中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030410

螺線雙重奏—黃金螺線與阿基米德螺線的交點關係

學校名稱：雲林縣立斗六國民中學

作者：	指導老師：
國二 周禾凱	邱正明
國二 蘇湛恩	丁崇祺
國二 涂淮鈞	

關鍵詞：阿基米德螺線、黃金螺線

摘要：

本實驗研究螺線圈數、擴大倍率對黃金螺線與阿基米德螺線交點數的影響，並預測交點座標。研究發現：

1. 透過趨勢線預測圈數變化時的交點數，分別使用第一至第四象限預測，發現四個象限各別形成的趨勢線預測值總和會有較高的準確率。另外，我們也利用兩螺線圈數來推導出預測交點數的公式。
2. 透過趨勢線預測兩螺線比例變化時的交點數，當黃金螺線和阿基米德螺線擴大倍率的比值越大，交點數越多。
3. 前 25 個交點距離、夾角及圍成三角形面積所形成的趨勢線，用以預測第 26 個交點之後的數據，誤差率在 5.16 %以內。
4. 預測交點座標第 26 點以後，發現預測越接近 x 軸的交點，y 座標偏差率越高，x 座標偏差率越低，反之亦然。

壹、前言

一、實驗動機：

數學世界中充滿了許多美麗而神奇的曲線，其中阿基米德螺線和黃金螺線是兩個引人入勝的主題。這兩種螺線都是自然界中許多現象的模型，例如鸚鵡螺，並且在數學、物理學以及工程學的領域中都有廣泛的應用，像是阿基米德螺旋抽水機。阿基米德螺線的方程式描述了距離原點的螺線形狀，其規則性和美感引起了科學家和數學家的廣泛興趣。另一方面，黃金螺線則是一種與黃金比例相關的螺線，其特點是黃金比例在其展開的過程中得到了充分的體現。或許這些利用阿基米德螺線設計的機械，在找出與黃金螺線相交的交點後，能有助於機械設計的優化，讓機器運作的效能提升。

在相關的研究中，我們在中華民國第 54 屆科學展覽會作品中，看到了一篇空間螺線的代數分析。在這篇作品中，以立體螺線套用到正四面體上，以代數方式找出不同的阿基米德螺線公式下與正四面體相交的節點，亦探討黃金螺線與正四面體的相交情形。主要是在三維空間下，來探討交點公式。這引發了我們思考，若是回到二維平面上，螺線的相交情形會如何？因此我們的實驗將致力於深入瞭解阿基米德螺線和黃金螺線的性質，並且找出兩條曲線交點關聯性、與原點距離等，同時也可以尋找這些曲線在自然界和科學中的應用。

二、實驗目的：

1. 計算和預測圈數改變時黃金螺線與阿基米德螺線的交點個數。
2. 計算並預測黃金螺線與阿基米德螺線比例大小 a 值改變時的交點個數。
3. 分析黃金螺線與阿基米德螺線的交點關係，包含：
   (1) 交點與原點的距離。
   (2) 交點與下一個交點的距離。
   (3) 交點與 x 軸的交角。
   (4) 三點(交點、下一個交點和原點)連線所形成的三角形面積。
4. 利用上一項分析結果預測黃金螺線與阿基米德螺線的交點座標。

三、名詞定義與預備定理：

表 1 螺線參數介紹表(圖檔來源：第二作者使用 GGB 程式自行製作)

1. 黃金螺線又稱等角螺線，依照黃金比例$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.6183398 \ldots$ ，形成的黃金矩形擴張後，將頂點依序連起來，所生成的螺線。

其極座標公式為 $r = l \cdot e^{k\theta}$，其中 r 為與原點的距離，θ 是角度，$k = \frac{ln(\varphi)}{\pi}$ ，l 為螺線擴大倍率。

黃金螺線在 *GeoGebra* 的曲線參數定義：

$C1 = Curve((ab\hat{}\frac{\theta}{2\pi};\theta),\theta,0,n\ 2\pi)$

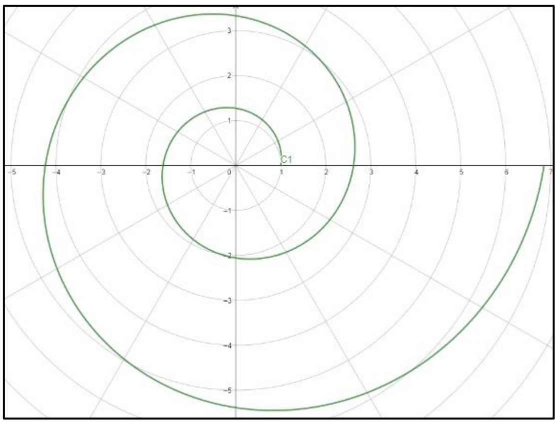
參數 1:a_{gold}=螺線比例大小(起始點)

參數 2:b=螺線半徑增加的倍率

(黃金比例的平方= $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$)

參數 3:n=螺線圈數

參數 4:θ=正負值控制螺線的旋轉方向



2. 阿基米德螺線又稱等速螺線，

其極座標公式為 $r = a_{Ar}\,\theta$

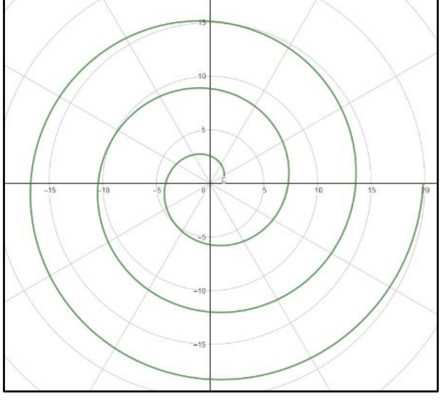
阿基米德螺線在 *GeoGebra* 的曲線參數定義：

$C2=Curve((a\,\theta;\theta),\theta,0,n\ 2\pi)$

參數 1:a_{Ar}=螺線比例大小(每圈半徑增加 $2a\pi$)

參數 2:n=螺線圈數

參數 3:θ=正負值控制螺線的旋轉方向



透過數學軟體 *GeoGebra*，將螺線的極座標轉換成曲線參數指令後，生成螺線圖形。接著在後續的實驗一與實驗二分析中，我們將圖形的交點標出，利用直角坐標分析交點位置，以及在不同象限下的交點個數，以利觀察交點趨勢。在實驗三中，回歸到極座標之下觀察交點與原點的距離 r、夾角 θ 以及交點形成之三角形面積，進行預測並觀察準確率。

根據**表一**，我們知道要求出黃金螺線與阿基米德螺線的交點需要解方程式：$l \cdot e^{k\theta} = a_{Ar}\theta$，而這是一個非線性方程，一般要透過牛頓法或是割線法來求出根，通過迭代計算求出兩條曲線的交點角度 θ 的近似值，再將值帶入黃金螺線的極座標方程式以求出交點與原點距離 r 的近似值，便可以得到交點的極座標（r, θ），經由座標轉換公式 $x= r \cdot cos\theta$、$y= r \cdot sin\theta$，將極座標轉換為直角座標。而本研究將透過實驗三的結果，進行交點與原點距離 r、和交點角度 θ 的預測，將所形成之極座標轉換為直角座標，再與實際的交點進行誤差率的計算。

本實驗將分別以兩螺線之係數 a_{gold}、a_{Ar} 值與係數 n 值作為操作變因，而改變螺線旋轉方向的 θ 值無法研究出特定的規律，因此不討論。其中兩 a 值控制內容雖有差異，但阿基米德螺線可透過間距調整螺線倍率；黃金螺線則因固定 b 值使每圈離原點的距離保持相等，所以只要改變內側起始點位置倍率也會一起更動，因此兩 a 值可以同時討論。

貳、研究器材與材料

GeoGebra 計算機套件

Microsoft Excel 試算表軟體

叄、研究過程與結果

本實驗在研究不同係數對黃金螺線與阿基米德螺線交點數的影響，並探索係數變化對交點數的預測模型。首先，預測圈數變化時的交點數，其次，我們研究了不同比例大小的螺線對交點數的影響，接下來，我們記錄了前 25 個交點的座標，並預測了第 26 個交點以後的基本性質。最後，我們利用三角函數預測交點座標。透過這些不同的觀察與預測，我們深入了解係數變化對交點數的影響，並建立了有效的預測模式以應對不同係數下的交點數變化。

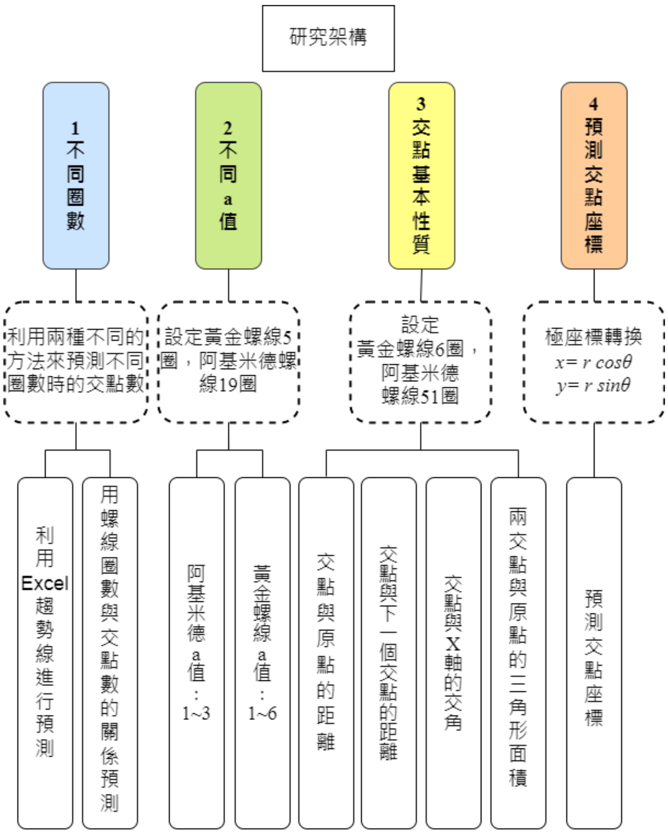


圖 1 實驗架構圖

實驗一 不同圈數對交點個數的影響

(一)實驗步驟：

1. 本實驗會以改變圈數為操作變因，並固定其他係數
2. 以黃金螺線的圈數為標準，找出使阿基米德螺線和黃金螺線擁有最多交點且最少圈的整數圈數。
3. 記錄不同象限的交點個數。
4. 分別以黃金螺線圈數為 4、5、6 三種不同圈數進行實驗，重複步驟 1~3。
5. 將數據整理成表，繪製成折線圖，再利用 *Microsoft Excel* 的圖表功能畫出趨勢線。
6. 分別以趨勢線觀察並預測交點。

表 2 實驗一螺線圈數對應表格

阿基米德螺線圈數	7	19	51
黃金螺線圈數	4	5	6

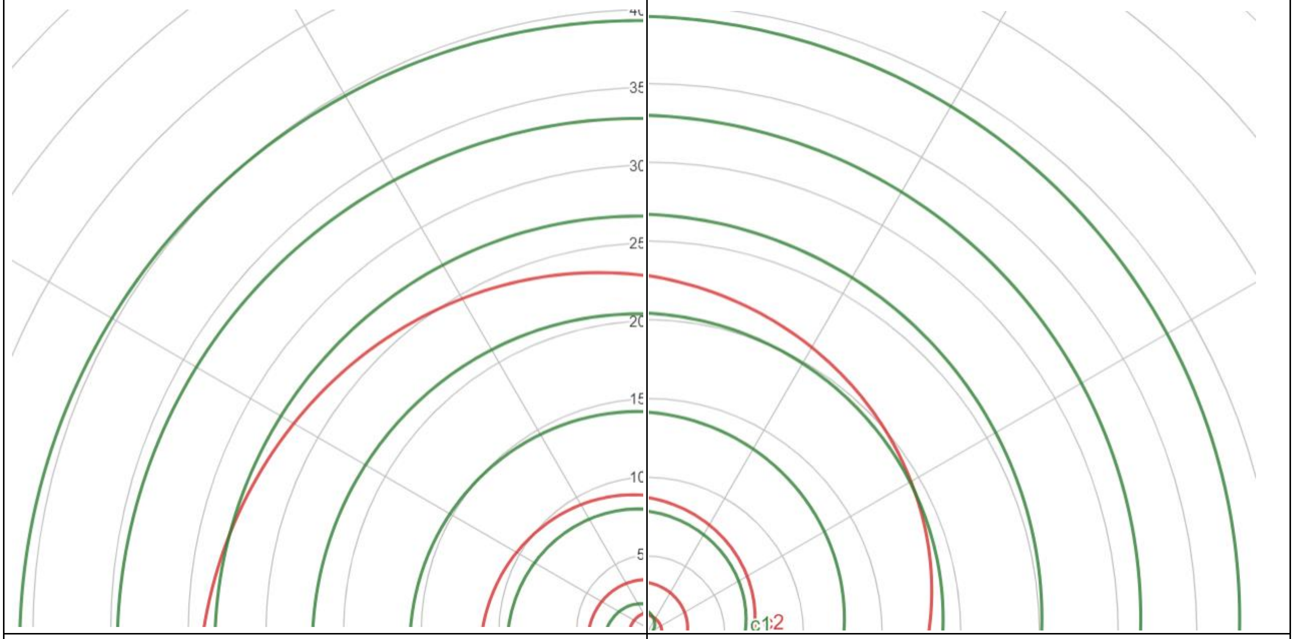
在實驗一裡，將從黃金螺線圈數為 4 圈開始，因為 3 圈時，兩個螺線的總交點僅 1 個，無探討價值，而圈數在 7 圈之後的總交點數將破百，數據龐大，經過考量後以黃金螺線 4 到 6 圈做觀察，並以第 7 圈的交點數作為預測，探討預測的準確度。

(二)實驗結果：

表 3 實驗一螺線觀察表格(圖檔來源：第三作者使用 GGB 程式自行製作)

參數	阿基米德螺線	黃金螺線
a 值	1	1
n 值	7	4

第二象限	第一象限
1	2



第三象限	第四象限
1	1

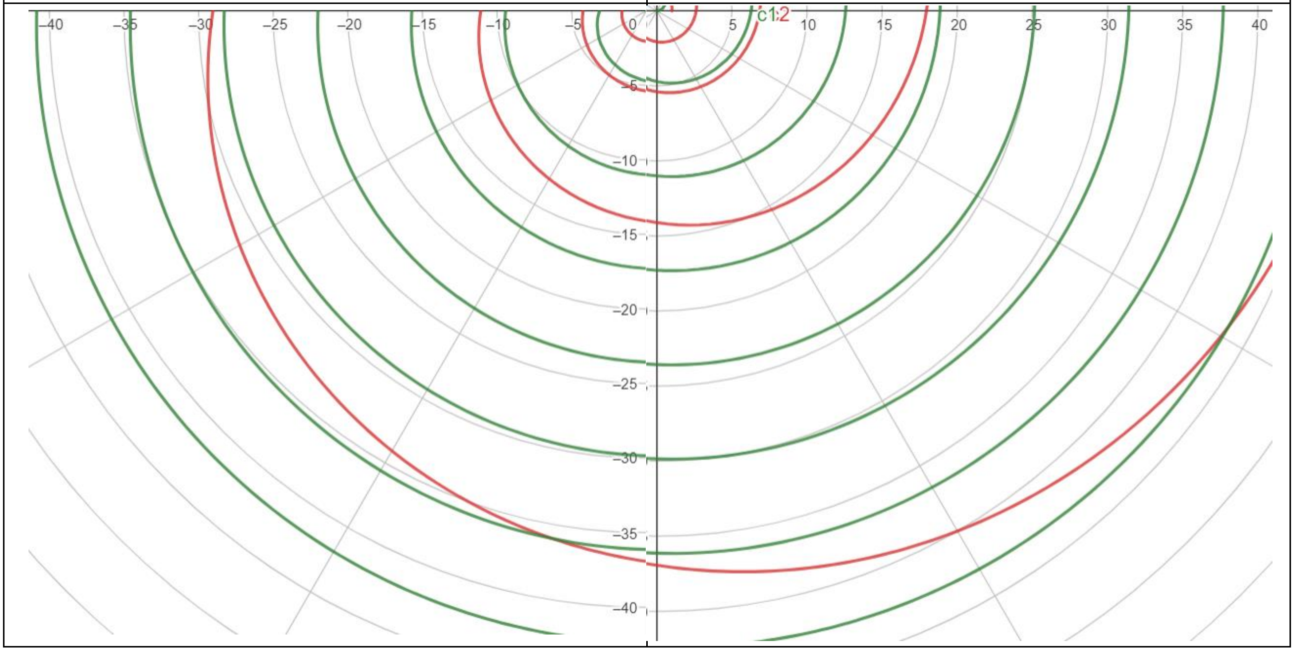
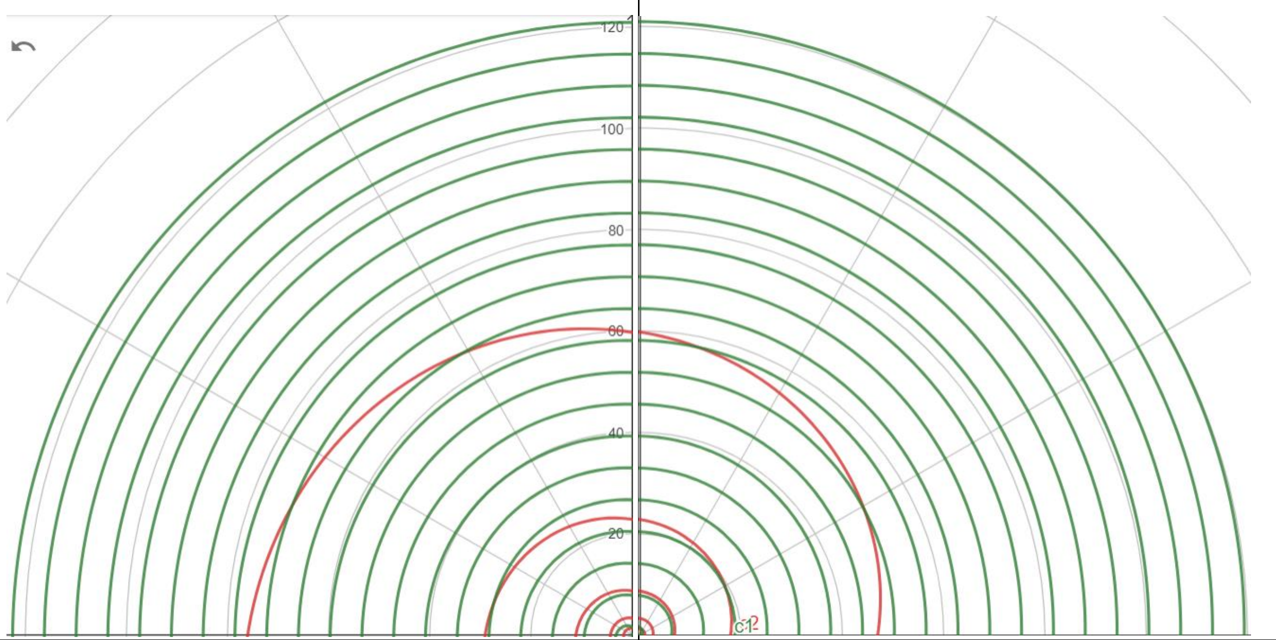


表 4 實驗一螺線觀察表格(圖檔來源：第三作者使用 GGB 程式自行製作)

參數	阿基米德螺線	黃金螺線
a 值	1	1
n 值	19	5

第二象限	第一象限
3	4



第三象限	第四象限
4	5

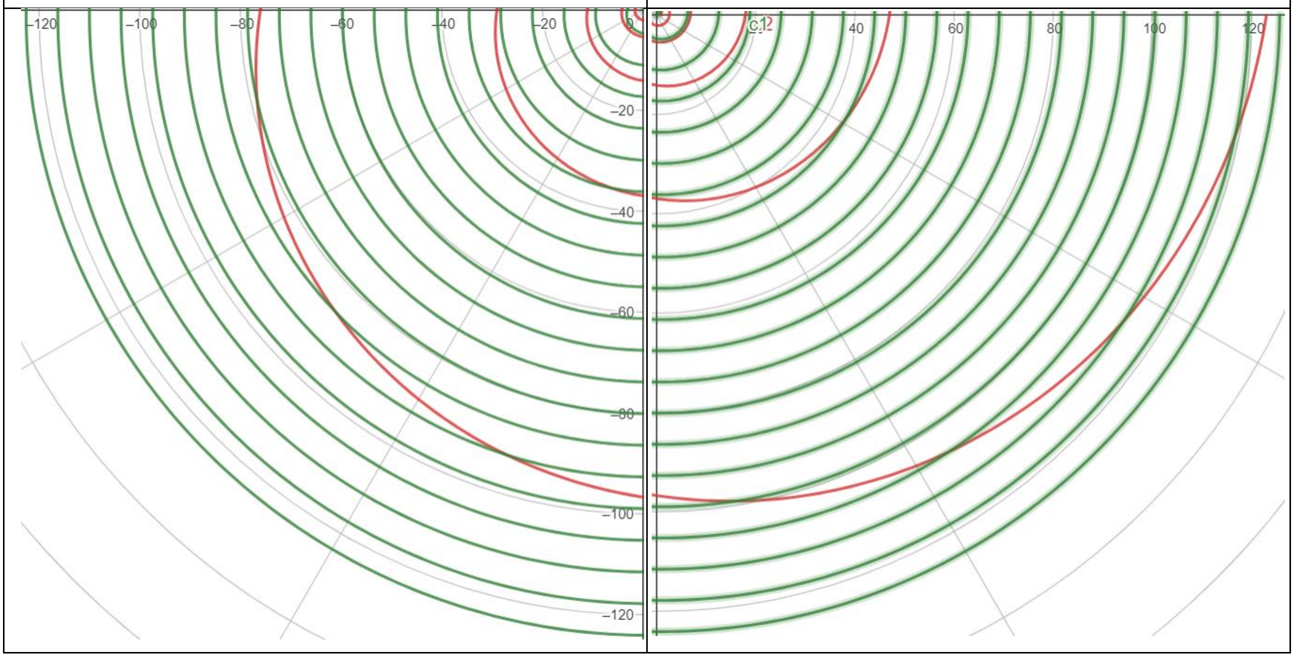
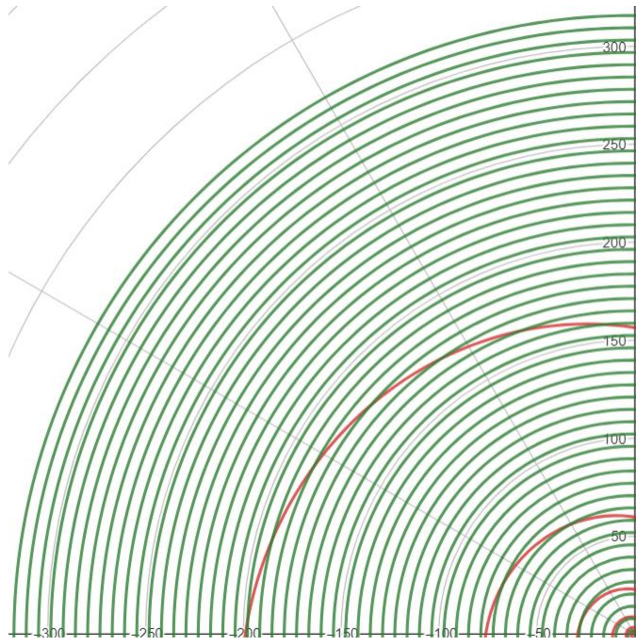
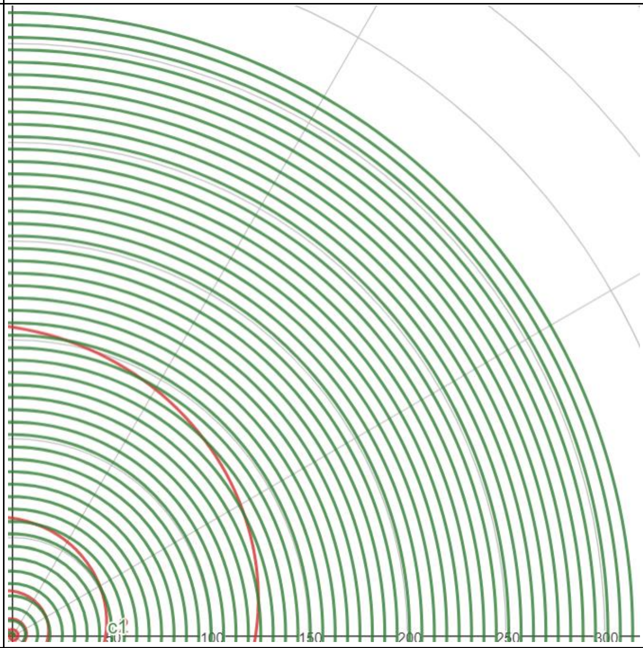
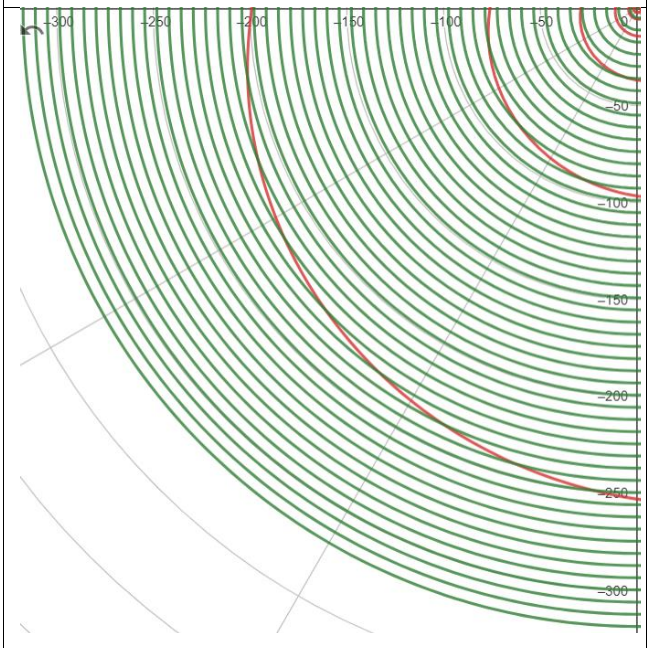
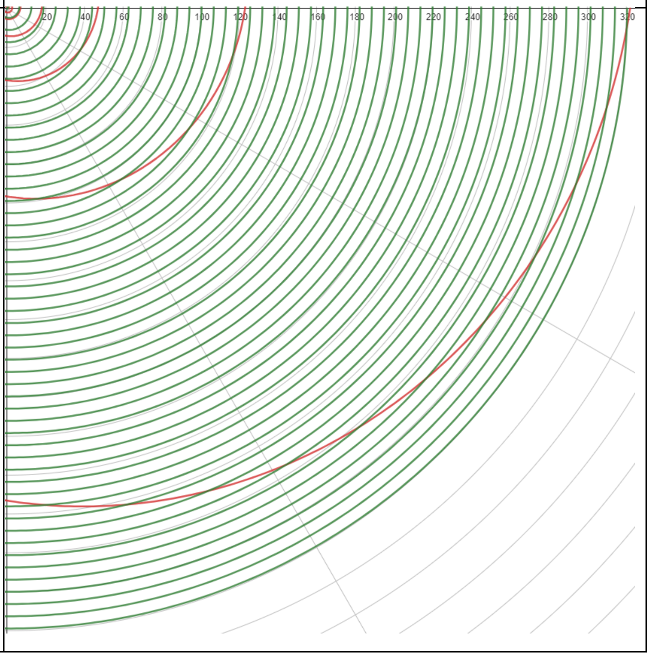


表 5 實驗一螺線觀察表格(圖檔來源：第三作者使用 GGB 程式自行製作)

參數	阿基米德螺線	黃金螺線
a 值	1	1
n 值	51	6

第二象限	第一象限
10	9
	
第三象限	第四象限
12	16
	

(三)實驗結果分析

1. 趨勢線預測交點數

表 6 實驗一交點數統整

交點數	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	總和
阿基米德 7 圈 黃金螺線 4 圈	2	1	1	1	5
阿基米德 19 圈 黃金螺線 5 圈	4	3	4	5	16
阿基米德 51 圈 黃金螺線 6 圈	9	10	12	16	47

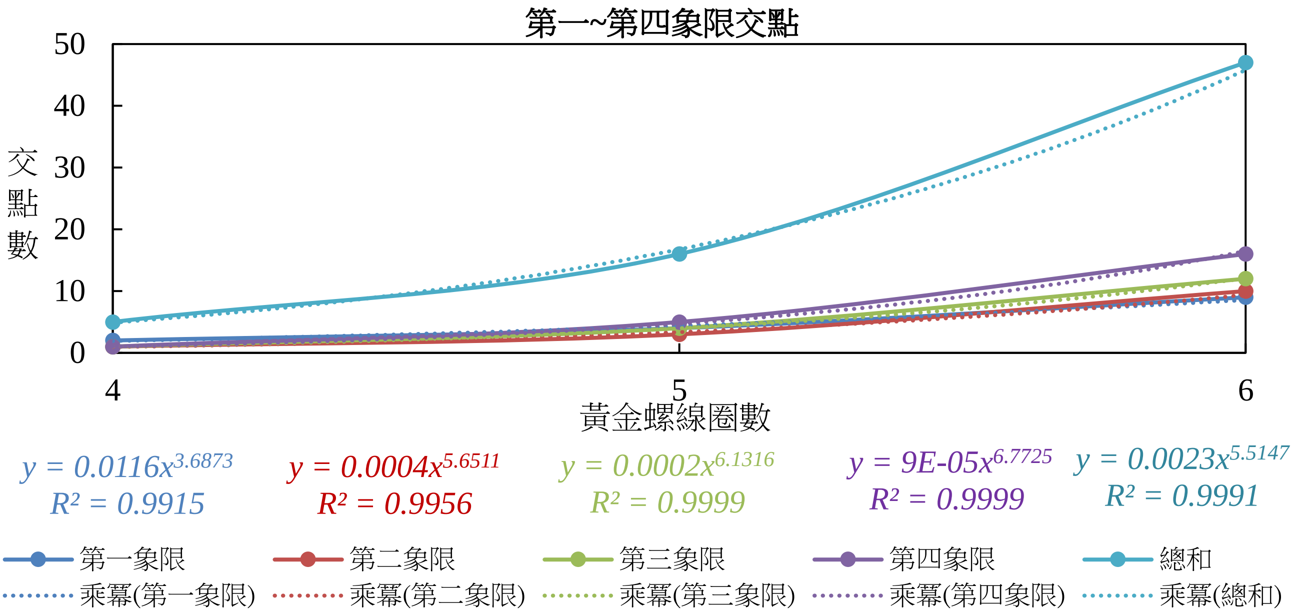


圖 2 實驗一黃金螺線交點數折線圖

表 7 實驗一黃金螺線預測表格

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	總和 (趨勢線)	總和 (預測相加)
實際	22	28	34	45	129	129
預測	19	23	39	48	118	129
誤差率	13.64 %	17.86 %	17.65 %	6.67 %	10.85 %	0.00 %

我們計算了黃金螺線在第 4 至第 6 圈與阿基米德螺線的交點數。我們利用這三種圈數分別製作了第一到第四象限以及總和的趨勢線，透過 Excel 計算後，我們選擇了趨勢線可靠性 R^2值最高且高於 0.99 的方程式作為趨勢線。接著使用了兩種不同的方式來做預測:

(1) 我們利用第一到第四象限的趨勢線預測了黃金螺線第 7 圈的交點數，並將第一到第四象限預測出來的值相加，得到的值稱為總和（預測相加）。

(2) 先將黃金螺線在第 4 至第 6 圈與阿基米德螺線的交點數相加，得到各圈的總交點數並製作趨勢線：$y = 0.0023x^{5.5147}$。接著利用趨勢線預測了黃金螺線第 7 圈，總和的交點數。

經過分析後我們發現，總和（預測相加）的總交點個數誤差率較總和（趨勢線）小。

2. 螺線圈數預測交點數

表 8 實驗一交點數統整

	交點數
阿基米德 7 圈 黃金螺線 4 圈	5
阿基米德 19 圈 黃金螺線 5 圈	16
阿基米德 51 圈 黃金螺線 6 圈	47

表 9 實驗一交點數與阿基米德螺線增加量

	交點數增加量	阿基米德螺線圈數增加量
阿基米德 7 圈~19 圈	11	12
阿基米德 19 圈~51 圈	31	32

我們發現：

黃金螺線(n + 1)圈(n 為正整數)時的交點數 = 黃金螺線 n 圈時的交點數+

黃金螺線(n + 1)圈時阿基米德螺線的圈數 − 黃金螺線 n 圈時阿基米德螺線的圈數 − 1

並延伸為：

當黃金螺線第 n 圈(n 為正整數)起點和終點的間隔大於阿基米德螺線每圈的間距時，

黃金螺線(n + t)圈時的交點數(t 為黃金螺線增加圈數且為正整數) =

黃金螺線 n 圈時的交點數 + 黃金螺線(n + t)圈時阿基米德螺線的圈數 –

黃金螺線 n 圈時阿基米德螺線的圈數 − t

這是因為：

(1) 黃金螺線會不斷向外擴張，而不會向內逼近與同圈產生第二個交點，因此只有 0 或 1 個交點兩種可能。

(2) 若黃金螺線過小，它便可能旋繞於連續兩圈阿基米德螺線之間(如下**圖 3**)，無法相交，因此黃金螺線間距需至少大於兩圈阿基米德螺線間距，才可保證擁有交點。由於黃金螺線間距每次皆為上次的$[(3+\sqrt{5})/2]$倍，因此當其間隔大於阿基米德螺線每圈的間距時，下圈間距必定大於$[(3+\sqrt{5})/2]$倍和 2 倍的阿基米德螺線。

(3) 在極座標 0 度時，黃金螺線落在阿基米德螺線連續兩圈第 g 圈與第 g + 1 圈之終點間(如下**圖 4**)，則阿基米德螺線第 g + 1 圈沒有交點，故需 − 1。

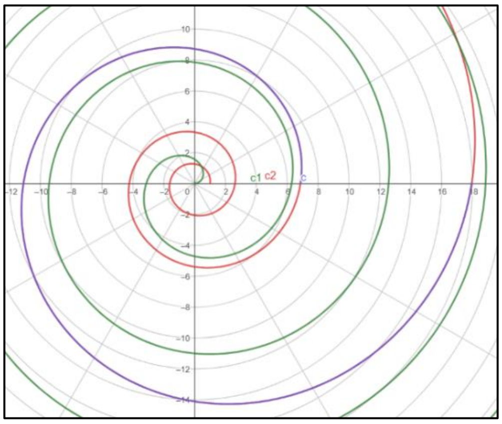


圖 3 阿基米德螺線旋繞於黃金螺線
(來源：第二作者使用 GGB 程式製作)

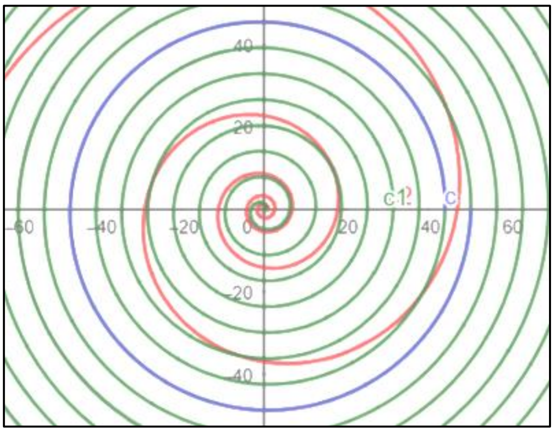


圖 4 黃金螺線與阿基米德螺線
(來源：第二作者使用 GGB 程式製作)

實驗二 a 值(黃金螺線和阿基米德螺線的比例)大小對交點個數的影響

(一)實驗步驟：

1. 本實驗會以改變 a 值(分別為黃金螺線的內側起始點 a_{gold} 和阿基米德螺線的間距 a_{Ar})為操作變因，並以[黃金 (黃金螺線)、 阿基米德(阿基米德螺線)、數值]代表某螺線 a 值。例如黃金 1 代表黃金螺線 a 值為 1。
2. 根據上述實驗為方便觀察紀錄，使黃金螺線 5 圈為控制變因，4 圈過少，每象限最少只有 1 個交點；6 圈過多，在黃金螺線倍率變大之下交點極多，易有觀測誤差。並找出使阿基米德螺線和黃金螺線擁有最多交點且最少圈的整數圈數，
3. 記錄不同象限的交點個數。
4. 分別以黃金螺線比阿基米德螺線的 a 值為 1/3、1/2、2/3、1、4/3、3/2、5/3、2、5/2、3、4、5、6 十三種不同 a 值比例進行實驗，重複步驟 1~3。
5. 將數據整理成表，繪製成折線圖，再利用 Microsoft Excel 的圖表功能畫出趨勢線。我們只將阿基米德螺線的 a 值做到 3，因為當其 a 值愈大，交點數愈少，做出的趨勢線會愈不準確。

(二)實驗結果

表 10 第一象限的不同 a 值交點數

	黃金 1	黃金 2	黃金 3	黃金 4	黃金 5	黃金 6
阿基米德 1	4	6	8	12	14	18
阿基米德 2	2	4	4	6	7	8
阿基米德 3	2	4	4	4	5	6

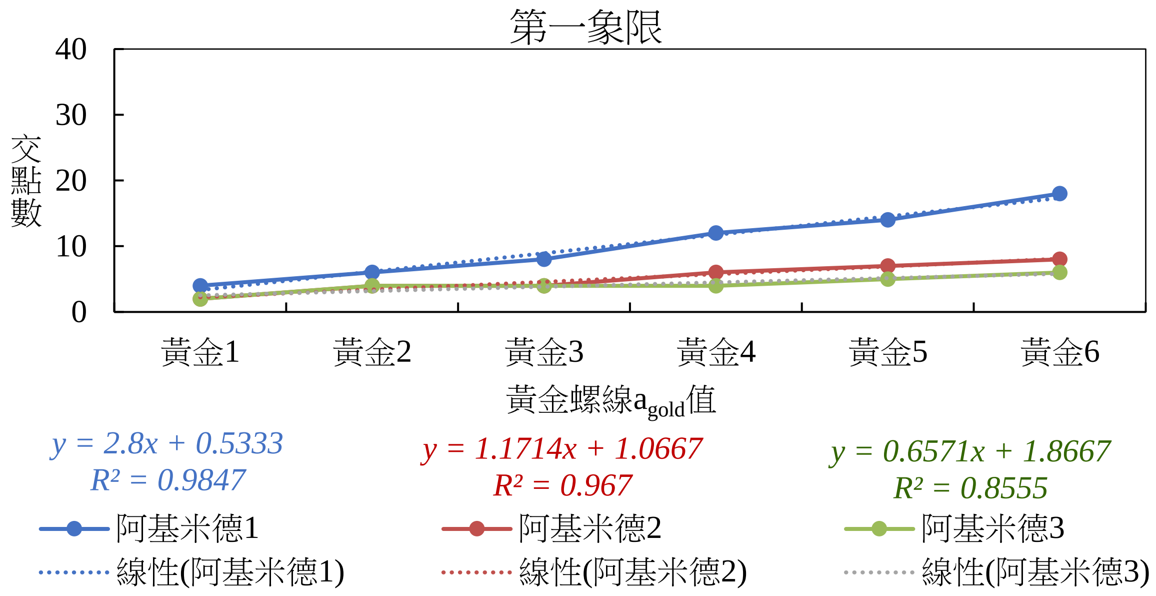


圖 5 第一象限的不同 a 值交點數折線圖

表 11 第二象限的不同 a 值交點數

	黃金 1	黃金 2	黃金 3	黃金 4	黃金 5	黃金 6
阿基米德 1	3	7	11	15	19	26
阿基米德 2	2	3	6	7	9	11
阿基米德 3	2	2	3	5	7	7

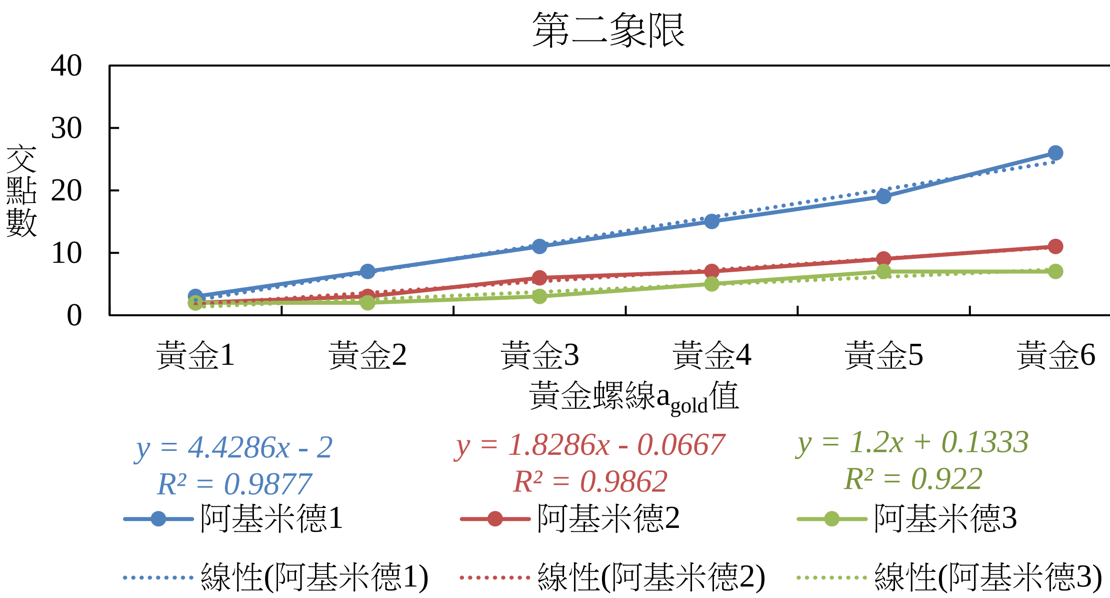


圖 6 第二象限的不同 a 值交點數折線圖

表 12 第三象限的不同 a 值交點數

	黃金 1	黃金 2	黃金 3	黃金 4	黃金 5	黃金 6
阿基米德 1	4	11	14	20	26	29
阿基米德 2	2	4	7	11	11	14
阿基米德 3	2	3	4	7	7	11

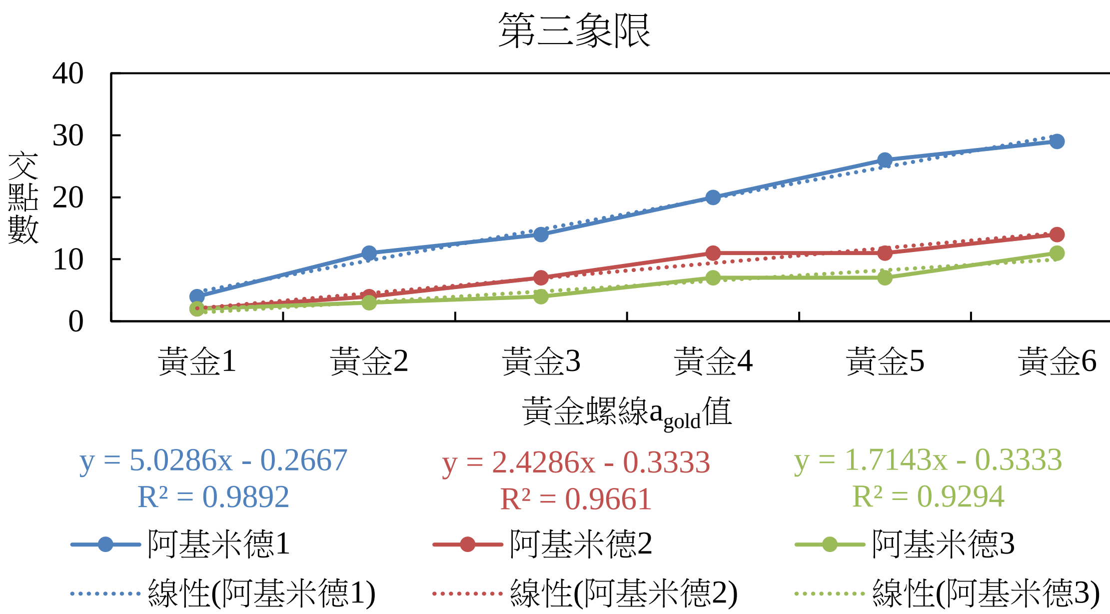


圖 7 第三象限的不同 a 值交點數折線圖

表 13 第四象限的不同 a 值交點數

	黃金 1	黃金 2	黃金 3	黃金 4	黃金 5	黃金 6
阿基米德 1	5	12	20	26	33	39
阿基米德 2	2	5	9	12	16	20
阿基米德 3	1	3	5	7	10	12

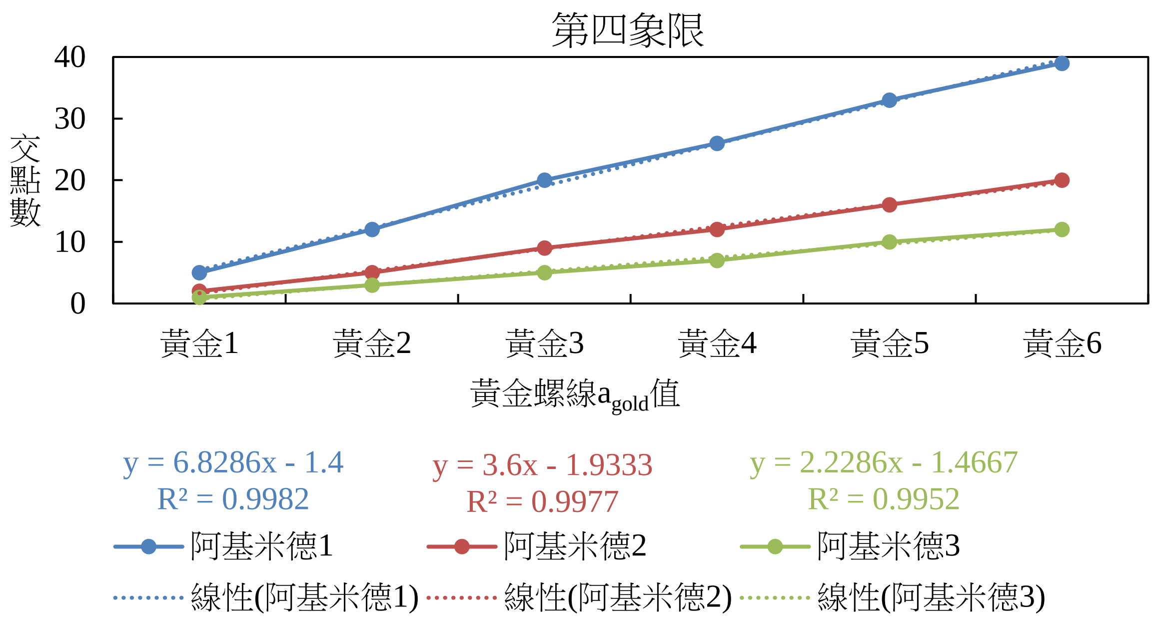


圖 8 第四象限的不同 a 值交點數折線圖

表 14 全部象限加總的不同 a 值交點數

	黃金 1	黃金 2	黃金 3	黃金 4	黃金 5	黃金 6
阿基米德 1	16	36	53	73	92	114
阿基米德 2	8	16	26	36	43	53
阿基米德 3	7	12	16	23	29	36

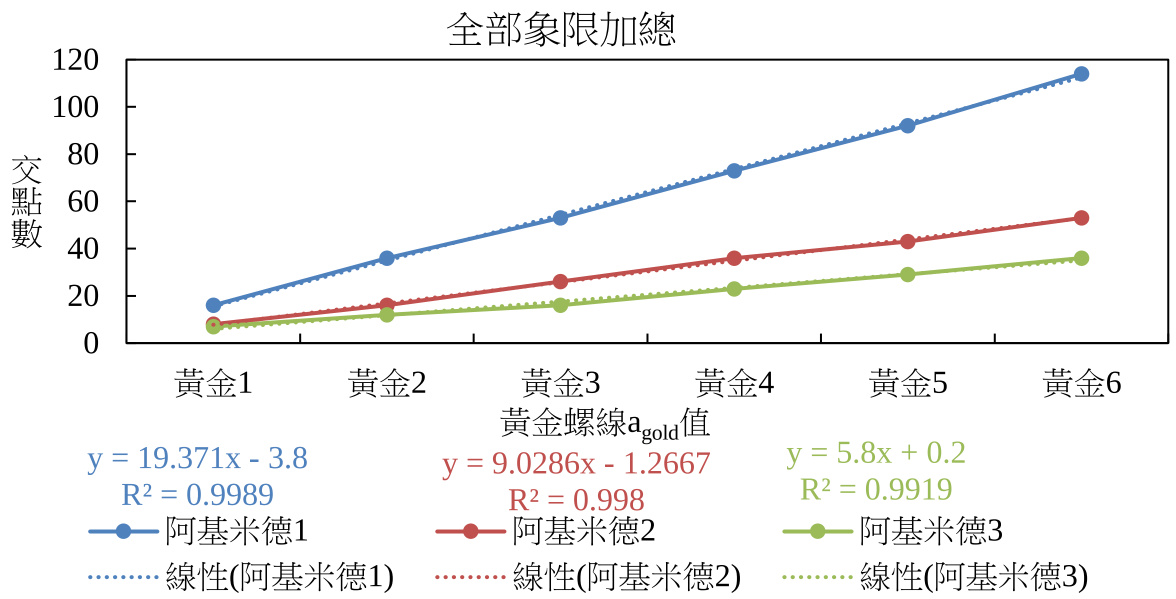


圖 9 全部象限加總的不同 a 值交點數折線圖

(三)實驗結果分析

表 15 黃金 a_{gold}=7，阿基米德 a_{Ar}=1，公式 $y = 19.371x - 3.8$ 預測表格

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	全(公式計算)	全(預測相加)
實際	23	27	35	47	132	132
預測	20	29	35	46	132	130
誤差率	13.04 %	7.41 %	0.00 %	2.13 %	0.00 %	1.52 %

表 16 黃金 a_{gold}=7，阿基米德 a_{Ar}=2，公式 $y = 9.0286x - 1.2667$ 預測表格

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	全(公式計算)	全(預測相加)
實際	11	12	19	21	63	63
預測	9	12	16	23	61	60
誤差率	18.18 %	0.00 %	15.79 %	9.52 %	3.17 %	4.76 %

表 17 黃金 a_{gold}=7，阿基米德 a_{Ar}=3，公式 $y = 5.8x + 0.2$ 預測表格

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	全(公式計算)	全(預測相加)
實際	7	10	11	14	42	42
預測	6	8	11	14	40	39
誤差率	14.29 %	20.00 %	0.00 %	0.00 %	4.76 %	7.14 %

表 18 黃金 a_{gold}=7，阿基米德 a_{Ar}=1~3，公式 $y = 19.371x - 3.8$ 總交點數預測表格

	阿基米德 1	阿基米德 2	阿基米德 3
實際	132	63	42
原預測(公式)	132	61	40
新預測		63	41
原誤差率(公式)	0.00 %	3.17 %	4.76 %
新誤差率		0.00 %	2.38 %

我們計算了黃金螺線 a_{gold}=1~6 與阿基米德螺線 a_{Ar}=1~3 的交點數，當黃金螺線 a_{gold} 值越大，交點數愈多；當阿基米德螺線 a_{Ar} 值越大，交點數愈少，可推論出當黃金螺線 a_{gold} 值比阿基米德螺線 a_{Ar} 值的比值越大，總交點數愈多。利用公式預測了黃金螺線 a_{gold}=7 與阿基米德螺線 a_{Ar}=1~3 的交點數，發現比值愈大與利用公式計算的總交點數，其誤差率愈小，可控制於 5 %內。而若使用阿基米德螺線 a_{Ar} 值為 1 的趨勢線方程式：$y = 19.371x - 3.8$，令阿基米德螺線 a_{Ar}=1，黃金螺線 a_{gold}=比值，其總交點數的預測誤差率會更小，可控制於 3 %內。

實驗三 交點基本性質觀察(交點連線長度、角度以及構成之三角形面積)

(一)實驗步驟：

1. 為了方便觀察紀錄，設定黃金螺線 6 圈，阿基米德螺線 51 圈，並標記前 25 個交點位置(前 25 個交點可以很好的觀察是否有趨勢)。
2. 連接交點與原點、連續兩交點，求其長度。求得交點與 x 軸交角的角度。計算連續兩交點與原點產生的三角形的面積。
3. 將結果繪製成折線圖以利觀察趨勢。

(二)實驗結果：

分析中的第 K 點代表從原點開始，沿黃金螺線從起始點(1,0)逆時針將交點標出，K 即代表標記交點的順序。

表 19 第 K 點與原點和第 K+1 點的距離

第 K 點	對應黃金螺線圈數	與原點距離	和第 K+1 點距離
1	0	1.2021899058813	18.446017142311
2	3	19.3378418467561	44.5052564558676
3	3	28.0488775198547	46.6912415657371
4	3	35.9528221545543	46.5716138381655
5	3	43.4765090484737	46.156560000146
6	4	50.7724859144192	45.7367763760327
7	4	57.914960167971	45.3643524950717
8	4	64.946204648397	45.043487421954
9	4	71.8927951515096	44.7680953096367
10	4	78.7726162209733	44.5306184634833
11	4	85.5983203696975	44.3245575570294
12	4	92.3792129518297	44.1447234980876
13	4	99.1223250247733	43.9860806741191
14	4	105.8332128738297	43.8449382190936
15	4	112.5161127638353	43.719704440739
16	4	119.1746629941593	43.6084088160433
17	5	125.811706705534	43.5023314890126
18	5	132.429551959471	43.4121532289657
19	5	139.030033037998	43.3300910922446
20	5	145.615613539548	43.2518495192688
21	5	152.187742185873	43.1776946942618
22	5	158.745588286757	43.1184478575728
23	5	165.292638248478	43.0549297632031
24	5	171.828964050147	42.9996493001906
25	5	178.355577991645	

表 20 第 K 點與 X 軸的角度

第 K 點	對應黃金螺線圈數	與 X 軸交角
1	0	71.4831822916621
2	3	27.9767227105961
3	3	167.0823019670453
4	3	259.9449710404031
5	3	331.0202764398799
6	4	29.0491582836412
7	4	78.2827882930105
8	4	121.1434217460769
9	4	159.1537395800872
10	4	193.3384506655362
11	4	224.4224905923689
12	4	252.9390168801107
13	4	279.2924344919717
14	4	303.796705099839
15	4	326.7008981350719
16	4	348.2067551910084
17	5	8.4798075648847
18	5	27.6544100861446
19	5	45.8486854394159
20	5	63.1600870241916
21	5	79.6707580313074
22	5	95.4522251525709
23	5	110.570556220487
24	5	125.077233906901
25	5	139.021871537664

表 21 原點與兩頂點的三角形面積

編號	頂點 pK	頂點 pK+1	三角形面積
t1	p1	p2	7.6111931499369
t2	p2	p3	177.5473041742628
t3	p3	p4	503.5889432102798
t4	p4	p5	739.3062292699892
t5	p5	p6	936.2877785686717
t6	p6	p7	1113.530558453845
t7	p7	p8	1279.270182350102
t8	p8	p9	1437.6435216792843
t9	p9	p10	1590.9656845731377
t10	p10	p11	1740.6371967454934
t11	p11	p12	1887.5698884140127
t12	p12	p13	2032.3923172693967
t13	p13	p14	2175.511823005947
t14	p14	p15	2317.2340362740615
t15	p15	p16	2457.8579370353596
t16	p16	p17	2597.59438584393
t17	p17	p18	2736.16693896681
t18	p18	p19	2874.43227361082
t19	p19	p20	3012.09190837266
t20	p20	p21	3148.99808604875
t21	p21	p22	3285.26750326207
t22	p22	p23	3421.80343699345
t23	p23	p24	3557.25665238181
t24	p24	p25	3692.68016841262

(三)實驗結果分析

將表格資料畫成折線圖後，發現在第三點後呈現出明顯的趨勢

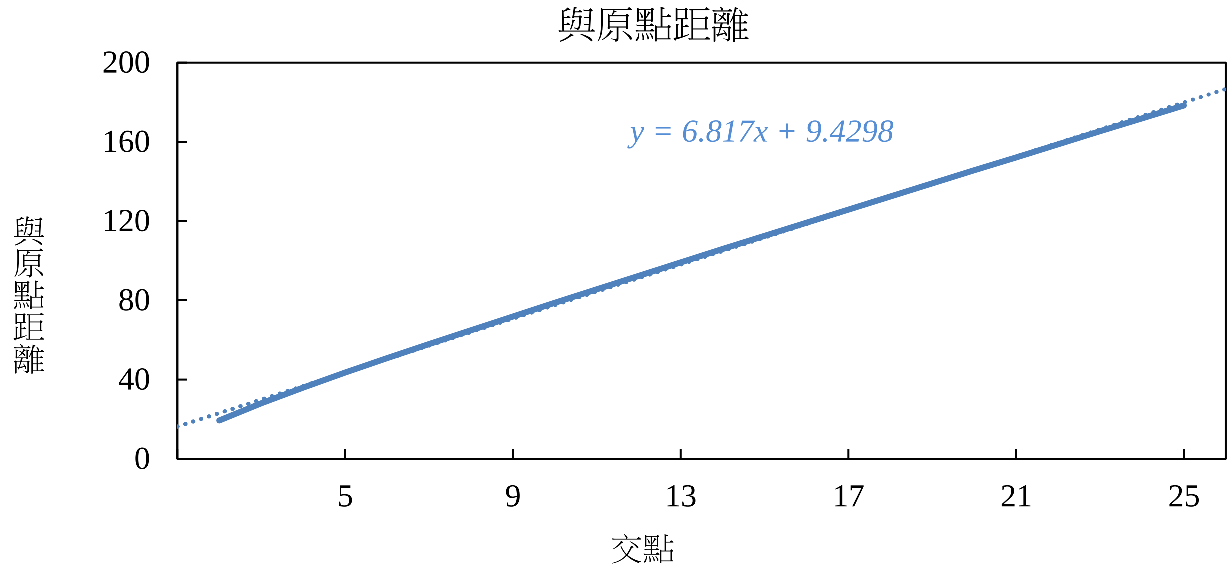


圖 10 第 K 點與原點的距離折線圖

取第三點之後的趨勢線 $y = 6.817x + 9.4298$，由此趨勢線預測，第 26 交點與原點距離為 186.6718，實際為 184.8727，誤差率約為 0.97 %，說明可利用此圖表的規律性來預測下一個交點與原點距離。

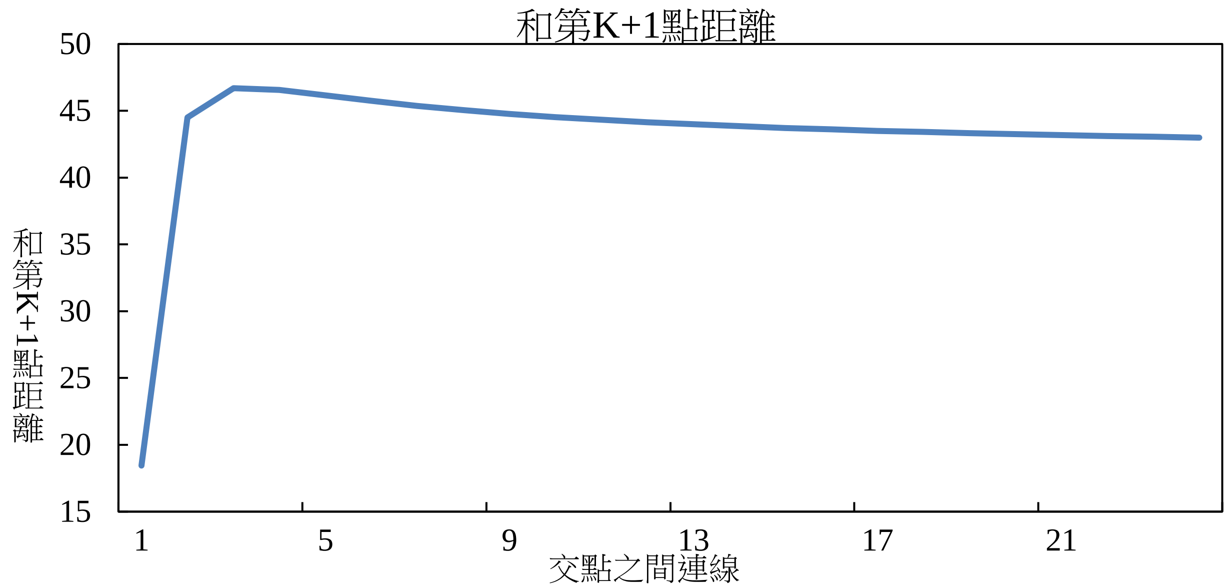


圖 11 第 K 點與第 K+1 點的距離折線圖

取第三點之後的趨勢線 $y = 0.0095x^2 - 0.4286x + 47.973$，由此趨勢線預測，第 26 交點與上一交點為 42.2262，實際為 42.9452，誤差率約為 1.67 %，說明可利用此圖表的規律性來預測下一個交點與此點距離。

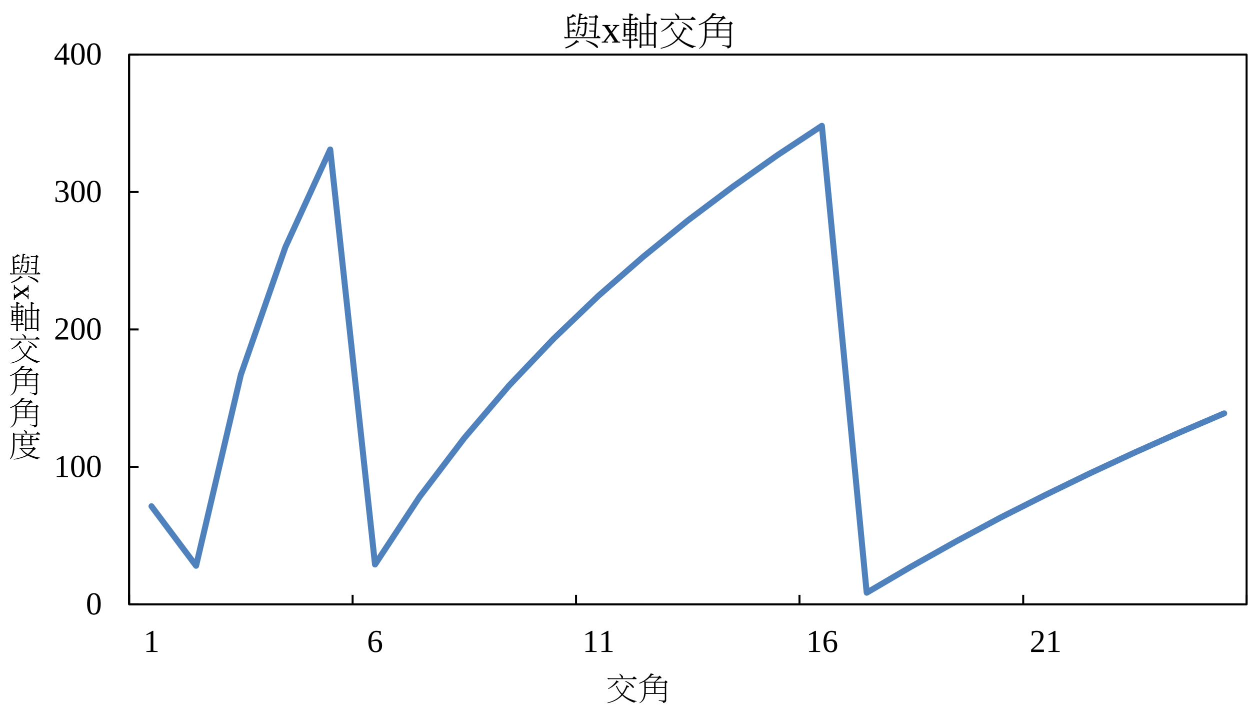


圖 12 第 K 點與 x 軸的角度折線圖

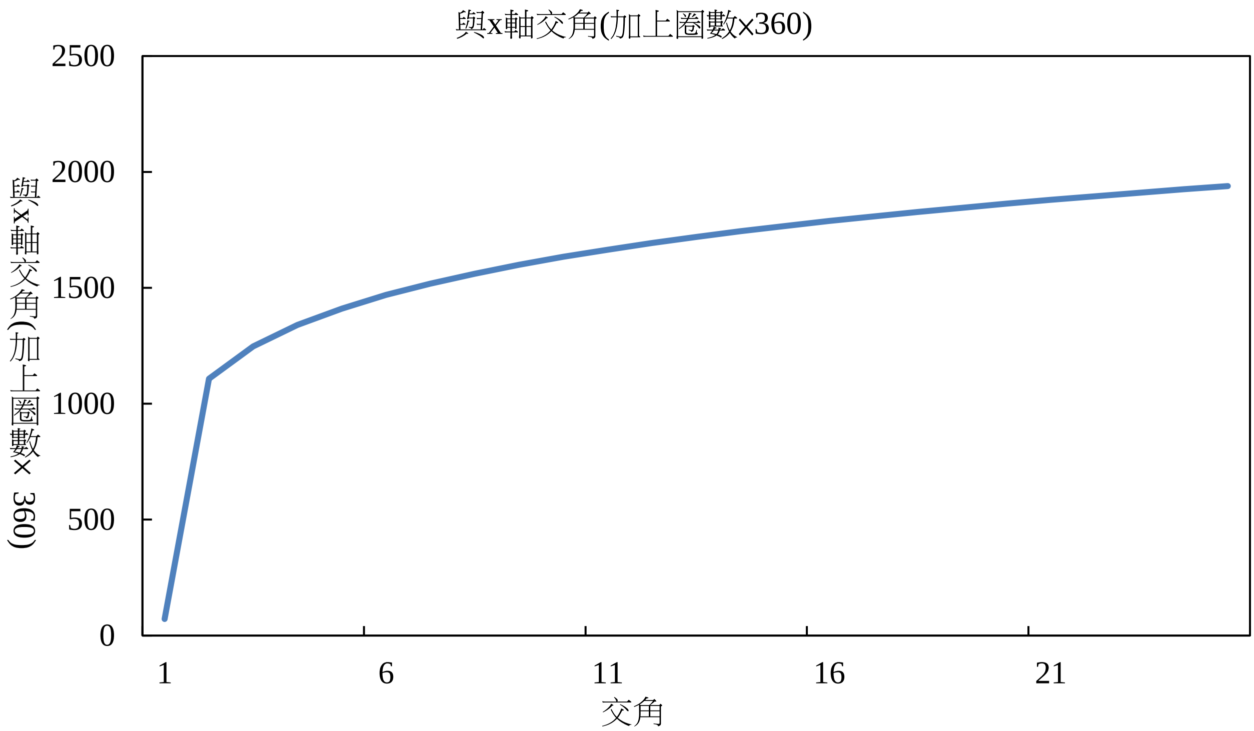


圖 13 第 K 點與 x 軸的角度折線圖(加上圈數×360)

取**圖 13** 第三點之後的趨勢線 $y= 326.94\ln(x) + 883.08$，由此趨勢線預測，第 26 交點與 x 軸交角為 148.2821，加上圈數×360 後為 1948.2821，實際與 x 軸交角為 152.4462，誤差率(以未加上圈數×360 計算)約為 2.67 %，說明可利用此圖表的規律性來預測下一個交點與 x 軸交角。

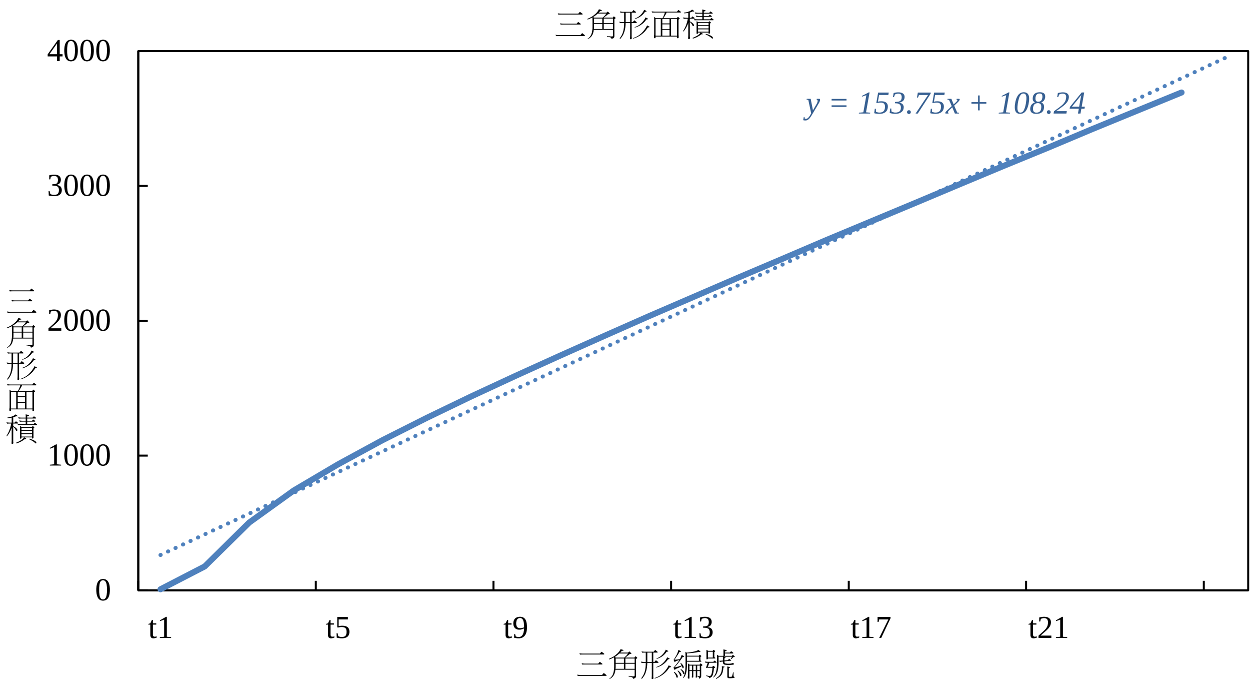


圖 14 三角形面積折線圖

取第三點以後的趨勢線 $y = 153.75x + 108.24$，由此趨勢線預測，但是去掉前三個三角形面積(因為影響趨勢線發展)，第 25 個三角形面積為 4024.92，實際面積為 3827.5282，誤差率約為 5.16 %，說明可利用此圖表的規律性來預測下一個三角形面積。

經過以上圖表趨勢，我們預測了後面數個交點數值，結果大致符合預期，所以可以預測後面交點的資訊，也可以藉由與 X 軸的交角和與原點距離求出交點座標。

實驗四 預測交點座標

(一)實驗步驟

1. 利用實驗三觀察之前 25 個交點形成的趨勢線，預測第 26 到第 37 點，分別與原點的距離，以及與 x 軸的交角。
2. 根據極座標轉換 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$，求交點座標值。此處的 r 指的是與原點距離，θ 角為與 x 軸的交角。
3. 將所預測之交點座標與實際交點座標做比較，並計算準確率。

註：所預測之數值皆逼近至小數點第四位。

(二)實驗結果：

表 22 實際和預測交點離原點的距離（r）及偏差率

交點編號	預測與原點距離	實際與原點距離	與原點距離差距	與原點距離 偏差率
p26	186.6718	184.8727	1.7991	0.97%
p27	193.4888	191.3819	2.1069	1.10%
p28	200.3058	197.884	2.4218	1.22%
p29	207.1228	204.3771	2.7457	1.34%
p30	213.9398	210.8645	3.0735	1.46%
p31	220.7568	217.3453	3.4115	1.57%
p32	227.5738	223.8199	3.7539	1.68%
p33	234.3908	230.2892	4.1016	1.78%
p34	241.2078	236.753	4.4548	1.88%
p35	248.0248	243.2121	4.8127	1.98%
p36	254.8418	249.6663	5.1755	2.07%
p37	261.4758	256.1157	5.3601	2.09%

表 23 實際和預測交點與 x 軸交角（θ）及偏差率

交點編號	預測與 x 軸交角	實際與 x 軸交角	與 x 軸交角差距	與 x 軸交角 偏差率
p26	148.2821	152.4462	4.1641	2.73%
p27	160.6209	165.3896	4.7687	2.88%
p28	172.511	177.8857	5.3747	3.02%
p29	183.9837	189.9636	5.9799	3.15%
p30	195.0675	201.6525	6.585	3.27%
p31	205.7878	212.9757	7.1879	3.37%
p32	216.1677	223.956	7.7883	3.48%
p33	226.2282	234.6144	8.3862	3.57%
p34	235.9883	244.9687	8.9804	3.67%
p35	245.4655	255.0371	9.5716	3.75%
p36	254.6757	264.834	10.1583	3.84%
p37	263.6335	274.3964	10.7629	3.92%

透過**表 22** 及**表 23**，預測第 26 到 37 點的與原點距離和與 x 軸交角，可以看到：就算是往後預測了 12 個交點，與原點距離的偏差率大多在 2 %以內，與 x 軸交角的誤差率則保持在 4 %以內，說明實驗三得出的趨勢線有一定準確性。

表 24 實際與預測座標比較

交點編號	預測 x 座標	預測 y 座標	實際 x 座標	實際 y 座標
p26	-158.7918	98.1404	-163.9039	85.5187
p27	-182.5265	64.2029	-185.1933	48.275
p28	-198.5972	26.107	-197.7493	7.3004
p29	-206.6224	-14.3894	-201.2946	-35.3619
p30	-206.5846	-55.6151	-195.9856	-77.8041
p31	-198.7719	-96.0376	-182.3313	-118.2972
p32	-183.7188	-134.3028	-161.122	-155.3546
p33	-162.1487	-169.2538	-133.3551	-187.7486
p34	-134.9225	-199.9428	-100.1731	-214.5165
p35	-102.9901	-225.631	-62.796	-234.9655
p36	-67.3501	-245.781	-22.4804	-248.6521
p37	-29.0148	-260.0451	19.5127	-255.3713

表 25 實際和預測交點的座標偏差率和差距

交點編號	x 座標差距	y 座標差距	x 座標偏差率	y 座標偏差率	實際與預測點差距
p26	5.1121	12.6217	3.12%	14.76%	13.6177
p27	2.6668	15.9279	1.44%	32.99%	16.1496
p28	0.8479	18.8066	0.43%	257.61%	18.8257
p29	5.3278	20.9725	2.65%	59.31%	21.6387
p30	10.599	22.189	5.41%	28.52%	24.5905
p31	16.4406	22.2596	9.02%	18.82%	27.6728
p32	22.5968	21.0518	14.02%	13.55%	30.8835
p33	28.7936	18.4948	21.59%	9.85%	34.2218
p34	34.7494	14.5737	34.69%	6.79%	37.6817
p35	40.1941	9.3345	64.01%	3.97%	41.2638
p36	44.8697	2.8711	199.59%	1.15%	44.9615
p37	48.5275	4.6738	248.70%	1.83%	48.7521

我們透過極座標轉換 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$，把**表 22** 和**表 23** 的數據轉換成**表 24** 的直角座標，並透過**表 25** 整理計算每個交點 x 座標與 y 座標的差距與偏差率：

$$\frac{\text{x 座標或 y 座標差距}}{\text{實際 x 座標或 y 座標}} \times 100\ \%$$

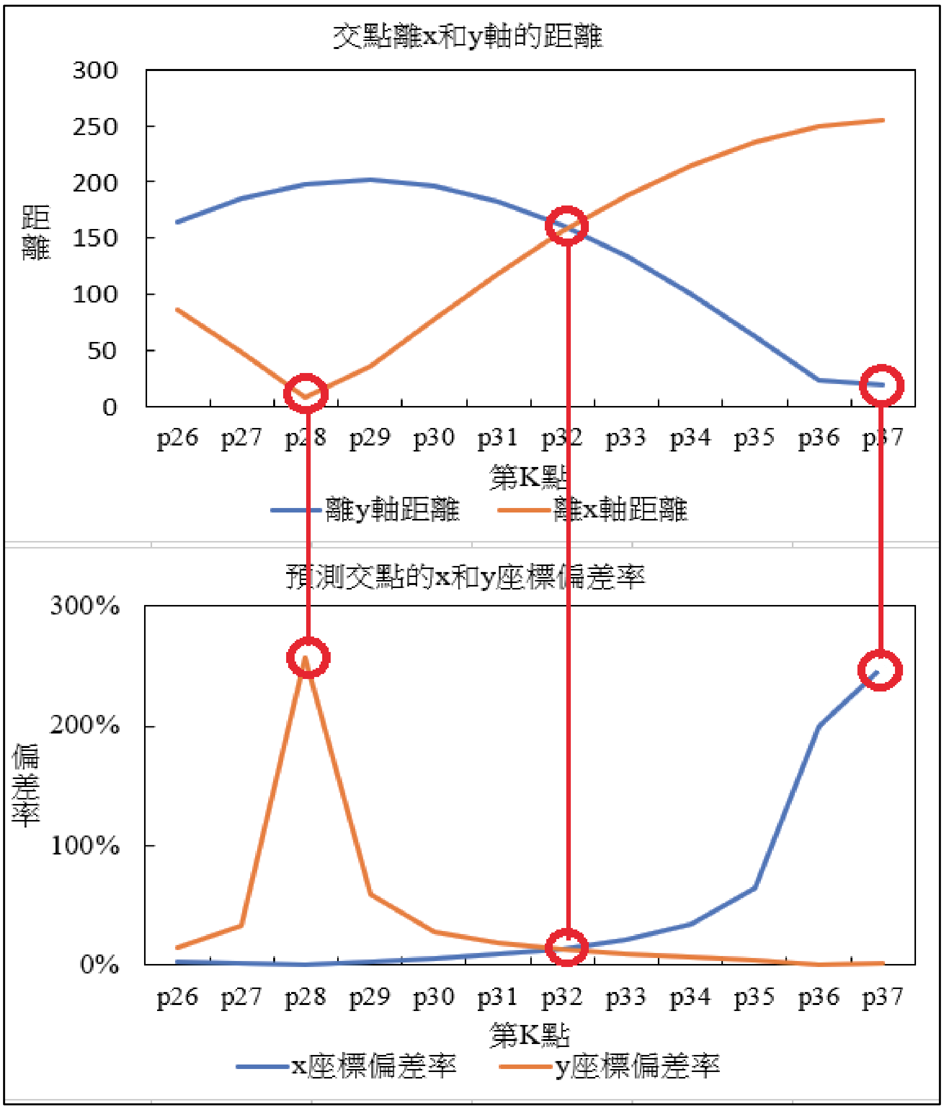


圖 15 偏差率與兩軸距離比較圖

觀察**圖 15** 發現，在 y 座標偏差率最高的時候，離 x 軸的距離是最短的，同時 x 座標偏差率最低；在 x 座標偏差率最高時，離 y 軸的距離是最短的，同時 y 座標偏差率最低。而當離 x 軸和離 y 軸的距離大致相等時，兩邊的偏差率幾乎相等且偏低。

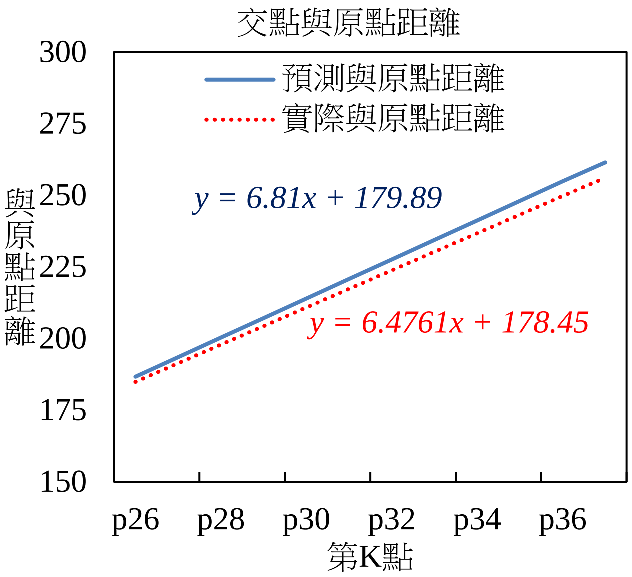


圖 16 預測和實際交點與原點距離折線圖

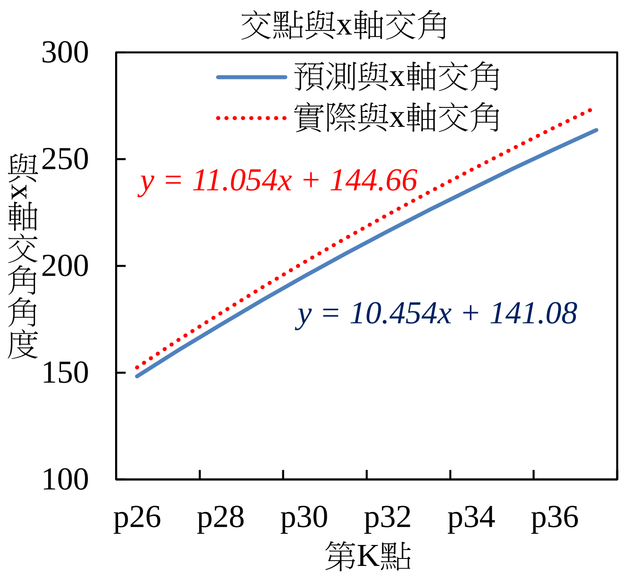


圖 17 預測和實際交點與 x 軸交角折線圖

從**圖 16** 和**圖 17** 中可以發現：從方程式來看，相同折線圖中的兩斜率與截距相似程度高，而預測與原點距離會略微大於實際與原點距離；預測與 x 軸交角則略微小於實際與 x 軸交角。

(三)實驗結果分析

從圖表中可得知，當交點離 x 軸的距離越近，預測的 y 座標偏差率越高，x 座標偏差率越低；反之，當交點離 y 軸的距離越近，預測的 x 座標偏差率越高，y 座標偏差率越低；而當 x 座標(離 y 軸的距離)與 y 座標(離 x 軸的距離)大約相同時，x 和 y 座標的偏差率較低且數據相近。可能的原因是：在接近座標軸時，三角函數的數值需要計算到更精確，而我們的長度、角度僅取至小數點後第四位，造成較大的偏差。趨勢線較不接近實際數據也是主因之一，可以在表中發現，預測點與實際點的趨勢仍有些許偏差，推測是因為只採用前 25 個交點形成的趨勢線來預測，若取用前 50 個或更多交點的趨勢線，準確率會更高。

肆、結論

根據所做的實驗，做以下的結論：

(一) 在實驗一「黃金螺線不同圈數與阿基米德螺線交點數的影響」發現，黃金螺線 4~6 圈與阿基米德螺線交點數呈現出穩定趨勢，四個象限的總和都有高度相關，這強調了這一觀察的可靠性。考慮到這種穩定性，我們合理推測模型應該在第七圈也具有相似的趨勢。基於我們對前六圈的觀察和相關分析，進一步的模型推斷將為我們提供對第七圈的交點數的預測，發現如下**表 26**：

表 26 實驗一不同象限的趨勢線和誤差率

圈數		第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	四象限和	趨勢總和
4~6圈	交點數趨勢方程	$Y_1 = 0.0116x^{3.6873}$	$Y_2 = 0.0004x^{5.6511}$	$Y_3 = 0.0002x^{6.1316}$	$Y_4 = 9E\text{-}05x^{6.7725}$	$Y = 0.0023x^{5.5147}$	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$
第7圈	預測交點誤差率	*13.64 %*	*17.86 %*	*17.65 %*	*6.67 %*	*10.85 %*	*0.00 %*

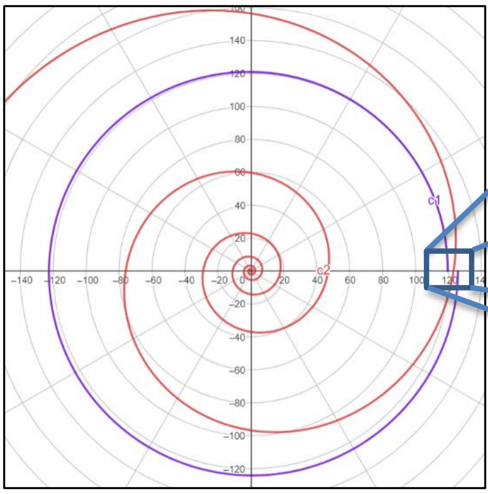
實驗一第二部分我們利用結果推導出預測交點數的公式：

黃金螺線(n + t)圈時的交點數(t 為黃金螺線增加圈數且為正整數) =

黃金螺線 n 圈時的交點數 + 黃金螺線(n + t)圈時阿基米德螺線的圈數 –

黃金螺線 n 圈時阿基米德螺線的圈數 – t

其中 n、t 皆為正整數。當黃金螺線旋繞至第 n 圈，且起點和終點的間距大於阿基米德螺線每圈的間距時，從黃金螺線第 n + 1 圈起，阿基米德螺線與黃金螺線除了特定情況外皆擁有一個交點。也就是當黃金螺線交於極座標 0 度，且阿基米德螺線該圈的起點和終點分別在黃金螺線交於極座標 0 度點的左右兩側時，則此圈就不會有交點(如下**圖 18 、圖 19)**



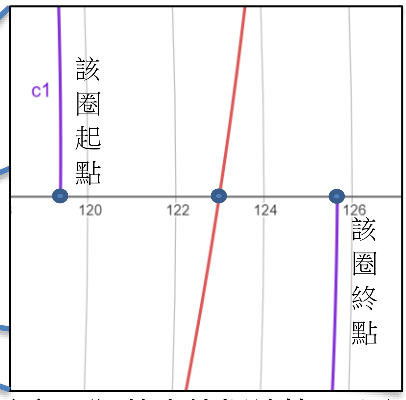


圖 19 阿基米德螺線第 20 圈與黃金螺線放大圖
(來源：第二作者使用 GGB 程式製作)

圖 18 阿基米德螺線第 20 圈與黃金螺線
(來源：第二作者使用 GGB 程式製作)

(二) 從 a 值的分析進行交點數的討論來看，黃金螺線 a_{gold} 值越大時，總交點數愈多；但阿基米德螺線 a_{Ar} 值越大，總交點數愈少，因此黃金螺線 a_{gold} 值比阿基米德螺線 a_{Ar} 值的比值越大時，總交點數愈多。另外在預測黃金螺線 a_{gold} 值為 7 與阿基米德螺線 a_{Ar} 值為 1~3 的交點個數時，同樣在比值越大的情況下，透過公式預測趨勢線所得到的交點數，雖無法精準預測，但是誤差率低（在 5 %以內）。而當利用比值的方式將黃金螺線 a_{gold} 值為 7 與阿基米德螺線 a_{Ar} 值為 2~3 代入阿基米德螺線 a_{Ar} 值為 1 的公式時，誤差率卻降低。原先認為當趨勢線上的兩 a 值比值的差距愈低，數據分布會愈密集而愈準確，實際卻相反，阿基米德螺線 a_{Ar} 值為 1 的公式的比值差在三條趨勢線中最大，數據較廣，誤差率更低（在 3 %以內）。發現如下**表 27**：

表 27 實驗二不同 a 值的趨勢線和誤差率

a 值		阿基米德 a_{Ar}=1	阿基米德 a_{Ar}=2	阿基米德 a_{Ar}=3
黃金 a_{gold}=1~6	交點數趨勢方程	$y = 19.371x - 3.8$	$y = 9.0286x - 1.2667$	$y = 5.8x + 0.2$
黃金 a_{gold}=7	預測交點誤差率(原公式)	0.00 %	3.17 %	4.76 %
	預測交點誤差率 (以 $y = 19.371x - 3.8$ 代入)	0.00 %	0.00 %	2.38 %

(三) 在與第 K 點原點距離、第 K 點與第 K+1 點的距離、第 K 點與 X 軸的夾角(逆時針)、三角形面積的觀察中，從第三筆數據開始便出現明顯的趨勢線，因此透過前 25 個數據形成的趨勢線來預測第 26 個或以後的螺線交點基本性質數據時，顯示出高度的準確性，誤差率偏低，在 5 %上下。我們推測是因為交點座標是兩條螺線在相同角度和距離條件下剛好交會，所以兩條螺線的方程式固定，螺線基本性質就會有規律性，所以兩條螺線在相同條件下也會有規律的交點產生。而三角形面積是兩個規律的交點與原點所圍成，自然就產生相同的規律性。接下來我們由預測的交點利用原點距離、與原點交角，配合三角函數直接預測下一個交點座標，這將是實驗四研究的方向。

表 28 實驗三趨勢線整理與誤差率

趨勢線項目	趨勢線方程式	R^2 值
與原點距離	$y = 6.817x + 9.4298$	*0.9994*
與 K+1 點距離	$y = 0.0095x^2 - 0.4286x + 47.973$	*0.9938*
與 x 軸交角 (加上圈數×360)	$y = 326.94\ln(x) + 883.08$	*0.9999*
三角形面積	$y = 147.07x + 220.87$	*0.9972*

實驗三的趨勢線 R^2 值都大於 0.99，最低為 0.9938，最高則是 0.9999，表示我們的趨勢線貼近前面的觀察數據。四條趨勢線中，與原點距離、三角形面積都屬於線性趨勢線，與 K+1 點距離屬於二次多項式趨勢線，與 x 軸交角屬於對數趨勢線。

(四) 在預測交點的實驗中，趨勢線所預測的交點在靠近其中一軸時，另一軸座標的誤差率就會顯著提升，誤差極大。如第 28 點是最靠近 x 軸的交點，其 y 座標的預測數值是 26.1070，實際 y 座標為 7.3004，誤差率達到 257.61 %。同時，預測交點在與兩軸距離大約相同時，誤差率都較低，且數值相近。在第 32 點，預測 x 座標與預測 y 座標相近，x 座標誤差率為 14.02 %，y 座標誤差率為 13.55 %。我們也觀察到預測點與實際點的距離逐漸增加，可以嘗試加入更多交點數據來修正趨勢線，達到減少誤差的目的。總體來說，我們成功利用實驗三結果的趨勢線預測第 26 點以後的交點座標，說明只要能降低誤差，就可以預測任何想預測的交點。

(五) 實驗中的趨勢線模式所利用的方式與理由如下表呈現：

表 29 實驗趨勢線選擇模式與理由

實驗別	數據	趨勢線模式	理由
實驗一	象限交點數	乘冪	實驗數據為一條曲線，由平緩往上遞增，數值也以特定比率增加。
	象限預測交點數總和		
實驗二	兩螺線的擴大倍率比值	線性	趨勢為斜直線。
實驗三	交點與原點距離		
	交點形成的三角形面積		
	交點與下一點距離	二次多項式	數據的趨勢線為一條曲線，其圖形類似拋物線。
	與 x 軸交角 (加上圈數×360)	對數	數據為一條快速遞減的曲線，貼合其關於極坐標系統的應用。

伍、參考資料

1. 溫堉佑（2019）。「金」螺想窈窕，「多」切要合度。桃園市。
2. 李維歐（2005）。黃金比例（初版）（邱宏義譯）。 臺北市：遠流出版社 （原著出版年：2002 年）。
3. 蘇惠玉（2018）。追本數源──你不知道的數學祕密（初版）。臺北市：三民書局。
4. 白啟光（2002）。 費氏數列及黃金切割 • 取自「數學嘉年華」：https://ftt.tw/mUuJG、https://ftt.tw/Umzku
5. 王聖文（1994）。 有趣的對數螺線。中華民國第三十四屆中小學科學展覽會。
6. 趙文敏（2002）。等角螺線及其他。取自「數學知識」：https://ftt.tw/scvTU、https://ftt.tw/mGABz
7. 許浩鳴（2014）。空間螺線的代數分析 。 中華民國第五十四屆中小學科學展覽會。

【評語】030410

（1）本作品主要是透過數學軟體 GeoGebra 來探討不同係數對黃金螺線與阿基米德螺線交點數的影響，並探索係數變化對交點數的預測模型。

（2）此作品利用數學軟體作為實驗，探究螺線的相關性質，若能再利用數學推導來進一步證明所實驗到的成果則研究上會更充實與完備。

作品簡報

螺線雙重奏

-黃金螺線與阿基米德螺線的交點關係

摘要

本實驗研究螺線圈數、擴大倍率對黃金螺線與阿基米德螺線交點數的影響，並預測交點座標。研究發現：

1. 透過趨勢線預測圈數變化時的交點數，分別使用第一至第四象限預測，發現四個象限各別形成的趨勢線預測值總和會有較高的準確率。另外，我們也利用兩螺線圈數來推導出預測交點數的公式。
2. 透過趨勢線預測兩螺線比例變化時的交點數，當黃金螺線和阿基米德螺線擴大倍率的比值越大，交點數越多。
3. 前25個交點距離、夾角及圍成三角形面積形成的趨勢線，以預測第26個交點後的數據，誤差率在 5.16 %以內。
4. 預測交點座標第26點以後，發現預測越接近x軸的交點，y座標偏差率越高，x座標偏差率越低，反之亦然。

名詞定義與預備定理

表1 螺線參數介紹表

黃金螺線又稱等角螺線，依照黃金比例$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq$ 1.6183398 ...，形成的黃金矩形擴張後， 將頂點依序連起來所生成的螺線。 其極座標公式為 $r = l \cdot e^{\wedge}k\theta$，其中$r$為與原點的距離，$k = ln(\varphi)/\pi$，$l$ 為螺線擴大倍率。 黃金螺線在GGB的寫法為$C1 = Curve((a_{gold} b^{\wedge}\frac{\theta}{2\pi};\theta),\theta,0,n\ 2\ \pi)$ 參數1：a_{gold} = 起始點 參數2：b　= 半徑增加的倍率 參數3：n　= 螺線圈數 參數4：θ　= 正負值控制螺線的旋轉方向	阿基米德螺線又稱等速螺線，其極座標公式為 $r = a_{Ar}\ \theta$，阿基米德螺線在GGB的寫法： $C2 = Curve((a_{Ar}\ \theta;\theta),\theta,0,n\ 2\ \pi)$ 參數1：a_{Ar} = 螺線比例大小 參數2：n　= 螺線圈數 參數3：θ　= 正負值控制螺線的旋轉方向

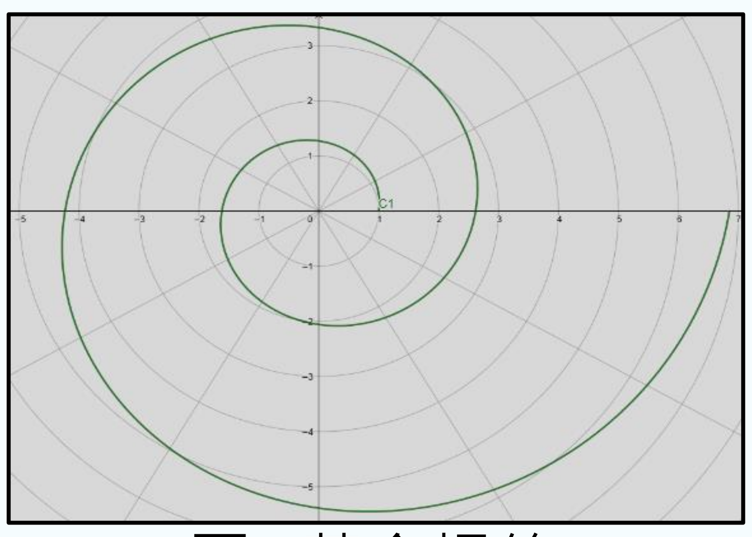


圖1 黃金螺線

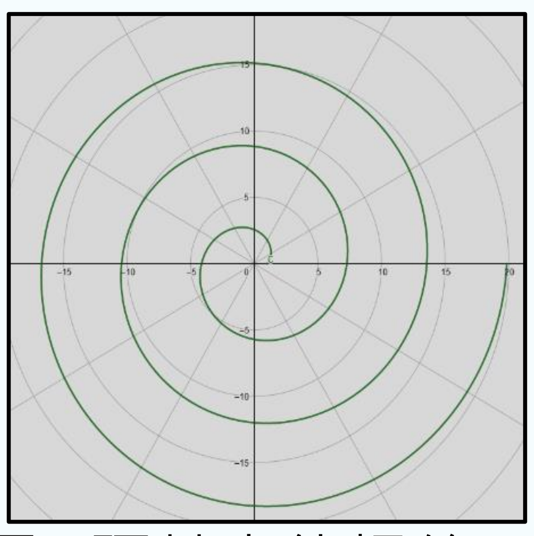


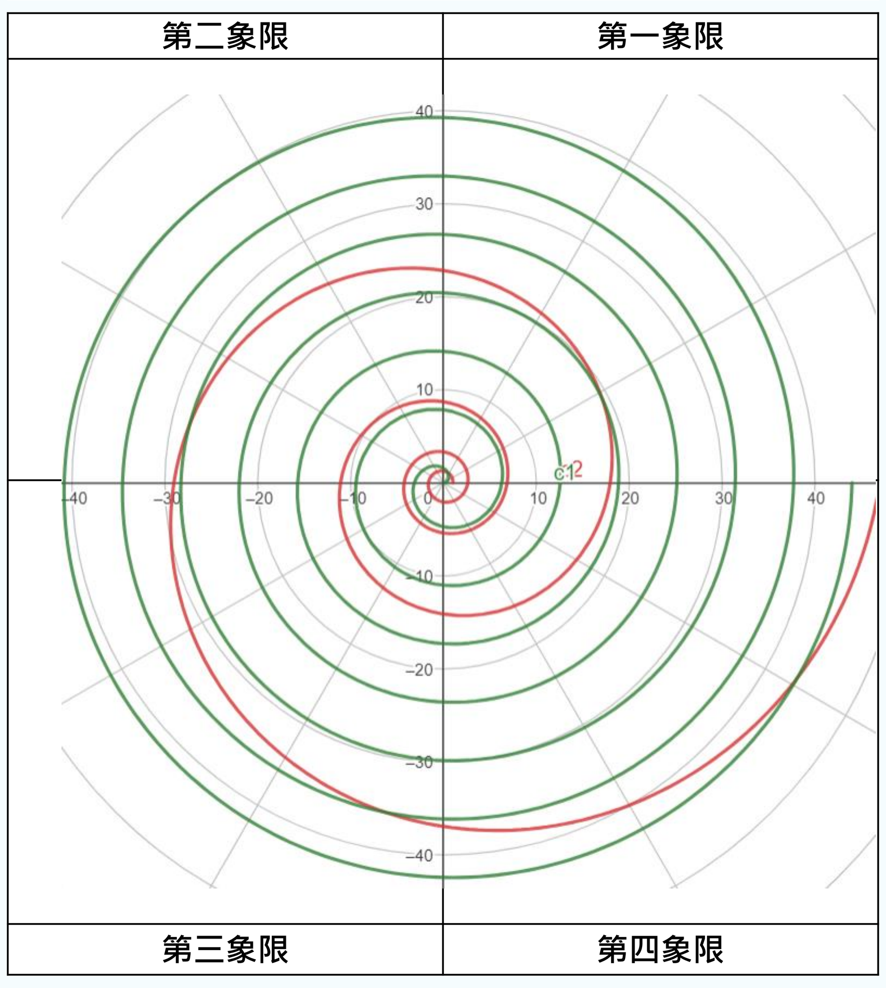
圖2 阿基米德螺線

研究結果

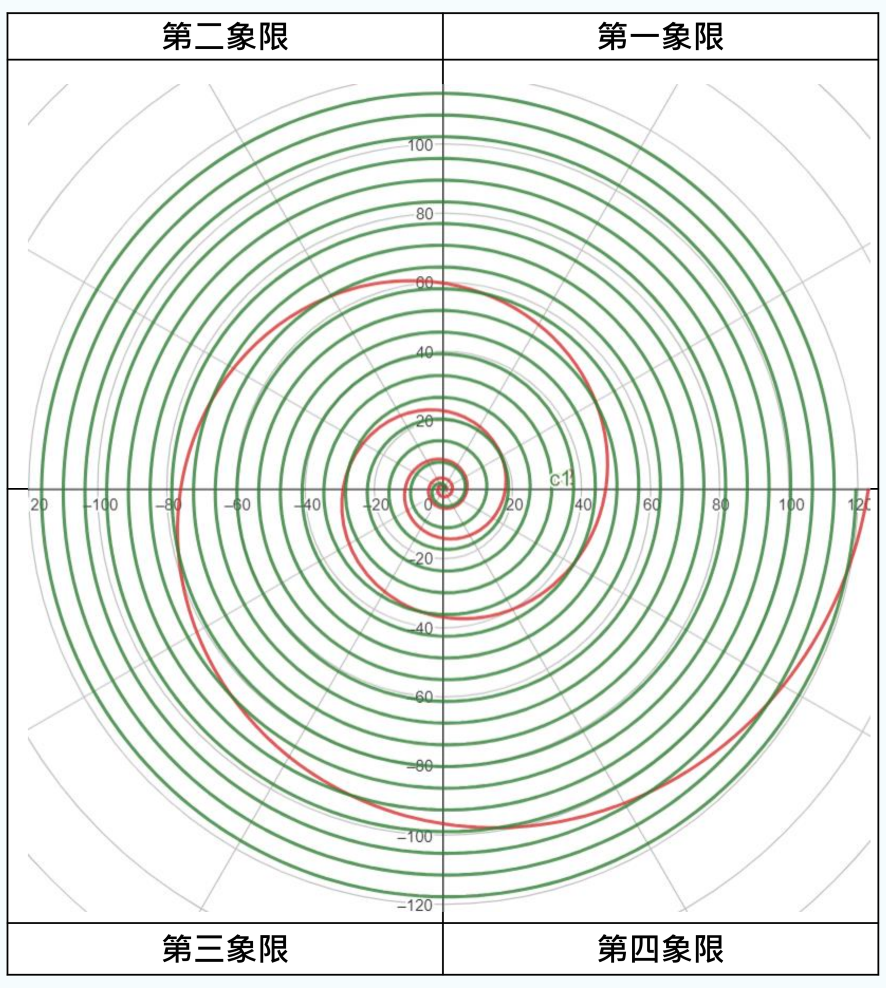
實驗一　不同圈數對交點個數的影響

表2 阿基米德螺線、黃金螺旋固定a值下改變 n 值的交點狀態

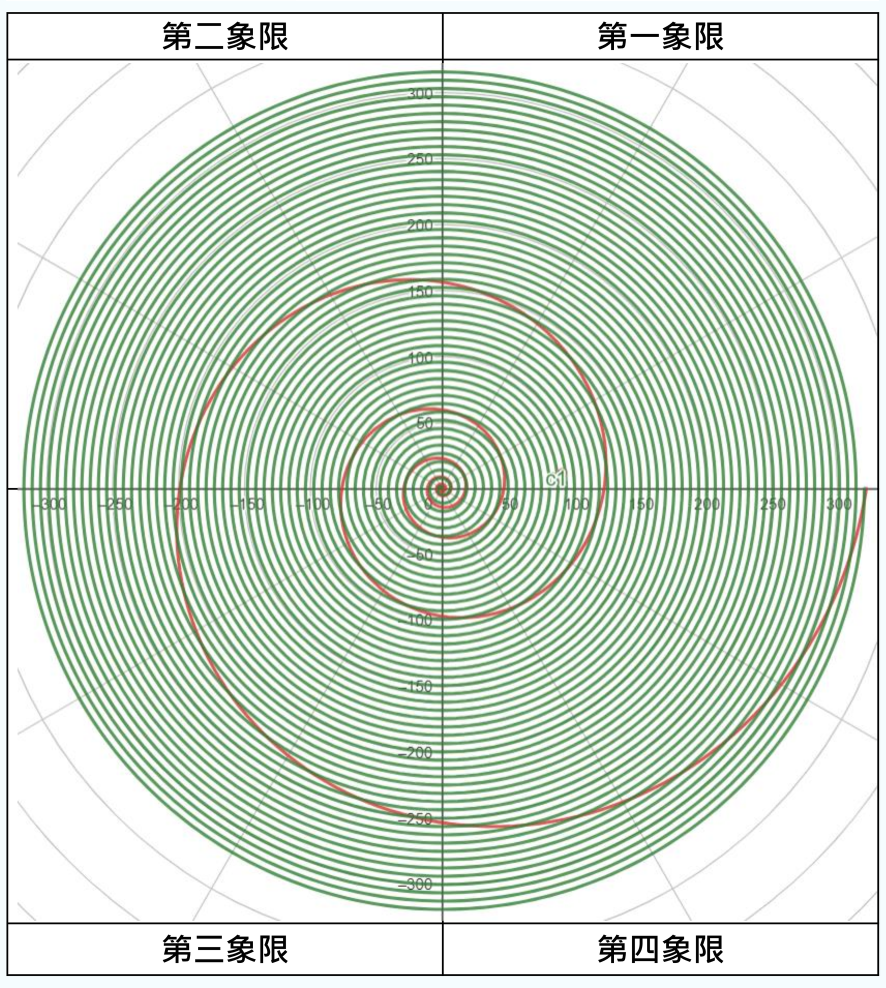
參數	阿基米德螺線	黃金螺線
a值	1	1
n值	7	4



參數	阿基米德螺線	黃金螺線
a值	1	1
n值	19	5



參數	阿基米德螺線	黃金螺線
a值	1	1
n值	51	6



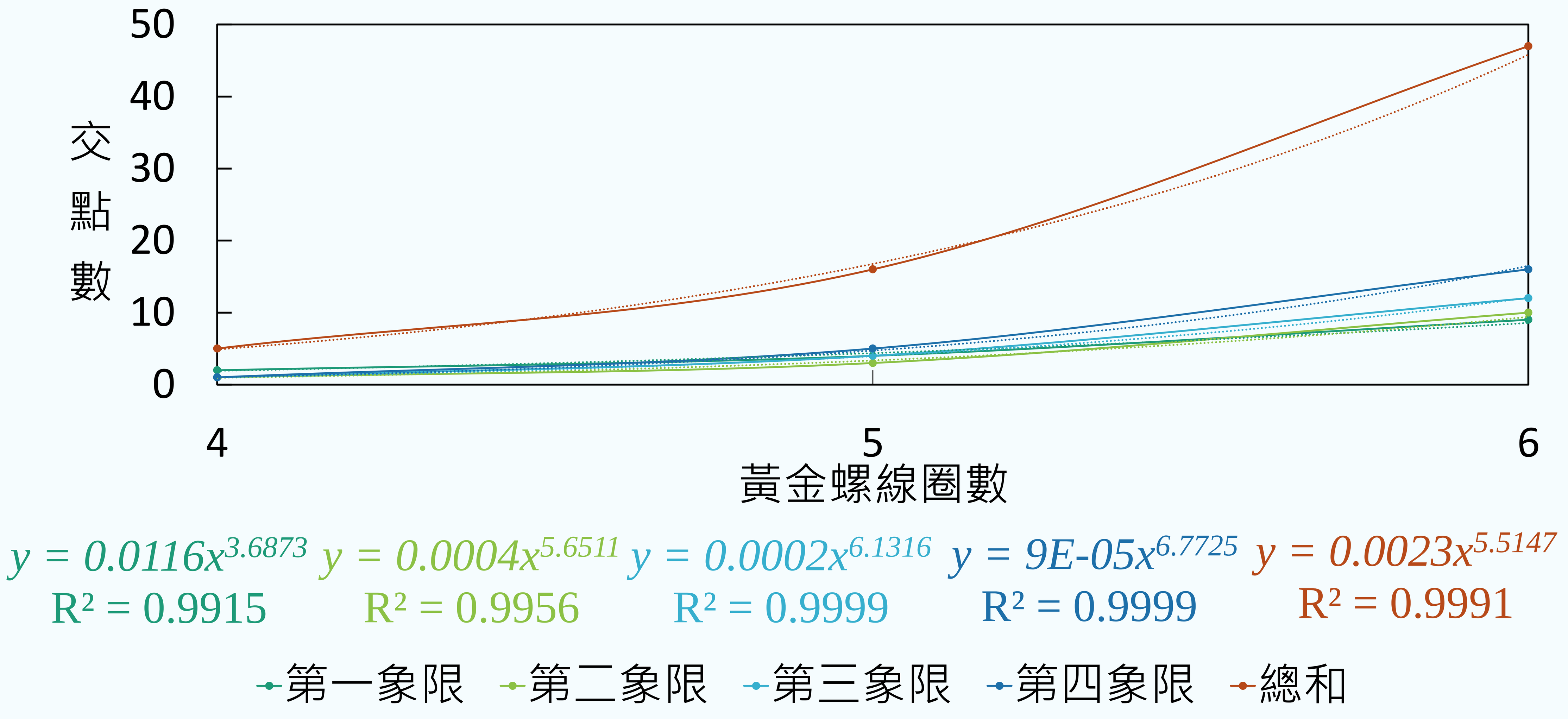


圖3 實驗一黃金螺線交點數折線圖

我們已經計算了黃金螺線分別為4至6圈與阿基米德螺線的交點數，並且透過這三種圈數所產生的趨勢線預測了黃金螺線7圈與阿基米德螺線的交點數。我們發現，使用一至四象限預測相加的總交點較利用總和趨勢線計算的總交點數誤差較小。

螺線圈數預測交點數

表3 實驗一交點數與阿基米德螺線圈數增加量

	黃金螺線圈數	
	4～5	**5～6**
交點數增加量	11	31
阿基米德螺線圈數增加量	12	32

從實驗結果可得

黃金螺線 (n＋1) 圈 (n為正整數)時的交點數 ＝ 黃金螺線n圈時的交點數＋
黃金螺線 (n＋1) 圈時阿基米德螺線的圈數 – 黃金螺線n圈時阿基米德螺線的圈數 – 1

若黃金螺線第 n 圈 (n 為正整數)起點和終點的間隔大於阿基米德螺線每圈的間距，

黃金螺線 (n＋t) 圈時的交點數(t為黃金螺線增加圈數且為正整數) ＝
黃金螺線 n 圈時的交點數＋黃金螺線 (n＋t) 圈時阿基米德螺線的圈數 –
黃金螺線 n 圈時阿基米德螺線的圈數 – t

研究結果

實驗二 a值(比例)大小對交點個數的影響

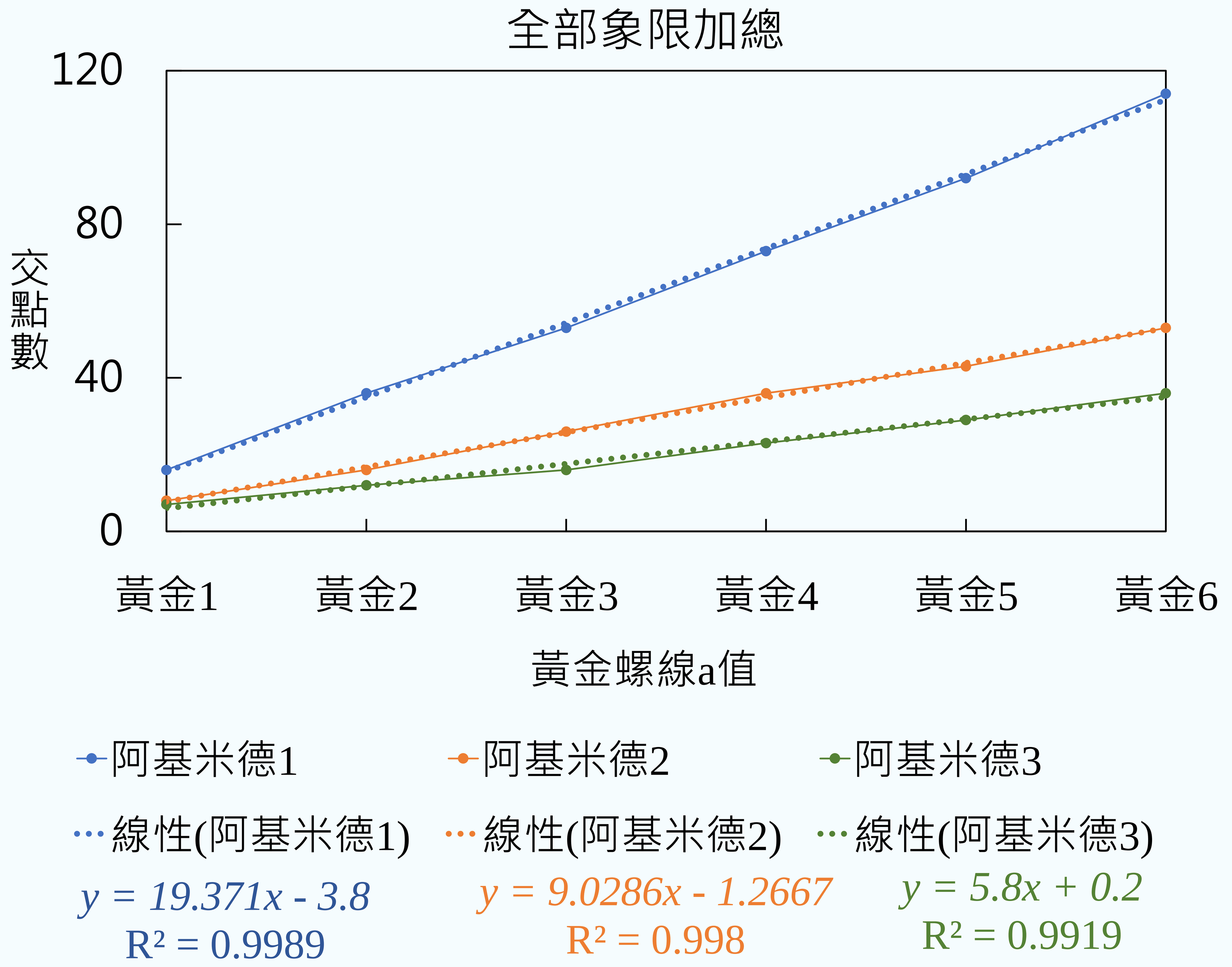


圖4 全部象限加總的不同 a 值交點數折線圖

表4 黃金螺線 a=7，阿基米德螺線 a=1，公式 $y = 19.371x - 3.8$

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	全(公式計算)	全(預測相加)
實際	23	27	35	47	132	132
預測	20	29	35	46	132	130
誤差率	13.04 %	7.41 %	0.00 %	2.13 %	0.00 %	1.52 %

表5 黃金螺線 a=7，阿基米德螺線 a=2，公式 $y = 9.0286x - 1.2667$

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	全(公式計算)	全(預測相加)
實際	11	12	19	21	63	63
預測	9	12	16	23	61	60
誤差率	18.18 %	0.00 %	15.79 %	9.52 %	3.17 %	4.76 %

表6 黃金螺線 a=7，阿基米德螺線 a=3，公式 $y = 5.8x + 0.2$

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	全(公式計算)	全(預測相加)
實際	7	10	11	14	42	42
預測	6	8	11	14	40	39
誤差率	14.29 %	20.00 %	0.00 %	0.00 %	4.76 %	7.14 %

表7 黃金螺線 a=7，阿基米德螺線 a=1~3，公式 $y = 19.371x - 3.8$

阿基米德螺線 a值	1	2	3
實際	132	63	42
原預測(公式)	132	61	40
新預測		63	41
原誤差率(公式)	0.00 %	3.17 %	4.76 %
新誤差率		0.00 %	2.38 %

我們計算了黃金螺線 a=1~6與阿基米德螺線 a=1~3的交點數，當黃金螺線 a值越大，總交點數愈多；當阿基米德螺線a值越大，總交點數愈少，可推論出當黃金螺線a值比阿基米德螺線a值的比值越大，總交點數愈多。利用公式預測了黃金螺線a=7與阿基米德螺線 a=1~3的交點數，發現比值愈大與利用公式計算的總交點數，其誤差率愈小，可控制於5 %內。而若使用阿基米德公式一「$y = 19.371x - 3.8$」，令阿基米德螺線 a=1，黃金螺線 a=比值，其總交點數的預測誤差率會更小，可控制於3 %內。

實驗三 交點基本性質觀察

(交點連線長度、角度以及構成之三角形面積)

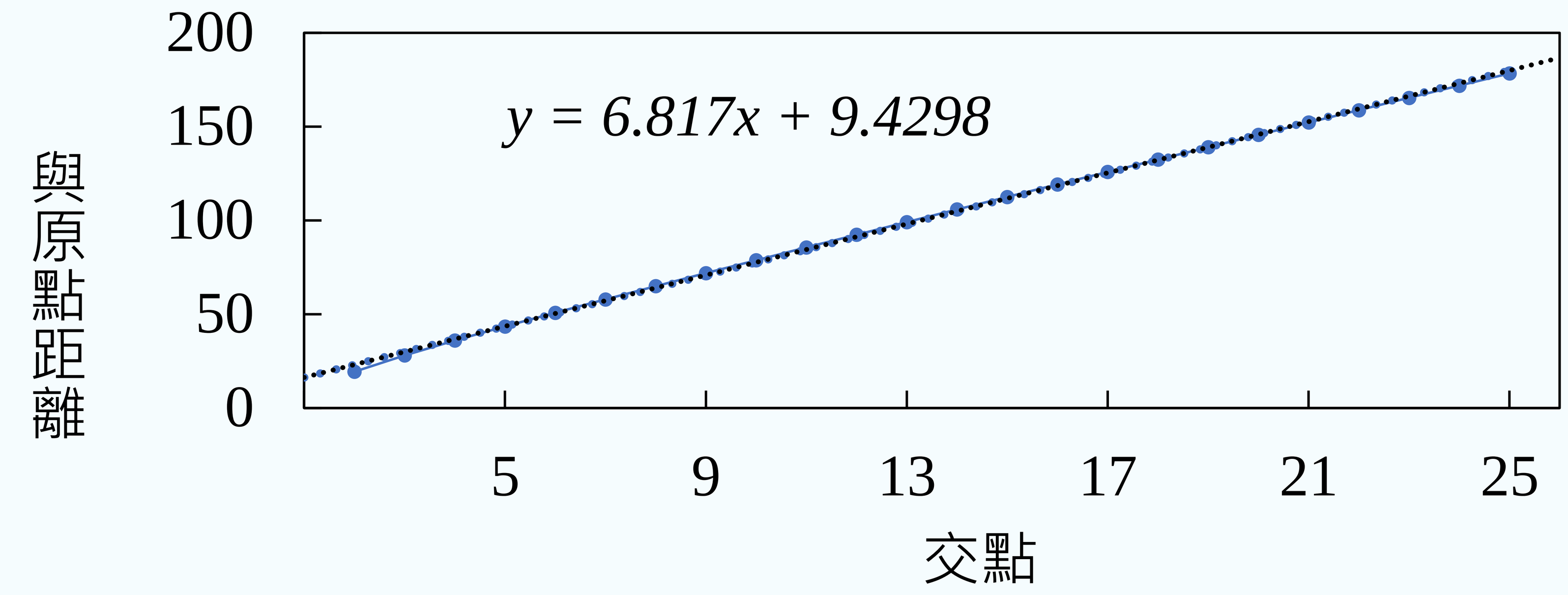


圖5 第 K 點與原點的距離折線圖

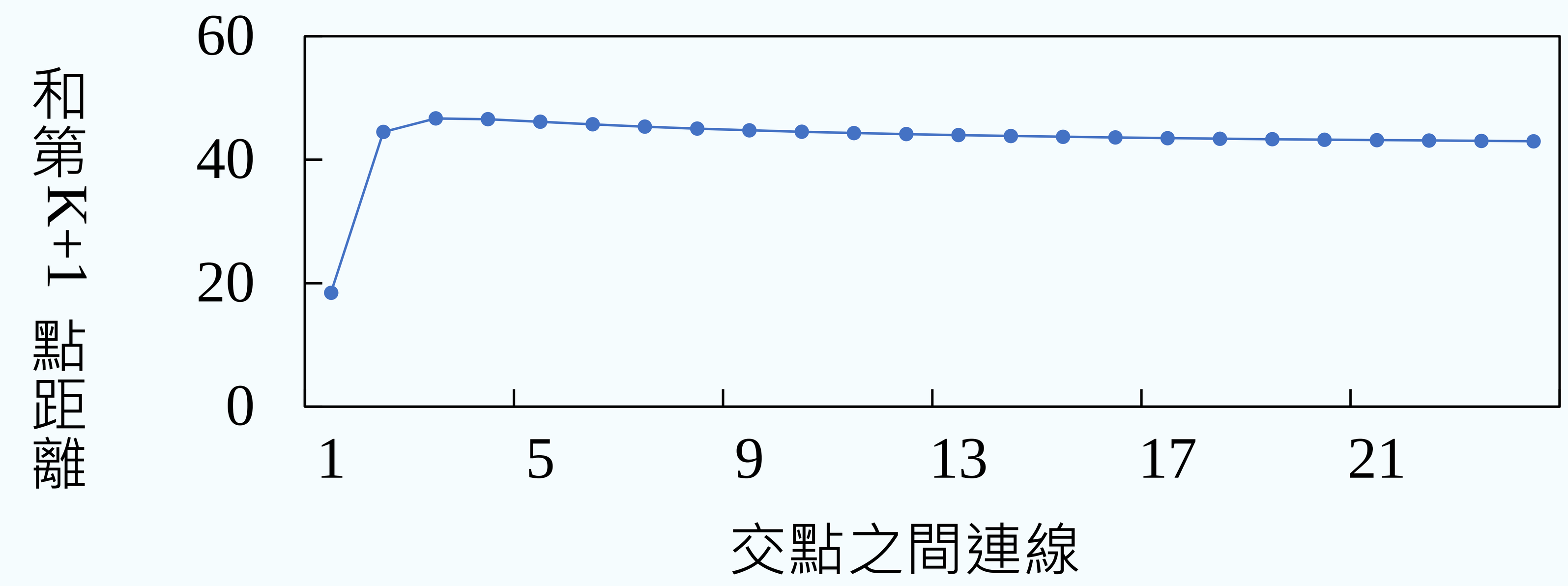


圖6 第 K 點與第 K+1 點的距離折線圖

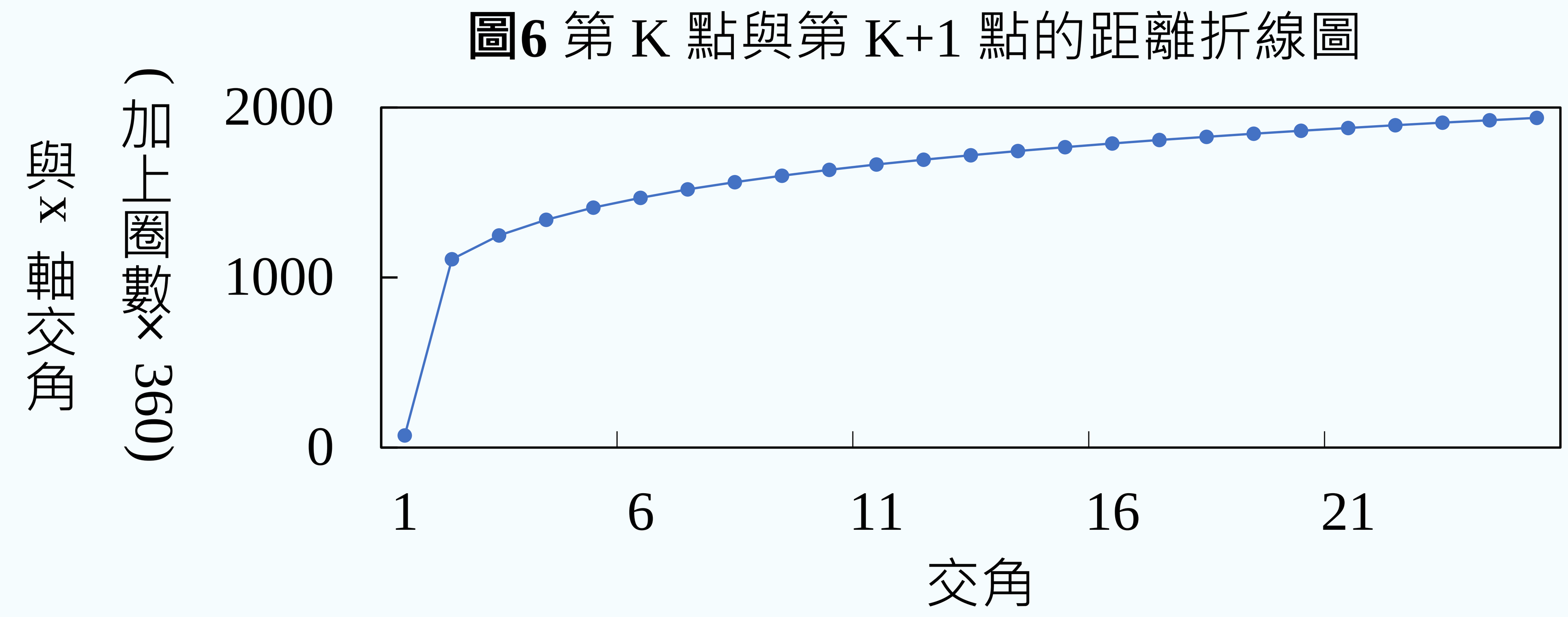


圖7 第 K 點與 x 軸的角度折線圖(加上圈數×360)

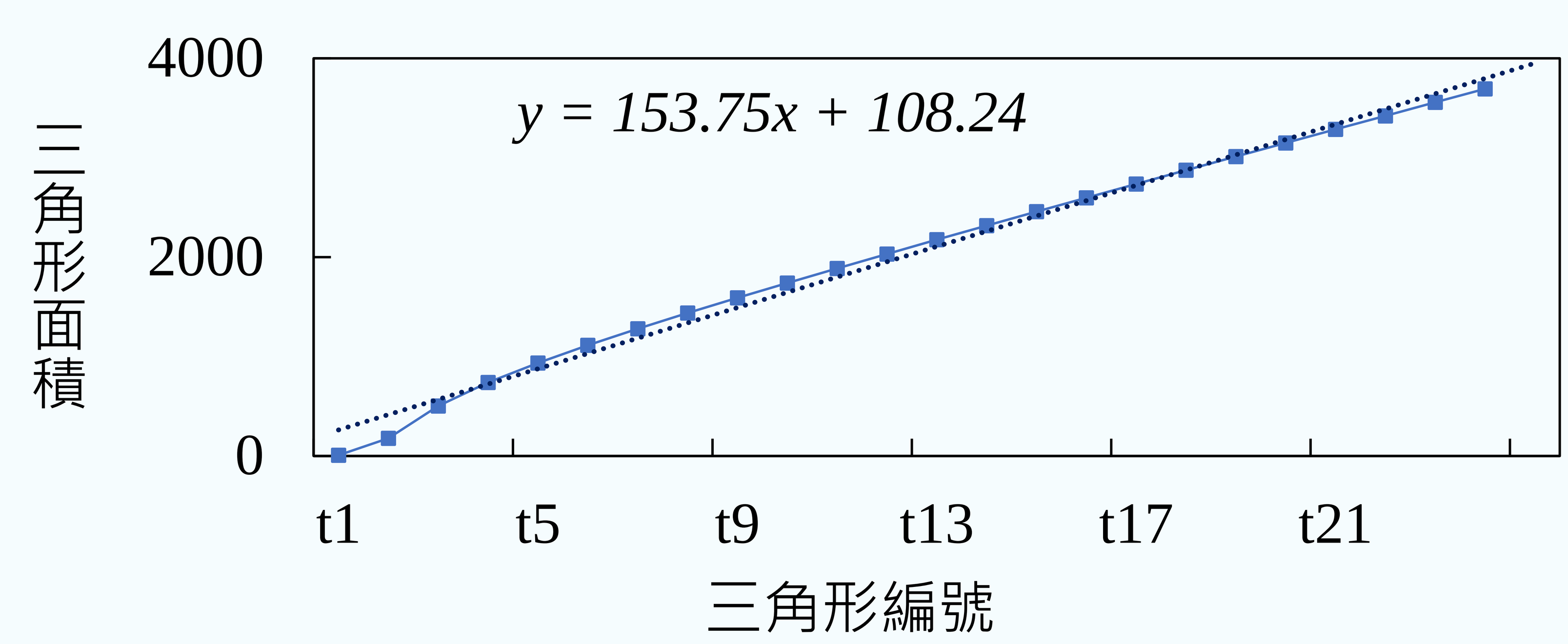


圖8 三角形面積折線圖

經過以上圖表趨勢，我們預測了後面數個交點數值，發現結果大致符合預期，所以可以預測後面交點的資訊，也可以藉由與x軸的交角和與原點距離求出交點座標。

實驗四 預測交點座標

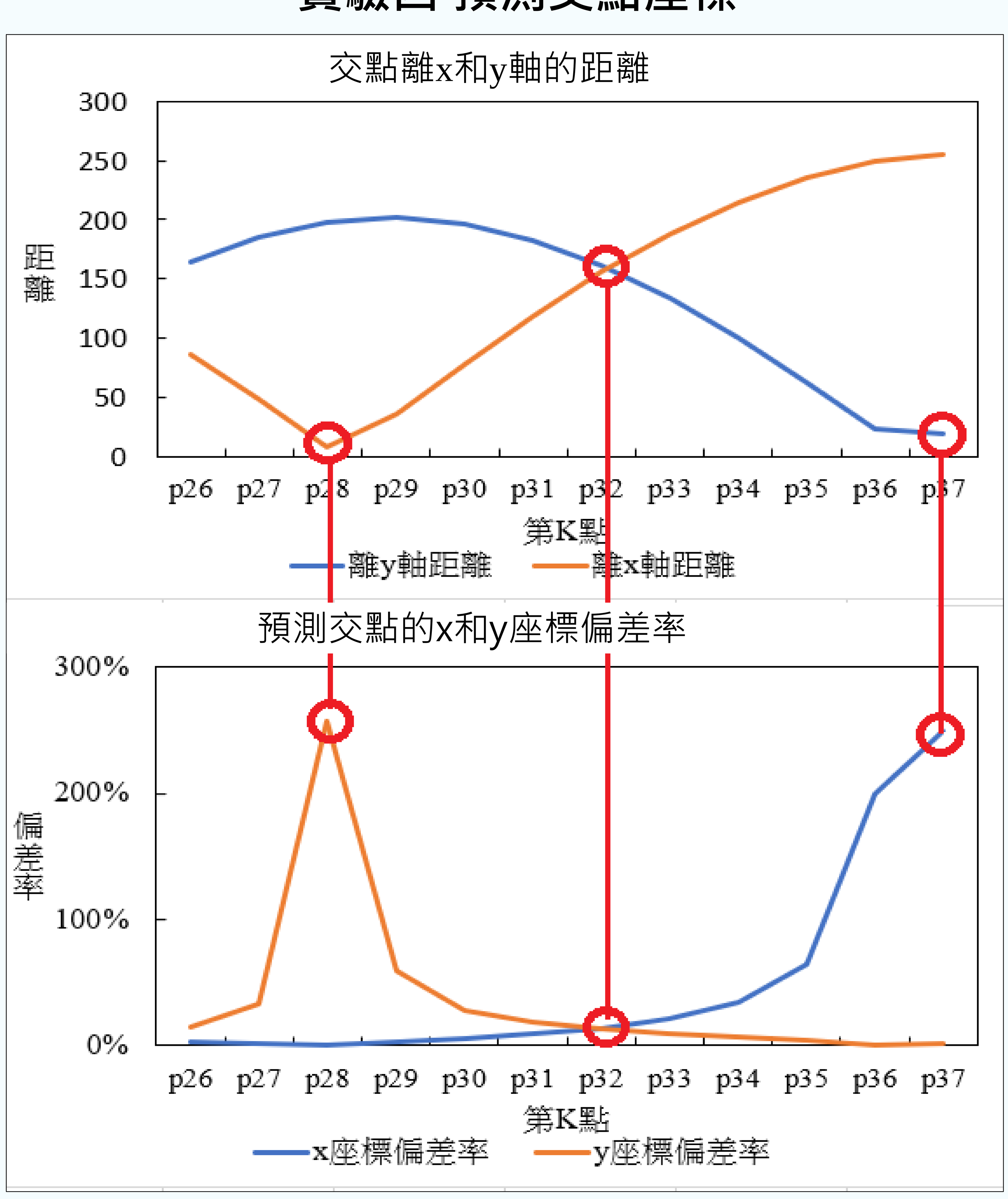


圖9 兩軸距離與偏差率比較圖

研究結果

實驗四 預測交點座標

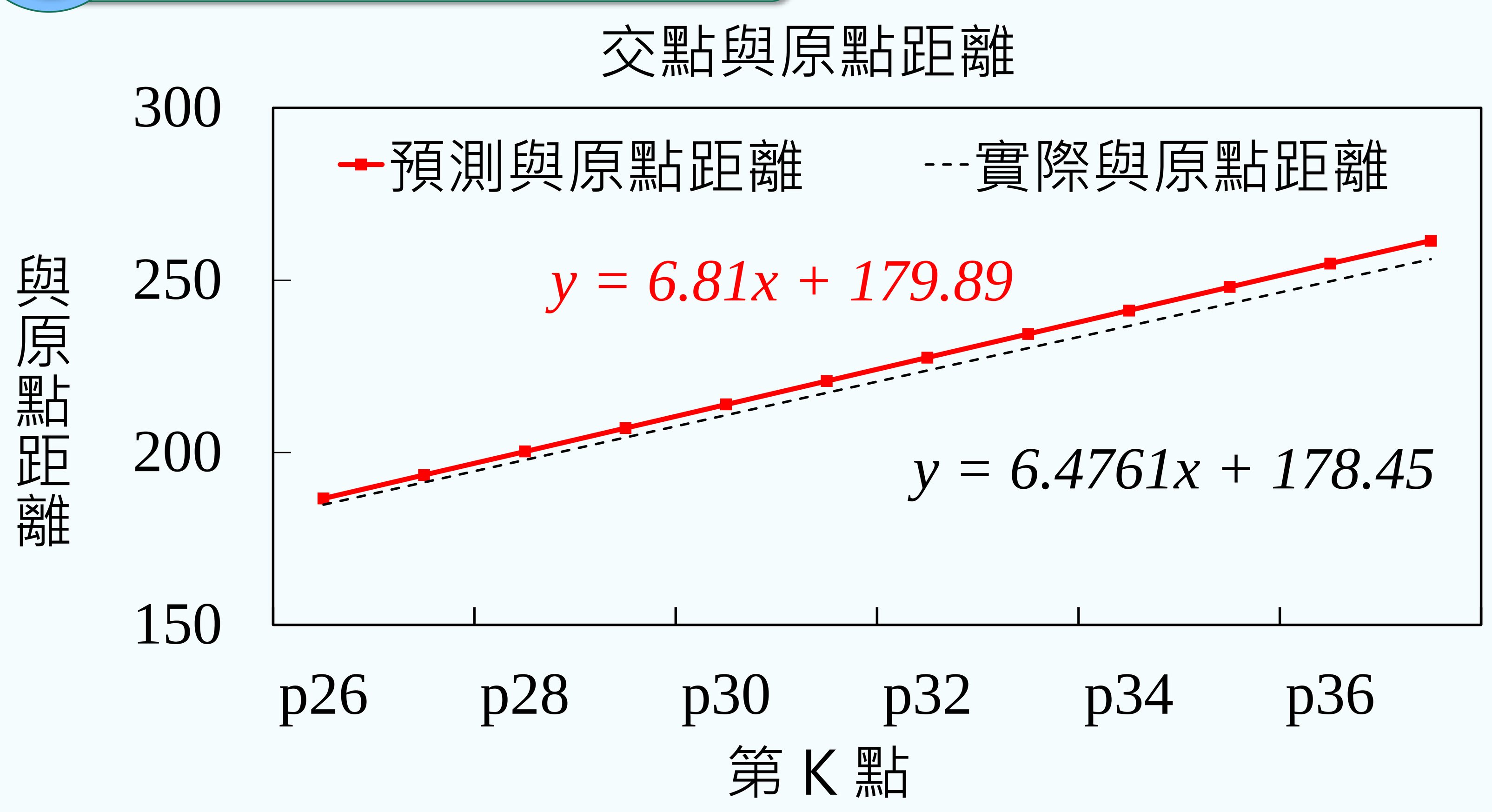


圖10 預測點、實際交點與原點距離圖

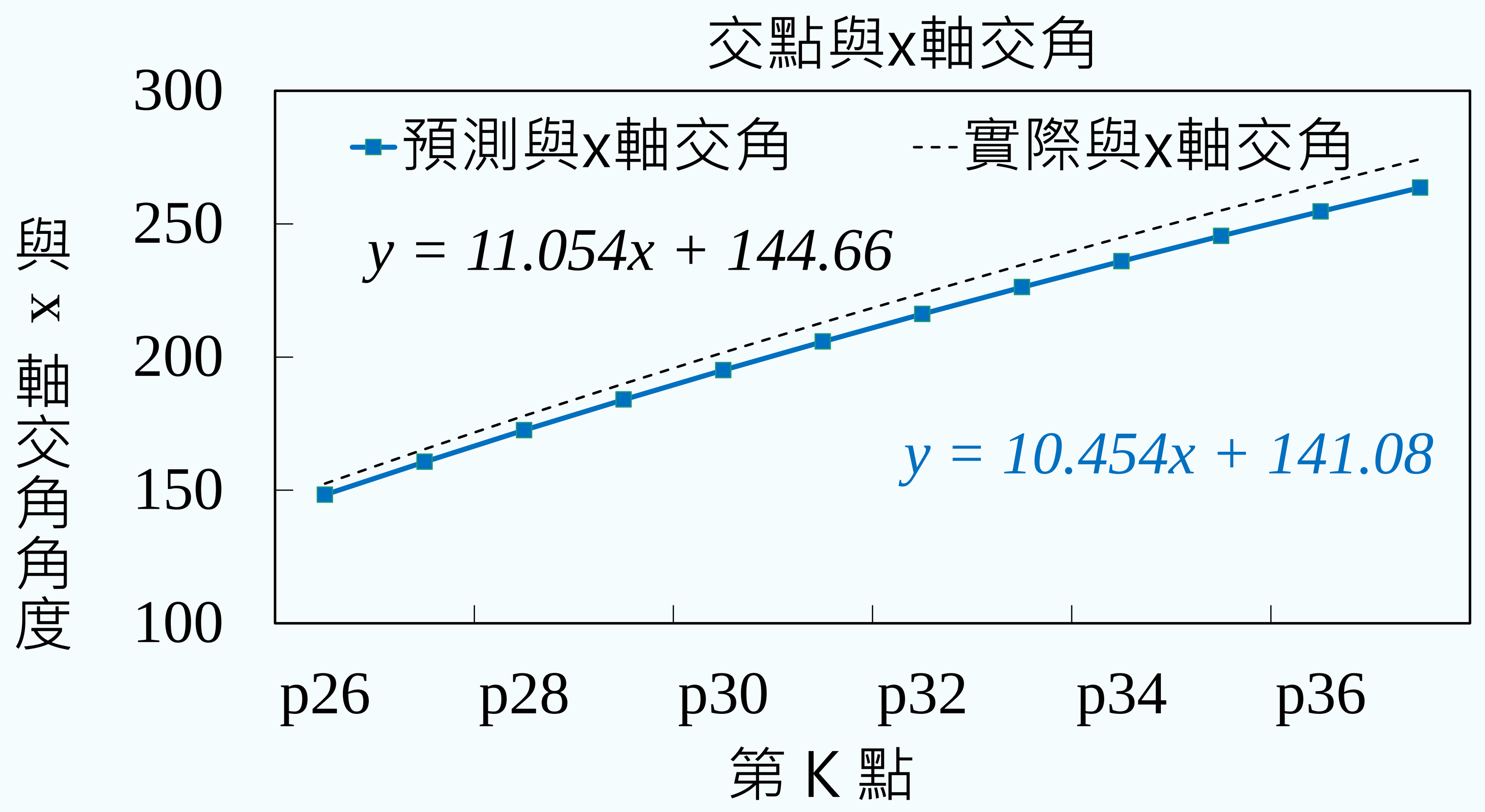


圖11 預測點、實際交點與 x 軸交角圖

從圖9中可得知，當交點離 x 軸的距離越近，預測的 y 座標偏差率越高，x 座標偏差率越低，反之亦然；而當 x 座標(離 y 軸的距離)與 y 座標(離 x 軸的距離)大約相同時，x 和 y 座標的偏差率較低且數據相近。可能是因為在接近座標軸時，三角函數的數值需要計算到更精確，而長度、角度僅取至小數點後第四位。而預測點與實際點的趨勢仍有些許偏差，若取用前 50 個或更多交點的趨勢線，準確率會更高。

結論

(一)實驗一研究了黃金螺線不同圈數與阿基米德螺線的交點數影響。發現黃金螺線4~6圈與阿基米德螺線的交點數呈現穩定趨勢，因此我們推測第七圈交點數可能呈現類似趨勢，於是進一步對第七圈交點數進行預測。

表8 實驗一不同象限的趨勢線和誤差率

圈數		第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	四象限和	趨勢總和
4~6圈	趨勢方程	$Y_1 = 0.0116x^{3.6873}$	$Y_2 = 0.0004x^{5.6511}$	$Y_3 = 0.0002x^{6.1316}$	$Y_4 = 9E\text{-}05x^{6.7725}$	$Y = 0.0023x^{5.5147}$	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$
第7圈	誤差率	13.64 %	17.86 %	17.65 %	6.67 %	10.85 %	0.00 %

實驗一第二部分我們利用結果推導出預測交點數的公式：

黃金螺線 (n + t) 圈時的交點數(t為黃金螺線增加圈數且為正整數) =黃金螺線n圈時的交點數 + 黃金螺線 (n + t) 圈時阿基米德螺線的圈數 – 黃金螺線n圈時阿基米德螺線的圈數 - t

(二)利用阿基米德螺線 a 值為1的公式代入比值更低的情況時，誤差率降低。

表9 實驗二不同 a 值的趨勢線和誤差率

a值		阿基米德 a=1	阿基米德 a=2	阿基米德 a=3
黃金 a=1~6	交點數趨勢方程	$y = 19.371x - 3.8$	$y = 9.0286x - 1.2667$	$y = 5.8x + 0.2$
黃金 a=7	預測交點誤差率(原公式)	0.00 %	3.17 %	4.76 %
	預測交點誤差率 (以$y = 19.371x - 3.8$代入)	0.00 %	0.00%	2.38 %

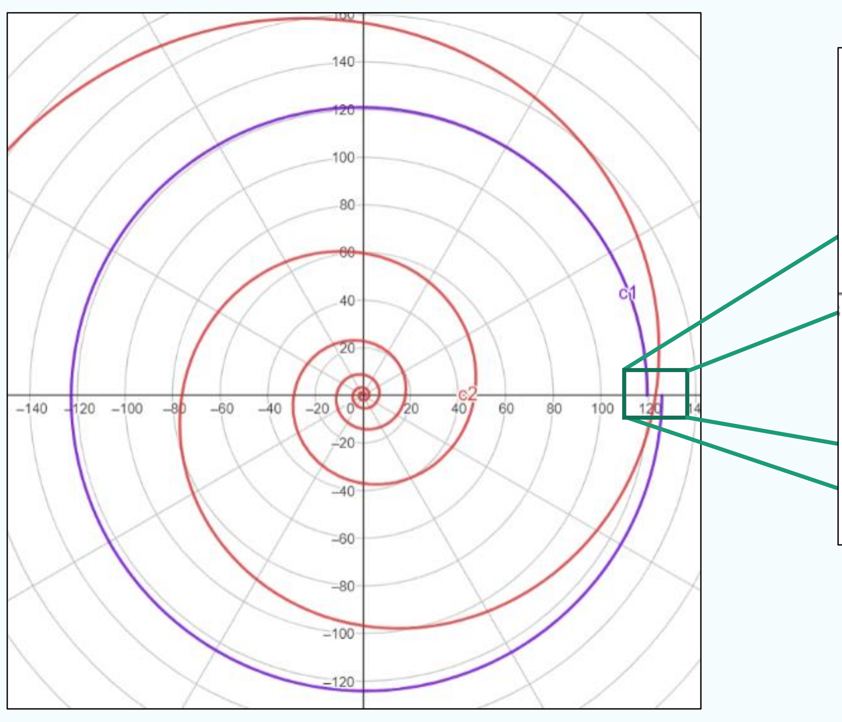


圖12 阿基米德螺線第20圈與黃金螺線

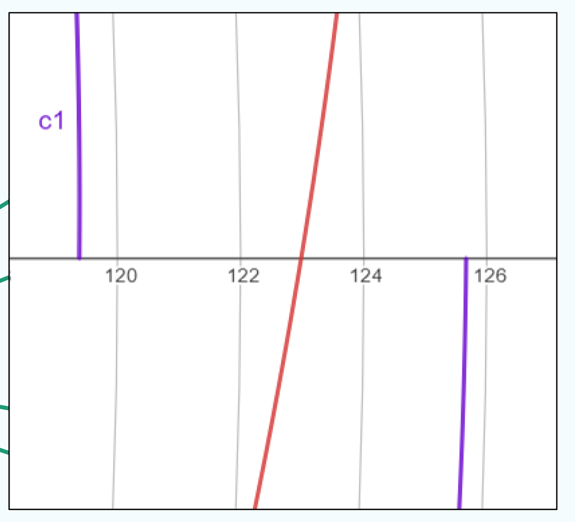


圖13 阿基米德螺線第20圈與黃金螺線放大圖

當黃金螺線交於極座標0度，且阿基米德螺線該圈的起點和終點分別在黃金螺線交於極座標0度點的左右兩側時，則此圈無交點，因此減t。

(三)與第 K 點原點距離、第 K 點與第 K+1 點的距離、第 K 點與 X 軸的角(逆時針)及三角形面積觀察中，推測交點座標是由兩條螺線在相同角度和距離下剛好交會，所以兩條螺線的方程式固定，螺線基本性質就會有規律性。三角形面積則是兩個規律的交點與原點圍成，故有相同的規律性。

表10 實驗三各參數推導趨勢方程與決定係數

趨勢線項目	趨勢線方程式	R^2值
與原點距離	$y = 6.817x + 9.4298$	0.9994
與K+1點距離	$y = 0.0095x^2 - 0.4286x + 47.973$	0.9938
與x軸交角 (加上圈數×360)	$y = 326.94\ln(x) + 883.08$	0.9999
三角形面積	$y = 147.07x + 220.87$	0.9972

(四)在實驗中，當預測的交點在靠近其中一軸的時，另一軸座標的誤差率就會顯著提升。我們觀察到預測點與實際點的距離逐漸增加，可以嘗試加入更多交點數據來修正趨勢線，達到減少誤差的目的。總體來說，我們成功利用實驗三結果的趨勢線預測第26點以後的交點座標，說明只要能降低誤差，就可以預測任何想預測的交點。

(五) **表11** 實驗趨勢線選擇模式與理由

實驗別	數據	趨勢線模式	理由
實驗一	象限交點數	乘冪	實驗數據為一條曲線，由平緩往上遞增，數值也以特定比率增加。
	象限預測交點數總和		
實驗二	兩螺線的擴大倍率比值	線性	趨勢為斜直線。
實驗三	交點與原點距離		
	交點形成的三角形面積		
	交點與下一點距離	二次多項式	數據的趨勢線為一條曲線，其圖形類似拋物線。
	與x軸交角(加上圈數×360)	對數	數據為一條快速遞減的曲線，貼合其關於極坐標系統的應用。

參考資料

1. 溫琦佑（2019）。「金」螺想窈窕，「多」切要合度。桃園市。
2. 李維歐（2005）。黃金比例（初版）（邱宏義譯）。臺北市：遠流出版社 （原著出版年：2002年）。
3. 蘇惠玉（2018）。追本數源──你不知道的數學祕密（初版）。臺北市：三民書局。
4. 白啟光（2002）。 費氏數列及黃金切割 • 取自「數學嘉年華」：https://ftt.tw/mUuJG、https://ftt.tw/Umzku
5. 王聖文（1994）。 有趣的對數螺線。中華民國第三十四屆中小學科學展覽會。
6. 趙文敏（2002）。等角螺線及其他。取自「數學知識」：https://ftt.tw/scvTU、https://ftt.tw/mGABz
7. 許浩鳴（2014）。空間螺線的代數分析 。 中華民國第五十四屆中小學科學展覽會。