中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030409

扎心語錄-三角觀「心」

學校名稱： 嘉義市立嘉義國民中學

作者：	指導老師：
國二 顧皓允	吳以凡
國二 許耀臨	周輝榮
國二 陳言涵	

關鍵詞： 心臟線、三角形的四心、動態幾何軟體 GSP

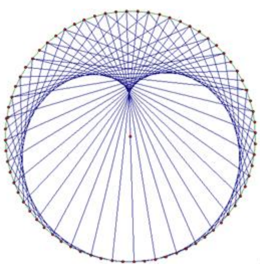
摘要

本研究探討心臟線特定點內接三角形。透過單位圓上的動點，以兩種方法生成心臟線的軌跡，將兩種方法疊合後可得到三個特定點，此三點所形成之三角形稱為**心臟線特定點內接三角形**。本研究利用相似形做出**內接三角形三頂點坐標參數式、三邊的直線方程式**並觀察直線族形成之包絡線。以幾何軟體展示此**三角形之重心、外心、內心和垂心的軌跡**並做出**軌跡參數式**。進而討論四心的極值及其隨著角度變化之移動速率。此外，我們發現此三角形**恆為鈍角三角形**。最後，給出此三角形的**尤拉線方程式，**觀察直線族形成之包絡線，再根據尤拉線特性得$\overline{HP_3}//\overline{ML}$，$\overline{HP_3}:\overline{ML}=2:1$。並發現當內接三角形為等腰三角形時，其高和半底的比為白銀比例。

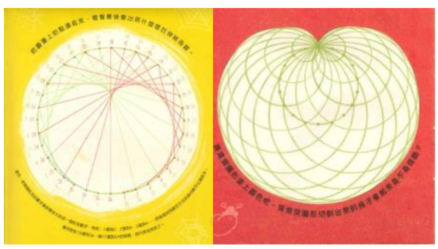
壹、前言

一、研究動機

去年學期末，學姐回來與我們分享她國中時做的心臟線研究（圖(1)），這讓我們想起小時候曾在繪圖本上畫過這樣的包絡線圖形（圖(2)），回家後找出書來，併著學姊的研究報告，好奇起心臟線與三角形之間是否有更多的數學奧秘？我們試著在幾何軟體畫出心臟線內接三角形的四心，並移動三角形，發現四心位置會隨之變動，形成特殊的軌跡。於是我們開始研究此心臟線內接三角形。



圖(1)(取自笛卡兒的愛情故事[1])



圖(2)(取自原來數學這麼漂亮[2])

二、研究目的

(一) 探討內接三角形**三頂點坐標參數式**，由參數式求出心臟線的極值。

(二) 探討內接三角形**三邊的直線方程式**，及其直線族形成之包絡線。

(三) 探討內接三角形**重心、外心、內心和垂心的軌跡**，做出**軌跡參數式**。

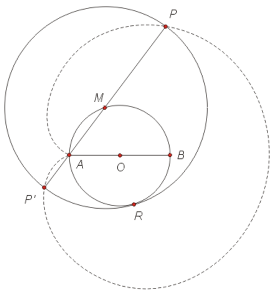
並求四心的極值及其隨著角度變化之移動速率。

(四) 探討內接三角形**尤拉線方程式**，及其直線族形成之包絡線。

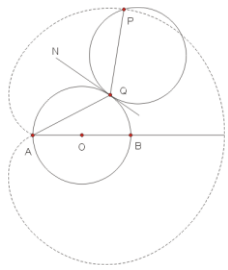
三、文獻回顧

(一) 心臟線的作法

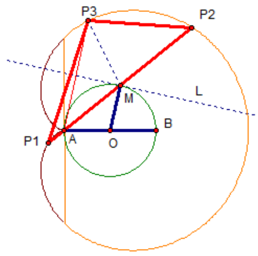
1. 第一種作法：給定一個圓 O 及其圓周上的一個定點 A，設過 A 的任意直線與給定圓 O 交於另一點 M。在$\overleftrightarrow{AM}$上有兩個點 P 與 P'滿足$\overline{MP}=\overline{MP'}$ =給定圓 O 的直徑，則所有此種 P 與 P'點所成的圖形是心臟線(cardioid)。見圖(3)。心臟線[3]



第一種作法(圖(3))
取自心臟線[3]



第二種作法(圖(4))
取自心臟線[3]



圖(5)
取自笛卡兒的愛情故事[1]

2. 第二種做法：以 A 為歧點且圓 O 為基圓，在基圓上任取一點 Q，過 Q 點做圓的切線 N，以切線 N 為對稱軸，做 A 點的對稱點 P。P 點的軌跡是心臟線。見圖(4)。

(二) 心臟線特定點內接三角形

參考嘉義市中小學科展第 38 屆作品笛卡兒的愛情故事[1]，該作品**將上述「第一種作法」與「第二種作法」疊合**，連接三點形成三角形，稱為「**完美三角形**」。圖(5)。以上為笛卡兒的愛情故事文中，對完美三角形的定義。本研究取其定義，並考量到此三角形會隨著 M 點的移動而改變，而非某個固定的形狀。由於此三角形的三頂點皆在心臟線上，且三角形是根據基圓上的 M 點所生成的，故將三角形的名稱重新命名為「心臟線特定點內接三角形」簡稱「內接三角形」。

比較兩件作品之差異	
笛卡兒的愛情故事	扎心語錄-三角觀「心」(本研究)
探討內接三角形的面積、邊長、邊長平方和。	將內接三角形放到直角坐標上，探討頂點參數式、邊長的直線方程式、重心、內心、外心、垂心軌跡、尤拉線方程式。

貳、研究設備與器材

一、 The Geometer's Sketchpad 動態幾何軟體(簡稱 GSP)

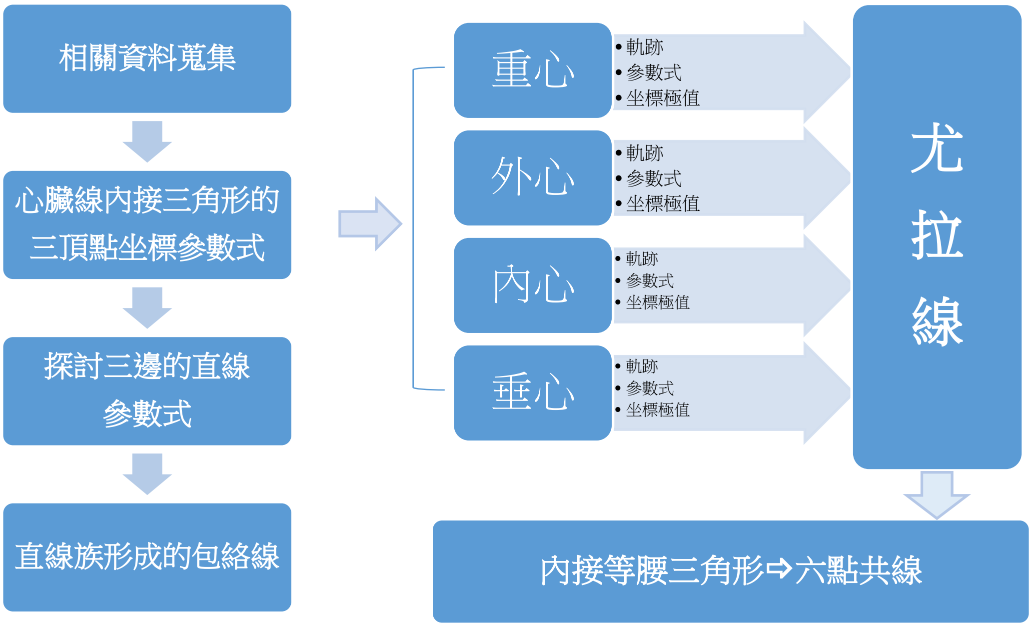
二、 GeoGebra 動態幾何軟體(簡稱 GGB)

三、 Matrix Calculator 行列式計算機。https://matrixcalc.org/zh-TW/

四、 Wolfram Alpha 數學計算軟體。https://www.wolframalpha.com/

參、研究過程或方法

一、 研究流程圖



二、 表示方法或名詞定義

本研究根據心臟線[3]一文中，心臟線的作圖法，並於直角坐標上作圖。我們以直角坐標上的原點$(0,0)$為圓心，作單位圓。此單位圓當作基圓。並於單位圓上取$A(-1,0)$做為歧點。

本研究的名詞定義如下：

(一) A點：令歧點$(-1,0)$為A點。

(二) M點：令單位圓上的動點$(cos\theta, sin\theta)$為M點。

(三) P_1點：以M點為圓心，基圓的直徑為半徑畫弧，此弧與$\overrightarrow{MA}$的交點稱為P_1。P_1是動點，在$\overrightarrow{MA}$上，P_1的軌跡是心臟線的一部分。

(四) P_2點：以M點為圓心，基圓的直徑為半徑畫弧，此弧與$\overrightarrow{AM}$的交點稱為P_2。P_2是動

點，在$\overrightarrow{AM}$上，P_2的軌跡是心臟線的一部分。

(五) P_3點：過 M 點做基圓的切線，以此切線為對稱軸，做 A 點的對稱點，將其命名為 P_3。P_3是動點，P_3的軌跡會在同一條心臟線上。

(六) 心臟線特定點內接三角形：以P_1、P_2、P_3為頂點做三角形，稱為心臟線特定點內接三角形，本研究簡稱「內接三角形」。

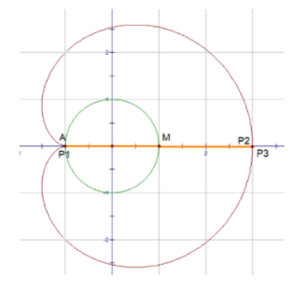
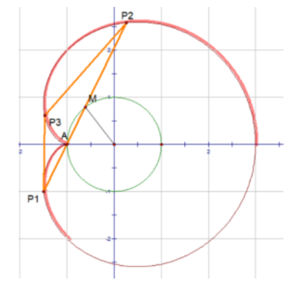
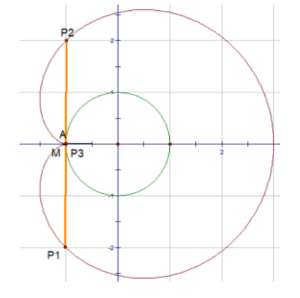
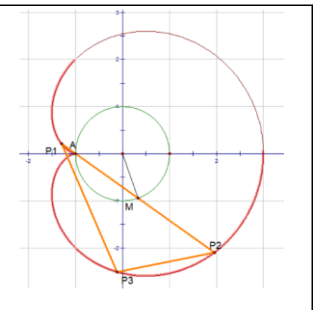
(七) L 點代表外心。因為將 O 點當作直角坐標的原點，故外心名稱用 L 表示。此外，重心以 G 表示、內心以 I 點表示、垂心以 H 點表示。

三、內接三角形與 *M* 點的關係

本研究主要探討由單位圓上的動點 M 所生成的心臟線內接三角形$\triangle P_1P_2P_3$，

(一) 依θ值，說明圖形情況：

1. 當$\theta = 0°$時，則M點坐標為$(1,0)$，$\overleftrightarrow{AM}$：$y = 0$，P_1、P_2都在y軸上，
   $P_1(-1,0)$、$P_2(3,0)$、$P_3(3,0)$。$\because$ P_2和P_3重合，$\therefore$三角形退化為線段$\overline{P_1P_3}$。
2. 當$0° < \theta < 180°$時，則$sin\theta > 0$，M在第一、二象限，$\because$射線$\overrightarrow{AM}$的斜率> 0，
   $\therefore$ P_1在第三象限、P_2和P_3都在第一、二象限。
3. 當$\theta = 180°$時，則M點與A點重合，M點坐標為$(-1,0)$，$\overline{P_1A} = \overline{P_1M} = 2$，
   且$\overline{P_1A} \perp x$軸。此時 $P_1(-1,-2)$、$P_2(-1,2)$。三角形退化為線段$\overline{P_1P_2}$。
4. 當$180° < \theta < 360°$時，則$sin\theta < 0$，M在第三、四象限，
   $\because$ 射線$\overrightarrow{AM}$斜率< 0，$\therefore$ P_1在第二象限、P_2和P_3都在第三、四象限。

 圖(6)	 圖(7)	 圖(8)	 圖(9)
$\theta = 0°$	$0° < \theta < 180°$	$\theta = 180°$	$180° < \theta < 360°$

(二) $180° < \theta < 360°$與$0° < \theta < 180°$所生成的圖形對稱於 x 軸。

為了展現其對稱性，將$180°$~$360°$的角度轉換成其同位角$-180°$~$0°$來表示。

令$\theta = \alpha$，且$0° < \theta < 180°$，則M坐標為$(cos\alpha, sin\alpha)$，對 x 軸作M的對稱點$M'(cos(-\alpha)°, sin(-\alpha)°)$，$M'$亦在單位圓上。$M$生成的內接三角形$\triangle P_1P_2P_3$必與$M'$生成的內接三角形$\triangle P_1'P_2'P_3'$對稱於 x 軸。

1. **證明：P_1和P_1'對稱於 x 軸(P_2和P_2'對稱於 x 軸)**

欲證P_1'是P_1的對稱點，則須證明$\overline{P_1'P_1} \perp x$軸，且$\overline{P_1D} = \overline{P_1'D}$。

證明：連接$\overline{MM'}$且與 x 軸交於 C 點。請見圖(10)

$\triangle AMC和\triangle AM'C$中，

$\because \overline{MC} = \overline{M'C}$($M$和$M'$對稱)，$\angle MCA = \angle M'CA = 90^\circ$，且$\overline{AC} = \overline{AC}$，

$\therefore \triangle AMC \cong \triangle AM'C$($SAS$全等)。因此，$\overline{AM} = \overline{AM'}$

$\triangle P_1'AD$和$\triangle P_1AD$中，

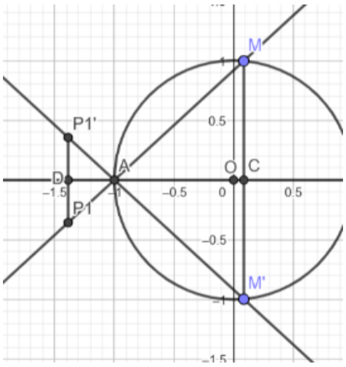
$\because \overline{P_1'A} = 2 - \overline{AM'} = 2 - \overline{MA} = \overline{P_1A}$，

$\angle P_1'AD = \angle CAM' = \angle CAM = \angle P_1AD$，

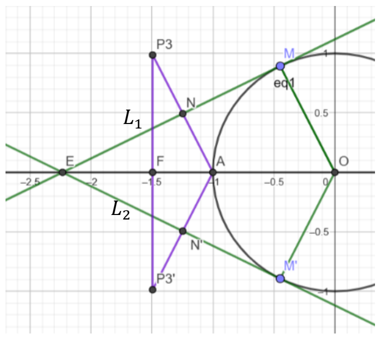
且$\overline{AD} = \overline{AD}$(共用邊)，$\therefore \triangle P_1'AD \cong \triangle P_1AD$($SAS$全等)

$\because \overline{P_1'D} = \overline{P_1D}$，$\angle ADP_1' = \angle ADP_1$，且$\angle ADP_1' + \angle ADP_1 = 180^\circ$，

$\angle ADP_1' = 90^\circ$　　$\therefore P_1$和P_1'互為對稱點。同理，P_2和P_2'互為對稱點。■



圖(10)



圖(11)

2. **證明：P_3和P_3'對稱於 x 軸**

作切線L_1和切線L_2分別交x軸於E和E'，先證明E點和E'點**重合**。見圖(11)

證明：由$\overline{MO} \perp L_1$，$\overline{M'O} \perp L_2$，

$\angle EOM = \angle E'OM'$(對稱角)，$\overline{MO} = \overline{M'O} =$ 半徑

得$\triangle EOM \cong \triangle E'OM'$($ASA$全等性質)

因為$\overline{OE}=\overline{OE'}$，所以$E=E'$，$L_1$、$L_2$和$x$軸三線共點於$E$。 ■

接著再證明$\overline{AP_3}=\overline{AP_3{}'}$。

證明：$\triangle ANE$和$\triangle AN'E$中，

$\because \overline{AE}=\overline{AE}$，$\angle ANE=\angle AN'E=90°$，$\angle AEN=\angle AEN'(\triangle EOM\cong\triangle E'OM')$

$\therefore \triangle ANE\cong\triangle AN'E(AAS$全等性質$)$

因此，$\overline{AN}=\overline{AN'}$，$\overline{AP_3}=2\overline{AN}=2\overline{AN'}=\overline{AP_3{}'}$

$\because \overline{AP_3}=\overline{AP_3{}'}$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，$\angle FAP_3=\angle FAP_3{}'(\triangle ANE\cong\triangle AN'E)$

$\therefore \triangle AP_3F\cong\triangle AP_3{}'F(SAS$全等性質$)$

$\because \overline{P_3F}=\overline{P_3{}'F}$，$\angle P_3FA+\angle P_3'FA=180°$，

$\angle P_3FA=\angle P_3'FA(\triangle AP_3F\cong\triangle AP_3{}'F)$

$\therefore \angle P_3FA=\angle P_3'FA=90°$，且$\overline{P_3F}=\overline{P_3{}'F}(\triangle AP_3F\cong\triangle AP_3{}'F)$，

因此，x軸垂直平分$\overline{P_3P_3{}'}$，P_3和$P_3{}'$互為對稱點。 ■

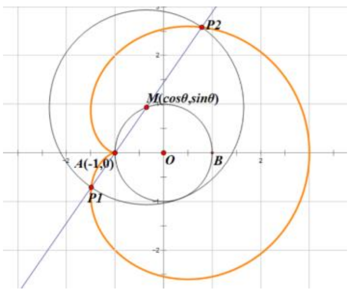
註：因為$\triangle P_1P_2P_3$與$\triangle P_1{}'P_2{}'P_3{}'$為對稱圖形，兩個三角形所生成的點或軌跡也會互相對稱。對所有$\theta=\alpha(\alpha\neq 0°$、$180°)$時的情況，皆存在$\theta=-\alpha$與之對稱。不失一般性，往後研究中針對$P_1$、$P_2$、$P_3$的公式，以及$\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_1P_3}$、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$的公式推導，僅討論$0°<\theta<180°$情況。

肆、研究結果

一、內接三角形之三頂點坐標參數式及三邊之直線方程式

(一)內接三角形的三頂點參數式

畫心臟線的圖形。令$O(0,0)$，$A(-1,0)$，$M(cos\theta,sin\theta)$。



圖(12)

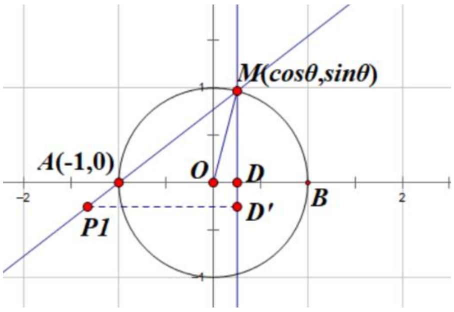
用θ表示P_1、P_2、P_3坐標。(公式推導僅呈現 $0°<\theta<180°$時)

1. P_1的坐標參數式

(1) 第一種參數式(相似形法)

$$P_1\left(cos\theta-\sqrt{2(1+cos\theta)}, sin\theta-\frac{\sqrt{2}sin\theta}{\sqrt{1+cos\theta}}\right)，0° < \theta < 180°$$

證明：



圖(13)

過 M 點作$\overleftrightarrow{MD} \perp x$軸，$D$ 點在 x 軸上。 $\triangle AMD \sim \triangle P_1MD'$。

令$\triangle P_1MD'$邊長 :$\triangle AMD$邊長=k :1。

$\overline{P_1M} = 2$，$\overline{MD} = sin\theta$，$\overline{AD} = cos\theta + 1$。

見圖(13)。

令線段$\overline{P_1D'} = k(cos\theta + 1)$，線段$\overline{MD'} = k \cdot sin\theta$。

$\because \angle MD'P_1 = 90°$，由畢氏定理可得

$k^2 \cdot sin^2\theta + k^2(cos\theta + 1)^2 = 2^2 = 4$，$k^2(2 + 2cos\theta) = 4,$

$k^2 = \frac{2}{1+cos\theta}$,當$cos\theta > -1$，$k = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+cos\theta}}$，$k$取正數

將 k 值分別代入$\overline{P_1D'}$、$\overline{MD'}$中。

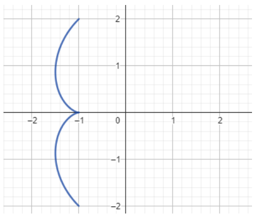
$\therefore \overline{P_1D'} = \sqrt{2(cos\theta + 1)}$ ，$\overline{MD'} = \frac{\sqrt{2}\,sin\theta}{\sqrt{1+cos\theta}}$，

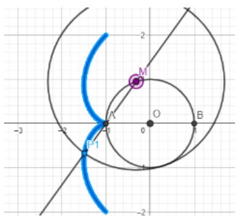
P_1的 x 坐標=M 的 x 坐標$-\overline{P_1D'}$= $cos\theta - \sqrt{2(1 + cos\theta)}$

P_1的 y 坐標=M 的 y 坐標$-\overline{MD'}$=$sin\theta - \frac{\sqrt{2}sin\theta}{\sqrt{1+cos\theta}}$ ■

(2) 參數式的驗證

為驗證所推導的參數式，我們利用 GGB 軟體，將P_1參數式輸入展示曲線。請見圖(14)。並在此 GGB 頁面上，利用P_1尺規作圖方法畫出P_1。發現尺規作圖的軌跡與參數式軌跡重疊，是同一個軌跡。見圖(15)。


圖(14)


圖(15)

(3) 第二種參數式(等腰三角形法)

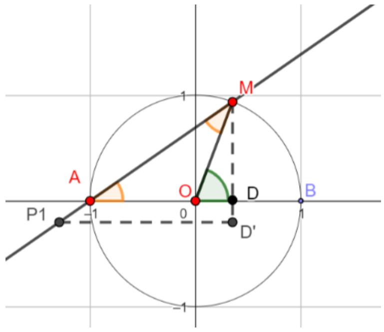
$$P_1\left(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2},sin\theta-2sin\frac{\theta}{2}\right)，0°<\theta<180°$$

證明：由圖(16)知，當 $0°<\theta<180°$， $\triangle MAO$是等腰三角形，故$\angle MAD=\frac{1}{2}\angle MOB=\frac{\theta}{2}$。

$\overline{AB}//\overline{P_1D'}$，$\angle MP_1D'=\frac{\theta}{2}$。$\because \overline{MP_1}=2$，

$\Rightarrow \overline{P_1D'}=2cos\frac{\theta}{2}$，$\overline{MD'}=2sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore P_1(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2},sin\theta-2sin\frac{\theta}{2})$ ■



圖(16)

2. P_2的坐標參數式

(1)第一種參數式(相似形法)

$$P_2(cos\theta+\sqrt{2(1+cos\theta)},sin\theta+\frac{\sqrt{2}sin\theta}{\sqrt{1+cos\theta}})，0°<\theta<180°$$

證明：

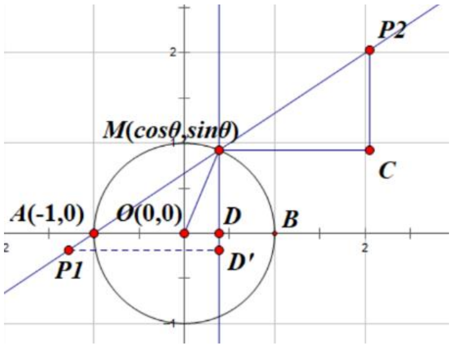
作 $\overleftrightarrow{MC}//$於$x$軸，$\overleftrightarrow{P_2C}//$於$y$軸，如圖(17)。

因為$\overline{P_1M}=\overline{MP_2}$，故$\triangle P_2MC\cong\triangle MP_1D'$。

$\because \overline{MD'}=\overline{P_2C}$，$\overline{P_1D'}=\overline{MC}$。

$\therefore \overline{MC}=\overline{P_1D'}=\sqrt{2(1+cos\theta)}$，

$\overline{P_2C}=\overline{MD'}=\frac{\sqrt{2}sin\theta}{\sqrt{1+cos\theta}}$

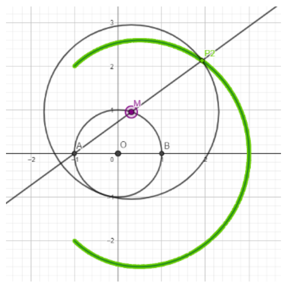


圖(17)

因此， P_2的x坐標$=cos\theta+\overline{MC}$；P_2的y坐標$=sin\theta+\overline{P_2C}$。 ■

(2) 參數式的驗證

利用 GGB 軟體，將P_2參數式輸入，展示曲線，請見圖(18)。同時利用P_2尺規作圖方法畫出P_2。發現尺規作圖的軌跡與參數式軌跡重疊。



圖(18)

(3) 第二種參數式(等腰三角形法)

$$P_2(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}) \text{，} 0° < \theta < 180°$$

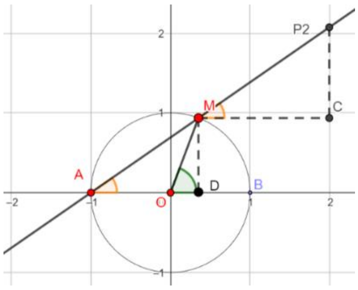
證明：

由圖(19)知，當 $0° < \theta < 180°$， $\triangle MAO$是等腰三角形，故$\angle MAD = \frac{1}{2}\angle MOB = \frac{\theta}{2}$。

$\because \overline{AD} // \overline{MC}$，$\angle P_2MC = \frac{\theta}{2}$，$\overline{MP_2} = 2$

$\Rightarrow \overline{MC} = 2cos\frac{\theta}{2}$，$\overline{P_2C} = 2sin\frac{\theta}{2}$

$\therefore P_2(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})$ ■



圖(19)

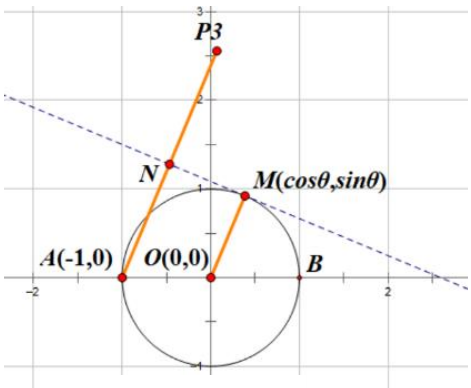
3. P_3的坐標參數式

(1)參數式的推導

$$P_3(2cos\theta + cos2\theta, 2sin\theta + sin2\theta) \text{，} 0° < \theta < 180°$$

證明：

過 M 點做圓的切線，以此為對稱軸，做 A 點的對稱點P_3，P_3的軌跡即為心臟線。做$\overline{AP_3}$的中點，並令其為 N 點，N 點在對稱軸上，M 點也在對稱軸上，因為對稱點連線段垂直於對稱軸，故$\overline{AP_3}$垂直於$\overline{NM}$。見圖(20)。



圖(20)

令P_3的坐標為(x,y)，連接$\overline{OM}$，已知$\overline{OM}$垂直於切線，故$\overline{OM}$平行於$\overline{AP_3}$。

$$\text{斜率}m_{\overline{OM}} = \frac{sin\theta}{cos\theta} = tan\theta = m_{\overline{AP_3}}$$

求$\overleftrightarrow{AP_3}$直線方程式：

$$\overleftrightarrow{AP_3}：\frac{y}{x+1} = \frac{sin\theta}{cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \overleftrightarrow{AP_3}：y = tan\theta(x+1)$$

由於$\overline{NM}$垂直於$\overline{OM}$，斜率為其倒數$\times(-1)$。 斜率$m_{\overline{NM}} = -\frac{cos\theta}{sin\theta}$

得$\overleftrightarrow{MN}$直線方程式：

$\overleftrightarrow{MN}$：$\frac{y-sin\theta}{x-cos\theta}=-\frac{cos\theta}{sin\theta}$ $\Rightarrow$ $y-sin\theta=-\frac{cos\theta}{sin\theta}(x-cos\theta)$

接著我們利用$\overleftrightarrow{MN}$和$\overleftrightarrow{AP_3}$的方程式，求出其交點 N 的坐標，

$$\begin{cases} y=tan\theta(x+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\text{①} \\ y-sin\theta=-\dfrac{cos\theta}{sin\theta}(x-cos\theta)\ldots\ldots\ldots\text{②} \end{cases}$$

將①代入②得：$tan\theta(x+1)-sin\theta=-\frac{cos\theta}{sin\theta}(x-cos\theta)$

將 x 項合併，得：$x=cos\theta-sin^2\theta$　　再將x代回②得：

$$y-sin\theta=-\frac{cos\theta}{sin\theta}(cos\theta-sin^2\theta-cos\theta)=cos\theta\cdot sin\theta$$

$$y=cos\theta\cdot sin\theta+sin\theta$$

因此，$N(cos\theta-sin^2\theta,cos\theta sin\theta+sin\theta)$

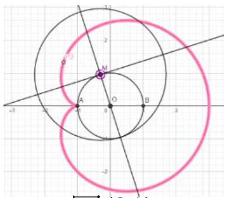
N 是$A(-1,0)$和$P_3(x,y)$的中點，根據中點坐標公式，求出P_3的坐標。

$x=2(cos\theta-sin^2\theta)+1=2cos\theta-2sin^2\theta+1=2cos\theta+cos2\theta$

$y=2(cos\theta sin\theta+sin\theta)=2cos\theta sin\theta+2sin\theta=2sin\theta+sin2\theta$ ■

(2) 參數式的驗證

利用 GGB 軟體，將P_3參數式輸入，展示曲線如(21)。同時利用P_3尺規作圖方法畫出P_3。發現尺規作圖的軌跡與參數式軌跡重疊。



圖(21)

4. 心臟線軌跡的極值(僅討論$0°\le\theta\le180°$的範圍)

P_1、P_2、P_3都在心臟線的軌跡上。其中P_3的極值就是心臟線軌跡的極值。圖形對稱於 x 軸，$-180°\le\theta\le0°$的情況可用對稱性解釋。對全範圍來說，若$\theta=\alpha$時，存在 y 的最大(小)值$=k$，則$\theta=-\alpha$時，存在 y 的最小(大)值$=-k$。

P_3的極值(範圍$0°\le\theta\le180°$)

當$\theta=0°$時，則 x 坐標有最大值$=3$；當$\theta=120°$時，則 x 坐標有最小值$=-1.5$。

當$\theta=60°$時，則 y 坐標有最大值$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；當$\theta=0°$時，則 y 坐標有最小值$=0$。

證明：

x坐標：$2cos\theta + cos2\theta = 2cos\theta + 2cos^2\theta - 1 = 2(cos\theta + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$

當$cos\theta = -\frac{1}{2}$，x 坐標有最小值$-\frac{3}{2}$，此時$\theta = 120°$

當$cos\theta = 1$，x 坐標有最大值 $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$，此時$\theta = 0°$

y坐標：$2sin\theta + sin2\theta = 2sin\theta + 2 \cdot sin\theta cos\theta = 2sin\theta(1 + cos\theta)$

$$= 2 \cdot 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}\left(1 + 2cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) = 8sin\frac{\theta}{2}cos^3\frac{\theta}{2}$$

已知$0° \leq \theta \leq 180°$，$0° \leq \frac{\theta}{2} \leq 90° \Rightarrow sin\frac{\theta}{2} \geq 0$，$cos\frac{\theta}{2} \geq 0$

根據算幾不等式

$$\frac{cos^2\frac{\theta}{2} + cos^2\frac{\theta}{2} + cos^2\frac{\theta}{2} + 3sin^2\frac{\theta}{2}}{4} \geq \sqrt[4]{cos^2\frac{\theta}{2} \cdot cos^2\frac{\theta}{2} \cdot cos^2\frac{\theta}{2} \cdot 3sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{3(cos^2\frac{\theta}{2} + sin^2\frac{\theta}{2})}{4} \geq \sqrt[4]{cos^6\frac{\theta}{2} \cdot 3sin^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow (\frac{3}{4})^4 \geq cos^6\frac{\theta}{2} \cdot 3sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq 8sin\frac{\theta}{2}cos^3\frac{\theta}{2}$$

等號成立於$cos^2\frac{\theta}{2} = 3sin^2\frac{\theta}{2}$時，$cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{3}sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$，此時 $\theta = 60°$。

P_2的極值(範圍$0° \leq \theta \leq 180°$)

當$\theta = 0°$時，則 x 坐標有最大值$= 3$；當$\theta = 180°$時，則 x 坐標有最小值$= -1$。

當$\theta = 120°$時，則 y 坐標有最大值$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$；當$\theta = 0°$時，則 y 坐標有最小值$= 0$。

說明：P_2作法與P_3雷同

x坐標：$cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}$，令 $t = \frac{\theta}{2}$，則x坐標 $= 2cos(t) + cos(2t)$

y坐標：$sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}$， 令$t = \frac{\theta}{2}$，則$y$坐標 $= 2sin(t) + sin(2t)$

只要做變數變換，P_2參數式的型態就和P_3一樣。在此省略過程。

P_1的極值(範圍$0° \le \theta \le 180°$)

當$\theta = 0°$時，則 x 坐標有最大值$= -1$；當$\theta = 120°$時，則 x 坐標有最小值$= -1.5$。

當$\theta = 0°$時，則 y 坐標有最大值$= 0$；當$\theta = 180°$時，則 y 坐標有最小值$= -2$ 。

說明：P_1作法與P_3雷同。為節省版面，在此省略過程。

(二)內接三角形的三邊之直線方程式

1、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$的直線方程式：

$$y = \frac{(sin2\theta + sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2})}x - \frac{4sin\frac{\theta}{2} + 2sin\frac{3\theta}{2} + sin\theta}{cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}}，0° < \theta < 180°$$

計算過程：

利用直線斜率$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - (P_2的y坐標)}{x - (P_2的x坐標)}$，做出直線方程式。

$$\frac{(2sin\theta + sin2\theta) - (sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})}{(2cos\theta + cos2\theta) - (cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})} = \frac{y - (2sin\theta + sin2\theta)}{x - (2cos\theta + cos2\theta)}$$

以 Matrix Calculator 計算機化簡，得

$$y = \frac{(sin2\theta + sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2})}x - \frac{4sin\frac{\theta}{2} + 2sin\frac{3\theta}{2} + sin\theta}{cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}} \qquad ■$$

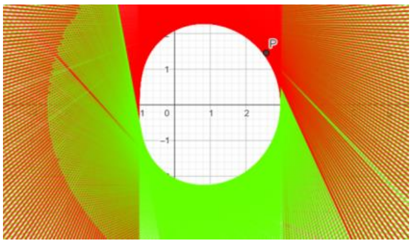
$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族的包絡線：

$$x = \frac{-34sin\frac{\theta}{2} - 38sin\frac{3\theta}{2} - 29sin\frac{5\theta}{2} - 4sin\frac{7\theta}{2} + 6sin\frac{9\theta}{2} + sin\frac{11\theta}{2} + 28sin\theta + 40sin2\theta + sin3\theta + 3sin4\theta + sin5\theta}{34sin\frac{\theta}{2} + 24sin\frac{3\theta}{2} + 16sin\frac{5\theta}{2} + 10sin\frac{7\theta}{2} - 18sin\theta - 46sin2\theta - 6sin3\theta}$$

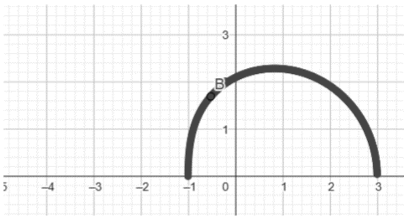
$$y = \frac{-11sin\frac{\theta}{2} - 7sin\frac{3\theta}{2} + 5sin\frac{5\theta}{2} + sin\frac{7\theta}{2} - 11sin\theta + 4sin2\theta + sin3\theta}{6cos\frac{\theta}{2} + 10cos\frac{3\theta}{2} - 6cos\theta - 10}，0° < \theta < 180°$$

說明：

將$\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 方程式輸入 *GGB*，隨著角度θ改變，得到直線方程式的軌跡。發現直線的軌跡恆不通過某一區塊，$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族為某圖形之包絡線。如圖(22)。我們小時候也做過特殊弦的包絡線是心臟線。



$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族軌跡　圖(22)



$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族形成之包絡線　圖(23)

我們想要研究這個曲線，向老師請教後得知這些$\overleftrightarrow{P_2P_3}$都與圖中央的曲線相切，$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族是某曲線的包絡線。根據 Wolfram 數學百科[4]，若曲線族以隱函數形式$F(x,y,\theta)=0$表示，其包絡線的隱方程式，便是對下列兩個方程式求解 x 、y 的隱函數關係。

$$\begin{cases} F(x,y,\theta)=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta}=0 \end{cases}$$

解偏微分是由 Wolfram Alpha 數學計算軟體完成，解聯立方程式的計算過程由 Matrix Calculator 計算機求得。計算過程在此省略。將參數輸入 GGB，範圍設定為$0°<\theta<180°$。如圖(23)，此軌跡與觀察到的包絡線軌跡重合。 ■

2、$\overleftrightarrow{P_1P_3}$的直線方程式：

$$y=\frac{(sin2\theta+sin\theta+2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}x+\frac{4sin\frac{\theta}{2}+2sin\frac{3\theta}{2}-sin\theta}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}\text{，}0°<\theta<180°$$

計算過程：

$$\frac{(2sin\theta+sin2\theta)-(sin\theta-2sin\frac{\theta}{2})}{(2cos\theta+cos2\theta)-(cos\theta-\ 2cos\frac{\theta}{2})}=\frac{y-(2sin\theta+sin2\theta)}{x-(\ 2cos\theta+cos2\theta)}$$

將左式之分子、分母做同類項合併之化簡，得

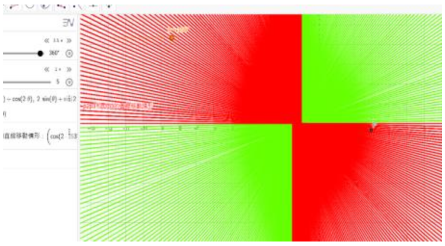
$$\frac{(sin2\theta+sin\theta+2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}=\frac{y-(2sin\theta+sin2\theta)}{x-(\ 2cos\theta+cos2\theta)}$$

再利用 Matrix calculator 計算機化簡，得

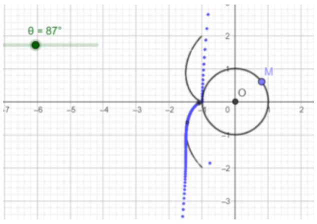
$$y=\frac{(sin2\theta+sin\theta+2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}x+\frac{4sin\frac{\theta}{2}+2sin\frac{3\theta}{2}-sin\theta}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}$$ ■

$\overleftrightarrow{P_1P_3}$直線族的包絡線：

將$\overleftrightarrow{P_1P_3}$方程式輸入 GGB，隨角度$\theta$改變，得到直線方程式的軌跡。直線的軌跡布滿整個直角坐標平面。看似沒有包絡線。我們依照包絡線做法，產生參數式，但輸入 GGB 觀察軌跡，並未能像$\overleftrightarrow{P_2P_3}$那樣產生封閉曲線。計算過程在此省略。



$\overleftrightarrow{P_1P_3}$ 直線族軌跡　圖(24)



$\overleftrightarrow{P_1P_3}$形成之包絡線參數式軌跡　圖(25)

3、$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的直線方程式：

$$y - sin\theta = tan\frac{\theta}{2}(x - cos\theta),\ 0° < \theta < 180°$$

證明：

$\overleftrightarrow{P_1P_2}$通過$M(cos\theta, sin\theta)$利用直線斜率$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-(M的y坐標)}{x-(M的x坐標)}$，做出直線方程式。$\frac{(sin\theta+2sin\frac{\theta}{2})-(sin\theta-2sin\frac{\theta}{2})}{(cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})-(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2})} = \frac{y-sin\theta}{x-cos\theta}$

將左式化簡，得

$$\frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}} = \frac{y-sin\theta}{x-cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-sin\theta}{x-cos\theta} = tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow y - sin\theta = tan\frac{\theta}{2}(x - cos\theta) \qquad \blacksquare$$

$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族的包絡線：

直觀來說$\overleftrightarrow{P_1P_2}$就是 $\overleftrightarrow{MA}$，恆過定點 $A(-1,0)$，包絡線退化為一個點。我們也依照包絡線做法，產生方程式

$$\begin{cases} F(x,y,\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - sin\theta = tan\dfrac{\theta}{2}(x - cos\theta) \\ y - cos\theta = \dfrac{1}{2}sec^2\dfrac{\theta}{2}(x - cos\theta) + tan\dfrac{\theta}{2}sin\theta \end{cases}$$

求得$x = -1, y = 0$ $\blacksquare$

註：P_1、P_2參數式會隨角度範圍而有所不同。

當$0° < \theta < 180°$時，P_1、P_2分別是$\left(cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})$；

當$-180° < \theta < 0°$時，P_1、P_2分別為$\left(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$(cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})$。

而$-180° < \theta < 0°$的推論與$0° < \theta < 180°$相似。受限於版面，在此省略。

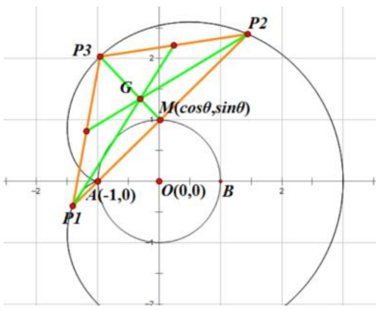
不論是$0° < \theta < 180°$或$-180° < \theta < 0°$，$\triangle P_1P_2P_3$皆由$\left(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$\left(cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$(2cos\theta + cos2\theta, 2sin\theta + sin2\theta)$三點所構成。

當$\theta \neq 180°$、$0°$時，三角形存在，才會有四心。討論四心參數式時，角度範圍為$0° < \theta < 180°$。但討論軌跡極值時，為方便觀察最大最小值，納入端點$180°$和 $0°$。

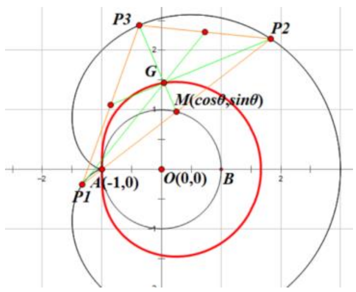
二、內接三角形的重心之探討。

(一) 作圖法(利用 GSP 作圖)

將$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_3}$、$\overline{P_2P_3}$的中點分別連線到P_3、P_2、P_1，三條中線的交點即為重心，令重心為 G，見圖(26)。隨著 M 點的移動，重心軌跡如圖(27)。



圖(26)



圖(27)

(二) 重心參數式

1. $$G\left(\frac{4cos\theta + cos2\theta}{3}, \frac{4sin\theta + sin2\theta}{3}\right)，0° < \theta < 180°$$

證明：

已知給定坐標平面上不共線三點$A = (x_1.y_1)$, $B = (x_2.y_2)$, $C = (x_3.y_3)$

令$\triangle ABC$的重心為 G，則 G 的坐標為

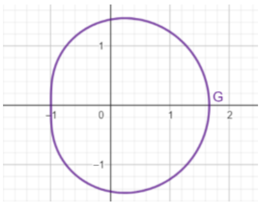
$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

將 P_1 、P_2 、P_3 代入上述重心之公式，得

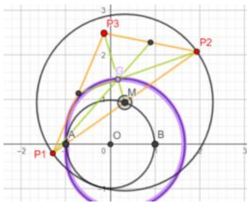
$$G(\frac{4cos\theta+cos2\theta}{3},\frac{4sin\theta+sin2\theta}{3}) \qquad \blacksquare$$

2. 參數式的驗證

利用 GGB 軟體，將重心參數式輸入，展示曲線。見圖(28)。同時利用重心尺規作圖方法畫出重心軌跡。發現尺規作圖的軌跡與參數式軌跡重疊。見圖(29)。



圖(28)



圖(29)

(三) 重心軌跡的討論

1. 極值的探討(討論範圍：$0° \leq \theta \leq 180°$)

討論重心函數極值時，納入兩端點0°和 180°，較易發現重心函數的最大最小值。

當$\theta = 0°$時，則 x 坐標有最大值$=\frac{5}{3}$；
當$\theta = 180°$時，則 x 坐標有最小值$= -1$。
當$\theta = 2tan^{-1}(\sqrt{2\sqrt{3}-3})$時，則 y 坐標有最大值$=\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$；
當$\theta = 0°$時，則 y 坐標有最小值$= 0$。

以上極值利用 Wolfram Alpha 數學計算軟體求得。

(1) 利用 Excel 計算

分別計算出當$\theta = 0°$、$1°$、$2°$、 …… 、$180°$時，重心的坐標值。

當θ =0°時，x 坐標有最大值 1.66667；當$\theta = 180°$時，x 坐標有最小值-1。同理，當$\theta = 69°$時，y 坐標有最大值 1.467817；當$\theta = 0°$時，y 坐標有最小值0。以上算法只能得到接近極值的數字，並不是真正的極值。

(2) 利用配方法計算

$$x坐標：\frac{4cos\theta+cos2\theta}{3}=\frac{1}{3}(4cos\theta+cos2\theta)=\frac{2}{3}(cos\theta+1)^2-1$$

由上式可知當$cos\theta = -1$時，則 x 坐標有最小值-1，此時$\theta = 180°$。

最大值發生在$|cos\theta+1|$最大時，也就是當$cos\theta = 1$時，則x坐標有最大值$\frac{5}{3}$。

(3) 利用 Wolfram Alpha 數學計算軟體

y 坐標嘗試配方法未果，故使用 Wolfram Alpha 數學計算軟體來求極值。

而$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \doteqdot 1.4678898$與 Excel 計算結果 1.467817 相比，至小數第四位都相等。

2. 重心軌跡長度

重心軌跡長度約為 4.4549644

(1) 利用 Excel 計算長度

令G_k表示重心在$\theta = k°$時的位置，利用 Excel 計算$\overline{G_0G_1} + \overline{G_1G_2} + \overline{G_2G_3} + \overline{G_3G_4} + \dots\dots + \overline{G_{179}G_{180}}$ ≑4.437434534。

用每 0.1 度取值，得 4.454963635

用每 0.01 度取值，得 4.454964399

但事實上$\overline{G_1G_2} \neq \widehat{G_1G_2}$，上述過程只能當弧長近似值，不能做為真的長度。

(2) 利用 Wolfram Alpha 計算機做積分的計算

老師告訴我們，如果把角度切到很小很小，再把線段加總，就是微積分的概念。由於微積分對我們來說太遙不可及，本研究中使用到微積分的部分都是由老師告知公式，我們按照公式使用 Wolfram Alpha 計算機得到的結果。本研究中，使用微積分的目的是為了比較我們用 Excel 所做出來的值。

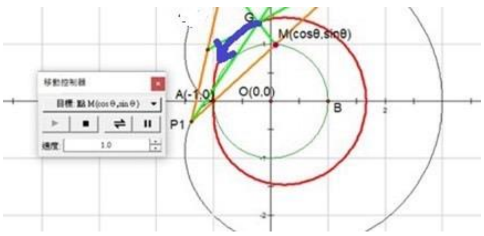
當$\theta = 0 \sim \alpha$時，軌跡長度可用積分計算。公式為$\int_0^{\alpha} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$

代入重心的參數式得$\frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sqrt{(-4sin\theta - 2sin2\theta)^2 + (4cos\theta + 2cos2\theta)^2}\,d\theta$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sqrt{16cos\theta + 20}\,d\theta \doteqdot 4.4549644$$

3. 重心的移動速率

利用 GSP 的內建功能，讓 M 點逆時鐘等速移動(θ值等速增加)，重心 G 會隨著 M 點移動。當 M 點越靠近 A 點時，重心的移動速率越來越慢。



重心速率越來越小圖(30)

接著，我們用以下兩種方式進行說明：

(1) 每一角度所對應之重心移動距離變化

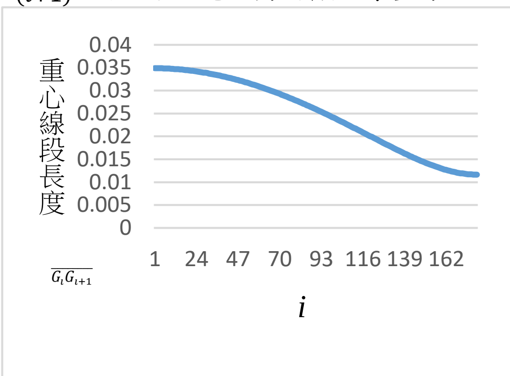
令G_1表示重心在$\theta = 1°$時的位置，$G_1(\frac{4cos1°+cos2°}{3},\frac{4sin1°+sin2°}{3})$，$G_k$表示重心在$\theta = k°$的位置。當$\theta$值等速率增加，考慮$\theta = 0°\sim1°$之間，重心移動的平均速率。

$$\overline{G_1G_2} = \sqrt{(\frac{4cos1° + cos2°}{3} - \frac{4cos2° + cos4°}{3})^2 + (\frac{4sin1° + sin2°}{3} - \frac{4sin2° + sin4°}{3})^2}$$

已知速率=$\frac{距離}{時間}$，故平均速率可視為$\frac{\widehat{G_1G_2}}{單位時間}$。當角度取得夠小，$\widehat{G_1G_2} \doteqdot \overline{G_1G_2}$。觀察重心線段長度$\overline{G_1G_2}$、$\overline{G_2G_3}$、….. $\overline{G_\iota G_{(\iota+1)}}$可估計**重心的移動速率變化。**

另外，用 Excel 計算出$\overline{G_1G_2}$、$\overline{G_2G_3}$、$\overline{G_3G_4}$….. $\overline{G_{179}G_{180}}$，發現線段越來越短，速率越來越小。但只是大略估計，因為$\widehat{G_1G_2} \neq \overline{G_1G_2}$。

為求更精確，我們亦嘗試了每 0.1 度取值一次、每 0.01 度取值一次。受限版面在此省略。



重心線段長度變化 圖(31)

(2) 利用微分來求速率

已知**重心軌跡長度** $= \frac{1}{3}\int_0^{\alpha}\sqrt{16cos\theta + 20}\,d\theta$，本研究中，角度的變化成等速率增加，時間的變化與角度的變化成正比。對軌跡的微分，得到單位時間內長度的變化，即為速率。

$$\left(\frac{1}{3}\int_0^{t}\sqrt{16cos\theta + 20}\,d\theta\right)' = \frac{1}{3}\sqrt{16\cos(t) + 20}$$

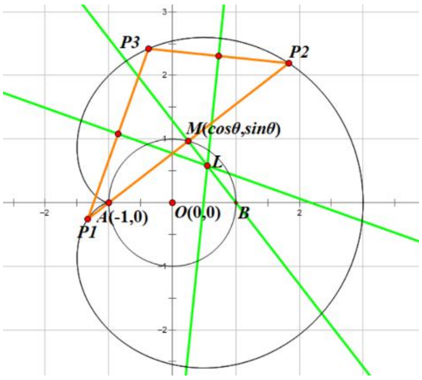
因為$\cos(t)$在 0°到 180°時是遞減函數，所以重心 G 的移動速率在 0°到 180°之間會越來越小。

三、內接三角形的外心之探討

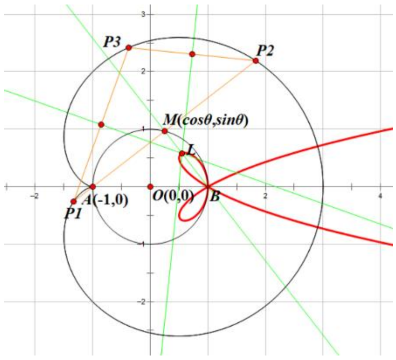
(一) 作圖法(利用 GSP 作圖)

作內接三角形三邊長$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_3}$、$\overline{P_2P_3}$的中垂線，三條中垂線的交點即為外心。外心原為 O，但由於本研究中之原點為 O，故令外心為 L，如圖(32)。隨著 M

點的移動，外心軌跡如圖(33)。



圖(32)



圖(33)

(二) 外心參數式

1. $$L\ \left(\frac{1}{2}+\frac{cos^2\theta}{cos\theta+1}\ ,sin\theta-\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}\right)\ ,0°<\theta<180°$$

證明：

已知給定坐標平面上不共線三點$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$

根據線代啟示錄[5]。利用外心到三頂點等距離，列出外接圓的方程式，並透過配方法得到以下公式。令$\triangle ABC$的外心為 L，則 L 的坐標為

$$L_x=\frac{\begin{vmatrix}x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}}\ ,\ L_y=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_1^2+y_1^2 & 1\\ x_2 & x_2^2+y_2^2 & 1\\ x_3 & x_3^2+y_3^2 & 1\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}}$$

將$P_1(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2},sin\theta-2sin\frac{\theta}{2})$、$P_2(cos\theta+2cos\frac{\theta}{2},sin\theta+2sin\frac{\theta}{2})$、

$P_3(2cos\theta+cos2\theta,2sin\theta+sin2\theta)$ 代入上述公式後得：

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\theta-2cos\,(0.5\theta) & sin\theta-2sin\,(0.5\theta) & 1\\ cos\theta+2cos\,(0.5\theta) & sin\theta+2sin\,(0.5\theta) & 1\\ 2cos\theta+cos2\theta & 2sin\theta+sin2\theta & 1\end{vmatrix}=4\,sin(0.5\theta)+4sin\,(1.5\theta)$$

代入外心坐標公式，得：

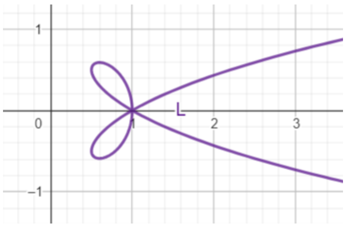
$$L_x=\frac{12\,sin(0.5\theta)+4sin\,(2.5\theta)}{2(4\,sin(0.5\theta)+4\,sin(1.5\theta))}=\frac{3sin(0.5\theta)+sin\,(2.5\theta)}{2\,sin(0.5\theta)+2\,sin(1.5\theta)}$$

$$L_y=\frac{4\,cos(0.5\theta)-4cos\,(2.5\theta)}{2(4\,sin(0.5\theta)+4\,sin(1.5\theta))}=\frac{cos(0.5\theta)-cos\,(2.5\theta)}{2\,sin(0.5\theta)+2\,sin(1.5\theta)}$$

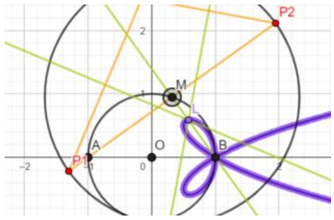
用 Wolfram Alpha 計算機作化簡，得 $L\,(\frac{1}{2}+\frac{cos^2\theta}{cos\theta+1},sin\theta-\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2})$ ■

2. 參數式的驗證

利用 GGB 軟體，將外心參數式輸入，展示曲線，如圖(34)。同時利用外心尺規作圖方法畫出重心軌跡。發現尺規作圖的軌跡與參數式軌跡重疊。見圖(35)。



圖(34)



圖(35)

(三) 外心軌跡的討論

1. 極值的探討(討論範圍：$0° \leq \theta < 180°$)

x 坐標沒有最大值 ；當$\theta = \frac{\pi}{2}$時，x 坐標有最小值$= \frac{1}{2}$ 。
當$\theta = 1.19606$ 時，y 坐標有最大值$= 0.58998$；
當$\theta = 1.11214 \times 10^{-7}$ 時，y 坐標有區間最小值$= 0$；
y 坐標沒有最小值 。
(註：這裡的θ是弧度)

(1) 利用 Excel 計算

將外心坐標輸入至 Excel 後，分別計算當$\theta = 1°$、$2°$、$3°$ ... $180°$時，得：

i. 當θ =179°時，x 坐標有 max 6564.27；當θ = 90°時，x 坐標有 min 0.50

ii. 當θ =69°時，y 坐標有 max 0.5899；當θ =179°時，y 坐標有 min -57.27

(2) 利用三角函數求極值

x 坐標 ： $\frac{1}{2}+\frac{cos^2\theta}{cos\theta+1}$ ，$cos\theta > -1 \Rightarrow cos\theta + 1 > 0$，且$cos^2\theta \geq 0$，故當

$cos\theta = 0$，$\frac{cos^2\theta}{cos\theta+1}$有$min = 0$。得$\theta = 90°$時，$x$ 坐標有 $min = \frac{1}{2}$ 。

當$cos\theta$接近-1時，x 坐標會很大，max 不存在。

y坐標 ：$sin\theta - \frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}$ ，其中 $0 \leq sin\theta < 1$，$0 \leq tan\frac{\theta}{2} < \infty$，($0° \leq \theta < 180°$)

$-\infty < -\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2} \leq 0 \Rightarrow sin\theta - \frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}$沒有最小值。

(3) 利用 Wolfram Alpha 數學計算軟體

得到當$\theta = 1.19606$時，y 坐標有最大值$= 0.58998$。

當$\theta = 1.11214 \times 10^{-7}$時，$y$ 坐標有區間最小值$= 0$。

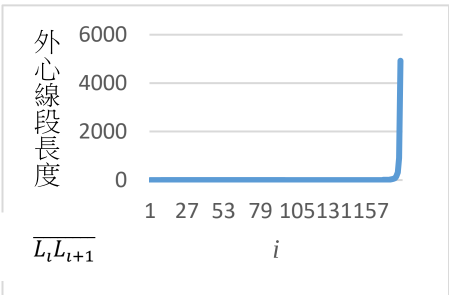
我們發現利用 Execl 來計算時，只能算估計值。因為極值有可能發生在θ不是正整數的時候或是不存在，我們代入的角度中，θ =179°是所有值最大的，便誤植為最大值，當我們代入θ =179.5°時，就產生更大的值，且函數值也會一直越來越大。

2. 外心軌跡長度

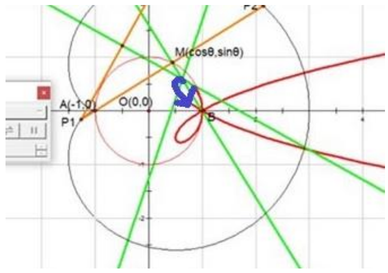
因為 x 坐標和 y 坐標會一直越來越大，所以軌跡長度無限大。

3. 外心的移動速率

利用 Excel 做線段長度的變化，當θ從 0°到 180°越來越大時，則$\overline{L_iL_{i+1}}$長度越來越大，即外心的移動速率越來越大。



外心線段長度變化　圖(36)



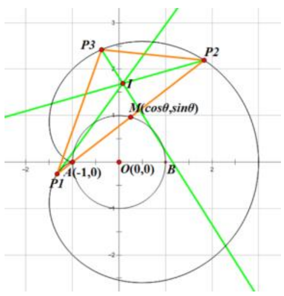
外心速率越來越大　圖(37)

受限於版面，在此省略 Wolfram Alpha 計算機對弧長作積分以及微分的步驟。

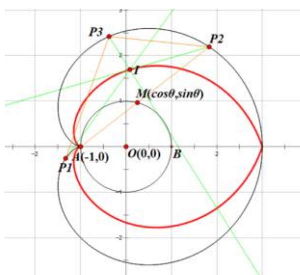
四、內接三角形的內心之探討

(一) 作圖法(利用 GSP 作圖)

作三角形$\angle P_1$、$\angle P_2$、$\angle P_3$的內角平分線，其交點即為內心，令內心為 I。見圖(38)。隨著 M 點的移動，內心軌跡如圖(39)。



圖(38)



圖(39)

(二) 內心參數式

1.

$$I_x=\frac{\left(\cos\theta-\ 2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+\left(\cos\theta+2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+4(2\cos\theta+\cos2\theta\ )}{4+\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}}$$

$$I_y=\frac{\left(\sin\theta-2\sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot\cos\theta+6}+\left(\ \sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+4(\ 2\sin\theta+\sin2\theta\ )}{4+\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}}$$

$$0^\circ<\theta<180^\circ$$

證明：

利用頂點坐標求出內心之參數式。若三角形三頂點$A(x_1,x_2)$、$\mathrm{B}(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，令A,B,C的對邊長分別為a,b,c，則根據內分比性質以及分點公式與角平分線公式，可推導出內心坐標公式：

$$I_x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}\text{，}I_y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$$

$\triangle\ P_1P_2P_3$中，$\overline{P_1P_2}=4$

$$\overline{P_1P_3}=\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot\cos\theta+6}$$

$$\overline{P_2P_3}=\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot\cos\theta+6}$$

∵三角形周長為$4+\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot\cos\theta+6}+\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot\cos\theta+6}$

∴內心坐標為(I_x,I_y)，其中

$$I_x=\frac{\left(\cos\theta-2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+\left(\cos\theta+2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+4(2\cos\theta+\cos2\theta)}{4+\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}}$$

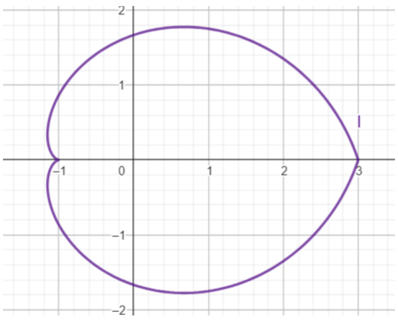
$$I_y=\frac{\left(\sin\theta-2\sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cdot\cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot\cos\theta+6}+\left(\sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+4(2\sin\theta+\sin2\theta)}{4+\sqrt{4\cos\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}+\sqrt{-4\cos\frac{\theta}{2}-4\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\theta+6}}$$

■

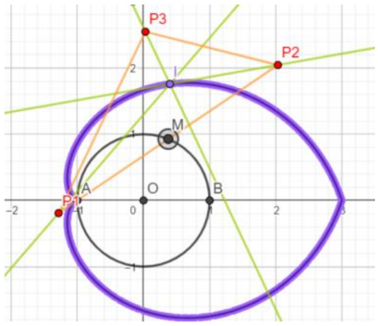
2. 參數式的驗證

利用 GGB 軟體，將內心參數式輸入，展示曲線如圖(40)，並利用尺規作

圖法畫出內接三角形之內心，如圖(41)。尺規作圖的軌跡與參數式軌跡重疊。



圖(40)



圖(41)

(三) 內心軌跡的討論

1. 極值的探討(*討論範圍*：$0° \le \theta \le 180°$)

猜測當$\theta = 0°$時，則 x 坐標有最大值$= 3$；當$\theta = 135°$時，則 x 坐標有最小值$= -1.1518$ 。

猜測當$\theta = 62°$時，則 y 坐標有最大值$= 1.7764$ ；當$\theta = 0°$時，則 y 坐標有最小值$= 0$ 。

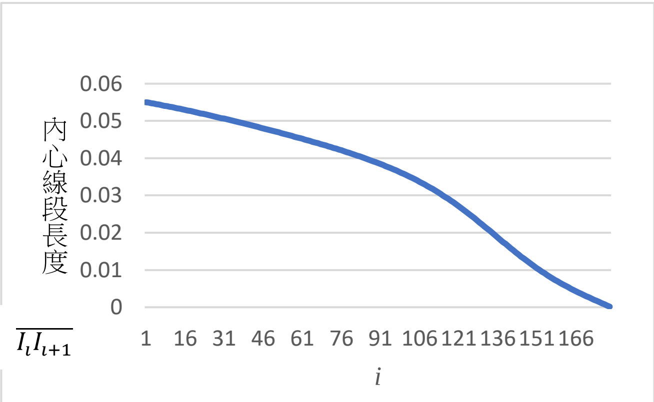
利用 Excel 來計算，將坐標的參數式代入 Excel。分別計算範圍內的整數角度得到以上數值，這些數值是近似值。

2. 弧長

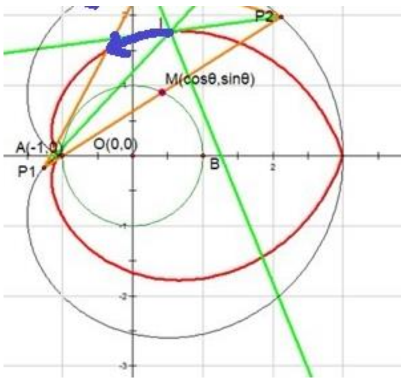
利用 Excel 計算後得弧長為 6.042108273。這個數值只能作為近似值。

3. 移動速率

圖形對稱於 x 軸，移動情況也會對稱於 x 軸，本研究僅觀察 0°到 180°。利用 Excel 計算線段長度的變化，得到當θ從 0°到 180°越來越大時，$\overline{I_\iota I_{\iota+1}}$長度會越來越小，即內心的移動速率越來越小。



內心線段長度變化 圖(42)



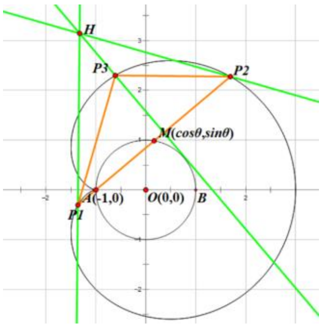
內心速率越來越小 圖(43)

由於內心的參數式太長，我們無法以免費版的 Wolfram alpha 處理，故只呈現 Excel 的結果。

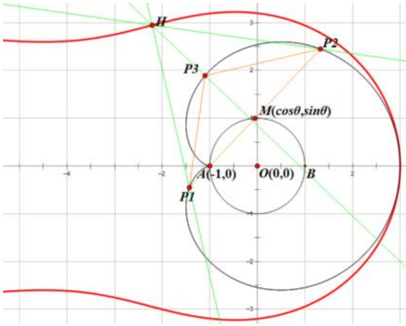
五、內接三角形的垂心之探討

(一) 作圖法(利用 GSP 作圖)

作三邊$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_1P_3}$、$\overline{P_2P_3}$的三高的交點即為垂心，令垂心為 H。見圖(44)。隨著 M 點的移動，垂心軌跡如圖(45)。



圖(44)



圖(45)

(二) 垂心參數式

1. $H(2cos\theta + cos2\theta - tan^2\frac{\theta}{2}, 2sin\theta + sin2\theta + tan\frac{\theta}{2})$ ， $0° < \theta < 180°$

證明：

利用外心與重心參數式，進一步求出垂心之參數式。令垂心坐標(H_x, H_y)，根據尤拉線，得知$\overline{HG}:\overline{GL} = 2:1$

$$\begin{cases} \frac{2L_x+H_x}{3} = G_x \\ \frac{2L_y+H_y}{3} = G_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_x = 3G_x - 2L_x \\ H_y = 3G_y - 2L_y \end{cases}$$

將外心與重心坐標代入後得：

$$H_x = 4cos\theta + cos2\theta - 2(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\theta}{cos\theta + 1})$$

$$H_y = 4sin\theta + sin2\theta - 2\left(sin\theta - \frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}\right)$$

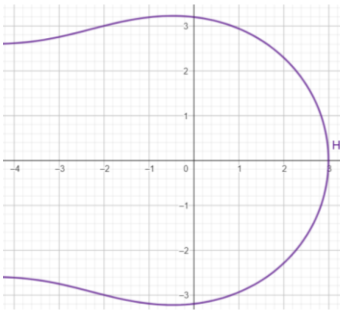
再將H_x及H_y代入 Wolfram Alpha 數學計算軟體作化簡，得

$$H(2cos\theta + cos2\theta - tan^2\frac{\theta}{2},\ 2sin\theta + sin2\theta + tan\frac{\theta}{2})$$ ■

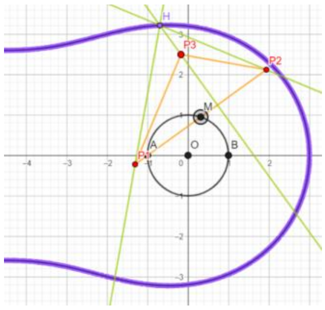
2. 參數式的驗證

利用 GGB 軟體，將垂心參數式輸入，展示曲線如圖(46)，並利用尺規作圖

方法畫出內接三角形之垂心，如圖(47)。尺規作圖軌跡與參數式軌跡重疊。



圖(46)



圖(47)

(三) 垂心軌跡的討論

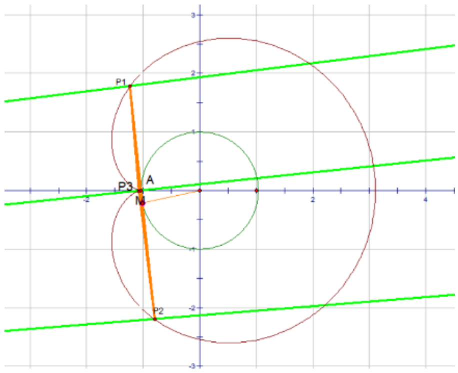
1. 極值的探討 (討論範圍：$0° \leq \theta \leq 180°$)

當$\theta = 0$ 時，則 x 坐標有最大值$= 3$；x 坐標沒有最小值。 當$\theta \approx 1.1960$ 時，則 y 坐標有區間最大值≈ 3.2237； 當$\theta = \frac{2\pi}{3}$時，則 y 坐標有區間最小值$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$；當$\theta = 0$ 時，則 y 坐標有最小值$= 0$。 (註：這裡的θ是弧度)

由極值發現，垂心軌跡和心臟線軌跡皆與水平線 $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}$相切。

2. 軌跡長度

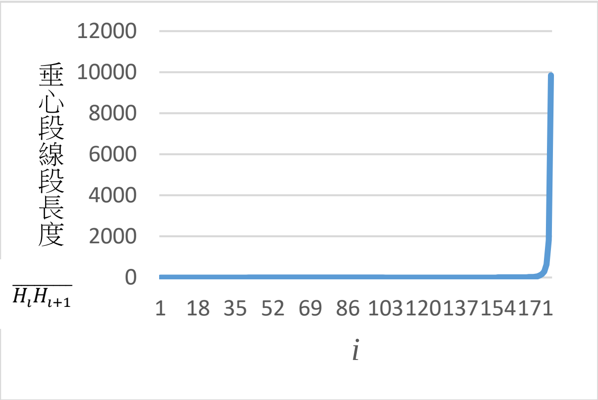
當θ越接近 180°時，M 點會越接近 A 點，$\overleftrightarrow{P_1P_2}$也越接近鉛垂線，三條高的斜率也會趨近於 0，此時三高的交點離原點越來越遠，所以垂心的軌跡會向 x 軸負向發散。由於發散的關係，因此垂心的軌跡長度會無限大，如圖(48)。



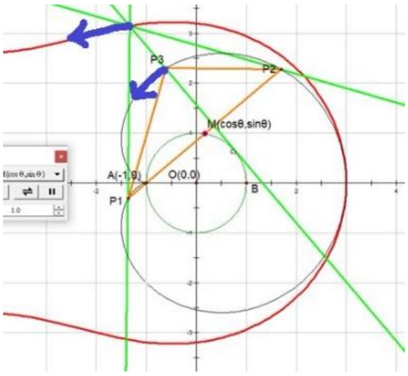
圖(48)

3. 移動速率

圖形對稱於 x 軸，移動情況也會對稱於 x 軸，本研究僅觀察 0°到 180°。利用 Excel 做線段長度的變化，得到當θ從 0°到 170°度之間，$\overline{H_iH_{i+1}}$長度剛開始增加緩慢，而自 171°起急遽變長，垂心的移動速率越來越大。



垂心線段長度變化 圖(49)



垂心速率越來越大 圖(50)

受限於版面，在此省略 Wolfram Alpha 計算機對弧長作積分以及微分的步驟。

內接三角形必為鈍角三角形

我們觀察發現內接三角形的外心及垂心恆在三角形的外部，所以我們大膽推測：無論 M 點在何處，**內接三角形必為鈍角三角形**。以下利用畢氏定理證明此推測。

證明：

利用距離公式將P_1、P_2、P_3三點坐標代入後，得$\overline{P_1P_2}$ =4

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4 \cdot cos\frac{3\theta}{2} + 2 \cdot cos\theta + 6}$$

$$\overline{P_2P_3} = \sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4 \cdot cos\frac{3\theta}{2} + 2 \cdot cos\theta + 6}$$

若三角形的(兩短邊平方和)小於(最大邊平方)，則為鈍角三角形，

即證明：$\overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2 < \overline{P_1P_2}^2$

$$\because \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2 = 4cos\frac{\theta}{2} + 4 \cdot cos\frac{3\theta}{2} + 2 \cdot cos\theta + 6 - 4cos\frac{\theta}{2} - 4 \cdot cos\frac{3\theta}{2} + 2 \cdot cos\theta + 6$$

$$= 12 + 4cos\theta \qquad 且\overline{P_1P_2}^2 = 16$$

已知$cos\theta \leq 1$，$cos0° = 1$，在$\theta = 0°$時不存在三角形，故$cos\theta < 1$

$\therefore \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2 = 12 + 4\cos\theta$

$< 12 + 4 = 16 = \overline{P_1P_2}^2$不等式成立

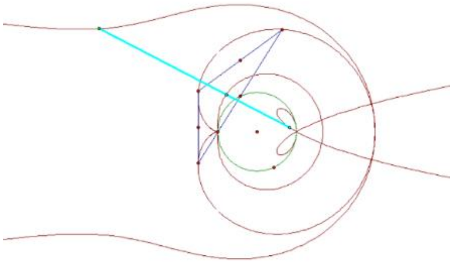
因此，$\triangle P_1P_2P_3$是鈍角三角形 ■

六、內接三角形的尤拉線討論

(一) 尤拉線

1. 尤拉線作圖

如圖(51)，同時作內接三角形的垂心、外心、重心，並連三點形成尤拉線。 $\overline{HG}:\overline{GL}$恆為 2：1，符合尤拉線的特性。



圖(51)

2. 尤拉線的直線方程式

$$3y-(4sin\theta+sin2\theta)=\frac{6cos\frac{\theta}{2}-3cos\frac{3\theta}{2}-2cos\frac{5\theta}{2}-cos\frac{7\theta}{2}}{-10sin\frac{\theta}{2}+3sin\frac{3\theta}{2}+2sin\frac{5\theta}{2}+sin\frac{7\theta}{2}}(3x-(4cos\theta+cos2\theta))$$

$$0°<\theta<180°$$

證明：

尤拉線通過外心、重心和垂心。利用直線斜率$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-(\text{重心的}y\text{坐標})}{x-(\text{重心的}x\text{坐標})}$，寫出直線方程式。

$$\frac{G_y-L_y}{G_x-L_x}=\frac{y-G_y}{x-G_x}$$

代入坐標，即可得尤拉線。 ■

3. 內心在尤拉線上的情況(當內接三角形為等腰三角形)

將四心的軌跡疊合。發現當內心落在尤拉線上時，M點以及P_3點也在尤拉線上。**重心、內心、外心、垂心、M點、P_3六點共線發生在$\theta=90°$時。**

證明：

(1) 當$\theta=90°$時

將$\theta=90°$代入尤拉線方程式，得

$$3y-4sin90°-sin180=\frac{6cos45°-3cos135°-2cos225°-cos315°}{-10sin45°+3sin135°+2sin225°+sin315°}(3x-4cos90°-cos180°)$$

化簡得 $x+y=1$

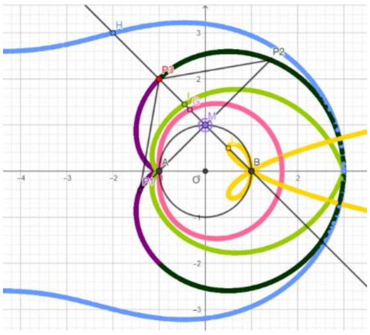
再將$\theta=90°$代入六個點的參數式，得

$G\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ 、$I\left(2-\sqrt{6},\sqrt{6}-1\right)$ 、$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 、$H(-2,3)$ 、$M(0,1)$ 、P_3 $(-1,2)$六個點都在尤拉線上，而$(-1,2)$恰為P_1軌跡與P_2軌跡的分界點。見圖(52)。

此時 P_1 $\left(-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$ 、P_2 $(\sqrt{2},1+\sqrt{2})$，$\overline{P_1P_2}=4$，$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_3}=\sqrt{5}$，

$\triangle P_1P_2P_3$底邊上的高 $=\sqrt{2}$

此時內接三角形的(底邊上的高)：(底邊一半)=1:$\sqrt{2}$，恰為白銀比例。 ■



尤拉線方程式 *x*+*y*=1 圖(52)

4. 連接垂心 *H* 和P_3、連接 M 點和外心 L，則

$$\boxed{\overline{HP_3}\text{平行於}\overline{ML}\text{，且}\overline{HP_3}:\overline{ML}=2:1}$$

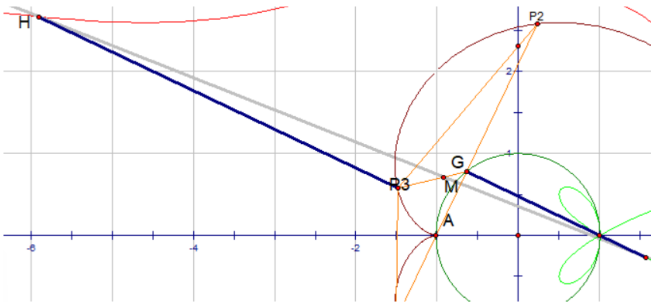
證明：

在$\triangle GHP_3$和$\triangle GLM$中，

$\because \angle HGP_3=\angle LGM$(對頂角相等)，且$\overline{HG}:\overline{LG}=\overline{P_3G}:\overline{MG}=2:1$，

$\therefore \triangle GHP_3 \sim \triangle GLM$($SAS$相似)。

因此，$\overline{HP_3}//\overline{ML}$，$\overline{HP_3}:\overline{ML}=2:1$



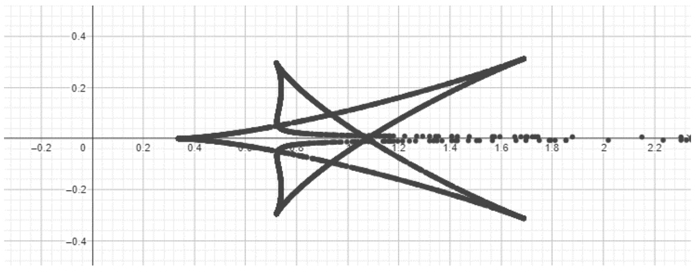
圖(53)

5.尤拉線的包絡線

$$x=\frac{1389cos0.5\theta-978cos1.5\theta-597cos2.5\theta-66cos3.5\theta+90cos4.5\theta+153cos5.5\theta+24cos6.5\theta-3cos7.5\theta-10cos8.5\theta-2cos9.5\theta}{1689cos0.5\theta-930cos1.5\theta-1008cos2.5\theta-234cos3.5\theta+348cos4.5\theta+114cos5.5\theta+24cos6.5\theta-12cos7.5\theta}$$

$$y=\frac{-18sin\theta-24sin2\theta+16sin3\theta+15sin4\theta-6sin5\theta-2sin6\theta}{24cos\theta+54cos2\theta+48cos3\theta-12cos4\theta-114}$$

包絡線參數式軌跡如圖(54)：



圖(54)

伍、　結論

一、心臟線特定點內接三角形三頂點坐標：

$\left(cos\theta+2cos\frac{\theta}{2},sin\theta+2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2},sin\theta-2sin\frac{\theta}{2})$、$(2cos\theta+cos2\theta,2sin\theta+sin2\theta)$

二、心臟線特定點內接三角形三邊直線方程式：

$y-sin\theta=tan\frac{\theta}{2}(x-cos\theta)$、

$y=\frac{(sin2\theta+sin\theta-2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta+cos\theta-2cos\frac{\theta}{2})}x-\frac{4sin\frac{\theta}{2}+2sin\frac{3\theta}{2}+sin\theta}{cos2\theta+cos\theta-2cos\frac{\theta}{2}}$、$y=\frac{(sin2\theta+sin\theta+2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}x+\frac{4sin\frac{\theta}{2}+2sin\frac{3\theta}{2}-sin\theta}{(cos2\theta+cos\theta+2cos\frac{\theta}{2})}$

三、心臟線特定點內接三角形的重心參數式為$(\frac{4cos\theta+cos2\theta}{3},\frac{4sin\theta+sin2\theta}{3})$

四、心臟線特定點內接三角形的外心參數式為$(\frac{1}{2}+\frac{cos^2\theta}{cos\theta+1},sin\theta-\frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2})$

五、心臟線特定點內接三角形的內心參數式為(I_x,I_y)

$$I_x=\frac{\left(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2}-4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}+\left(cos\theta+2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4cos\frac{\theta}{2}+4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}+4(2cos\theta+cos2\theta)}{4+\sqrt{4cos\frac{\theta}{2}+4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}+\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2}-4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}}$$

$$I_y=\frac{\left(sin\theta-2sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2}-4\cdot cos\frac{3\theta}{2}+2\cdot cos\theta+6}+\left(sin\theta+2sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4cos\frac{\theta}{2}+4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}+4(2sin\theta+sin2\theta)}{4+\sqrt{4cos\frac{\theta}{2}+4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}+\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2}-4cos\frac{3\theta}{2}+2cos\theta+6}}$$

六、心臟線特定點內接三角形垂心參數式$(2cos\theta+cos2\theta-tan^2\frac{\theta}{2}\ ,\ 2sin\theta+sin2\theta+tan\frac{\theta}{2})$

七、心臟線特定點內接三角形恆為鈍角三角形。

八、尤拉線方程式：$3y-(4sin\theta+sin2\theta)=\frac{6cos\frac{\theta}{2}-3cos\frac{3\theta}{2}-2cos\frac{5\theta}{2}-cos\frac{7\theta}{2}}{-10sin\frac{\theta}{2}+3sin\frac{3\theta}{2}+2sin\frac{5\theta}{2}+sin\frac{7\theta}{2}}(3x-(4cos\theta+cos2\theta))$。

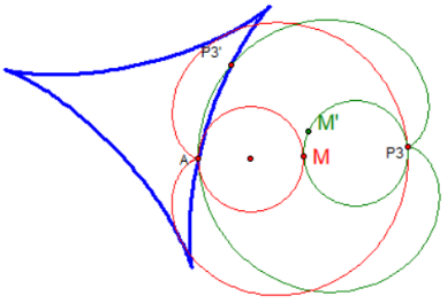
九、當$\theta=\pm90°$時，M點、P_3、重心、內心、外心、垂心六點共線，其直線方程式為$x\pm y=1$。

十、$\overline{HP_3}$平行於$\overline{ML}$，且$\overline{HP_3}:\overline{ML}=2:1$。

陸、未來展望

一、作對稱心臟線，產生新的P_3

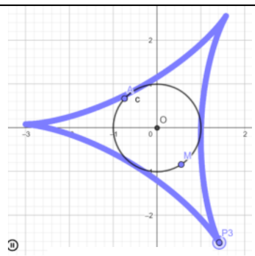
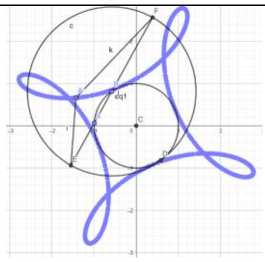
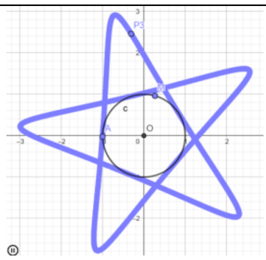
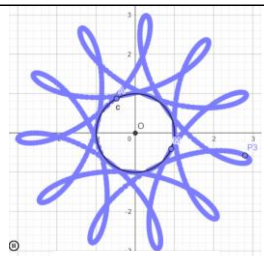
以過 M 點的切線為對稱軸作基圓的對稱圓及 A 點(歧點)的對稱點，並設定新的動點，作出新的對稱心臟線，當 M 點移動時，新的P_3會形成特殊的封閉型軌跡會形成特殊的封閉型軌跡，如圖(55)，我們希望未來能探討其數學特性。



圖(55)

二、將心臟線中的定點(歧點)A 改為動點

將歧點 A 設定為動點，同時和原本的動點 M 各自做逆時針等速運動，並記錄P_3的軌跡。以下將「*A點移動速率：M點移動速率*」簡記為「$A：M$」

 圖(56)	 圖(57)	 圖(58)	 圖(59)
$A：M = 4:1$	$A：M = 5:1$	$A：M = 7:2$	$A：M = 14:3$
$4 - 1 = 3$(個角)	$5 - 1 = 4$(個角)	$7 - 2 = 5$(個角)	$14 - 3 = 11$(個角)

四種擺線，將速率比記為最簡整數比，角的數量都是$A - M$。設定不同的速率比，P_3的軌跡圖形有存在規律。希望未來能對此做進一步的研究。

柒、　參考資料

[1] 葉芯瑋、汪思翰(2019)。嘉義市中小學科展第 38 屆作品笛卡兒的愛情故事。

[2] 安娜·維特曼(2017)。原來數學這麼漂亮，30 種激發創意的手繪練習。小天下出版。

[3] 趙文敏(2000 年)。心臟線。科學月刊第二十一卷第五期。

[4] Weisstein, Eric W. "Envelope." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/Envelope.html

[5] 周志成。線代啟示綠。取自利用行列式推導三角形的四心坐標公式 | 線代啟示錄 (wordpress.com)

圖片來源：本研究圖(6)至圖(59)皆為作者利用 GSP 或 GGB 或 Excel 繪製而成。

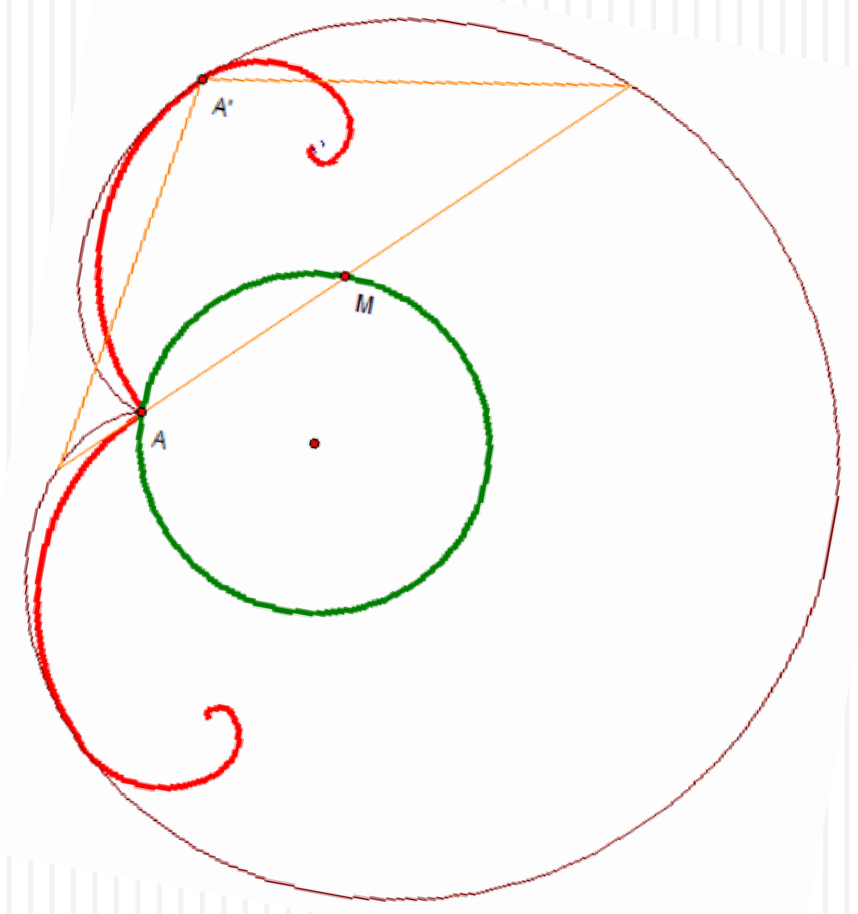
【評語】030409

（1）本作品藉由心臟線特定點內接三角形之三頂點坐標參數式，探討其重心、內心和垂心的軌跡，並利用幾何軟體繪製其軌跡圖形，進而討論四心的極值及其隨著參數角度變化之移動速率。

（2）作者利用解析幾何的方法及豐富的數學工具來進行此研究，可惜所得的軌跡及方程沒有太大的延伸。

作品簡報

扎心語錄-三角觀「心」



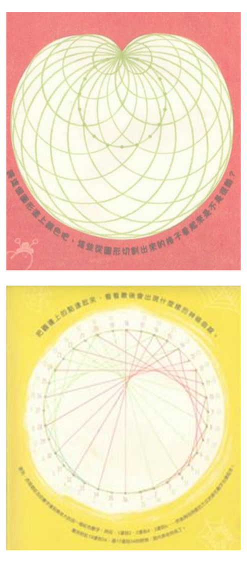
摘要

本研究探討心臟線特定點內接三角形。以動點M生成兩種心臟線的軌跡，將其疊合可得到三個特定點，形成**心臟線特定點內接三角形**。利用相似形做出內接三角形**三頂點坐標參數式**、**三邊的直線方程式**並觀察直線族形成之**包絡線**。利用幾何軟體展示心臟線特定點內接三角形之**重心、外心、內心和垂心的軌跡**並做出**軌跡參數式**。並討論四心的極值及其隨著角度變化之移動速率。此外，我們發現此三角形恆為**鈍角三角形**。最後，給出內接三角形的**尤拉線方程式**，觀察直線族形成之包絡線。並發現當內接三角形為等腰三角形時，**(底邊上的高)：(底角到歧點的長度)恰為白銀比例**。

前言

一、研究動機

學姐分享她的心臟線研究，讓我們想起小時候曾畫過這樣的**包絡線圖形**，我們開始好奇起心臟線與三角形之間是否有更多的數學奧秘？於是**在幾何軟體畫出心臟線內接三角形的四心**，移動三角形，發現四心位置會隨之變動，形成特殊的軌跡。於是開始研究心臟線內接三角形。



二、研究目的

(一)探討內接三角形三頂點坐標參數式，由參數式求出心臟線的極值。

(二)探討內接三角形三邊的直線方程式，及其直線族形成之包絡線。

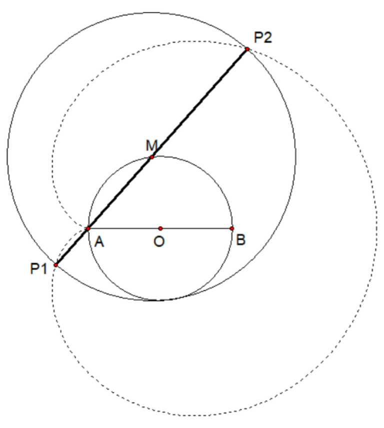
(三)探討內接三角形重心、外心、內心和垂心的軌跡，做出軌跡參數式。求四心的極值及其隨著角度變化之移動速率。

(四)探討內接三角形尤拉線方程式，及其直線族形成之包絡線。

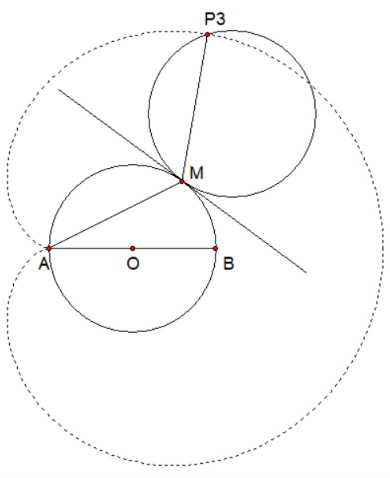
三、文獻回顧

心臟線的兩種做法

1.第一種作法：在圓O上取一個定點A、取一動點M。在$\overleftrightarrow{AM}$上取兩個點P_1與P_2，使得$\overline{MP_1}=\overline{MP_2}=$給定圓$O$的直徑，所有此種$P_1$與$P_2$所成的圖形是心臟線。



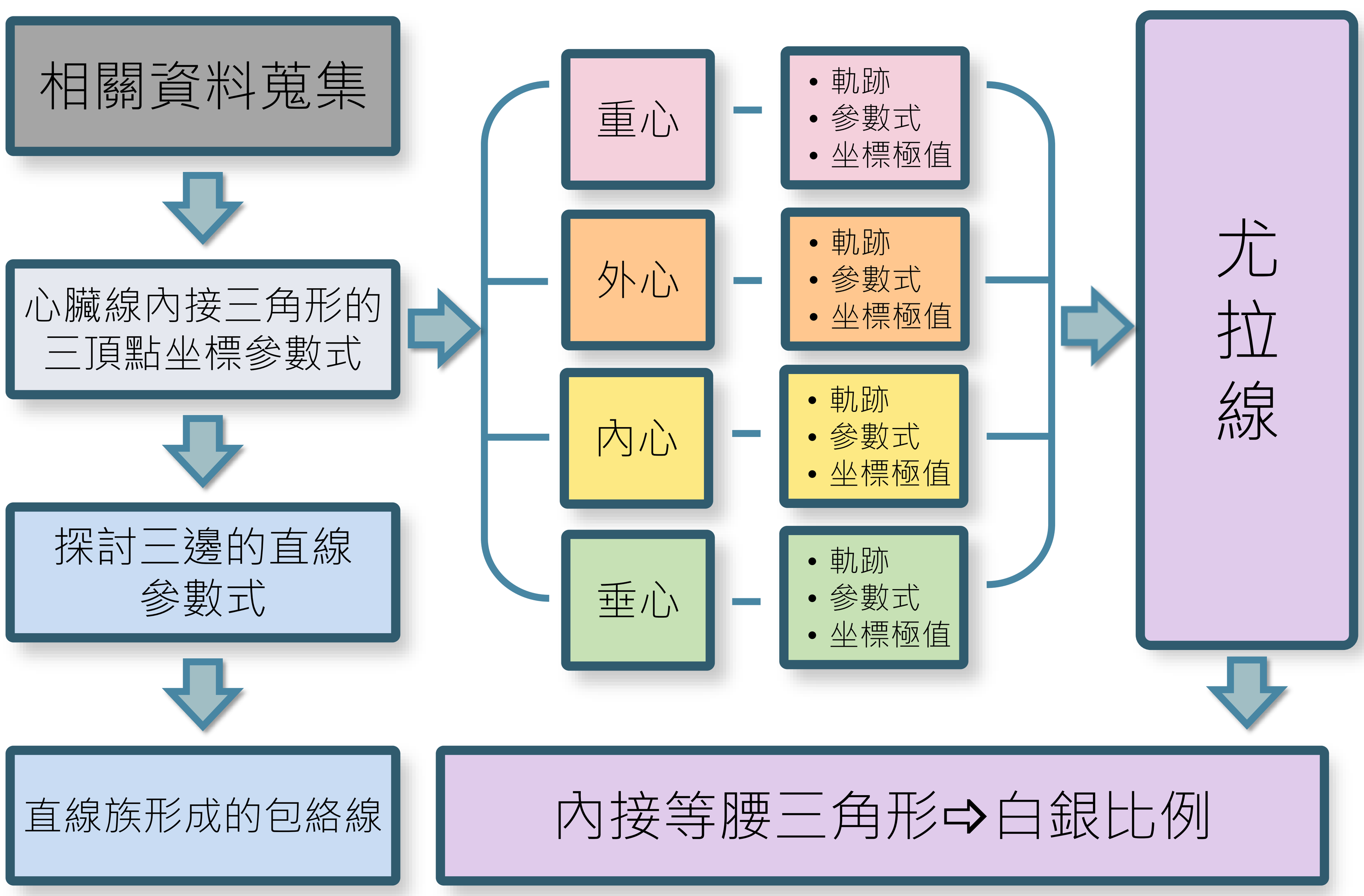
2.第二種作法：在圓O上取一個定點A、取一動點M。過M點做圓的切線，以切線為對稱軸，做A點的對稱點P_3。P_3的軌跡是心臟線。



研究設備與器材

1. GSP 幾何畫板　2. GGB 動態幾何軟體
3. Matrix Calculator 行列式計算機
4. Wolfram Alpha 數學計算軟體

研究過程與方法

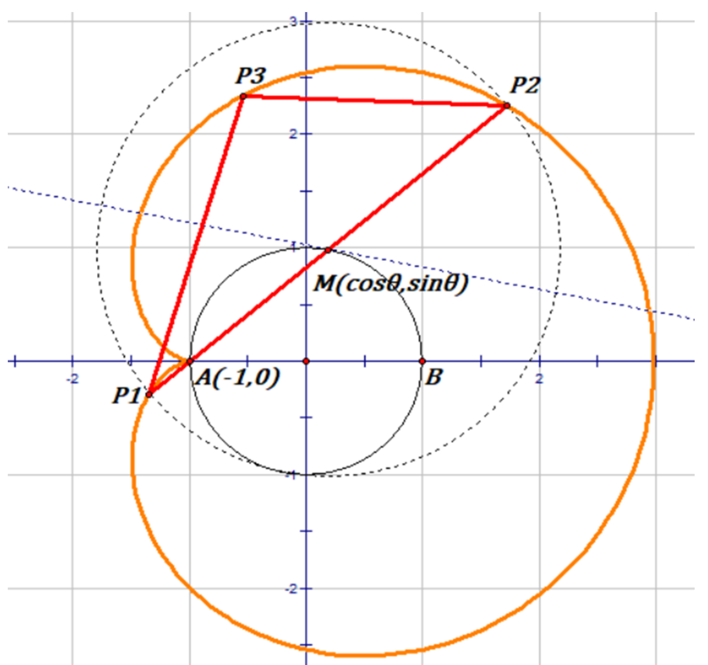


註：
本研究中，P_1、P_2、P_3的公式，以及$\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_1P_3}$、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$、各種軌跡之參數式、弧長及移動速率，僅討論$0°<\theta<180°$情況。
圖形則完整呈現$0°\le\theta\le360°$的情況。
(因為參數式$180°<\theta<360°$的情況可由$0°<\theta<180°$以x軸為對稱軸，作對稱而得，故在此省略)

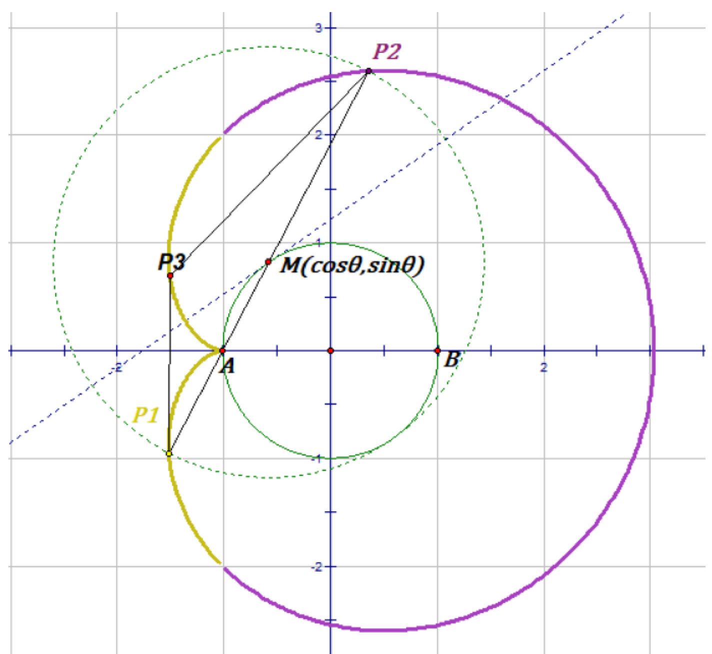
研究結果

一、內接三角形之三頂點坐標參數式及三邊之直線方程式

(一) 內接三角形的三頂點參數式



將兩種心臟線的作法疊合,稱為心臟線特定點內接三角形。



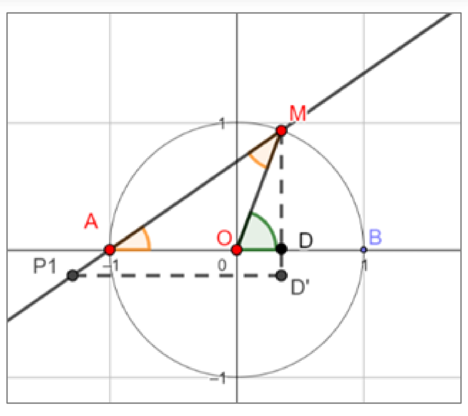
以$x=-1$為分界, **P_1軌跡在左側**；**P_2軌跡在右側**；P_3軌跡則為整個心臟線。

P_1的坐標參數式$(0°<\theta<180°)$

$$P_1\left(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2},sin\theta-2sin\frac{\theta}{2}\right)$$

證明：當$0°<\theta<180°$，$\triangle MAO$是等腰三角形，故$\angle MAD=\frac{1}{2}\angle MOB=\frac{\theta}{2}$。

$\overline{AB}//\overline{P_1D'}$，$\angle MP_1D'=\frac{\theta}{2}$。$\because\overline{MP_1}=2$



$\Rightarrow\overline{P_1D'}=2cos\frac{\theta}{2}$，$\overline{MD'}=2sin\frac{\theta}{2}$，代入$P_1(\overline{OD}-\overline{P_1D'},\overline{MD}-\overline{MD'})$

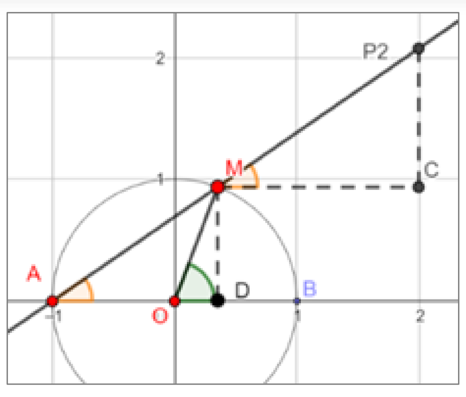
$$\therefore P_1\left(cos\theta-2cos\frac{\theta}{2},sin\theta-2sin\frac{\theta}{2}\right)$$

P_2的坐標參數式$(0°<\theta<180°)$

$$P_2\left(cos\theta+2cos\frac{\theta}{2},sin\theta+2sin\frac{\theta}{2}\right)$$

證明：當$0°<\theta<180°$，$\triangle MAO$是等腰三角形，故$\angle MAD=\frac{1}{2}\angle MOB=\frac{\theta}{2}$。

$\because\overline{AD}//\overline{MC}$，$\angle P_2MC=\frac{\theta}{2}$。$\overline{MP_2}=2$



$\Rightarrow\overline{MC}=2cos\frac{\theta}{2}$，$\overline{P_2C}=2sin\frac{\theta}{2}$，代入$P_2(\overline{OD}+\overline{MC},\overline{MD}+\overline{P_2C})$

$$\therefore P_2\left(cos\theta+2cos\frac{\theta}{2},sin\theta+2sin\frac{\theta}{2}\right)$$

P_3的坐標參數式$(0°<\theta<180°)$

$$P_3(2cos\theta+cos2\theta,2sin\theta+sin2\theta)$$

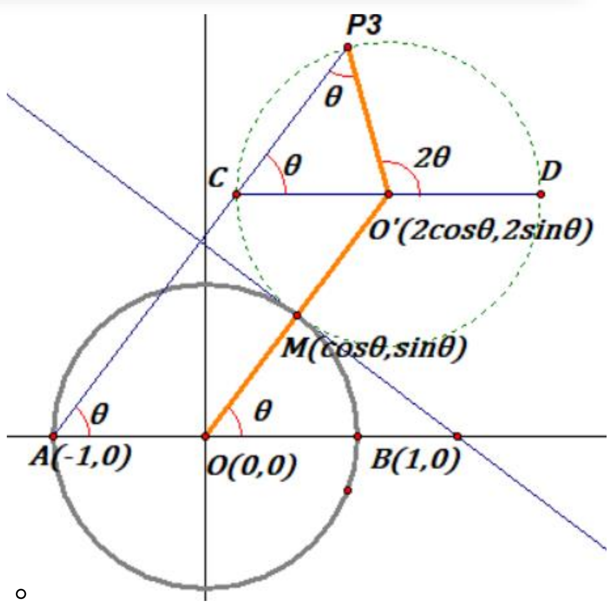
證明：以過M點的切線為對稱軸，做圓O的對稱圓O'，$O'(2cos\theta,2sin\theta)$

過O'做一直線與x軸平行且與圓O'交於C、D點。$\triangle P_3CO'$中,$\angle P_3O'D=2\theta$。

$\overrightarrow{P_3O'}$與$\overrightarrow{CO'}$夾角為2θ，

P_3坐標是D點以O'為圓心，旋轉2θ而得。

$P_3(O'$點x坐標$+cos2\theta,O'$點y坐標$+sin2\theta)$



$$\therefore P_3(2cos\theta+cos2\theta,2sin\theta+sin2\theta)$$

心臟線軌跡的極值

P_1的極值(範圍$0°\le\theta\le180°$)

$\theta=0°$，x坐標$max=-1$；$\theta=120°$，x坐標$min=-1.5$
$\theta=0°$，y坐標$max=0$；$\theta=180°$，y坐標$min=-2$

*x坐標*求法：利用配方法；*y坐標*求法：利用遞減函數的概念

P_2的極值(範圍$0°\le\theta\le180°$)

$\theta=0°$，x坐標$max=3$；$\theta=180°$，x坐標$min=-1$
$\theta=120°$，y坐標$max=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；$\theta=0°$，y坐標$min=0$

*x坐標*求法：利用配方法；*y坐標*求法：利用算幾不等式

P_3的極值(範圍$0°\le\theta\le180°$)

$\theta=0°$，x坐標$max=3$；$\theta=120°$，x坐標$min=-1.5$
$\theta=60°$，y坐標$max=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；$\theta=0°$，y坐標$min=0$

*x坐標*求法：利用配方法；*y坐標*求法：利用算幾不等式

(二)內接三角形的三邊之直線方程式

$\overleftrightarrow{P_2P_3}$的直線方程式$(0° < \theta < 180°)$

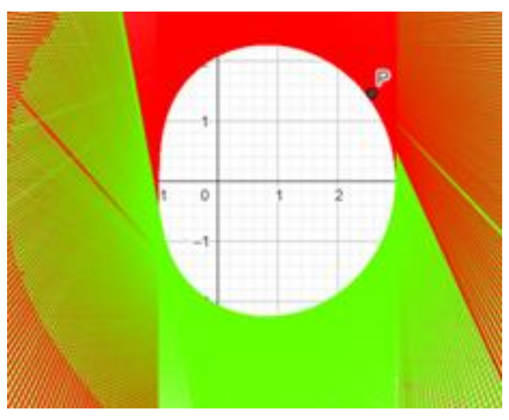
$$y = \frac{(sin2\theta + sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2})}x - \frac{4sin\frac{\theta}{2} + 2sin\frac{3\theta}{2} + sin\theta}{cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}}$$

計算過程：

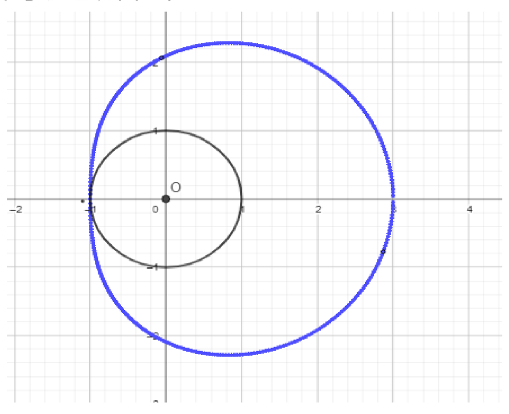
利用直線斜率$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-(P_2\text{的}y\text{坐標})}{x-(P_2\text{的}x\text{坐標})}$，做出直線方程式。

$$\frac{(2sin\theta + sin2\theta) - (sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})}{(2cos\theta + cos2\theta) - (cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})} = \frac{y - (2sin\theta + sin2\theta)}{x - (2cos\theta + cos2\theta)}$$

以Matrix Calculator計算機化簡，得此結果。



$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族軌跡



$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族形成之包絡線

$\overleftrightarrow{P_2P_3}$直線族的包絡線$(0° < \theta < 180°)$

$$x = \frac{-34sin\frac{\theta}{2} - 38sin\frac{3\theta}{2} - 29sin\frac{5\theta}{2} - 4sin\frac{7\theta}{2} + 6sin\frac{9\theta}{2} + sin\frac{11\theta}{2} + 28sin\theta + 40sin2\theta + sin3\theta + 3sin4\theta + sin5\theta}{34sin\frac{\theta}{2} + 24sin\frac{3\theta}{2} + 16sin\frac{5\theta}{2} + 10sin\frac{7\theta}{2} - 18sin\theta - 46sin2\theta - 6sin3\theta}$$

$$y = \frac{-11sin\frac{\theta}{2} - 7sin\frac{3\theta}{2} + 5sin\frac{5\theta}{2} + sin\frac{7\theta}{2} - 11sin\theta + 4sin2\theta + sin3\theta}{6cos\frac{\theta}{2} + 10cos\frac{3\theta}{2} - 6cos\theta - 10}$$

$$\begin{cases} F(x,y,\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta} = 0 \end{cases}$$

解偏微分由Wolfram Alpha數學計算軟體完成，解聯立方程式的計算過程由Matrix Calculator計算機求得。

$\overleftrightarrow{P_1P_3}$的直線方程式$(0° < \theta < 180°)$

$$y = \frac{(sin2\theta + sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})}x + \frac{4sin\frac{\theta}{2} + 2sin\frac{3\theta}{2} - sin\theta}{(cos2\theta + cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})}$$

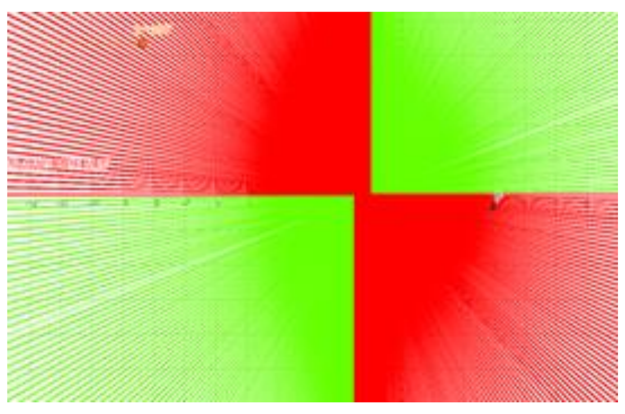
計算過程：

$$\frac{(2sin\theta + sin2\theta) - (sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})}{(2cos\theta + cos2\theta) - (cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2})} = \frac{y - (2sin\theta + sin2\theta)}{x - (2cos\theta + cos2\theta)}$$

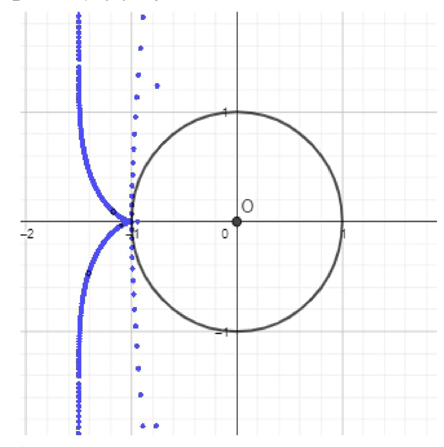
將左式之分子、分母做同類項合併之化簡，得

$$\frac{(sin2\theta + sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})} = \frac{y - (2sin\theta + sin2\theta)}{x - (2cos\theta + cos2\theta)}$$

以Matrix Calculator計算機化簡，得此結果。



$\overleftrightarrow{P_1P_3}$直線族軌跡



$\overleftrightarrow{P_1P_3}$形成之包絡線參數式軌跡

$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的直線方程式$(0° < \theta < 180°)$

$$y = tan\frac{\theta}{2}(x+1)$$

證明：

$\overleftrightarrow{P_1P_2}$通過$A(-1,0)$，利用直線斜率$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-(0)}{x-(-1)}$，做出直線方程式。

$$\frac{(sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}) - (sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}) - (cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2})} = \frac{y - 0}{x - (-1)}$$

將左式化簡，得

$$\frac{sin\frac{\theta}{2}}{cos\frac{\theta}{2}} = \frac{y-0}{x-(-1)} \Rightarrow y = tan\frac{\theta}{2}(x+1)$$

$\overleftrightarrow{P_1P_2}$直線族的包絡線$(0° < \theta < 180°)$

直觀來說$\overleftrightarrow{P_1P_2}$就是$\overleftrightarrow{MA}$，恆過定點$A(-1,0)$，包絡線退化為一個點。我們仍依照包絡線做法，產生方程式

$$\begin{cases} F(x,y,\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,\theta)}{\partial\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = tan\frac{\theta}{2}(x+1) \\ -\frac{1}{2}sin\frac{\theta}{2}y = \frac{1}{2}cos\frac{\theta}{2}(x+1) \end{cases}$$

求得$x = -1$，$y = 0$

二、內接三角形的重心之探討

重心G的坐標參數式$(0° < \theta < 180°)$

$$G\left(\frac{4cos\theta + cos2\theta}{3}, \frac{4sin\theta + sin2\theta}{3}\right)$$

極值(範圍$0° \le \theta \le 180°$)

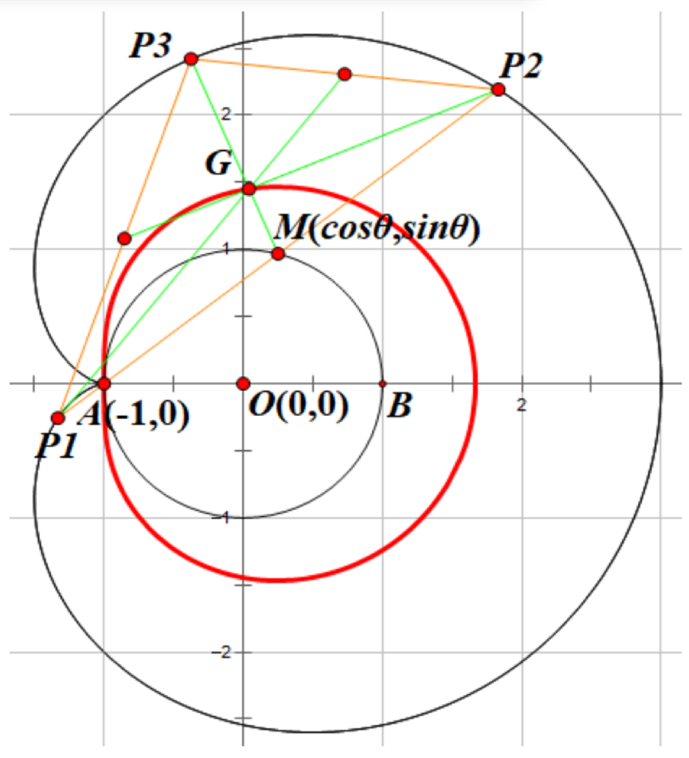
$\theta = 0°$，x坐標有$max = \frac{5}{3}$；

$\theta = 180°$，x坐標有$min = -1$；

$\theta = 2tan^{-1}(\sqrt{2\sqrt{3} - 3})$，

y坐標有$max = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$；

$\theta = 0°$, y坐標有$min = 0$

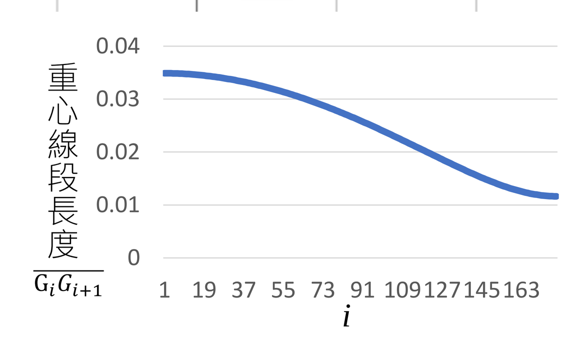


重心軌跡長度(0° ≤ θ ≤ 180°)

軌跡長度約為4.4549644

重心的移動速率(0° ≤ θ ≤ 180°)

利用Excel做線段長度的變化，當θ從0°到180°時，則$\overline{G_iG_{i+1}}$長度越來越小，重心的移動速率越來越小。



三、內接三角形的外心之探討

外心L的坐標參數式$(0° < \theta < 180°)$

$$L\left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\theta}{cos\theta + 1}, sin\theta - \frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}\right)$$

極值(範圍$0° \le \theta < 180°$)

x坐標沒有max；

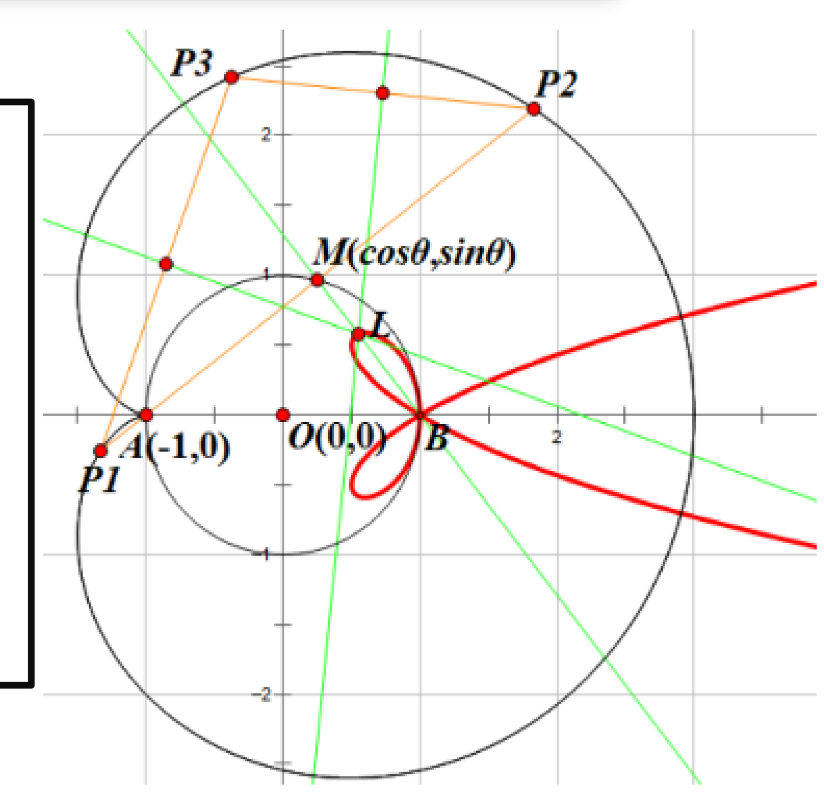
$\theta = \frac{\pi}{2}$, x坐標有$min = \frac{1}{2}$。

當$\theta \approx 1.19606$時,

y坐標有$max \approx 0.58998$；

當$\theta = 0$時, y坐標有$local\ min = 0$；

y坐標沒有min（這裡的θ是弧度）

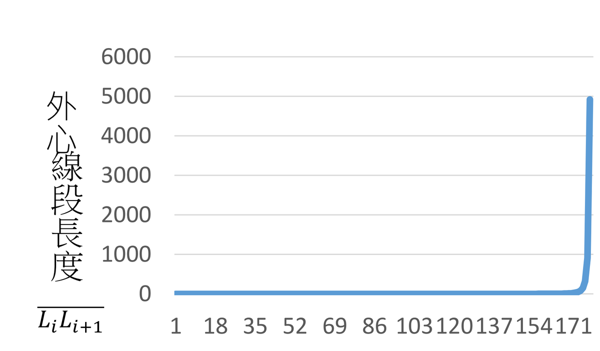


外心軌跡長度(0° ≤ θ < 180°)

積分結果沒有收斂。軌跡長度無限大。

外心的移動速率(0° ≤ θ < 180°)

利用Excel做線段長度的變化，當θ從0°到180°時，則$\overline{L_iL_{i+1}}$長度越來越大，外心的移動速率越來越大。



四、內接三角形的內心之探討

內心I的坐標參數式(I_x, I_y) $(0° < \theta < 180°)$

$$I_x = \frac{\left(cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \left(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + 4(2cos\theta + cos2\theta)}{4 + \sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6}}$$

$$I_y = \frac{\left(sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4\cdot cos\frac{3\theta}{2} + 2\cdot cos\theta + 6} + \left(sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + 4(2sin\theta + sin2\theta)}{4 + \sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6}}$$

極值(範圍$0° \le \theta \le 180°$)

猜測$\theta = 0°$時，x坐標有$min = 3$；

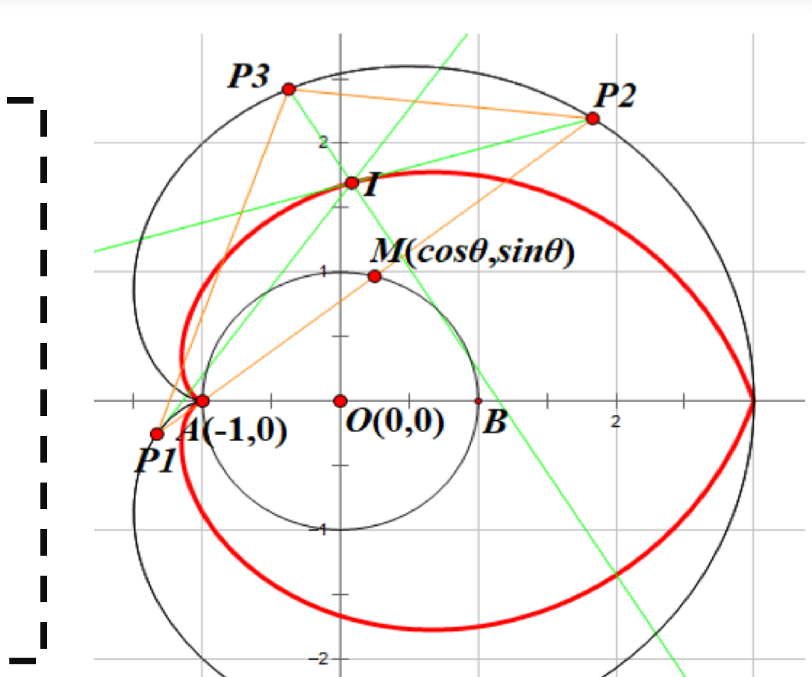
$\theta \approx 135°$時，

x坐標有$min \approx -1.15$；

猜測$\theta \approx 62°$時，

y坐標有$max \approx 1.78$；

$\theta = 0°$時，y坐標有$min = 0$。

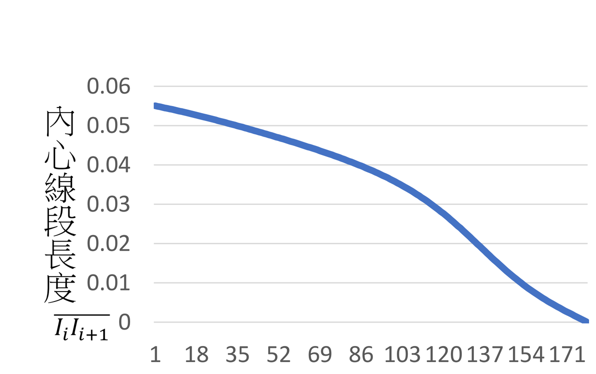


內心軌跡長度(0° ≤ θ ≤ 180°)

內心弧長約為6.042108273

內心的移動速率(0° ≤ θ ≤ 180°)

利用Excel做線段長度的變化，當θ從0°到180°時，$\overline{I_iI_{i+1}}$長度會越來越小，即內心的移動速率越來越小。



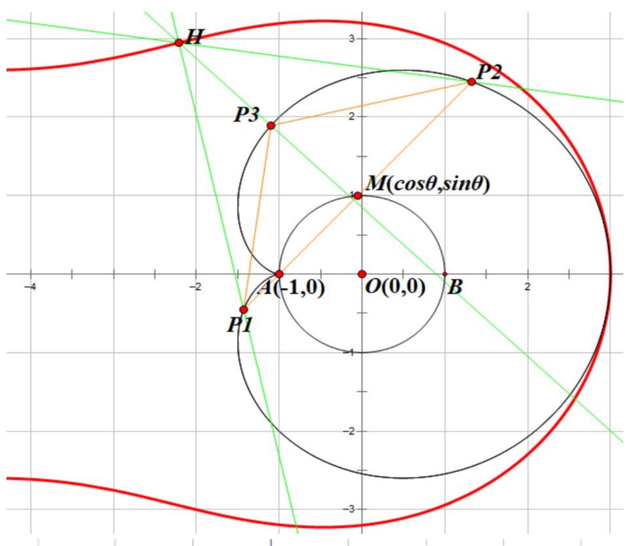
五、內接三角形的垂心之探討

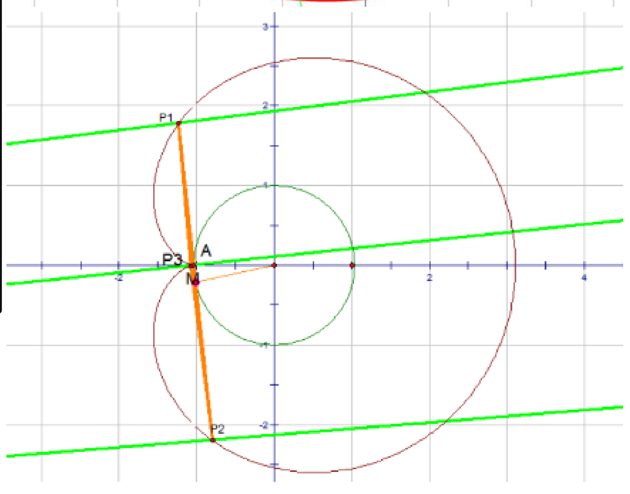
垂心H的坐標參數式($0° < \theta < 180°$)

$$H\left(2cos\theta + cos2\theta - tan^2\frac{\theta}{2}, 2sin\theta + sin2\theta + tan\frac{\theta}{2}\right)$$

極值(範圍$0° \le \theta \le 180°$)

$\theta = 0$，x坐標有$max = 3$；
x坐標沒有min。
$\theta \approx 1.2$，y坐標有$local\ max \approx 3.2$；
y坐標沒有max；
$\theta = \frac{2\pi}{3}$，y坐標有$local\ min = \frac{3\sqrt{3}}{2}$；
$\theta = 0$，y坐標有$min = 0$。
（這裡的θ是弧度）



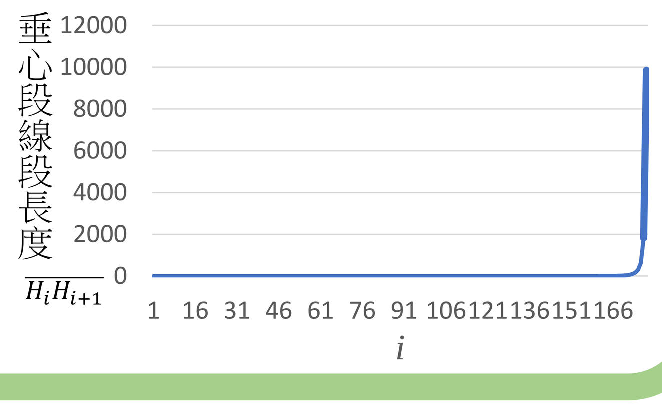


垂心軌跡長度($0° \le \theta \le 180°$)

當θ越接近180°，M點會越接近A點，$\overleftrightarrow{P_1P_2}$也越接近鉛垂線，三條高的斜率趨近於0，此時三條高的交點離原點越來越遠，垂心的軌跡會向x軸負向發散。垂心的軌跡長度無限大。

垂心的移動速率($0° \le \theta \le 180°$)

利用Excel做線段長度的變化，當θ從0°到170°度，$\overline{H_iH_{i+1}}$長度增加緩慢，而自171°起急遽增加，垂心的移動速率越來越大。



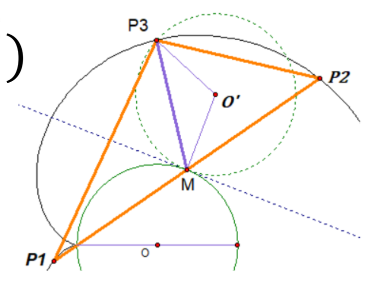
內接三角形必為鈍角三角形

觀察發現內接三角形的外心及垂心恆在三角形的外部，無論M點在何處，**內接三角形$P_1P_2P_3$必為鈍角三角形**。

證明

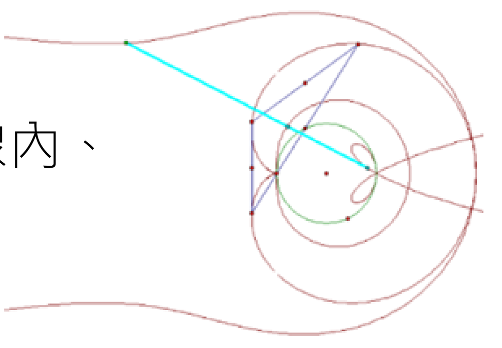
方法1：$\because \boldsymbol{\overline{P_1P_3}^2} + \boldsymbol{\overline{P_2P_3}^2} = 4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6$
$-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6 = 12 + 4cos\theta$
$< 12 + 4 = 16 = \boldsymbol{\overline{P_1P_2}^2}$
因此，$\triangle P_1P_2P_3$是鈍角三角形

方法2：中線定理$\overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2 = 2(\overline{MP_3}^2 + \overline{MP_2}^2)$
$\Longrightarrow \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2 = 2(\overline{MP_3}^2 + 4)$...(1)
$\triangle O'M\,P_3$中，$\overline{P_3M} < \overline{P_3O'} + \overline{MO'}$
$\overline{P_3M}$和$\overline{MO'}$都是圓的半徑$\Longrightarrow \overline{P_3M} < 1 + 1 = 2$ ...(2)
由(1)和(2) $\overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2 = 2(\overline{MP_3}^2 + 4) < 2(4+4)$
$\boldsymbol{\overline{P_1P_3}^2} + \boldsymbol{\overline{P_2P_3}^2} < 2(4+4) = 16 = \boldsymbol{\overline{P_1P_2}^2}$



六、內接三角形的尤拉線討論

連接垂心、外心、重心形成尤拉線。
垂心軌跡向x軸負向發散、重心軌跡在心臟線內、外心向x軸正向發散，$\overline{HG}$：$\overline{GL}$恆為2：1。
符合尤拉線的特性。



尤拉線的直線方程式($0° < \theta < 180°$)

$$3y - (4sin\theta + sin2\theta) = \frac{6cos\frac{\theta}{2} - 3cos\frac{3\theta}{2} - 2cos\frac{5\theta}{2} - cos\frac{7\theta}{2}}{-10sin\frac{\theta}{2} + 3sin\frac{3\theta}{2} + 2sin\frac{5\theta}{2} + sin\frac{7\theta}{2}}(3x - (4cos\theta + cos2\theta))$$

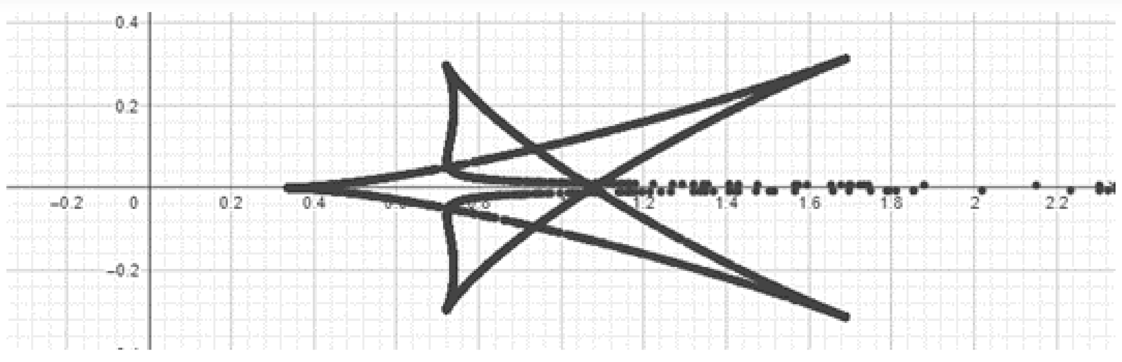
計算：
尤拉線通過外心、重心。
利用直線斜率$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - (重心的y坐標)}{x - (重心的x坐標)}$寫出直線方程式。

$\frac{G_y - L_y}{G_x - L_x} = \frac{y - G_y}{x - G_x}$　代入坐標，即可得尤拉線。

尤拉線的包絡線($0° < \theta < 180°$)

$$x = \frac{1389cos0.5\theta - 978cos1.5\theta - 597cos2.5\theta - 66cos3.5\theta + 90cos4.5\theta + 153cos5.5\theta + 24cos6.5\theta - 3cos7.5\theta - 10cos8.5\theta - 2cos9.5\theta}{1689cos0.5\theta - 930cos1.5\theta - 1008cos2.5\theta - 234cos3.5\theta + 348cos4.5\theta + 114cos5.5\theta + 24cos6.5\theta - 12cos7.5\theta}$$

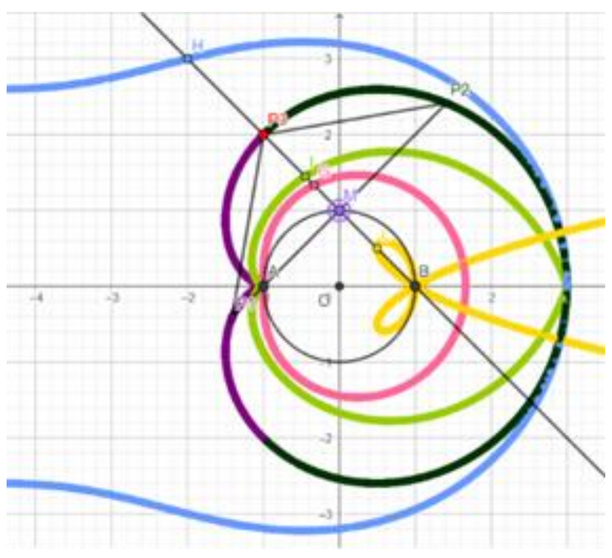
$$y = \frac{-18sin\theta - 24sin2\theta + 16sin3\theta + 15sin4\theta - 6sin5\theta - 2sin6\theta}{24cos\theta + 54cos2\theta + 48cos3\theta - 12cos4\theta - 114}$$

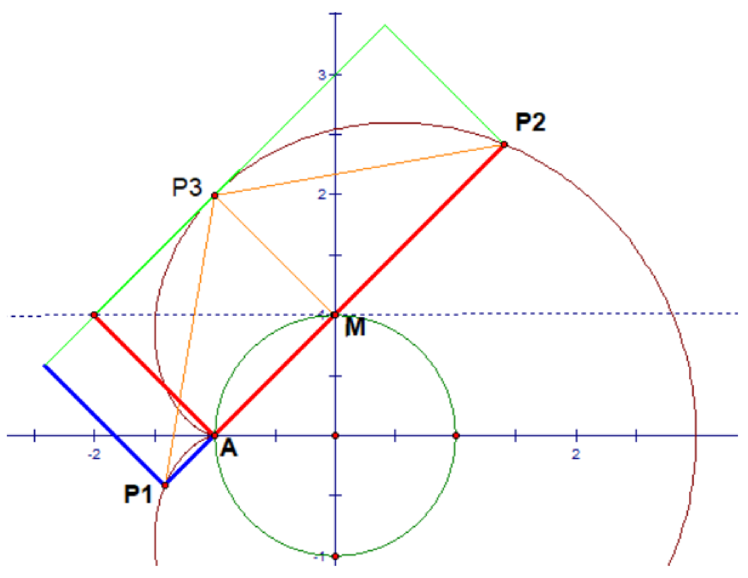


$\theta = 90°$時，內接三角形為等腰三角形

證明

將$\theta = 90°$代入尤拉線方程式，得$3y - 4sin90° - sin180°$
$= \frac{6cos45° - 3cos135° - 2cos225° - cos315°}{-10sin45° + 3sin135° + 2sin225° + sin315°}(3x - 4cos90° - cos180°)$
化簡得 $x + y = 1$
再將$\theta = 90°$代入六個點的參數式，得$G\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$、$I(2-\sqrt{6}, \sqrt{6}-1)$、$L\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$、$H(-2,3)$、$M(0,1)$、$P_3\,(-1,2)$
六個點都在尤拉線上，而$(-1,2)$恰為P_1軌跡與P_2軌跡的分界點。
此時 $P_1\,(-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$、$P_2\,(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$，
$\overline{AP_2} = 2 + \sqrt{2}$，$\overline{AP_1} = 2 - \sqrt{2}$，$\triangle P_1P_2P_3$底邊上的高$= \sqrt{2}$
此時(底邊上的高)：$(\overline{AP_2})$=$(\overline{AP_1})$：(底邊上的高)=$\sqrt{2}$：$2+\sqrt{2}$
=1：$1+\sqrt{2}$。恰為白銀比例。





尤拉線方程式$x + y = 1$

結論

一、心臟線特定點內接三角形三頂點坐標：
$\left(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$\left(cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}, sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2}\right)$、$(2cos\theta + cos2\theta, 2sin\theta + sin2\theta)$
二、心臟線特定點內接三角形三邊直線方程式：
$y = tan\frac{\theta}{2}(x+1)$、$y = \frac{(sin2\theta + sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2})}x - \frac{4sin\frac{\theta}{2} + 2sin\frac{3\theta}{2} + sin\theta}{cos2\theta + cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}}$、$y = \frac{(sin2\theta + sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2})}{(cos2\theta + cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})}x + \frac{4sin\frac{\theta}{2} + 2sin\frac{3\theta}{2} - sin\theta}{(cos2\theta + cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2})}$
三、心臟線特定點內接三角形的重心參數式為$\left(\frac{4cos\theta + cos2\theta}{3}, \frac{4sin\theta + sin2\theta}{3}\right)$
四、心臟線特定點內接三角形的外心參數式為$\left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\theta}{cos\theta + 1}, sin\theta - \frac{1}{2}tan\frac{\theta}{2}\right)$
五、心臟線特定點內接三角形的內心參數式為(I_x, I_y)

$$I_x = \frac{\left(cos\theta - 2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \left(cos\theta + 2cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + 4(2cos\theta + cos2\theta)}{4 + \sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6}}$$

$$I_y = \frac{\left(sin\theta - 2sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \left(sin\theta + 2sin\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + 4(2sin\theta + sin2\theta)}{4 + \sqrt{4cos\frac{\theta}{2} + 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6} + \sqrt{-4cos\frac{\theta}{2} - 4cos\frac{3\theta}{2} + 2cos\theta + 6}}$$

六、心臟線特定點內接三角形垂心參數式$\left(2cos\theta + cos2\theta - tan^2\frac{\theta}{2}, 2sin\theta + sin2\theta + tan\frac{\theta}{2}\right)$
七、心臟線特定點內接三角形恆為鈍角三角形。
八、尤拉線方程式：

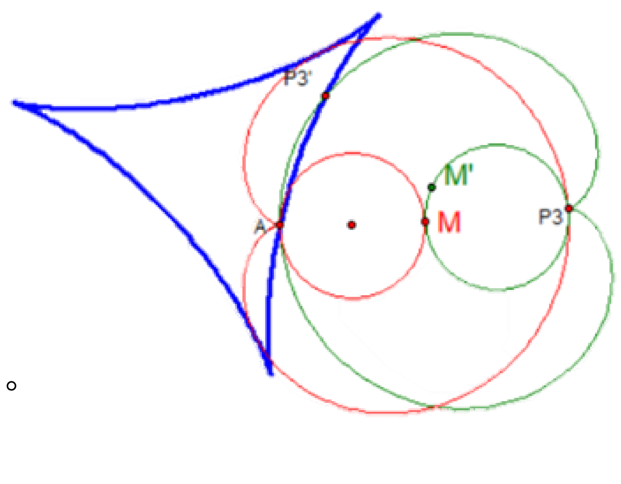
$$3y - (4sin\theta + sin2\theta) = \frac{6cos\frac{\theta}{2} - 3cos\frac{3\theta}{2} - 2cos\frac{5\theta}{2} - cos\frac{7\theta}{2}}{-10sin\frac{\theta}{2} + 3sin\frac{3\theta}{2} + 2sin\frac{5\theta}{2} + sin\frac{7\theta}{2}}(3x - (4cos\theta + cos2\theta))。$$

九、當$\theta = 90°$時，內接三角形為等腰三角形，六點共線，此時尤拉線直線方程式為$x + y = 1$。

未來展望

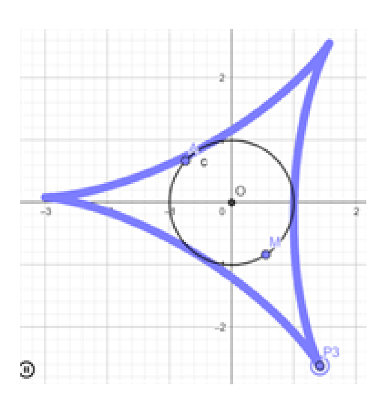
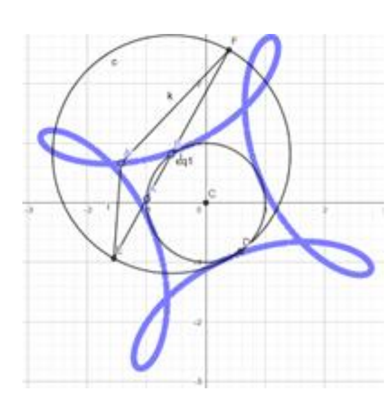
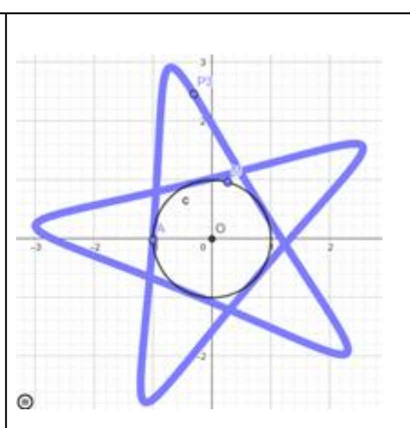
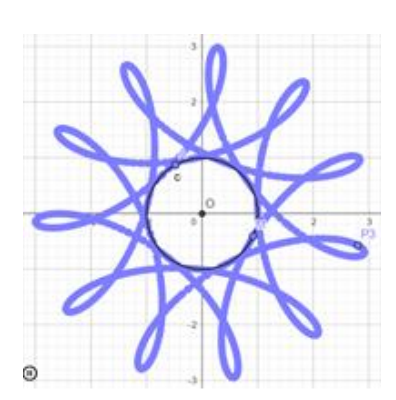
一、作對稱心臟線，產生新的P_3

以過M點的切線為對稱軸作基圓的對稱圓及A點(歧點)的對稱點，並設定新的動點，作出新的對稱心臟線，當M點移動時，新的P_3會形成特殊的封閉型軌跡，我們希望未來能探討其數學特性。



二、將心臟線中的定點(歧點)A改為動點

將歧點A設定為動點，同時和原本的動點M各自做逆時針等速運動，並記錄P_3的軌跡。以下將「A點移動速率：M點移動速率」簡記為「A：M」

			
$A：M = 4:1$	$A：M = 5:1$	$A：M = 7:2$	$A：M = 14:3$
$4 - 1 = 3$（個角）	$5 - 1 = 4$（個角）	$7 - 2 = 5$（個角）	$14 - 3 = 11$（個角）

四種擺線，將速率比記為最簡整數比，角的數量都是$A - M$。設定不同的速率比，P_3的軌跡圖形有存在規律。希望未來能對此做進一步的研究。