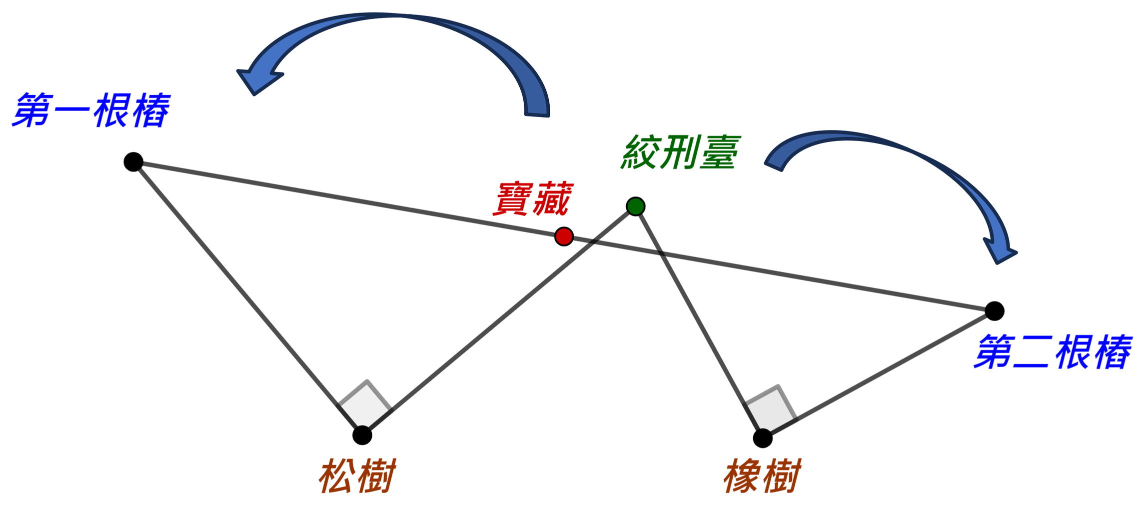
摘要

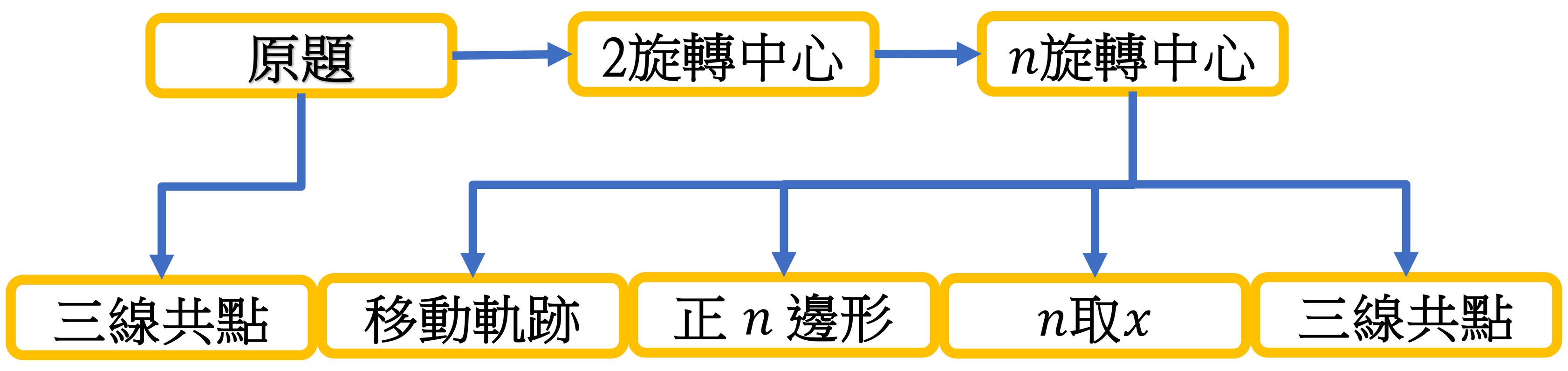
以《虛數：從零開始徹底搞懂虛數 少年伽利略1》書中的問題作為出發點，探討如何證明當給定樹的位置後，寶藏的位置不受絞刑臺位置影響。在過程中，發現並證明了旋轉角度改變時，寶藏位置之移動軌跡為圓，且不論樹的數量和位置如何改變，皆能利用三角形全等和向量的概念證明寶藏位置不受絞刑臺位置影響。後來我改變旋轉的程序，在 n 棵樹位置與旋轉角度皆任取的條件下，推得寶藏的位置形成兩個正n邊形，可應用於加密與解密，且證明了當 $n=3$時具有三線共點的性質，並發現其軌跡為橢圓。

前言

一、研究動機與文獻回顧

我在書上看到一個問題：「在絞刑臺以松樹為旋轉中心，逆時針旋轉90度的位置打下第一根樁；在絞刑臺以橡樹為旋轉中心，順時針旋轉90度的位置打下第二根樁，則寶藏就埋在兩根樁的中點。」原題有用虛數運算的方法證明，我看完了問題後，便想使用更簡單的方法來證明無論絞刑臺的位置如何改變，寶藏的位置皆相同，並將原題推廣。





二、名詞解釋

G：絞刑臺的位置。

T_i ：樹的位置（$i=1,2,\cdots,n$）。

P ： 所有樁所形成的多邊形之形心（寶藏位置）。

$F(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$**旋轉**：分別以$T_1$、$T_2$、$T_3$、⋯、$T_n$為旋轉中心，將$G$點分別依序進行同向旋轉

a^{o}、$(a+\frac{360}{n})^{\mathrm{o}}$、$(a+\frac{360\times 2}{n})^{\mathrm{o}}$、⋯、$(a+\frac{360\times(n-1)}{n})^{\mathrm{o}}$打樁。

三、研究目的

(一)探討n棵樹為旋轉中心的情況下，P點位置與G點位置以及旋轉角度的關係。

(二)探討n棵樹之中任取x棵樹為旋轉中心，以不同順序各做x次旋轉時形心的位置。

(三)證明在n棵樹時，$2n$個寶藏圍成正n邊形，求得其形心位置，且$n=3$時，若改變選取方向，可得三線共點。

研究過程與結果

性質1：分別以T_1、T_2為旋轉中心，將G點分別逆時針旋轉90^{o}、順時針旋轉90^{o}得到C、E 兩點時，若P點為C、E兩點的中點，則P與G的位置無關。

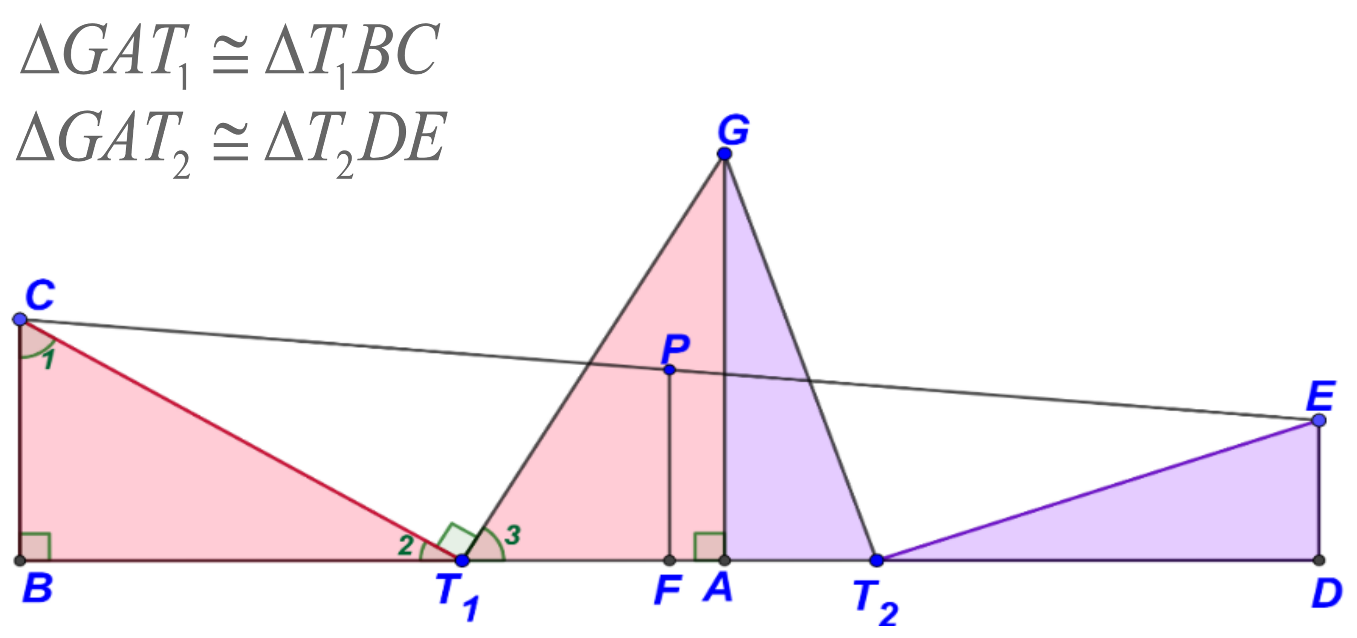


圖1

性質2：分別以T_1、T_2為旋轉中心，將G點分別逆時針旋轉 a^o、$(a+180)^o$得到A、D 兩點 時 ， 若 P點為 A、D 兩點的中點，則P與G的位置無關。

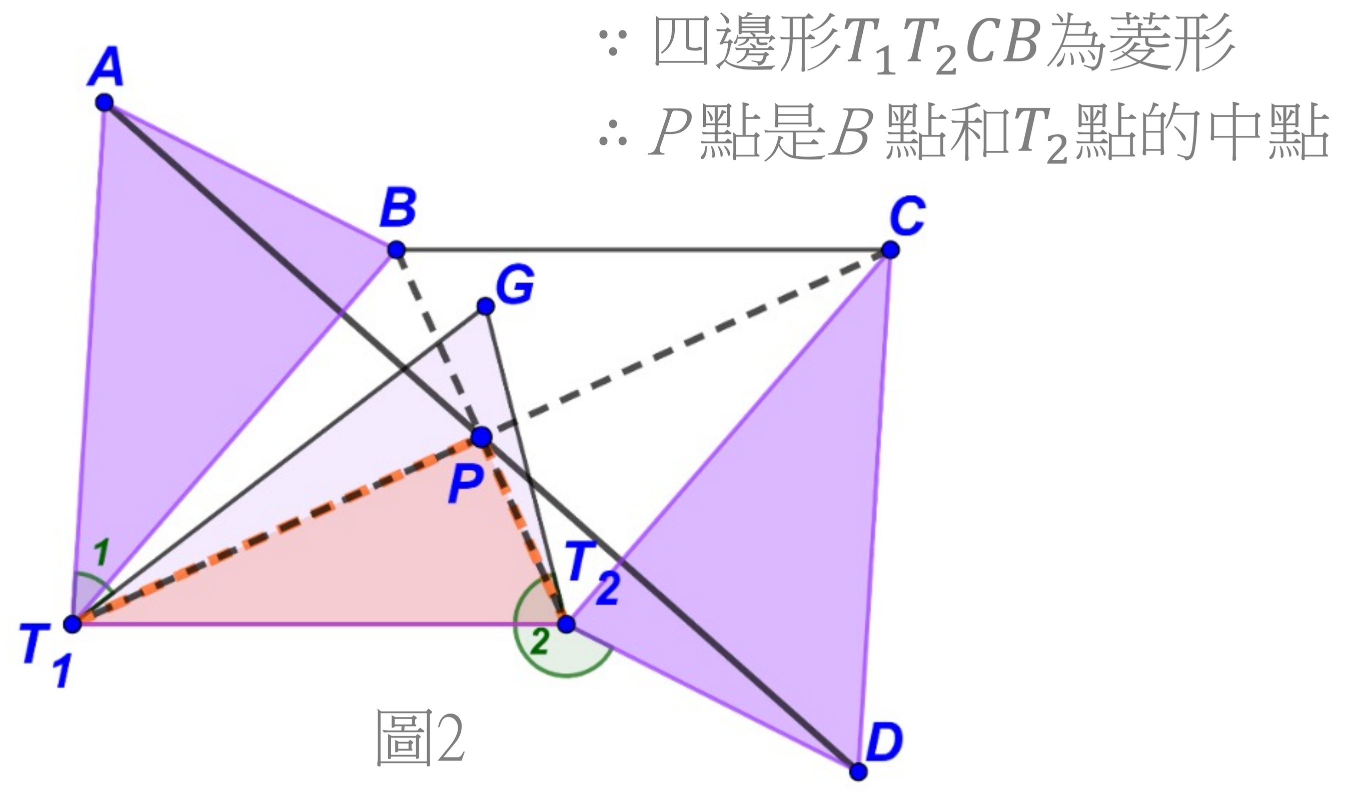


圖2

性質3-1：操作$F(a,n)$逆時針旋轉後，所得的形心為P時，則P與G的位置無關。

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}+\cdots+\overrightarrow{On_2}}{n}-\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\cdots+\overrightarrow{On_1}}{n}$$
$$=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\cdots+\overrightarrow{n_1n_2}}{n}=\vec{0}$$

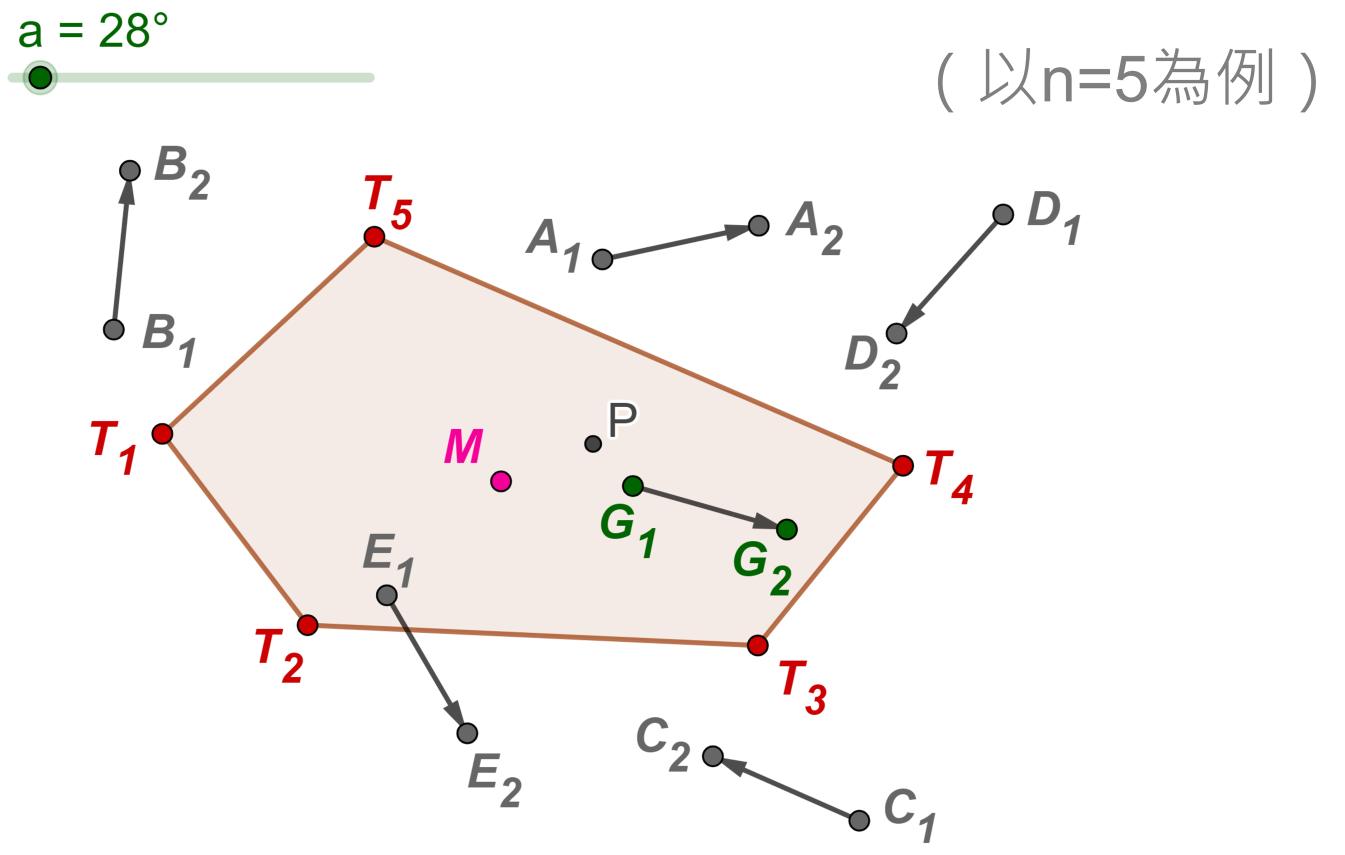


圖3-1

性質3-2：將性質3-1的情況推廣。

若改變a的數值，則P點的移動軌跡為圓，且T_1、T_2、T_3、⋯、T_n的形心為此圓的圓心。

$$\overrightarrow{MP_1}=\frac{\overrightarrow{T_1A_1}+\overrightarrow{T_2B_1}+\overrightarrow{T_3C_1}+\cdots+\overrightarrow{T_nn_1}}{n}=\frac{\overrightarrow{T_1A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_3C_2}+\cdots+\overrightarrow{T_nn_2}}{n}=\overrightarrow{MP_2}$$

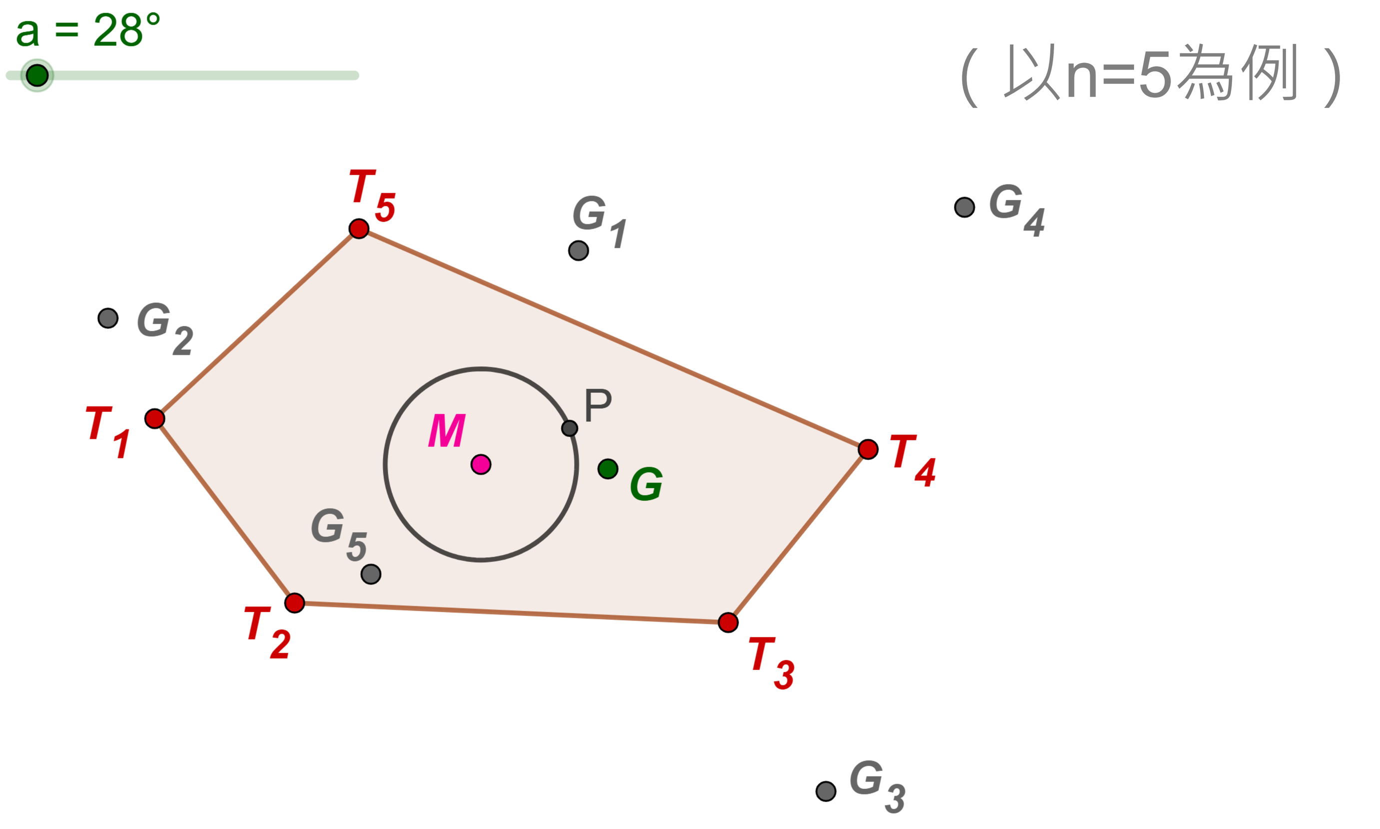


圖3-2

性質4-1：在T_1、T_2、T_3、⋯、T_n之中任取兩棵樹為旋轉中心，將G分別逆時針旋轉 a°、$(a+180)^\circ$ 打樁，並符合：

(1) T_i 恰好被選到兩次（ $i=1,2,\cdots,n$)；

(2) T_i被選取時G的旋轉角度為a°與 $(a+180)^\circ$各一次；

若 n 棵樹的形心為M_1且$2n$根樁的形心為M_2，則M_1與M_2相同。

$\because \overrightarrow{M_1M_2}=\vec{0}$

$\therefore M_1$和M_2的位置相同

（以n=5為例）

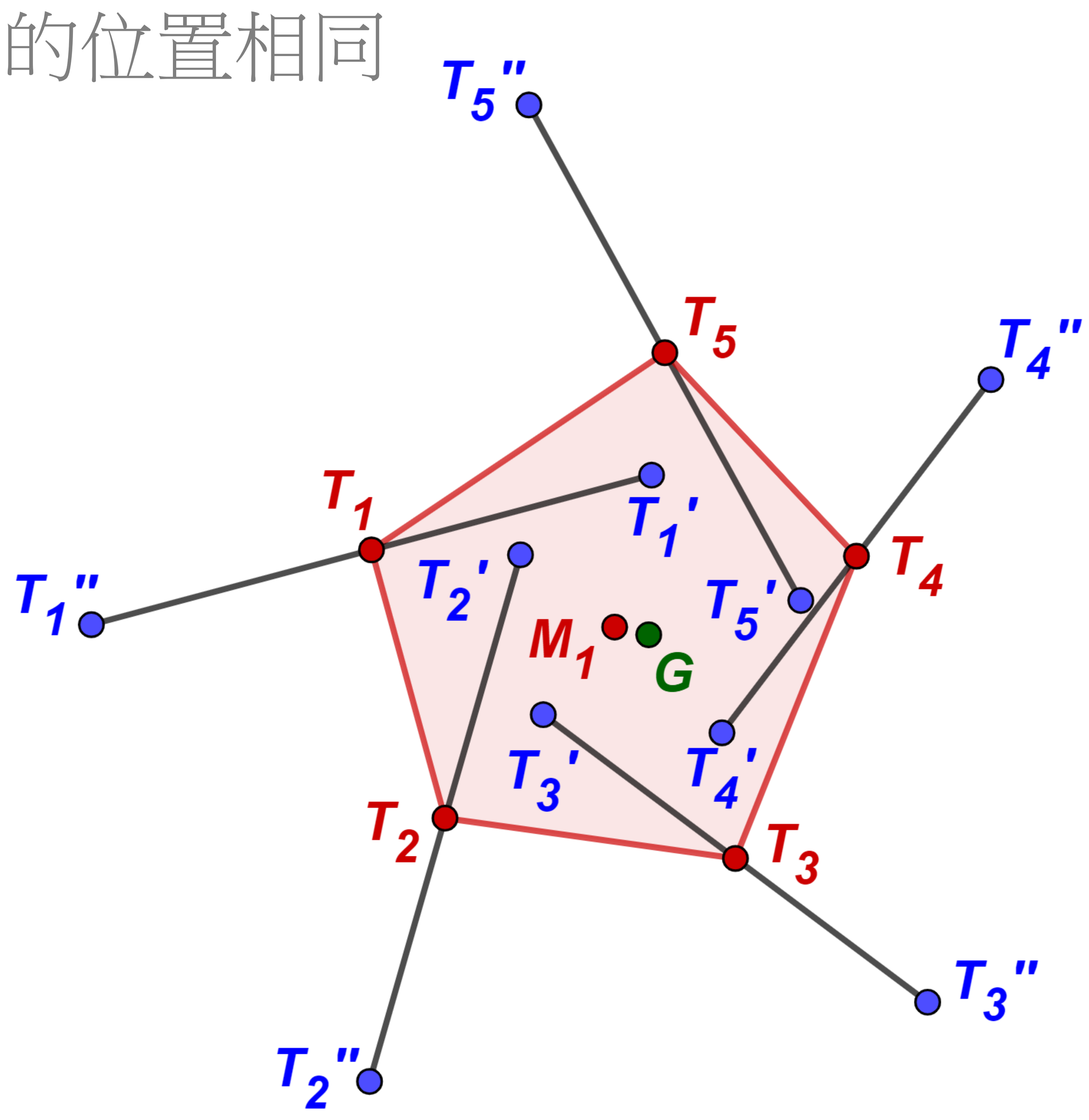


圖4-1

性質4-2：在 T_1、T_2、T_3、⋯、T_n之中任取 x 棵樹為旋轉中心，操作$F(a,x)$逆時針旋轉，並符合：

(1) T_i 恰好被選到 x 次（ $i=1,2,\cdots,n$)；

(2) T_i被選取時G的旋轉角度為a°、$(a+\frac{360}{x})^\circ$、$(a+\frac{360\times2}{x})^\circ$、⋯、$(a+\frac{360\times(x-1)}{x})^\circ$各一次；

若n棵樹的形心為M_1且xn根樁的形心為M_2，則M_1和M_2相同。

$\because \overrightarrow{M_1M_2}=\vec{0}$

$\therefore M_1$和M_2的位置相同

（以n=5, x=5為例）

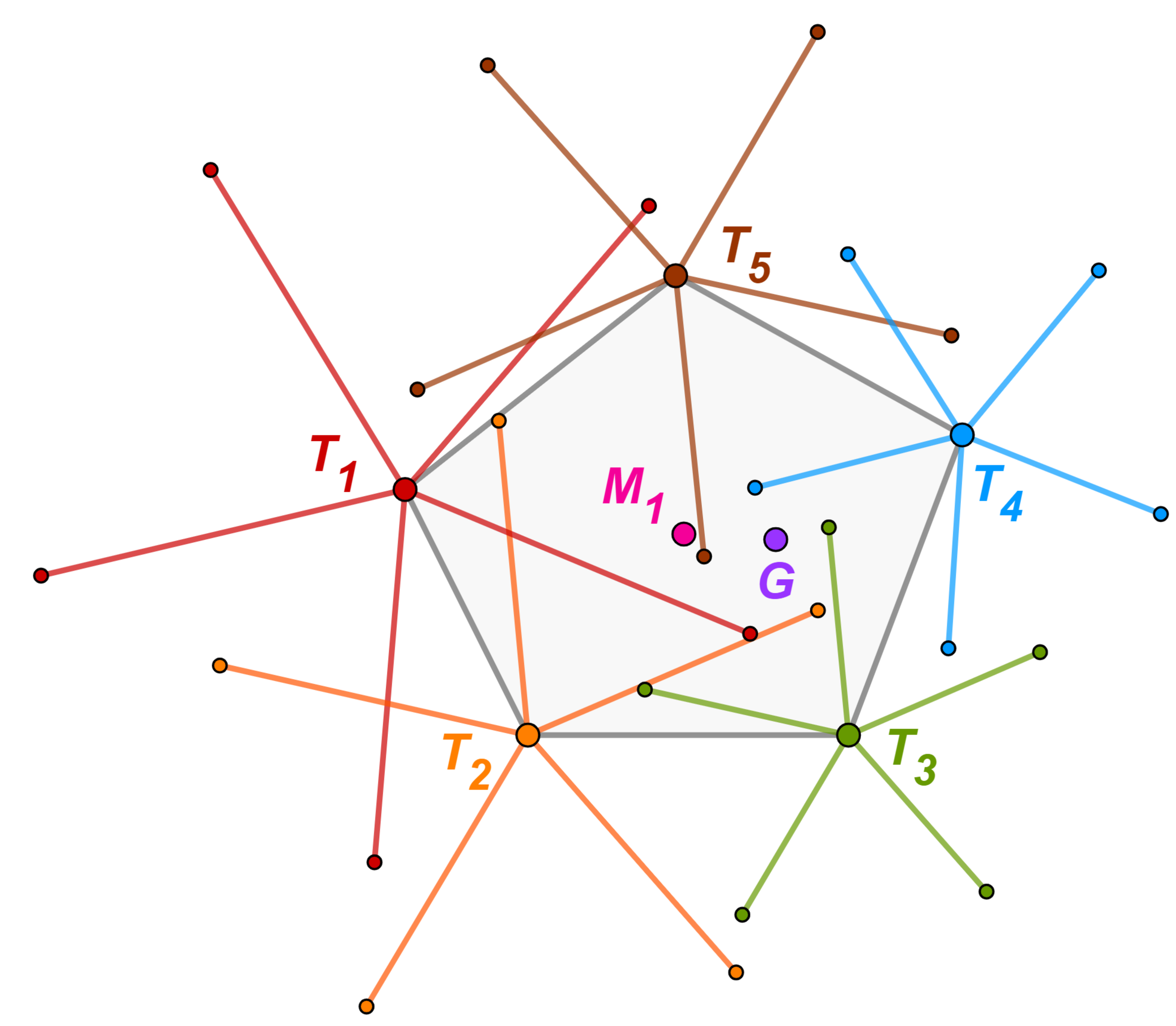
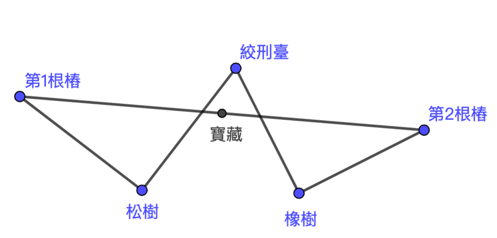


圖4-2

性質5-1：在T_1、T_2、T_3之中任取兩棵樹為旋轉中心，將 G 點分別逆時針旋轉 90° 、270° 打樁後，若將其中點與第三棵樹連成直線，則此三條直線共點。

將各點坐標化求得直線方程式



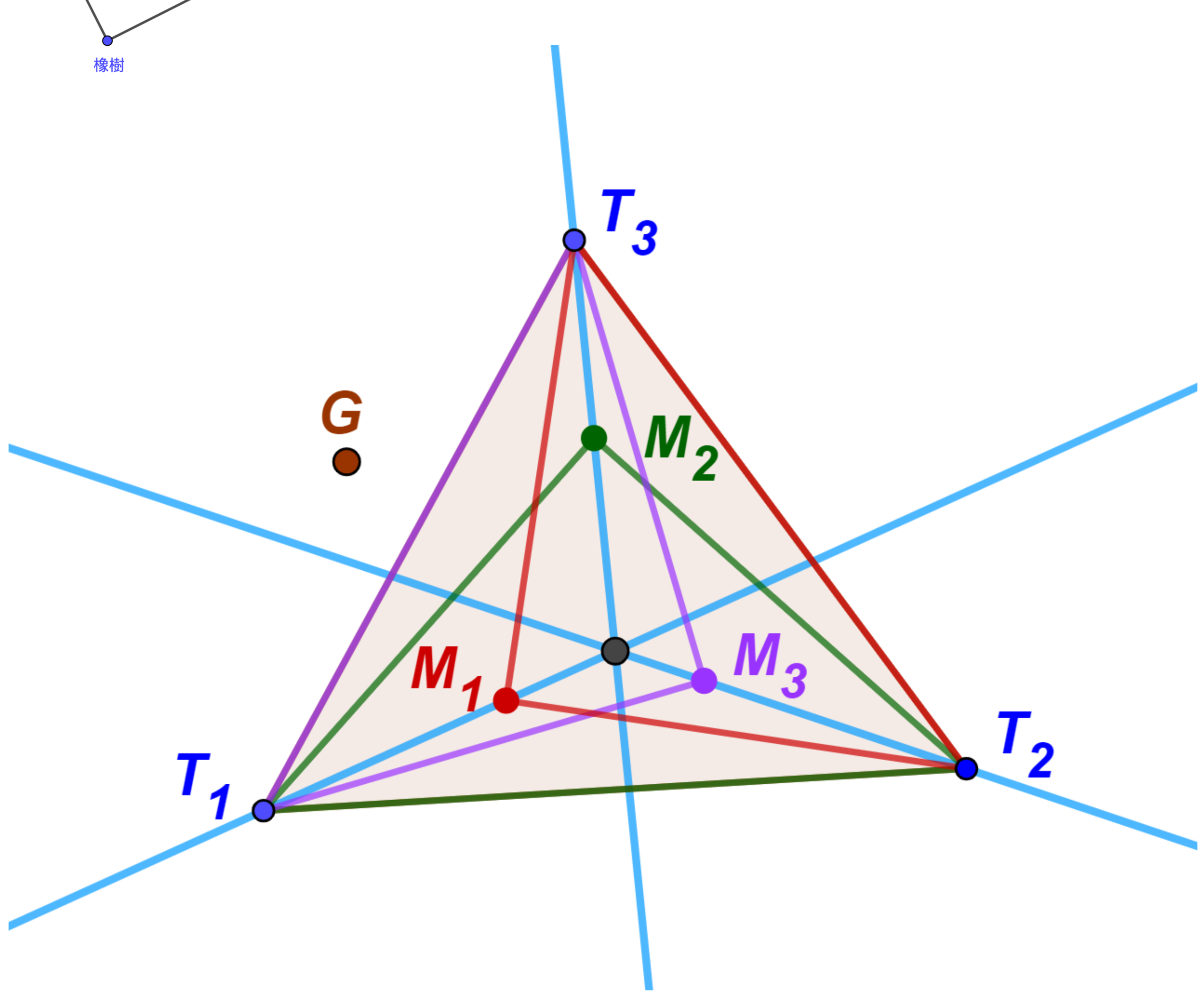
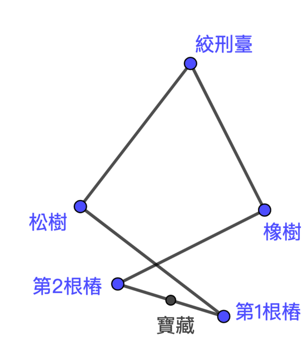


圖5-1

性質5-2：在T_1、T_2、T_3之中任取兩棵樹為旋轉中心，將 G 點分別逆時針旋轉 270°、 90°打樁後，若將其中點與第三棵樹連成直線，則此三條直線共點。

將各點坐標化求得直線方程式



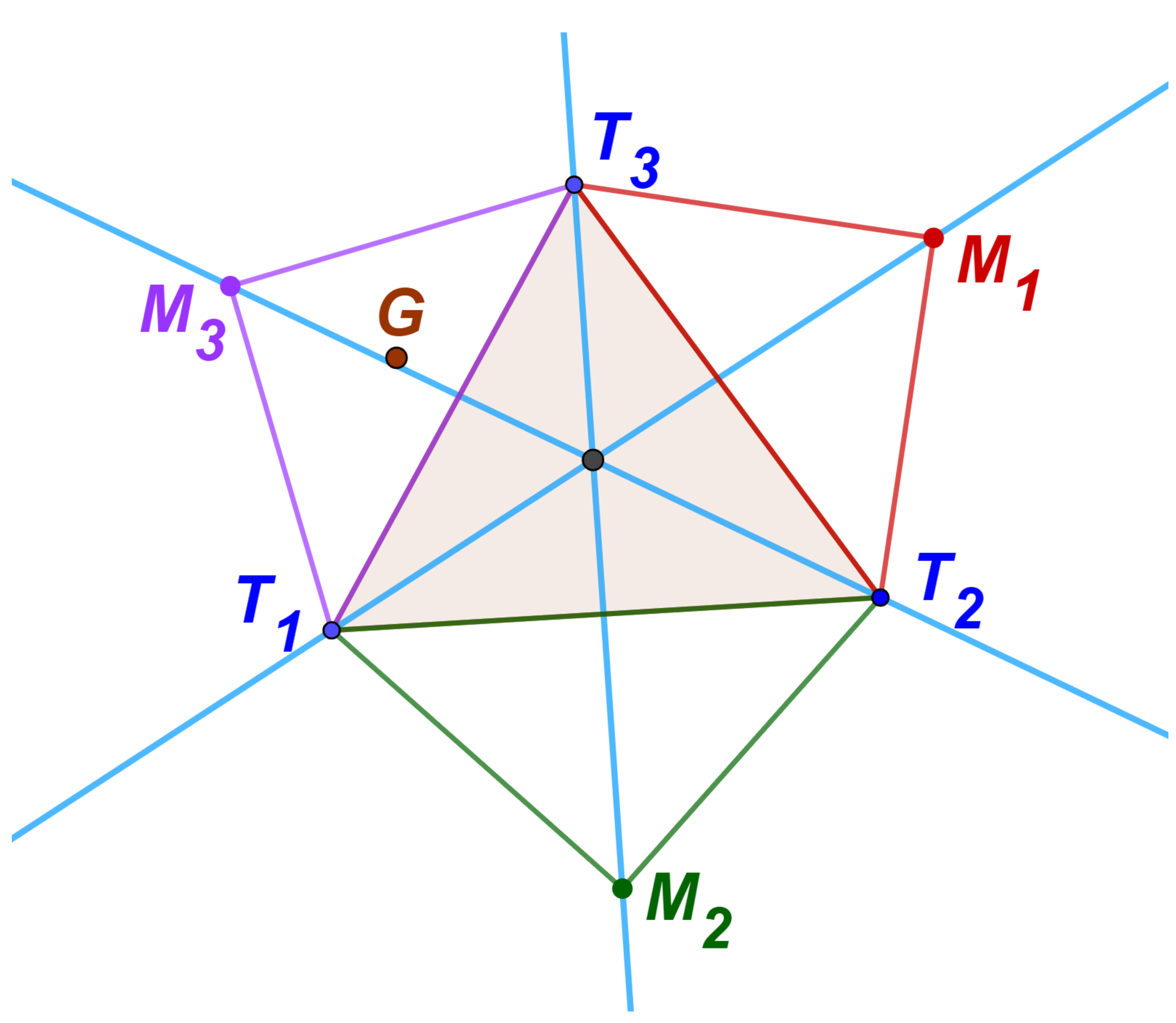


圖5-2

性質6-1：以T_1、T_2、T_3、⋯、T_n為旋轉中心，操作$F(a,n)$逆、順時針旋轉後，得到P_1、P_1'；再以T_2、T_3、⋯、T_n、T_1為旋轉中心，操作$F(a,n)$逆、順時針旋轉後，得到P_2、P_n' ；再以T_3、T_4、⋯、T_n、T_1、T_2為旋轉中心，操作$F(a,n)$逆、順時針旋轉後，得到P_3、P_{n-1}'；依此類推；最後以T_n、T_1、T_2、⋯、T_{n-1}為旋轉中心，操作$F(a,n)$逆、順時針旋轉後，得到P_n、P_2'，則P_1、P_2、P_3、⋯、P_n與P_1'、P_2'、P_3'、⋯、P_n'分別圍成正n邊形，其兩兩連線的交點I_1、I_2、I_3、⋯、I_n也圍成正n邊形，且這三個正n邊形的形心與n棵樹的形心位置相同。

$\because M_1$、M_2、 M_3共點

$\overrightarrow{M_1M_4}=\vec{0}$

$\therefore M_1$、M_2、 M_3、 M_4共點

（以n=5為例）

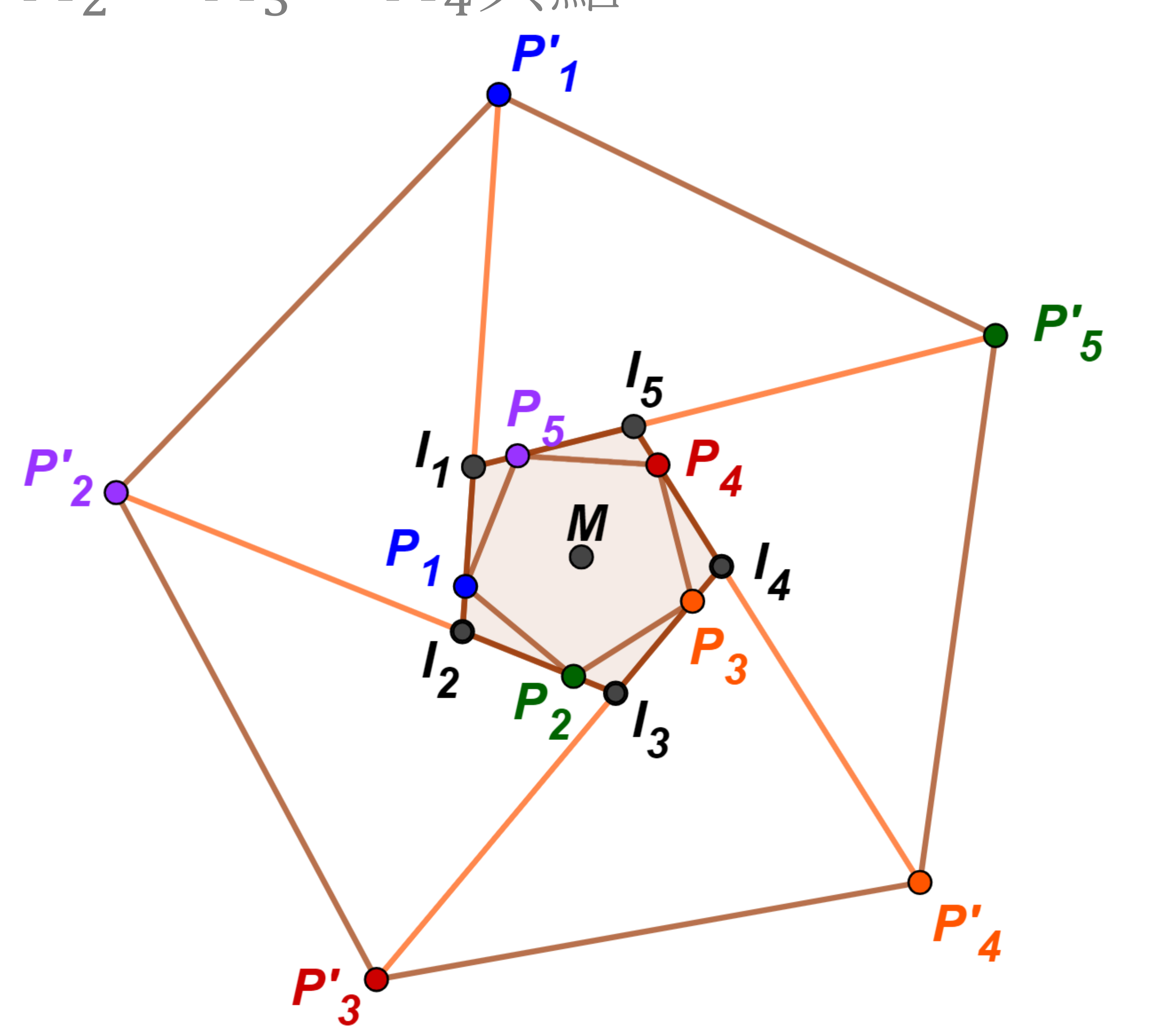


圖6-1

性質6-2：將性質6-1特殊化，當$n=3$時，得到P_1、P_2、P_3與P_1'、P_2'、P_3'，若將它們兩兩連成直線，則此三條直線共點。

性質6-3：在性質6-2中，當a改變時，三條直線之交點的軌跡為橢圓，其方程式為 $\frac{x^2}{(\frac{Rr}{R-r})^2}+\frac{y^2}{(\frac{Rr}{R+r})^2}=1$ 。

（R、 r分別為過P_1'、P_2'、P_3'與P_1、P_2、P_3之圓的半徑）

將各點坐標化求得直線方程式

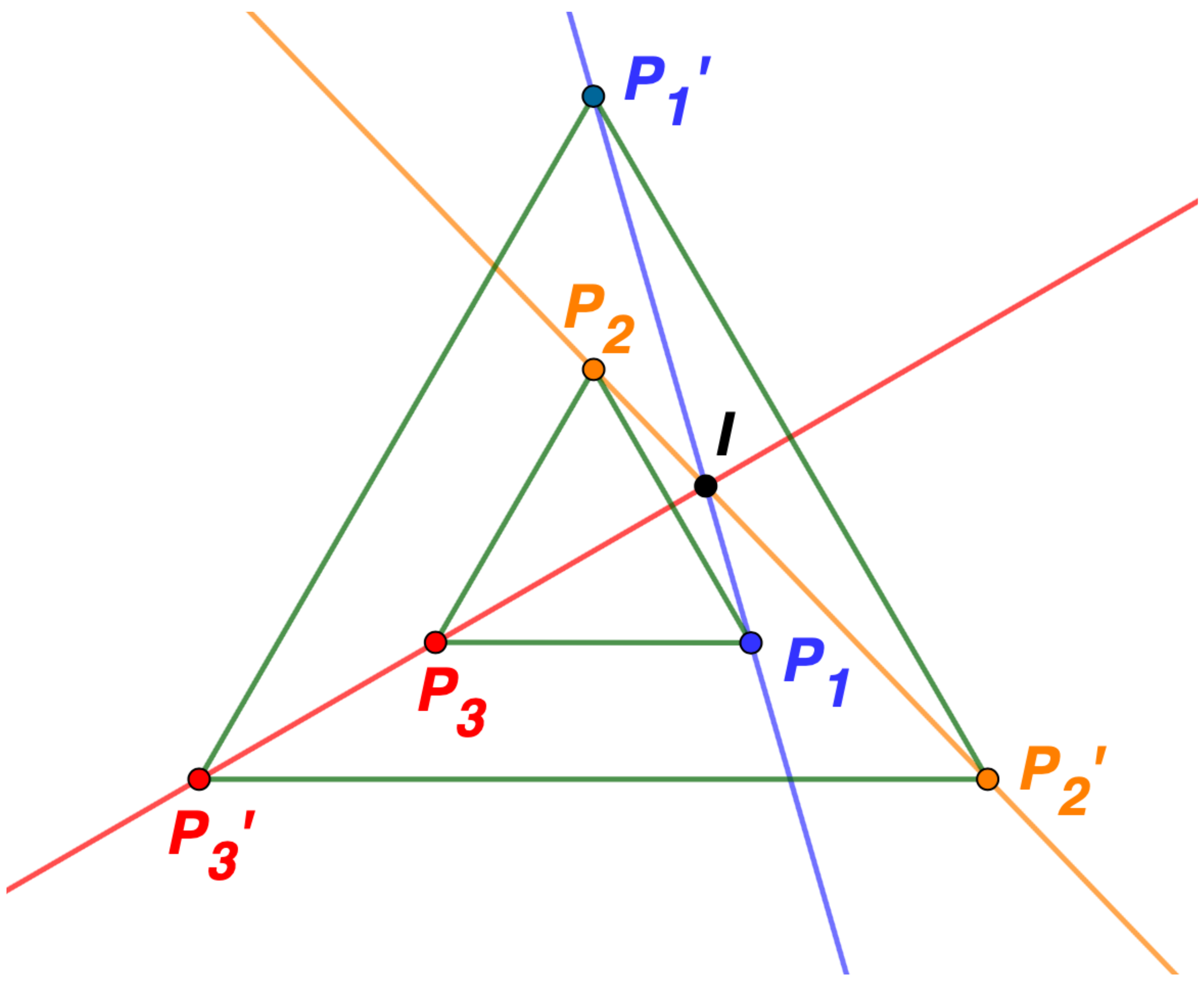


圖6-2

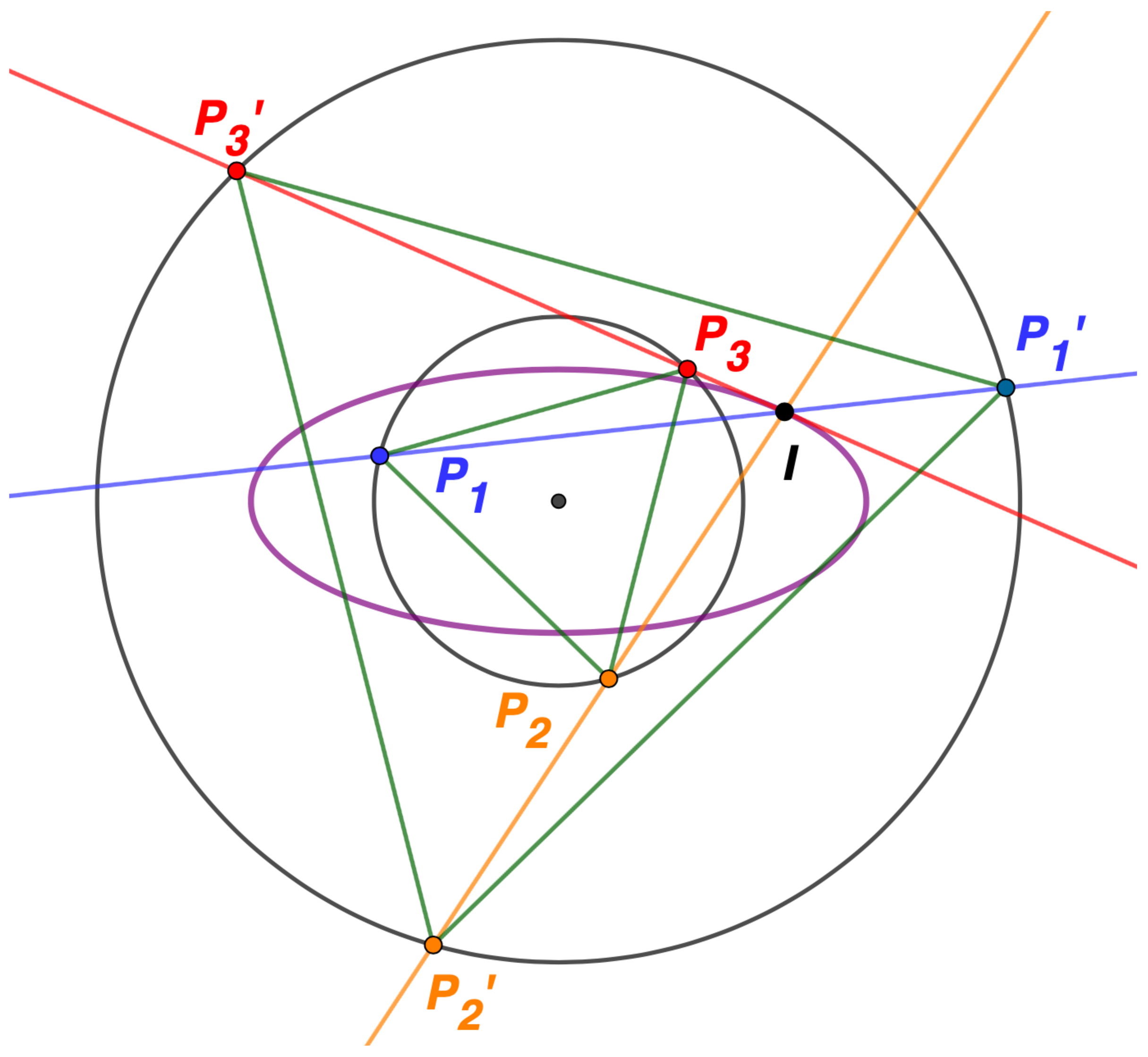


圖6-3

未來展望＆應用

一、未來展望：

(一)在任意角度、 n棵樹時，分別順逆時針旋轉，改變角度時，兩個寶藏軌跡產生的兩個圓半徑大小之關係。

(二)在n棵樹位置不同的情況下，比較順、逆時針旋轉及順、逆時針選取n棵樹時的相關性質。

(三)將題目從二維平面改為三維空間，再證明無論絞刑臺的位置如何改變，寶藏的位置不變。

二、應用：

(一)將絞刑臺位置與寶藏位置無關的性質應用於加密與解密，其作法如下：

【加密】

步驟1：輸入欲加密的（由英文或數字所組成的）字串。

步驟2：將字串中的英文字母轉換成對應的編碼。

（a, b, c, ⋯, z的編碼為10, 11, 12, ⋯, 35，數字的編碼即為原數字）

步驟3：將字串的編碼轉換成哥德爾數，設此數為p，則寶藏的座標設為（p , p）。

（以字串「1ab」為例：其編碼為（1,10,11），其哥德爾數為$2^1\times3^{10}\times5^{11}=5766503906250$）

步驟4：利用程式每次亂數選取一組正整數數對作為第一棵樹的座標，並由程式根據寶藏的座標與第一棵樹的座標求得第二棵樹的座標。則此兩棵樹的座標所組成的字串即為密文。

（如果不知道找寶藏的幾何方法，即使取得密文也無法得知寶藏的位置）

【解密】

步驟1：任取一組數對作為絞刑臺的座標。

步驟2：以兩棵樹的座標（密文）為旋轉中心，分別順逆時針旋轉90度後打樁，則兩樁的中點即為寶藏的座標。

步驟3：以程式求出寶藏之x座標（哥德爾數）的標準分解式，得到其各個指數，再將每個指數轉換回編碼前字串的每個字元（完成解密）。

(二)將性質6-3的機構作為繪製橢圓的新方式。

結論

一、n棵樹為旋轉中心的情況下， P點位置(n根樁的形心)與G點位置無關 ，改變a數值時P點的位置（n根樁的形心）移動軌跡為圓，且T_1、T_2、T_3、⋯、T_n的形心為此圓的圓心 。

二、n棵樹之中任取x棵樹為旋轉中心，以不同順序各做x 次，若n棵樹的形心M_1、xn根樁的形心為M_2，則M_1和M_2位置相同，且發現$n=3$、 $x=2$，特定角度時，形成三線共點。

三、在n棵樹的條件下，逐次各以順、逆時針旋轉 a^o、$(a+\frac{360}{n})^o$、 $(a+\frac{360\times2}{n})^o$ 、⋯、 $(a+\frac{360\times(n-1)}{n})^o$，推得的$2n$個寶藏之兩兩連線圍成正$n$邊形，且其形心與寶藏的形心、$n$棵樹的形心位置相同，且$n=3$時若改變選取方向，可得三線共點，且其交點的軌跡為橢圓。

參考文獻資料

一、 日本 Newton press （2021） 。**虛數：從零開始徹底搞懂虛數 少年伽利略1**（賴貞秀譯）。人人出版。

二、 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明（2020）。**普通型高級中等學校數學3A**(翰林)。

三、 王敏齊、詹雨安、鄭丞傑 （2012） 。**藏寶旋跡**。https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/52/pdf/030406.pdf

＊ 本展板之所有圖形均為作者自行繪製