中華民國第64屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030408

三角形周長分割點交叉連線的截成線段比例研究及其逆命題

學校名稱： 桃園市立龍潭國民中學

作者：	指導老師：
國二 郭奕辰	徐陟岳
國二 謝采柔	黃寒楨
國二 陳季萱	

關鍵詞： 西瓦定理、孟氏定理、周長分割

摘要

在三角形邊長上任取的一點 M，探討由 M 點出發依序把三角形周長分割成四段，經由「孟氏定理」研究三角形周長它的四個分割點交叉連線的截成線段的比例與 M 點分割三角形的邊長線段比例有何關係式，而且進一步探討它逆命題成立的條件。

壹、前言

一、研究動機

在七年級下學期時，我們參加了學校舉辦的數學科學研究社，每週兩堂的課程裡，學習了動態幾何繪圖軟體，並以 Crux Mathematicorum 網站中提供的題目裡繪製出相關的幾何圖形。除了嘗試解決題目裡的幾何問題，也學習相關的幾何知識。並試著從其中找到有興趣的題目加以研究探索。時間大約是 112 年 10 月，我們接觸到 Problem 4867,Crux Mathematicorum, Vol. 49(7), September, 2023([1])這個題目：

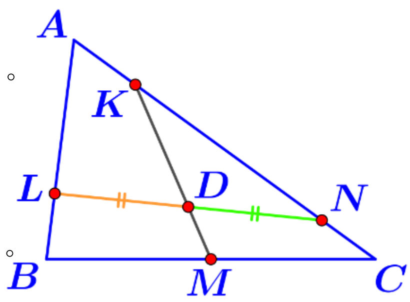

圖 1

在$\triangle ABC$中，如圖 1，$\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$，且$M$為$\overline{BC}$的中點。

若L點在$\overline{AB}$上，K點、N點在$\overline{AC}$上，

且M、L、K、N四個恰好將三角形的周長分割成 4 等分。

即$(\overline{BM}+\overline{BL})=(\overline{AL}+\overline{AK})=\overline{KN}=(\overline{CM}+\overline{CN})$，則$\overline{KM}$平分$\overline{LN}$。

則：$\overline{KM}$平分$\overline{LN}$。

同時在這段期間裡，我們也學習到討論三角形幾何中相當基礎也頗為重要的兩個定理：（一）西瓦定理([2])（二）孟氏定理([2])。這引起了我們的興趣，嘗試從純幾何下手解決這個問題，我們約在 112 年 12 月時完成原始題目的相關證明。並試著去找出三角形的周長分割成四個長度的比例，討論$\overline{LD}:\overline{ND}$與$\overline{BM}:\overline{CM}$的關係。

於是我們有了底下的探討，並報名參加縣市的科展比賽。在截止報名之後，在 Crux Mathematicorum, Vol. 50(2), February 2024 P.94、P.95([3])中提供向量解析(by Mahav R. Modak.)及座標化重心座標(by Bing Jian.)兩種解法見參考文獻[3]及附錄一，這兩種方法都是從解析幾何證明原始題目與我們的解法不同。此外我們更推廣了原始題目，研究三角形周長分割四個線

段的長度，在一般的情況中保持與原始題目的圖形之架構不變下，探討它們的比例關係。

如圖 2，討論$\overline{LD}$、$\overline{ND}$、$\overline{BM}$、$\overline{CM}$與在三角形分割長度為一般的比例關係下，此時$\overline{AE}$與$\overline{AK}$及$\overline{LD}$與$\overline{ND}$關係式為何？並且討論它們逆命題成立的條件。其研究過程如下：

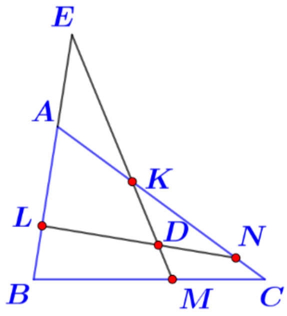

圖 2

二、研究目的

（一）證明原始題目：Crux Mathematicorum Vol. 49, No. 7 Problem 4867

（二）討論原始題目：Crux Mathematicorum, Vol. 49, No. 7 Problem 4867，其三角形周長四個分割點所在的位置。

（三）如圖 3，若三角形周長分割成四段長度的比例為$x:y:z:w$及$\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$條件下，$\overline{AE}$與$\overline{AK}$及$\overline{LD}$與$\overline{ND}$關係式為何？

（四）探討是否有其它分割分法使得$\overline{LD}:\overline{ND}=\overline{BM}:\overline{CM}$。

（五）探討逆命題成立條件。

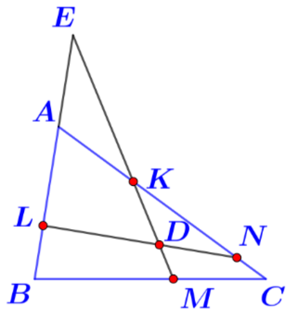

圖 3

貳、研究設備及器材

紙、筆、電腦、動態幾何軟體 GeoGebra

參、研究過程及方法

預備知識：

一、西瓦定理（Ceva's theorem）。

$\triangle ABC$中，如圖 4，若D、E、F三點分別在$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上，且$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$交於G點。

則：$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}\cdot\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=1$。

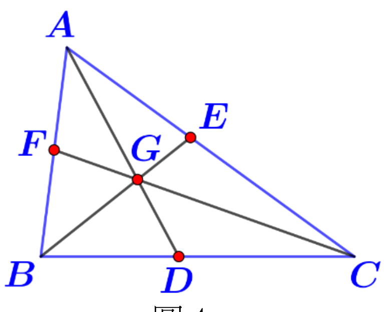

圖 4

二、孟氏定理（Menelaus' theorem）。

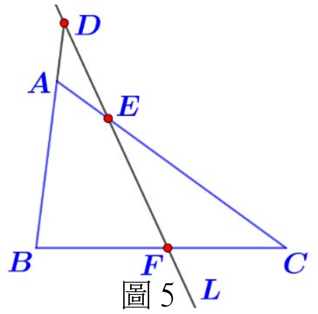

圖 5

$\triangle ABC$ 中，如圖 5，若直線 L 與 $\triangle ABC$ 其三邊 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 或三邊延長線分別交於 D 、F 、E 三點。

則：$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \cdot \dfrac{\overline{AE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{BF}} = 1$ 。

（一）**證明原始題目**：Crux Mathematicorum Vol. 49, No. 7 Problem 4867

我們找到兩個幾何證明方法完成原始題目證明：

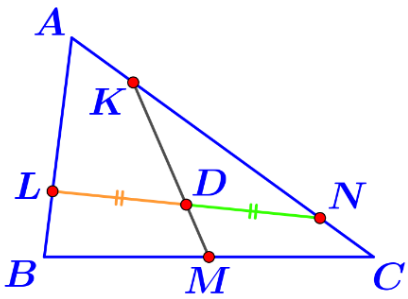

圖 6

$\triangle ABC$ 中，如圖 6，$\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$ ，

且 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。若 L 點在 $\overline{AB}$ 上，

K 點、N 點在 $\overline{AC}$ 上，且 M 、L 、K 、N 四個點

恰好將三角形的周長分割成 4 等分。

即 $(\overline{BM} + \overline{BL}) = (\overline{AL} + \overline{AK}) = \overline{KN} = (\overline{CM} + \overline{CN})$ ，則：$\overline{KM}$ 平分 $\overline{LN}$ 。

證明方法一：

證明：$\because \overline{CK} = \overline{KN} + \overline{CN} = (\overline{AL} + \overline{AK}) + \overline{CN}$

$\therefore \overline{AK} < \overline{CK}$

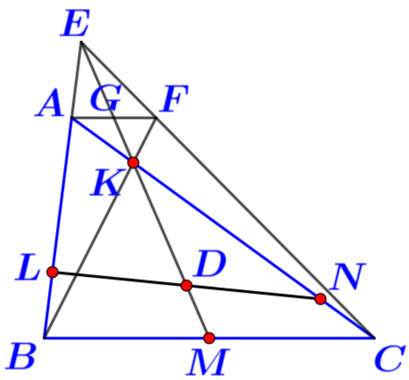

圖 7

因此延長 $\overrightarrow{BA}$ 、$\overrightarrow{KM}$ 會交於 E 點，如圖 7 所示。

延長 $\overrightarrow{BK}$ 交 $\overline{EC}$ 於 F 點。

連接 $\overline{AF}$ 交 $\overline{EM}$ 於 G 點。

在 $\triangle BCE$ 中，根據西瓦定理可知：

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}} = 1$$

又 $\because M$ 為 B 、C 中點。

$\therefore \overline{BM} = \overline{CM}$ 。

即：$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}=1\Rightarrow\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}}$

故 $\overline{AF}//\overline{BC}\Rightarrow\overline{AG}=\overline{FG}$ ([4])

$\because \overline{AF}//\overline{BC}$

$\therefore \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{BM}}$，且$\triangle AGK\sim\triangle CMK$　(AA 相似性質)([4])

$\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}\Rightarrow\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}$

令$\triangle ABC$ 的周長為 s，則 $\overline{BL}=\frac{s}{4}-\overline{BM}=\frac{s}{4}-\overline{CM}=\overline{CN}$

設 $\overline{BM}=\overline{CM}=a$ 、 $\overline{BL}=\overline{CN}=b$ 、 $\overline{AK}=c$ 、 $\overline{AE}=d$ 。

則：$\overline{AL}=\frac{s}{4}-\overline{AK}=(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{AK}=(a+b)-c=a+b-c$

$\overline{CK}=\overline{KN}+\overline{CN}=\frac{s}{4}+b=(a+b)+b=a+2b$

$\because \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}$

$\therefore \frac{\overline{AE}}{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}$

$\Rightarrow \frac{d}{b+a+b-c+d}=\frac{c}{a+2b}$

$\Rightarrow \frac{d}{a+2b-c+d}=\frac{c}{a+2b}$

$\Rightarrow c(a+2b-c+d)=d(a+2b)$

$\Rightarrow c(a+2b)-c(c-d)=d(a+2b)$

$\Rightarrow c(a+2b)-d(a+2b)-c(c-d)=0$

$\Rightarrow (a+2b)(c-d)-c(c-d)=0$

$\Rightarrow (c-d)(a+2b-c)=0$

又 $a+2b-c\neq0$

$\therefore c-d=0$ 即 $c=d\Rightarrow\overline{AK}=\overline{AE}$

在$\triangle ABC$、$\triangle ALN$中，依據孟氏定理：

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=1 \text{、} \frac{\overline{LE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KN}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{CK}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{LE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KN}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{LD}}{\overline{ND}}=\frac{\overline{CK}}{\overline{BE}}\cdot\frac{\overline{LE}}{\overline{KN}}$$

其中：$\overline{BE}=\overline{BL}+\overline{LE}=\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}=\overline{CN}+\overline{AL}+\overline{AK}=\overline{CN}+\overline{KN}=\overline{CK}$

$\overline{LE}=\overline{AL}+\overline{AK}=\overline{KN}$

因此：$\frac{\overline{LD}}{\overline{ND}}=1\Rightarrow\overline{LD}=\overline{ND}$。故$\overline{KM}$平分$\overline{LN}$。

證明方法二：

證明：如圖 8，延長$\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{MK}$交於E點

在$\triangle ABC$、$\triangle ALN$中：

依據孟氏定理得知：

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{\overline{LE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KN}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1\cdots\cdots\cdots②$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{KC}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{LE}}\cdots\cdots\cdots③$$

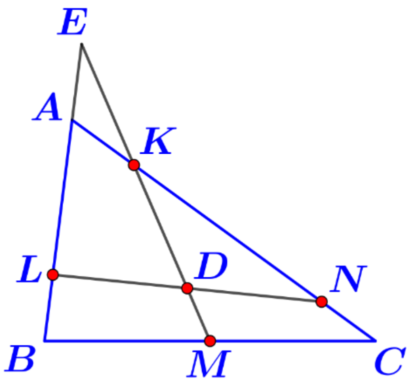

圖 8

(1)證明$\overline{AE}=\overline{AK}$

設$\overline{AL}=a$，$\overline{AK}=b$，$\overline{AE}=c$，$\overline{BM}=d$

$\Rightarrow \overline{BM}+\overline{BL}=\overline{AL}+\overline{AK}\Rightarrow\overline{BL}=a+b-d$

$\Rightarrow \overline{CM}+\overline{CN}=\overline{AL}+\overline{AK}\Rightarrow\overline{CN}=\overline{AL}+\overline{AK}-\overline{CM}=\overline{AL}+\overline{AK}-\overline{BM}=a+b-d$

$\Rightarrow \overline{KN}=\overline{AL}+\overline{AK}=a+b$

由①得：

$$\frac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KN}+\overline{CN}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b-d)+a+c}{c}\cdot\frac{b}{(a+b)+(a+b-d)}=1$$

$\Rightarrow (2a+b+c-d)b = c(2a+2b-d)$

$\Rightarrow 2ab+b^2+bc-bd = 2ac+2bc-cd$

$\Rightarrow 2a(b-c)+b(b-c)-d(b-c)=0$

$\Rightarrow (b-c)(2a+b-d)=0$

$\because 2a+b-d \neq 0$

$\therefore b-c=0 \Rightarrow b=c$

故 $\overline{AE}=\overline{AK}$

(2)證明 $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1$

由③知：

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}{\overline{KN}+\overline{CN}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{AL}+\overline{AE}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AK}}{\overline{KN}+\overline{CN}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{AL}+\overline{AK}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{(a+b-d)+a+b}{(a+b)+(a+b-d)}\cdot\frac{a+b}{a+b}=1$$

故得證。

（二）討論原始題目：Crux Mathematicorum, Vol. 49, No. 7 Problem 4867，其三角形周長四個分割點所在的位置

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，且 M 為 $\overline{BC}$ 的中點，三角形周長四等分時，其四個分割點依順時針方向分別為 M 、L 、K 、N 四點，則：

L 點必在 $\overline{AB}$ 上，K 點及 N 點必在 $\overline{AC}$ 上，$\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{MK}$ 會交於一點（設此點為 E 點）。

底下為其說明：

1.說明「N 點一定在 $\overline{AC}$ 上」。

如圖 9，設 N 點在 $\overline{CM}$ 上，

令 $\overline{BC}=a$ ，$\overline{AC}=b$ ，$\overline{AB}=c$

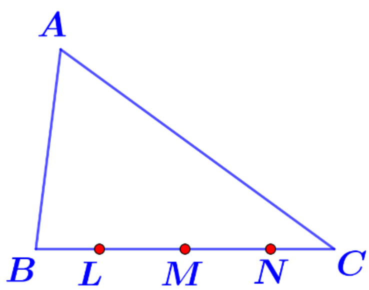

圖 9

$\because \overline{BM} = \overline{CM}$

$\therefore L$ 點在 $\overline{BM}$ 上

因此 $\overline{BC} > \overline{LN} = \frac{1}{2}(a+b+c)$

又 $\overline{AC} > \overline{BC} > \frac{1}{2}(a+b+c) \Rightarrow \overline{AC} + \overline{BC} > a+b+c$ (矛盾)

$\Rightarrow N$ 點不在 $\overline{BC}$ 上，同理 L 點也不在 $\overline{BC}$ 上

故 N 點一定在 $\overline{AC}$ 上。

2. 說明「K 點一定在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AK} < \overline{CK}$，即 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{MK}$ 會交於 E 點」。

(1)如圖 10，設 K 點在 $\overline{AB}$ 上，

因此由 1.可知 L 點也在 $\overline{AB}$ 上

令 $\overline{BC} = a$，$\overline{AC} = b$，$\overline{AB} = c$

則 $\overline{KL} = \frac{1}{4}(a+b+c)$

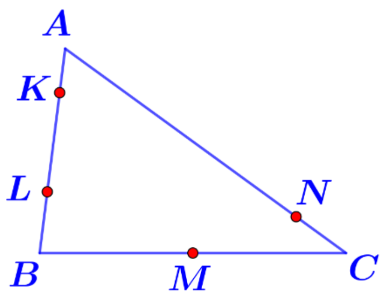

圖 10

$$\Rightarrow \overline{AB} > \overline{BL} + \overline{KL} = \frac{1}{4}(a+b+c) - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(a+b+c) = \frac{1}{2}(b+c)$$

$$\overline{AC} = \overline{AN} + \overline{CN} < \overline{AN} + \overline{AK} + \overline{CN} = \frac{1}{4}(a+b+c) + \frac{1}{4}(a+b+c) - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(b+c)$$

$\therefore \overline{AC} < \overline{AB}$ (矛盾) 故 K 點一定在 $\overline{AC}$ 上。

(2)如圖 11，K 點在 $\overline{AC}$ 上，N 點在 $\overline{AC}$ 上

$\because \overline{CK} = \overline{KN} + \overline{CN} = (\overline{AL} + \overline{AK}) + \overline{CN}$

$\therefore \overline{AK} < \overline{CK}$

依據(1)、(2) $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{MK}$ 會交於 E 點。

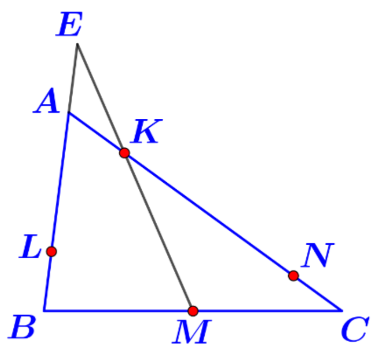

圖 11

3.說明「L點一定在$\overline{AB}$上」。

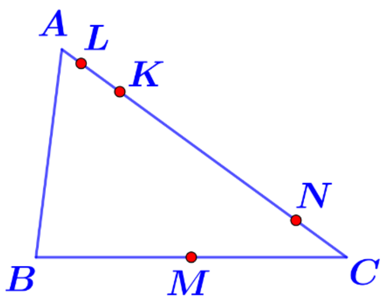

圖 12

如圖 12，設L點在$\overline{AK}$上

$$\overline{LK}+\overline{KN}+\overline{CN}<\overline{AC}<\overline{AB}+\overline{BC}<\overline{AB}+\overline{AL}+\overline{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(a+b+c)-\frac{1}{2}a<\frac{1}{4}(a+b+c)-\frac{1}{2}a+a$$

$$\Rightarrow \frac{a+3b+3c}{4}<\frac{3a+b+c}{4}$$

$$\Rightarrow a+3b+3c<3a+b+c$$

$\Rightarrow b+c<a$ 即$\overline{AC}+\overline{AB}<\overline{BC}$ (矛盾)

故L點一定在$\overline{AB}$上。

綜合以上說明 1、2、3，我們可以確認原始題目的圖形而且$\overrightarrow{BA}$和$\overrightarrow{MK}$會交於E點，如圖 10 所示。

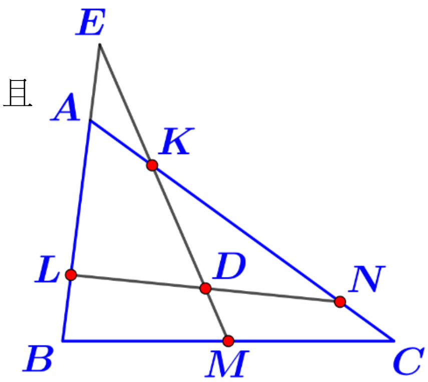

圖 10

因此我們以圖 10 的圖形架構來做推廣，如下：

（三）如圖 3，若三角形周長分割成四段長度的比例為$x:y:z:w$及$\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$條件下，$\overline{AE}$與$\overline{AK}$及$\overline{LD}$與$\overline{ND}$關係式為何？

經過上述的討論，我們延伸原始題目的三角形的分割方式：

考慮三角形每邊上至少一點，如圖 11（M點不一定在中點，分割點不一定為四等分割點）。

假設$\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{MK}$交於E點。

進行了以下之探究：

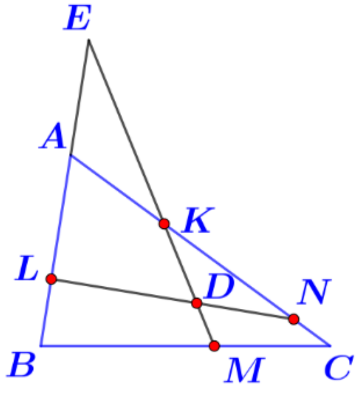

圖 11

下面的**【定理一】**可以得到：$\overline{AE}$ 與 $\overline{AK}$ 的關係及 $\overline{LD}:\overline{ND}$ 與 $\overline{BM}:\overline{CM}$ 的關係。

【定理一】

在△ABC 中，如圖 12，M 點在 $\overline{BC}$ 上，L 點在 $\overline{AB}$ 上，K、N 點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$。延長 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點。若 $(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$，則：

(1) $\overline{AE}=\dfrac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$

(2) $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{n}{m}(1+\dfrac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\dfrac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$

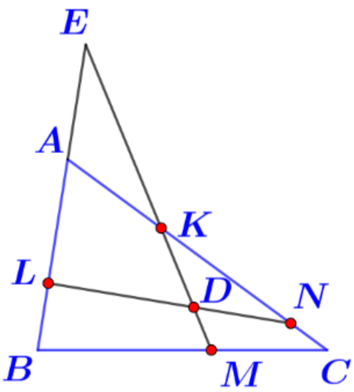

圖 12

證明：

在△ABC、△ALN 中：

依據孟氏定理得知：

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{\overline{LE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KN}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1\cdots\cdots\cdots②$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{KC}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{LE}}\cdots\cdots\cdots③$$

設 $\overline{AL}=a$，$\overline{AK}=b$，$\overline{AE}=c$，$\overline{BM}=d$

$$\because\frac{\overline{BM}+\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{d+\overline{BL}}{a+b}=\frac{x}{y}$$

$$\overline{BL}=\frac{x}{y}(a+b)-d$$

$$\because\frac{\overline{CM}+\overline{CN}}{\overline{AL}+\overline{AK}}=\frac{y}{w}\quad\Rightarrow\quad\overline{CM}+\overline{CN}=\frac{w}{y}(a+b)$$

$$又\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\frac{m}{n}\Rightarrow\overline{CM}=\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}=\frac{n}{m}\cdot d$$

$$\therefore \overline{CN}=\frac{w}{y}(a+b)-\frac{n}{m}\cdot d$$

$$\because \frac{\overline{AL}+\overline{AK}}{\overline{KN}}=\frac{y}{z} \quad \Rightarrow \quad \overline{KN}=\frac{z}{y}(\overline{AL}+\overline{AK})=\frac{z}{y}(a+b)$$

由①得：

$$\frac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KN}+\overline{CN}}\cdot\frac{n}{m}=1$$

$$\Rightarrow \frac{[\frac{x}{y}(a+b)-d]+a+c}{c}\cdot\frac{b}{\frac{z}{y}(a+b)+\frac{w}{y}(a+b)-\frac{n}{m}\cdot d}\cdot\frac{n}{m}=1$$

$$\Rightarrow c[m\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-nd]=\{[\frac{x}{y}(a+b)-d]+a+c\}nb$$

$$\Rightarrow c[m\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-n(b+d)]=[\frac{x}{y}(a+b)-d+a]nb$$

$$\Rightarrow c[\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-(b+d)]=[\frac{x}{y}(a+b)-d+a]b$$

$$\Rightarrow c=\frac{[\frac{x}{y}(a+b)+a-d]b}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-(b+d)}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{[\frac{x}{y}(\overline{AL}+\overline{AK})+\overline{AL}-\overline{BM}]}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{y}(\overline{AL}+\overline{AK})-(\overline{AK}+\overline{BM})}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{(\overline{BM}+\overline{BL}+\overline{AL}-\overline{BM})}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{BM}+\overline{AL}}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AL}+\overline{BL}}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$$

由③：

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{\frac{x}{y}(a+b)-d+a+c}{\frac{w}{y}(a+b)+\frac{z}{y}(a+b)-\frac{n}{m}d}\cdot\frac{\frac{z}{y}(a+b)}{a+c}$$

$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{\frac{x}{y}(a+b)-d+a+c}{a+c}\cdot\frac{\frac{z}{y}(a+b)}{\frac{w+z}{y}(a+b)-\frac{n}{m}d}$$

$$=\frac{n}{m}[1+\frac{\frac{x}{y}(a+b)-d}{a+c}][\frac{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{y}\cdot\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

依據上述關係式，我們知道當$x:y:z:w=1:1:1:1$且$m:n=1:1$時，可得到原始題目之結果。再更進一步的探討後，得到**【定理一特例】**：

【定理一特例】

在$\triangle ABC$中，如圖 13，M點在$\overline{BC}$上，L點在$\overline{AB}$上， K、N點在$\overline{AC}$上，且

$\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$。延長$\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{MK}$交於$E$點。

若$(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$，

且$\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$，

則：(1) $\overline{AE}=\overline{AK}$

(2) $\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}$

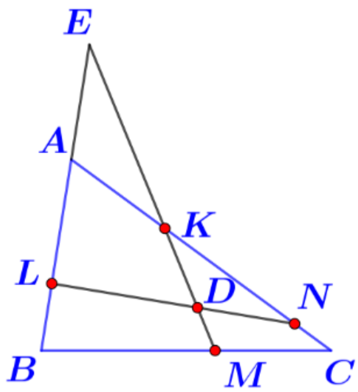

圖 13

證明：(1)$\because \frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{w+z}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1$$

$$=\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{x+y}{x}-\frac{y}{x}-1$$

$$=1+\frac{y}{x}-\frac{y}{x}-1=0$$

因此由**【定理一】**之(1)知：$\overline{AE}=\overline{AK}$ 。

(2)由**【定理一】**之(2)及上面(1)知：

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}\left(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}}\right)\left[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}\right]$$

$$=\frac{n}{m}\left(\frac{\overline{AL}+\overline{AK}+\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}}\right)\left[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{n}{m}\cdot\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}\right]$$

$$=\frac{n}{m}\left(\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}\right)\left[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{n}{m}\cdot\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}\right]$$

$$=\left[\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{y}\right)]\left[\frac{z}{\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{BM}}\right]$$

$$=\frac{z}{y}\left[\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{BM}}\right]$$

$$=\frac{z}{y}\left(\frac{\frac{y}{x}\overline{BM}+\frac{y}{x}\overline{BL}+\overline{BL}}{\frac{x+y}{x}\overline{BM}+\frac{x+y}{x}\overline{BL}-\overline{BM}}\right)$$

$$=\frac{z}{y}\left(\frac{\frac{y}{x}\overline{BM}+\frac{x+y}{x}\overline{BL}}{\frac{y}{x}\overline{BM}+\frac{x+y}{x}\overline{BL}}\right)=\frac{z}{y}=\frac{n}{m}$$

故得證。

（四）探討是否有其它分割分法使得 $\overline{LD}:\overline{ND}=\overline{BM}:\overline{CM}$

透過【定理一特例】研究，我們可以得到【定理二】中 $\overline{AL}$ 與 $\overline{BL}$ 及 $\overline{KD}$ 與 $\overline{MD}$ 的關係式如下：

【定理二】

在△ABC 中，如圖 14，M 點在 $\overline{BC}$ 上，L 點在 $\overline{AB}$ 上，K 、N 點在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$ 。延長 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點。若 $(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$ ，且 $\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$ ，則：$\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}$

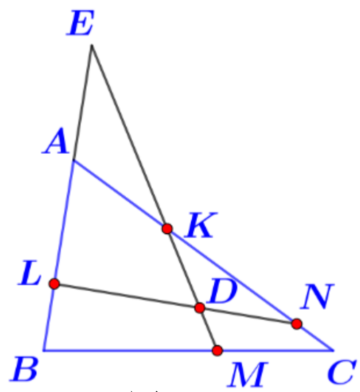

圖 14

以下為【定理二】兩種證明方法：

證明方法一：

證明：如圖 15，延長 $\overrightarrow{LN}$ 、$\overrightarrow{BC}$ 交於 F 點。

在△ABC 中、△CMK 中，

依據孟氏定理：

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}\cdot\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=1\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{KN}}\cdot\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}=1\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}\cdot\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\frac{\overline{MF}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{KN}}\cdot\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}=\left(\frac{\overline{BF}}{\overline{MF}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{AN}}\right)\cdot\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

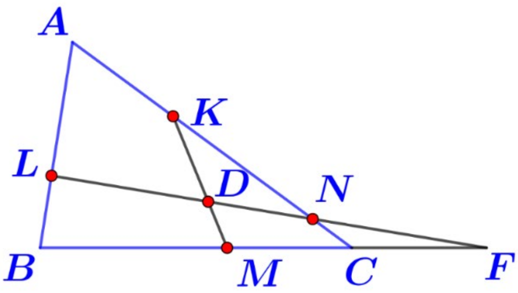

圖 15

設 $\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$，$\overline{AL}=a$，$\overline{AK}=b$，$\overline{BM}=d$，$\overline{CF}=e$

$\because \overline{BM}+\overline{BL}=\overline{AL}+\overline{AK}$

$\Rightarrow \overline{BL}=a+b-d$

又 $\because \dfrac{\overline{BM}+\overline{BL}}{\overline{CM}+\overline{CN}}=\dfrac{m}{n}$、$\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow \overline{CM}+\overline{CN}=\dfrac{n}{m}(a+b)$、$\overline{CM}=\dfrac{n}{m}d$

$\Rightarrow \overline{CN}=\dfrac{n}{m}(a+b-d)$

由①式：

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}\cdot\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=1\Rightarrow \overline{BF}\cdot\overline{CN}\cdot\overline{AL}=\overline{CF}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{BL}$$

$$\Rightarrow a(d+\frac{n}{m}d+e)[\frac{n}{m}(a+b-d)]=e[b+\frac{n}{m}(a+b)](a+b-d)$$

$$\Rightarrow a(d+\frac{n}{m}d+e)\frac{n}{m}=e[b+\frac{n}{m}(a+b)]$$

$$\Rightarrow a[\frac{(m+n)d}{m}+e]\frac{n}{m}=e[\frac{na+(m+n)b}{m}]$$

$$\Rightarrow [\frac{(m+n)d}{m}+e]na=e[na+(m+n)b]$$

$$\Rightarrow \frac{(m+n)d}{m}\cdot an+ane=ane+e(m+n)b$$

$$\Rightarrow e(m+n)b=an\cdot\frac{(m+n)d}{m}$$

$$\Rightarrow e=\frac{n}{m}\cdot\frac{ad}{b}$$

(2)證明 $\dfrac{\overline{BF}}{\overline{MF}}\cdot\dfrac{\overline{KN}}{\overline{AN}}=1$

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{MF}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{BC}+\overline{CF}}{\overline{CM}+\overline{CF}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{AK}+\overline{KN}}$$

$$=\frac{\frac{m+n}{m}d+\frac{n}{m}\cdot\frac{ad}{b}}{\frac{n}{m}d+\frac{n}{m}\cdot\frac{ad}{b}}\cdot\frac{\frac{n}{m}(a+b)}{b+\frac{n}{m}(a+b)}$$

$$=\frac{(\frac{m+n}{m}+\frac{n}{m}\cdot\frac{a}{b})d}{\frac{n}{m}\cdot(a+b)\cdot\frac{d}{b}}\cdot\frac{\frac{n}{m}(a+b)}{\frac{mb+n(a+b)}{m}}$$

$$=\frac{b(m+n)+an}{m}\cdot\frac{m}{mb+n(a+b)}$$

$$=\frac{mb+n(a+b)}{m}\cdot\frac{m}{mb+n(a+b)}=1$$

$\Rightarrow \frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}$　故 $\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}$ 。

證明方法二：

證明：如圖 16，在△BEM 、△LED 中：

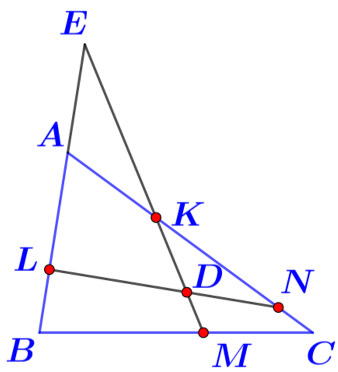

圖 16

依據孟氏定理得知：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KD}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LN}}=1\cdots\cdots\cdots②$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KD}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LN}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{KD}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LN}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{KM}}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{\overline{AL}}{\overline{KD}}\cdot\frac{n}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{KD}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{KM}}$$

故 $\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}$ 。

根據【**定理一特例**】及【**定理二**】的結果，就會有兩種三角形周長分割方法皆可得到 $\overline{LD}:\overline{ND}=\overline{BM}:\overline{CM}$ 。

1.方法一

如圖 17，$\dfrac{x}{w}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$ 。

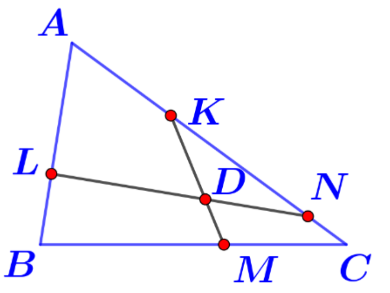

圖 17

2.方法二

如圖 18，$\dfrac{x}{y}=\dfrac{w}{z}=\dfrac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$ 。

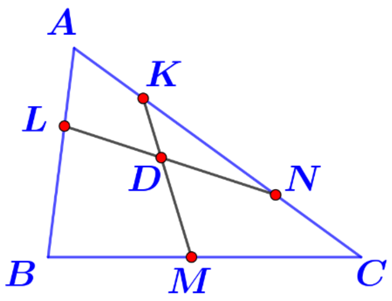

圖 18

（五）探討逆命題成立條件

我們有興趣的是【**定理一特例**】之「逆命題」是否成立？也就是當【**定理一特例**】結果成立時，周長分割四個線段會有怎樣的比例關係？

接下來我們舉兩個例子，說明 $\overline{AE}=\overline{AK}$ 與 $\dfrac{\overline{LD}}{\overline{ND}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BL}}$ 沒有關係。

例一：當 $\overline{AE}=\overline{AK}$ 時，$\dfrac{\overline{LD}}{\overline{ND}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BL}}$ 不一定成立。

在△ABC 中，如圖 19，$\angle A=90°$ 、$\angle B=60°$ 、$\angle C=30°$，$\overline{AE}=\overline{AK}=\sqrt{3}$ ，$\overline{BC}=8$ 。若 L 點為 $\overline{AB}$ 中點，N 點在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{LN}//\overline{BC}$ 。求：(1)$\dfrac{\overline{LD}}{\overline{ND}}$ (2)$\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$

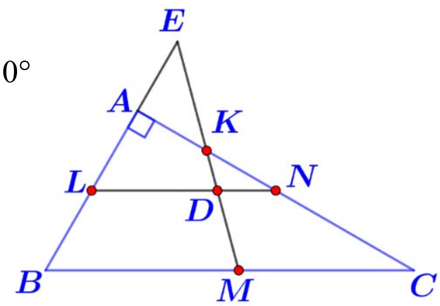

圖 19

解：$\because$ L 點為 $\overline{AB}$ 中點，且 $\overline{LN}//\overline{BC}$

$\therefore \overline{AN}=\overline{CN}=2\sqrt{3}$

又 $\overline{AE}=\overline{AK}=\sqrt{3}\Rightarrow\overline{KN}=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\overline{ND}}{\overline{CM}}}{\frac{\overline{LD}}{\overline{BM}}} = \frac{\frac{\overline{KN}}{\overline{CK}}}{\frac{\overline{LE}}{\overline{BE}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}} = \frac{4+\sqrt{3}}{6+3\sqrt{3}} \neq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{CM}} \neq \frac{\overline{LD}}{\overline{BM}} \Rightarrow \frac{\overline{LD}}{\overline{ND}} \neq \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$$

例二：當$\frac{\overline{LD}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$時，$\overline{AE} = \overline{AK}$不一定成立。

在$\triangle ABC$中，如圖 20，$\angle A = 90°$、$\angle B = 60°$、$\angle C = 30°$。已知：$\overline{BM} = 5$，$\overline{CM} = 3$ $\overline{AL} : \overline{BL} = 1:3$，$\overline{AK} : \overline{CK} = 1:3$，$\overline{KN} : \overline{CN} = 2:3$，$\overline{AL} = \overline{AE}$。

求：(1) $\overline{AE}$ (2) $\overline{AK}$ (3) $\frac{\overline{LD}}{\overline{ND}}$

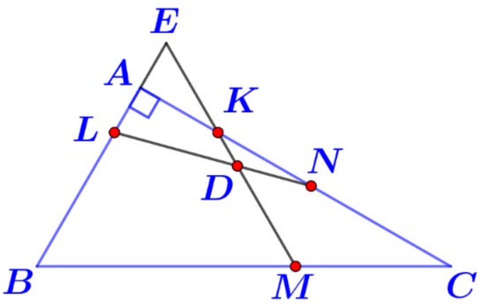

圖 20

解：$\because \overline{BC} = 5+3 = 8$

$\therefore \overline{AB} = 4$，$\overline{AC} = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{AL} = 1$，$\overline{AK} = \sqrt{3}$，$\overline{KC} = 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{KN} = \frac{6}{5}\sqrt{3}$，$\overline{CN} = \frac{9}{5}\sqrt{3}$

在$\triangle ALN$中，依據孟氏定理：

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{LE}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{ND}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{AK}} = 1$$

$$\frac{\overline{LD}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KN}} \cdot \frac{\overline{LE}}{\overline{AE}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{6}{5}\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{1} = \frac{5}{3} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$$，但$\overline{AE} \neq \overline{AK}$

因此，我們得到**【定理三】**為**【定理一特例】**的逆命題如下所述：

【定理三】

在$\triangle ABC$中，如圖 21，M點在$\overline{BC}$上，L點在$\overline{AB}$上，K、N點在$\overline{AC}$上，且$\overline{BM} : \overline{CM} = m:n$。延長$\overrightarrow{BA}$與$\overrightarrow{MK}$交於$E$點。

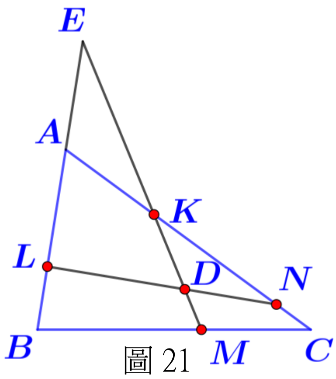

圖 21

若$(\overline{BM}+\overline{BL}) : (\overline{AL}+\overline{AK}) : \overline{KN} : (\overline{CM}+\overline{CN}) = x:y:z:w$，且$\overline{AE} = \overline{AK}$且$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}} = \frac{n}{m}$。

則：$\frac{x}{w} = \frac{y}{z} = \frac{m}{n}$。

證明：

(1)由性質一之(1)知：

$$\overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}=1$$

$$\Rightarrow\overline{AB}=(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}$$

$$\Rightarrow(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})=0$$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1=0$$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}=\frac{x+y}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{x+y}{w+z}$$

(2)再由性質一之(2)知：

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]$$

$$\Rightarrow(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AL}+\overline{AK}+\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}}\cdot[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}\cdot[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{y}\cdot[\frac{z}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\frac{z}{y}\overline{BL}}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\frac{z}{y}\overline{BL}=\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x}\cdot\overline{BM}+\frac{z}{x}\cdot\overline{BL}+\frac{z}{y}\cdot\overline{BL}=\frac{w+z}{x}\cdot\overline{BM}+\frac{w+z}{x}\cdot\overline{BL}-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}-\frac{w}{x}\cdot\overline{BM}+\frac{z}{y}\cdot\overline{BL}-\frac{w}{x}\cdot\overline{BL}=0$$

$$\Rightarrow (\frac{w+z}{x+y}-\frac{w}{x})\cdot\overline{BM}+(\frac{z}{y}-\frac{w}{x})\cdot\overline{BL}=0$$

$$\Rightarrow [\frac{xz+xw-xw-yw}{x(x+y)}]\cdot\overline{BM}+\frac{xz-yw}{xy}\overline{BL}=0$$

$$\Rightarrow (xz-yw)[\frac{\overline{BM}}{x(x+y)}+\frac{\overline{BL}}{xy}]=0$$

$$\Rightarrow (xz-yw)=0$$

$$\Rightarrow xz=yw$$

$$\Rightarrow \frac{x}{w}=\frac{y}{z}$$

因此我們有$\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{x+y}{w+z}=\frac{m}{n}$ 。

肆、結論

一、對於 Crux Mathematicorum 網站的原始題目：

$\triangle ABC$ 中，如圖 22，$\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$ ，

且 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。若 L 點在 $\overline{AB}$ 上，

K 點、N 點在 $\overline{AC}$ 上，且 M 、L 、K 、N 四個點

恰好將三角形的周長分割成 4 等分。

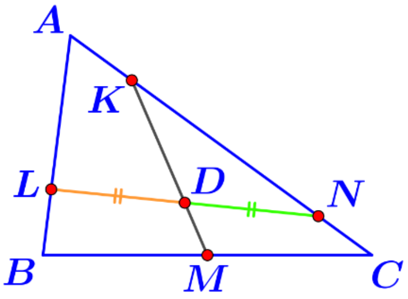

圖 22

即 $(\overline{BM}+\overline{BL})=(\overline{AL}+\overline{AK})=\overline{KN}=(\overline{CM}+\overline{CN})$ ，則：$\overline{KM}$ 平分 $\overline{LN}$ 。

我們提供兩個幾何上不同於網站解法的證明（詳見第 3 頁至第 6 頁）。

二、由原始題目的條件：

$\triangle ABC$ 中，如圖 23，$\overline{AC} > \overline{BC} > \overline{AB}$ ，

且 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。且 M 、L 、K 、N 為周長

順時針排列的四等份分割點。可以證明 L 點必在 $\overline{AB}$ 上，

K 點、N 點必在 $\overline{AC}$ 上且 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點。

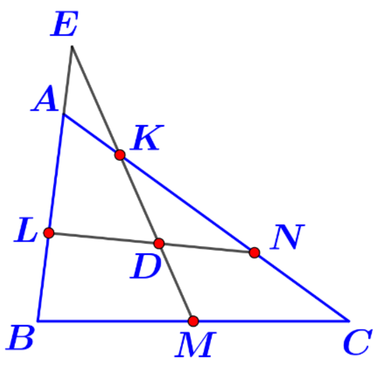

圖 23

三、延申原始題目的三角形，以下定理一、二、三皆考慮三角形每邊至少一點，如圖 24

（ M 點不一定在中點，分割點不一定四等分割點）。假設 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點。

【定理一】如圖 24，假設 $\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$ ，

$(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$ ，則：

$$1.\ \overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$$

$$2.\ \frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

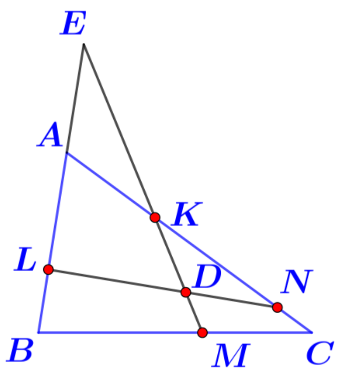

圖 24

【定理一特例】考慮$\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$，

則：1. $\overline{AE}=\overline{AK}$，

2. $\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}$。

四、**【定理二】**考慮$\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$，

則：$\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{MD}}$。

由**【定理二】**可以得知另一個分割法不同於上述**【定理一特例】**的分割法：

$\triangle ABC$中，如圖 28，若M點$\overline{BC}$上，L點在$\overline{AB}$上，K點、N點在$\overline{AC}$上，

$\overline{KM}$交$\overline{LN}$於D點。

若$(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$

且$\frac{x}{y}=\frac{w}{z}=\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$。則：$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$。

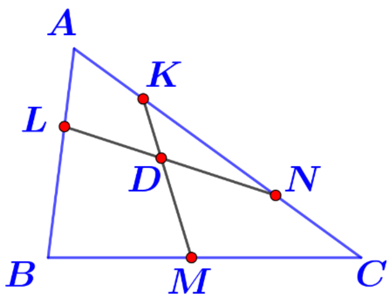

圖 28

五、**【定理一特例】**的逆命題：

【定理三】

若$\overline{AE}=\overline{AK}$且$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}$，則$\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$。

伍、討論及建議

三角形是幾何中的基礎圖形，此探究一開始先觀察動態幾何軟體繪圖的結果，進而探究其相關的純幾何證明，原先的成果僅為：若$\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$，且當三角形周長分割的四個線段之比例為$x:y:z:w=m:m:n:n$時，則$\overline{LD}:\overline{ND}=\overline{BM}:\overline{CM}$。很慶幸地能在諮詢老師的指導下，透過嚴僅說明及幾何證明後，我們聚焦於討論滿足「考慮三角形每邊上至少一點，(M 點不一定在中點，分割點不一定為四等分割點)，假設 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點」情形下的特定線段關係式。並完成其純幾何證明後，使得此探究具備一定的深度及廣度，而且對於逆命題的意義有了初步的認識。在研究期間，從基礎的討論為起點，乃至逆命題的完備，對於身為國中二年級的我們而言，是相當有趣且具有邏輯性。

我們也想到未來的發展也有以下兩個可以探究的問題：

一、討論三角形的周長分割後，我們希望之再能再繼續討論四邊形或多邊形的周長分割。

二、進一步看能否找到在周長分割後，面積的比例是否也能找出漂亮的關係式或逆命題。

陸、參考文獻資料

[1]、Problem 4867(2023).Crux Mathematicorum, Vol. 49(7)　P41

[2]、學霸筆記：幾何，洪萬生(譯)(2022)，三民出版社

[3]、Crux Mathematicorum, Vol. 50(2), February 2024 P.94、P.95

[4]、國中數學第四冊(2024)及第五冊(2023)，台南市翰林出版事業股份有限公司。

註、本作品中的所有圖片均為作者親自製作。

附錄一

（一）向量 , by Mahav R. Modak.

證明：如圖 29，

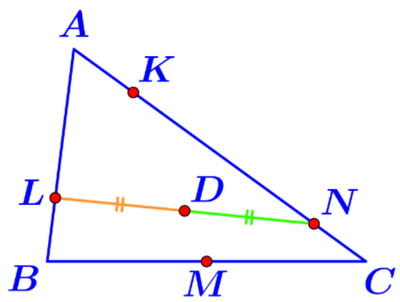

圖 29

令 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{AC}=b$ 、 $\overline{AB}=c$ ， $b>a>c$ 。

$$t=\frac{a+b+c}{4}$$

u 、 v 為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的單位向量

$$\because \overline{CN}=\overline{BL}=\frac{a+b+c}{4}-\frac{a}{2}=\frac{b+c-a}{4}$$

$$\therefore \overline{AN}=\overline{AC}-\overline{CN}=b-\frac{-a+b+c}{4}=\frac{a+3b-c}{4}$$

$$\overline{AL}=\overline{AB}-\overline{BL}=c-\frac{-a+b+c}{4}=\frac{a-b+3c}{4}$$

又 $\overline{AK}=\overline{AC}-\overline{CK}=b-(\frac{a+b+c}{4}+\frac{-a+b+c}{4})=\frac{b-c}{2}$

則： $\overrightarrow{AB}=cu$ ， $\overrightarrow{AC}=bv$ ， $\overrightarrow{AL}=\frac{a-b+3c}{4}u$ ，

$\overrightarrow{AK}=\frac{b-c}{2}v$ ， $\overrightarrow{AN}=\frac{a+3b-c}{4}v$ ， $\overrightarrow{AM}=\frac{bu+cv}{2}$

設 D 為 $\overline{LN}$ 中點， $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AN})=\frac{a-b+3c}{8}u+\frac{a+3b-c}{8}v$

1. $\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AK}$

$$=\frac{a-b+3c}{8}u+\frac{a+3b-c}{8}v-\frac{b-c}{2}v$$

$$=\frac{a-b+3c}{8}u+\frac{a-b+3c}{8}v$$

$$=\frac{a-b+3c}{8}(u+v)$$

2. $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}$

$$=\frac{cu+bv}{2}-(\frac{a-b+3c}{8}u+\frac{a+3b-c}{8}v)$$
$$=\frac{-a+b+c}{8}u+\frac{-a+b+c}{8}v$$
$$=\frac{-a+b+c}{8}(u+v)$$

根據 1、2：$\overrightarrow{KD}//\overrightarrow{DM}$，即 K，D，M 共線。

（二）標準化重心座標，by Bing Jian.

如圖 30，

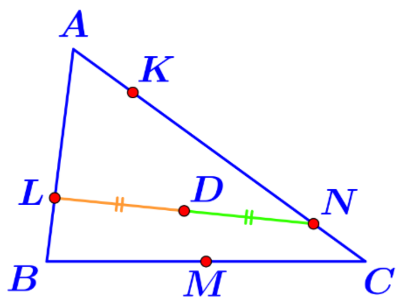

圖 30

令 $A=(1,0,0)$，$B=(0,1,0)$，$C=(0,0,1)$

則 $M=\frac{1}{2}(B+C)=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$，$b>a>c$。

$$\because \overline{CN}=\overline{BL}=\frac{a+b+c}{4}-\frac{a}{2}=\frac{-a+b+c}{4}$$

$$\overline{AK}=\overline{AC}-\overline{CK}=b-(\frac{a+b+c}{4}+\frac{-a+b+c}{4})=\frac{b-c}{2}$$

$$\therefore K=(\frac{b+c}{2b},0,\frac{b-c}{2b})，N=(\frac{-a+b+c}{4b},0,\frac{a+3b-c}{4b})，L=(\frac{-a+b+c}{4c},\frac{a-b+3c}{4c},0)$$

$$\Rightarrow D=\frac{1}{2}\cdot(N+L)=(\frac{(-a+b+c)(b+c)}{8bc},\frac{a-b+3c}{8c},\frac{a+3b-c}{8b})$$

$$K-M=(\frac{b+c}{2b},-\frac{1}{2},-\frac{c}{2b})$$

$$K-D=(\frac{b+c}{2b}-\frac{(-a+b+c)(b+c)}{8bc},0-\frac{a-b+3c}{8c},\frac{b-c}{2b}-\frac{a+3b-c}{8b})$$
$$=(\frac{(b+c)(a-b+3c)}{8bc},-\frac{a-b+3c}{8c},-\frac{a-b+3c}{8b})$$
$$=\frac{a-b+3c}{4c}\cdot(\frac{b+c}{2b},-\frac{1}{2},\frac{c}{2b})=\frac{a-b+3c}{4c}\cdot(K-M)$$

即 K，D，M 共線。

【評語】030408

(1) 本作品始源於加拿大數學雜誌《Crux Mathematicorum》Vol. 49, No. 7, 的一道幾何徵答題，主要研究目的是討論原始題目中三角形周長四個分割點的位置，並探究對應逆命題成立的條件。

(2) 本文作者利用 西瓦定理 與 孟氏定理 來證明原始問題，是不錯的切入點，證明手法相對簡潔；作者也嘗試將原問題作適度推廣，值得肯定，但整體而言較缺少吸睛的亮點，建議未來能進一步探討其他相關幾何性質，則作品會更具豐富性。

作品簡報

三角形周長分割點交叉連線的截成線段比例研究及其逆命題

壹、 作品簡介

一、摘要

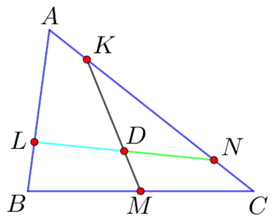

圖 1 原始題目

（一）在三角形邊長上任取的一點 M，探討由 M 點出發依序把三角形周長分割成四段，經由「孟氏定理」研究三角形周長它的四個分割點交叉連線的截成線段的比例與 M 點分割三角形的邊長線段比例有何關係式，而且進一步探討它逆命題成立的條件。

（二）原始題目（Crux Mathematicorum, Vol. 49, No. 7 Problem 4867）

$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，且 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。若 L、K、N 三點在三角形的邊上，且 M、L、K、N 恰好將三角形的周長分成 4 等分，則 $\overline{KM}$ 平分 $\overline{LN}$。（如圖 1）

二、研究目的

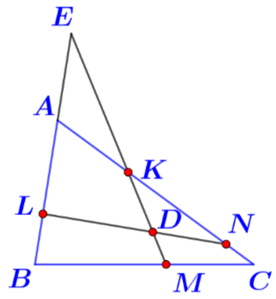

圖 2

（一）證明原始題目，即證明：$\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=\dfrac{1}{1}$。

（二）討論原始題目，三角形周長四個分割點所在的位置。

（三）推論原始題目，三角形周長分割成四段長度的比例為 $x:y:z:w$ 及 $\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$ 條件下，則 $\overline{AE}$ 與 $\overline{AK}$ 及 $\overline{ND}$ 與 $\overline{LD}$ 關係式為何？此外 $\overline{AE}=\overline{AK}$，$\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=\dfrac{n}{m}$ 成立的條件為何？（如圖 2）

（四）探討是否有其他分割法使得 $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$。

（五）探討（三）之逆命題成立條件。

貳、 研究方法

一、西瓦定理（Ceva's theorem）。

二、孟氏定理（Menelaus' theorem）。

三、平行線與比例線段。

四、相似三角形。

參、 研究過程

（一）Crux Mathematicorum 網站的原始題目證明

【證法一】請參閱說明書第 3、4 頁。

【證法二】

如圖 3，延長 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點

在 $\triangle ABC$、$\triangle ALN$ 中：

依據孟氏定理得知：

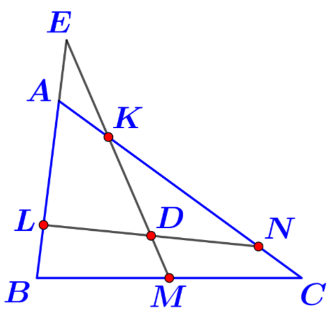

圖 3

$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KC}}\cdot\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=1$ ………①

$\dfrac{\overline{LE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KN}}\cdot\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1$ ………②

$\Rightarrow\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{KC}}\cdot\dfrac{\overline{KN}}{\overline{LE}}$ ………③

(1)證明 $\overline{AE}=\overline{AK}$

設 $\overline{AL}=a$，$\overline{AK}=b$，$\overline{AE}=c$，$\overline{BM}=d$

$\Rightarrow\overline{BL}=a+b-d$，$\overline{CN}=\overline{AL}+\overline{AK}-\overline{CM}=a+b-d$

$\Rightarrow\overline{KN}=\overline{AL}+\overline{AK}=a+b$

由①得：$\dfrac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KN}+\overline{CN}}=1$

$\Rightarrow\dfrac{(a+b-d)+a+c}{c}\cdot\dfrac{b}{(a+b)+(a+b-d)}=1$

$\Rightarrow(2a+b+c-d)b=c(2a+2b-d)$

$\Rightarrow 2ab+b^2+bc-bd=2ac+2bc-cd$

$\Rightarrow 2a(b-c)+b(b-c)-d(b-c)=0$

$\Rightarrow(b-c)(2a+b-d)=0$

$\because 2a+b-d\neq0\quad\therefore b-c=0\Rightarrow b=c$ 故 $\overline{AE}=\overline{AK}$

(2)證明 $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1$

由③知：$\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}{\overline{KN}+\overline{CN}}\cdot\dfrac{\overline{KN}}{\overline{AL}+\overline{AE}}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AK}}{\overline{KN}+\overline{CN}}\cdot\dfrac{\overline{KN}}{\overline{AL}+\overline{AK}}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{(a+b-d)+a+b}{(a+b)+(a+b-d)}\cdot\dfrac{a+b}{a+b}=1$

（二）原始題目三角形周長四個分割點的位置之討論

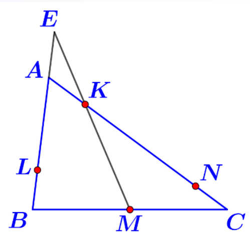

圖 4

如圖 4（請參閱說明書第 6 至 8 頁）

1.「N 點一定在 $\overline{AC}$ 上」。

2.「K 點一定在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AK}<\overline{CK}$，即 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{MK}$ 會交於 E 點」。

3.「L 點一定在 $\overline{AB}$ 上」。

（三）$\overline{AE}$ 與 $\overline{AK}$ 及 $\overline{LD}$ 與 $\overline{ND}$ 一般關係式之證明

考慮三角形每邊上至少一點（M 點不一定在中點，分割點不一定為四等分割點）。假設 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點

【定理一】證明

在 $\triangle ABC$、$\triangle ALN$ 中，依據孟氏定理得知：（如圖 5）

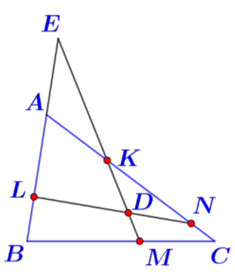

圖 5

$\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KC}}\cdot\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=1$ ………①

$\dfrac{\overline{LE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KN}}\cdot\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=1$ ………②

$\Rightarrow\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{\overline{BE}}{\overline{KC}}\cdot\dfrac{\overline{KN}}{\overline{LE}}$ ………③

設 $\overline{AL}=a$，$\overline{AK}=b$，$\overline{AE}=c$，$\overline{BM}=d$

$\because\dfrac{\overline{BM}+\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}}=\dfrac{x}{y}\Rightarrow\dfrac{d+\overline{BL}}{a+b}=\dfrac{x}{y}\quad\overline{BL}=\dfrac{x}{y}(a+b)-d$

$\because\dfrac{\overline{CM}+\overline{CN}}{\overline{AL}+\overline{AK}}=\dfrac{y}{w}\quad\Rightarrow\overline{CM}+\overline{CN}=\dfrac{w}{y}(a+b)$

又 $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}=\dfrac{m}{n}\Rightarrow\overline{CM}=\dfrac{n}{m}\cdot\overline{BM}=\dfrac{n}{m}\cdot d$

$\therefore\overline{CN}=\dfrac{w}{y}(a+b)-\dfrac{n}{m}\cdot d$

$\because\dfrac{\overline{AL}+\overline{AK}}{\overline{KN}}=\dfrac{y}{z}\quad\Rightarrow\overline{KN}=\dfrac{z}{y}(\overline{AL}+\overline{AK})=\dfrac{z}{y}(a+b)$

由①得：$\dfrac{\overline{BL}+\overline{AL}+\overline{AE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AK}}{\overline{KN}+\overline{CN}}\cdot\dfrac{n}{m}=1$

$\Rightarrow\dfrac{[\frac{x}{y}(a+b)-d]+a+c}{c}\cdot\dfrac{b}{\frac{z}{y}(a+b)+\frac{w}{y}(a+b)-\frac{n}{m}\cdot d}\cdot\dfrac{n}{m}=1$

$$\Rightarrow c[m\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-nd]=\{[\frac{x}{y}(a+b)-d]+a+c\}nb$$

$$\Rightarrow c[m\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-n(b+d)]=[\frac{x}{y}(a+b)-d+a]nb$$

$$\Rightarrow c[\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-(b+d)]=[\frac{x}{y}(a+b)-d+a]b$$

$$\Rightarrow c=\frac{[\frac{x}{y}(a+b)+a-d]b}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{y}(a+b)-(b+d)}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{[\frac{x}{y}(\overline{AL}+\overline{AK})+\overline{AL}-\overline{BM}]}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{y}(\overline{AL}+\overline{AK})-(\overline{AK}+\overline{BM})}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{(\overline{BM}+\overline{BL}+\overline{AL}-\overline{BM})}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{BM}+\overline{AL}}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AL}+\overline{BL}}\cdot\overline{AK}$$

【定理一特例】證明

(1)$\because \frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{x+y}{w+z}=\frac{m}{n}$

$\therefore \frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1$

$=\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{x+y}{x}-\frac{y}{x}-1 \quad =1+\frac{y}{x}-\frac{y}{x}-1=0$

因此由【定理一】之(1)知：$\overline{AE}=\overline{AK}$ 。

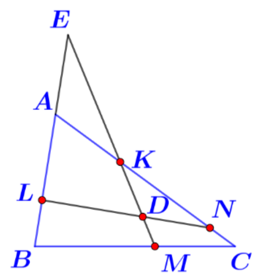

圖 6

(2)由【定理一】之(2)及上面(1)知：

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$=\frac{n}{m}(\frac{\overline{AL}+\overline{AK}+\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{n}{m}\cdot\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$\Rightarrow \overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$$

由③：$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{\frac{x}{y}(a+b)-d+a+c}{\frac{w}{y}(a+b)+\frac{z}{y}(a+b)-\frac{n}{m}d}\cdot\frac{\frac{z}{y}(a+b)}{a+c}$

$$=\frac{n}{m}\cdot\frac{\frac{x}{y}(a+b)-d+a+c}{a+c}\cdot\frac{\frac{z}{y}(a+b)}{\frac{w+z}{y}(a+b)-\frac{n}{m}d}$$

$$=\frac{n}{m}[1+\frac{\frac{x}{y}(a+b)-d}{a+c}][\frac{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{y}\cdot\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$=\frac{n}{m}(\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{n}{m}\cdot\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$$

$$=[\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{y})][\frac{z}{\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{BM}}]$$

$$=\frac{z}{y}[\frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{\frac{x+y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\overline{BM}}]=\frac{z}{y}(\frac{\frac{y}{x}\overline{BM}+\frac{y}{x}\overline{BL}+\overline{BL}}{\frac{x+y}{x}\overline{BM}+\frac{x+y}{x}\overline{BL}-\overline{BM}})$$

$$=\frac{z}{y}(\frac{\frac{y}{x}\overline{BM}+\frac{x+y}{x}\overline{BL}}{\frac{y}{x}\overline{BM}+\frac{x+y}{x}\overline{BL}})=\frac{z}{y}=\frac{n}{m}$$ 故得證。

(四)、使得 $\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$ 的其他分割法之證明

【定理二】證明

在△BEM 、△LED 中，依據孟氏定理得知：(如圖 7)

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}=1$⋯⋯① $\frac{\overline{AL}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KD}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LN}}=1$⋯⋯②

$$\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{EK}}{\overline{KD}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LN}}\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{CM}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{KD}}\cdot\frac{\overline{ND}}{\overline{LN}}\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{KM}}\cdot\frac{n}{m+n}=\frac{\overline{AL}}{\overline{KD}}\cdot\frac{n}{m+n}\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{AL}}{\overline{KD}}\Rightarrow\frac{\overline{AL}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{KD}}{\overline{KM}}$$

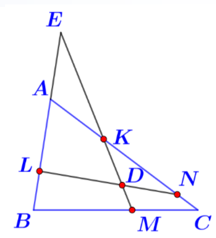

圖 7

根據【定理一特例】及上面的結果，就會有兩種三角形周長分割方法皆可得到 $\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$ 。

(一) 方法一

$\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$ 。(如圖 8)

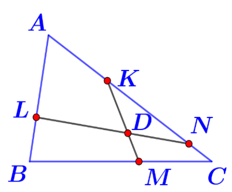

圖 8

(二) 方法二

$\frac{x}{y}=\frac{w}{z}=\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$ 。(如圖 9)

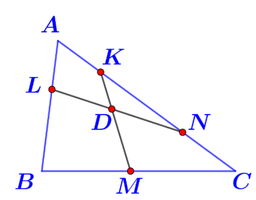

圖 9

(五) 定理一特例的逆命題之討論與證明

【定理三】

1. 當 $\overline{AE}=\overline{AK}$ 時，$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$ 不一定成立。
$\angle A=90°$、$\angle B=60°$、$\angle C=30°$，
$\overline{AE}=\overline{AK}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=8$。若 L 點為 $\overline{AB}$ 中點，N 點在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{LN}\,//\,\overline{BC}$ 。(如圖 10)

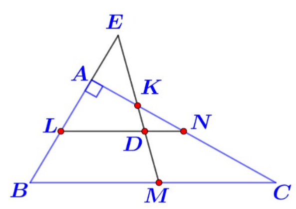

圖 10

2. 當 $\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$ 時，$\overline{AE}=\overline{AK}$ 不一定成立。
$\angle A=90°$、$\angle B=60°$、$\angle C=30°$，
$\overline{BM}=5$，$\overline{CM}=3$，$\overline{AL}:\overline{BL}=1:3$。，$\overline{AK}:\overline{CK}=1:3$ $\overline{KN}:\overline{CN}=2:3$，
$\overline{AL}=\overline{AE}$ 。(如圖 11)

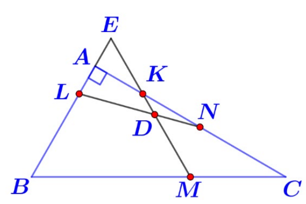

圖 11

3. 由【定理一】之(1)知：

$$\overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}=1$$

$$\Rightarrow\overline{AB}=(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}$$

$$\Rightarrow(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})=0$$

$$\Rightarrow\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1=0\Rightarrow\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}=\frac{x+y}{x}\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{x+y}{w+z}$$

(2)再由【定理一】之(2)知：

$$\frac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\frac{n}{m}(1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]$$

$$\Rightarrow (1+\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AK}})[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}\cdot[\frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{y}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{BL}}{y}\cdot[\frac{z}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}]=1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\frac{z}{y}\overline{BL}}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})+\frac{z}{y}\overline{BL}=\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{w+z}{x+y}\cdot\overline{BM}-\frac{w}{x}\cdot\overline{BM}+\frac{z}{y}\cdot\overline{BL}-\frac{w}{x}\cdot\overline{BL}=0$$

$$\Rightarrow (\frac{w+z}{x+y}-\frac{w}{x})\cdot\overline{BM}+(\frac{z}{y}-\frac{w}{x})\cdot\overline{BL}=0$$

$$\Rightarrow [\frac{xz+xw-xw-yw}{x(x+y)}]\cdot\overline{BM}+\frac{xz-yw}{xy}\overline{BL}=0$$

$$\Rightarrow (xz-yw)[\frac{\overline{BM}}{x(x+y)}+\frac{\overline{BL}}{xy}]=0 \Rightarrow (xz-yw)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$$

肆、 研究結果與結論

（一）Crux Mathematicorum 網站原始題目的兩種證明方法

△ABC 中， $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，且 M 為 $\overline{BC}$ 的中點。若 L 點在 $\overline{AB}$ 上，K 點、N 點在 $\overline{AC}$ 上，且 M、L、K、N 四個點恰好將三角形的周長分割成 4 等分。即 $(\overline{BM}+\overline{BL})=(\overline{AL}+\overline{AK})=\overline{KN}=(\overline{CM}+\overline{CN})$，則：$\overline{KM}$ 平分 $\overline{LN}$。(如圖 12)

我們提供兩個幾何上不同於網站解法的證明。

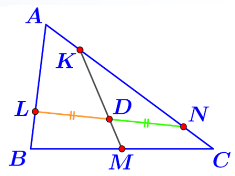

圖 12

（二）原始題目三角形周長四個分割點的位置之討論

△ABC 中，$\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$，$M$ 為 $\overline{BC}$ 的中點。且 M、L、K、N 為周長順時針排列的四等分分割點。可以證明 L 點必在 $\overline{AB}$ 上，K 點、N 點必在 $\overline{AC}$ 上且 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點。(如圖 13)

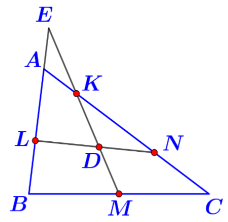

圖 13

（三）$\overline{AE}$ 與 $\overline{AK}$ 及 $\overline{LD}$ 與 $\overline{ND}$ 一般關係式

由（二），我們延申原始題目的三角形，以下定理一、二、三皆考慮三角形每邊至少一點（M 點不一定為 $\overline{BC}$ 中點，分割點不一定為週長的四等分分割點）。假設 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{MK}$ 交於 E 點。

【定理一】假設 $\overline{BM}:\overline{CM}=m:n$，$(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$（如圖 14）

則：1. $\overline{AE}=\dfrac{\overline{AB}}{(\frac{m}{n}\cdot\frac{w+z}{x}-\frac{y}{x}-1)\cdot(\overline{BM}+\overline{BL})+\overline{AB}}\cdot\overline{AK}$ 2. $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{n}{m}(1+\dfrac{\overline{BL}}{\overline{AL}+\overline{AE}})[\dfrac{\frac{z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})}{\frac{w+z}{x}(\overline{BM}+\overline{BL})-\frac{n}{m}\cdot\overline{BM}}]$

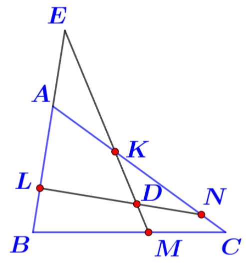

圖 14

【定理一特例】考慮 $\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$，則：1. $\overline{AE}=\overline{AK}$，2. $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}=\dfrac{n}{m}$。

（四）使得 $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$ 的其他分割法

【定理二】

△ABC 中若 M 點 $\overline{BC}$ 上，L 點在 $\overline{AB}$ 上，K 點、N 點在 $\overline{AC}$ 上，$\overline{KM}$ 交 $\overline{LN}$ 於 D 點。

若 $(\overline{BM}+\overline{BL}):(\overline{AL}+\overline{AK}):\overline{KN}:(\overline{CM}+\overline{CN})=x:y:z:w$ 且 $\frac{x}{y}=\frac{w}{z}=\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}$。則：$\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{BM}}$。(如圖 15)

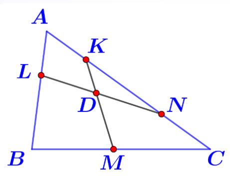

圖 15

（五）定理一特例的逆命題之討論

【定理三】

1. 當 $\overline{AE}=\overline{AK}$ 時，$\dfrac{\overline{LD}}{\overline{ND}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BL}}$ 不一定成立。

2. 當 $\dfrac{\overline{LD}}{\overline{ND}}=\dfrac{\overline{BM}}{\overline{CM}}$ 時，$\overline{AE}=\overline{AK}$ 不一定成立。

3. 若 $\overline{AE}=\overline{AK}$ 且 $\dfrac{\overline{ND}}{\overline{LD}}=\dfrac{n}{m}$，則 $\frac{x}{w}=\frac{y}{z}=\frac{m}{n}$。(如圖 16)

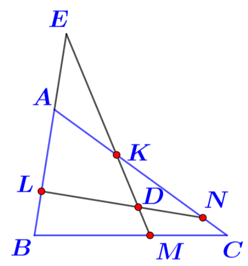

圖 16

陸、 未來展望

一、討論三角形的周長分割後，我們希望之再能再繼續討論四邊形或多邊形的周長分割。
二、進一步看能否找到在周長分割後，面積的比例是否也能找出漂亮的關係式或逆命題。

陸、 參考文獻資料

[1]、Problem 4867(2023).Crux Mathematicorum, Vol. 49(7) P41
[2]、學霸筆記：幾何，洪萬生(譯)(2022)，三民出版社
[3]、Crux Mathematicorum, Vol. 50(2), February 2024 P.94、P.95
[4]、國中數學第四冊(2024)及第五冊(2023)，台南市翰林出版事業股份有限公司。

註、本作品中的所有圖片均為作者親自製作。