中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030407

康威圓定理在圓外切多邊形的推廣

學校名稱： 金門縣立烈嶼國民中學

作者：	指導老師：
國三 洪晨恩 國三 陳雨汎 國三 陳雨曈	黃國綸

關鍵詞： 康威圓定理、圓外切多邊形、共圓

康威圓定理在圓外切多邊形的推廣

摘要

本研究旨在探討圓外切多邊形中從每個頂點沿相交邊延伸特定距離所形成新端點的共圓性質，作為康威圓定理的一項推廣。研究同時考察了從圓外切多邊形的每個頂點處沿其相鄰邊及其反方向延伸特定距離形成的端點是否亦共圓。研究結果顯示，多組端點呈現共圓的現象。特別是在三角形的案例中，相較於邊數四或以上的多邊形，每組在共圓點的數量上多出兩個。進一步的探討揭示了三角形經過此操作後，三條公弦的延長線相交於一點，竟恰好是三角形的奈格爾點(*Nagel point*)，本研究對這一發現也進行了討論和論證。

壹、研究動機

康威圓定理（Conway's Circle Theorem）是關於三角形的一個有趣的幾何定理，這個定理由英國數學家 John Horton Conway 提出，請見參考資料[1]與[2]。定理內容是說到如果將三角形的每個頂點處相交的兩邊延長與對邊等長的距離，則所得到的三條線段的六個端點都會位於一個圓上，該圓的圓心恰好是三角形的內心，如圖 01。

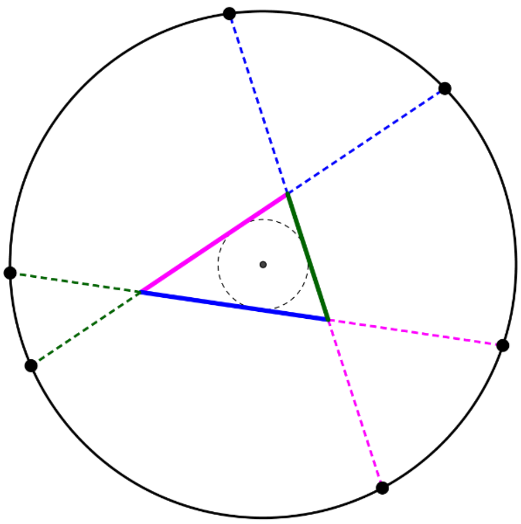

圖 01 康威圓定理示意圖(作者自行繪製)

這個定理的驚人之處在於，雖然三條線段的六個端點看似獨立，但它們卻存在共圓這個美妙的性質。

一、文獻探討

（一）康威圓定理的證明

在探討康威圓定理及其證明的過程中，C. Beveridge（2020 年 5 月）所提供的證明方法展示了一種無需文字解釋即可理解的直觀幾何證明，如圖 02-a～f。

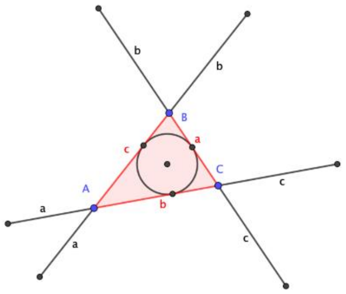

圖 02-a 每個頂點處相交的兩邊延長與對邊等長的距離

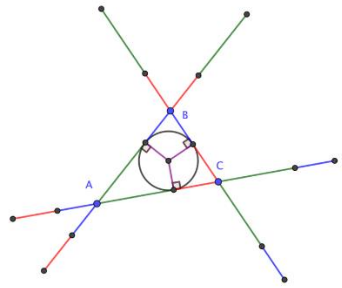

圖 02-b 延長的距離和切線段長的關係

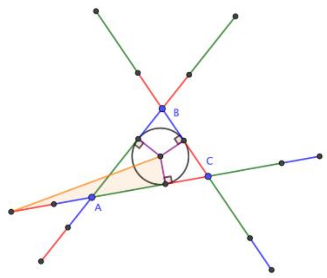

圖 02-c 三角形內心、切點、端點形成直角三角形

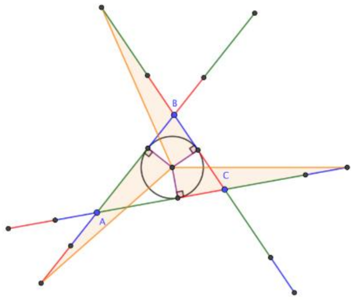

圖 02-d 三個全等直角三角形

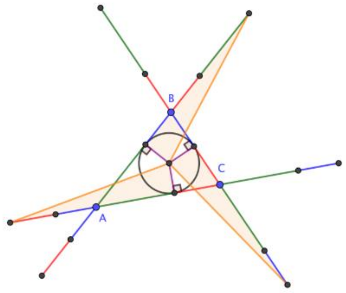

圖 02-e 另外三個全等三角形

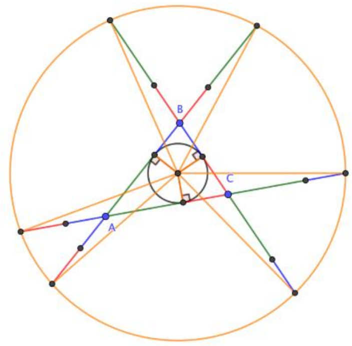

圖 02-f 六端點與內心等距

圖 02 康威圓定理的證明過程

(資料來源：取自 Aperiodical 網站於 2020 年 5 月發表的文章，圖片由 Colin Beveridge 創作)

這些圖片使抽象的數學證明變得更加生動和容易理解，不僅有效傳達數學概念，也對讀者產生吸引力。接著，我們查詢康威圓定理的相關推廣。

（二）康威圓定理的相關推廣

1. 卡諾定理（Carnot's Theorem）

卡諾定理描述了圓錐曲線與三角形之間的關係，於 1803 年由法國數學家 Lazare Carnot 首次提出，並發表於其著作《Géométrie de position》中。

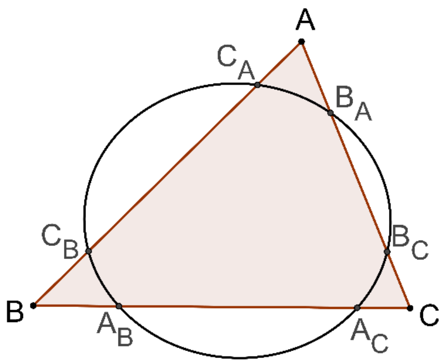

圖 03 卡諾定理描述橢圓與三角形各邊相交兩點之間的關係(作者自行繪製)

如圖 03，在一個三角形 ABC 中，令$\overline{AB}$邊上兩點 C_A、C_B，$\overline{BC}$邊上兩點 A_B、A_C，$\overline{AC}$邊上兩點 B_A、B_C，若且唯若該六點位於共同的圓錐曲線上，下列關係式成立：

$$\frac{|AC_A|}{|BC_A|}\cdot\frac{|AC_B|}{|BC_B|}\cdot\frac{|BA_B|}{|CA_B|}\cdot\frac{|BA_C|}{|CA_C|}\cdot\frac{|CB_C|}{|AB_C|}\cdot\frac{|CB_A|}{|AB_A|}=1.$$

特別是當應用於圓時，且圓心是三角形 ABC 的內心時，以下定理提供了對圓與三角形之間深刻關係的洞察。

2. 邊分割定理（Side divider theorem）

Michael de Villiers 在 2023 年闡述了康威圓定理與 Side divider theorem 之間的關聯。他提到的 Side divider theorem 如圖 04-*a*，給定任意△ABC，設$\overleftrightarrow{AB}$上有一任意點 P。在三角形各邊上建構$\overline{BQ}=\overline{BP}$，$\overline{CR}=\overline{CQ}$，$\overline{AS}=\overline{AR}$，$\overline{BT}=\overline{BS}$，$\overline{CU}=\overline{CT}$，結果就有$\overline{AP}=\overline{AU}$，且 P、Q、R、S、T、U 六點共圓的美妙性質。因為 P 點是$\overleftrightarrow{AB}$上的任意點，當點 P 被拖曳到$\overleftrightarrow{AB}$的外側且$\overline{BP}=b$ 時，如圖 04-*b*，正好就產生了康威圓的配置，給出康威圓定理的直觀證明。因此，這個 Side divider theorem 實際上是康威圓定理的一個推廣。

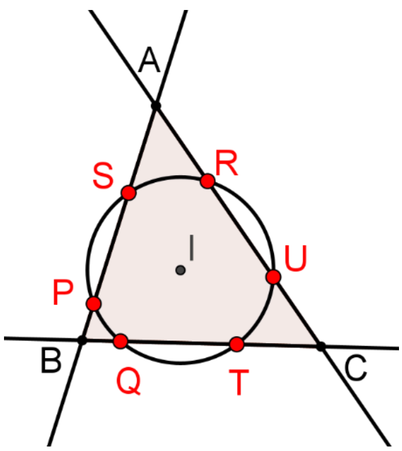

圖 04-a (作者自行繪製)

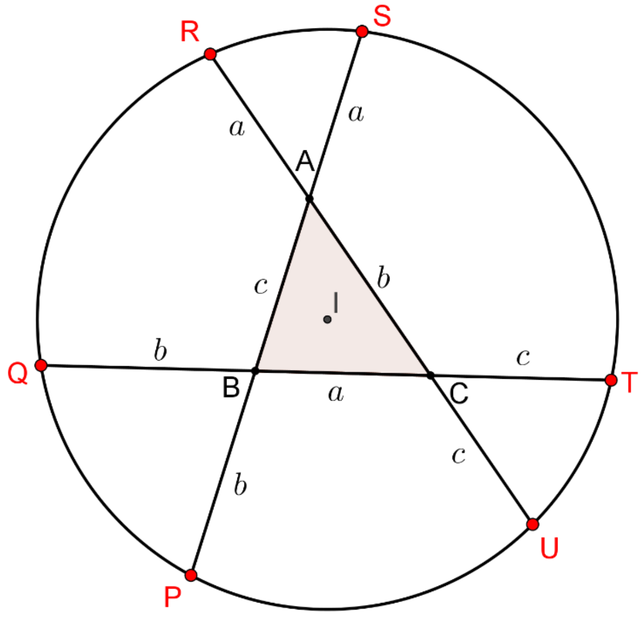

圖 04-b (作者自行繪製)

然而，de Villiers 沒有將此定理推廣到多邊形，我們基於好奇心，本研究擬探討如何將康威圓定理擴展到多邊形。考慮圓外切多邊形和三角形都存在內心，這樣的結構對於推廣康威圓定理特別重要，因此，我們的研究將聚焦於圓外切多邊形。又由於三角形內切圓與各邊切

點到各頂點的距離與三角形周長有一美妙關係，即三角形各邊向外延伸的 a、b、c 長度可以表示為三角形半周長減去切點到頂點的距離，如圖 05-a，假設△ABC 與其內切圓圓 I 相切，切點分別為 T_1、T_2、T_3，若 s 是△ABC 半周長，則易知 $s_1=\overline{AT_1}=\overline{AT_3}=s-a$，$s_2=\overline{BT_1}=\overline{BT_2}=s-b$，$s_3=\overline{CT_2}=\overline{CT_3}=s-c$，移項可得 $a=s-s_1$，$b=s-s_2$，$c=s-s_3$。

基於此，我們考慮將這一概念類比並推廣到圓外切多邊形，探討在更複雜的圓外切多邊形中產出的端點是否也存在共圓的性質。如圖 05-b，設圓外切四邊形 $ABCD$ 的四個頂點對內切圓的切線段長分別為 s_1、s_2、s_3、s_4，將此四邊形 $ABCD$ 的每個頂點處相交的兩邊依序延長 $s-s_1$、$s-s_2$、$s-s_3$、$s-s_4$ 的距離，所得到的 E、F、G、H、P、Q、R、S 這八個點似乎共圓，有待驗證。

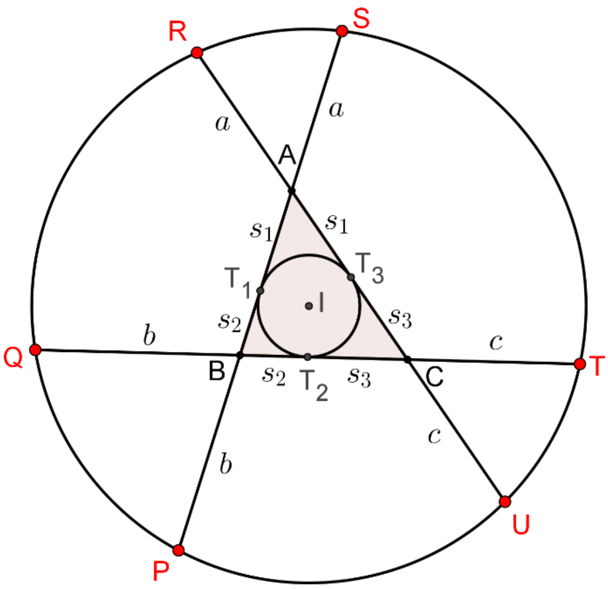

圖 05-a (作者自行繪製)

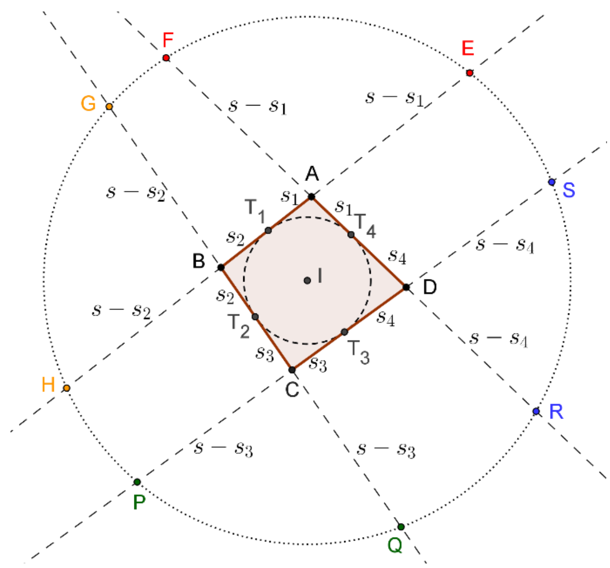

圖 05-b (作者自行繪製)

另外，我們發現康威圓定理目前在多邊形的研究較少探討從每個頂點沿著相鄰邊的兩個方向及其「反方向」延伸特定距離所形成新的端點。我們的研究也將探索在多邊形中，從每個頂點按照這種方式延伸新形成的端點是否具有共圓的性質。

如圖 06-a 中，從△ABC 每個頂點沿著相鄰邊的兩個方向及其「反方向」延伸特定距離所形成新的端點，使 $\overline{AS}=\overline{AR}=\overline{AS'}=\overline{AR'}=s-s_1$，$\overline{BQ}=\overline{BP}=\overline{BQ'}=\overline{BP'}=s-s_2$，$\overline{CU}=\overline{CT}=\overline{CU'}=\overline{CT'}=s-s_3$，則 P、Q、R、S、T、U、P'、Q'、R'、S'、T'、U'這十二個點中是否有某些點存在共圓的特性？

如圖 06-b，從圓外切四邊形 $ABCD$ 每個頂點沿著相鄰邊的兩個方向及其「反方向」延伸

特定距離所形成新的端點，使$\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{AE'}=\overline{AF'}=s-s_1$，$\overline{BG}=\overline{BH}=\overline{BG'}=\overline{BH'}=s-s_2$，$\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{CP'}=\overline{CQ'}=s-s_3$，$\overline{DR}=\overline{DS}=\overline{DR'}=\overline{DS'}=s-s_4$，則 E、F、G、H、P、Q、R、S、E'、F'、G'、H'、P'、Q'、R'、S'這十六個點是否有某些點存在共圓的特性？

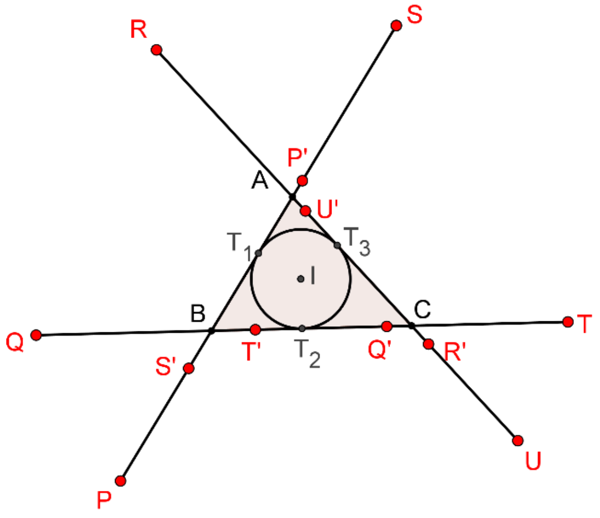

圖 06-a (作者自行繪製)

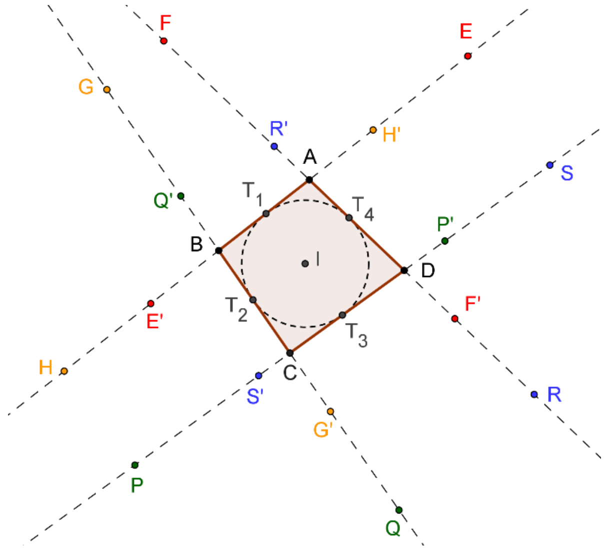

圖 06-b (作者自行繪製)

二、研究問題

綜上所述，我們想將康威圓定理推廣到更複雜的多邊形結構。這不僅涉及三角形，還包括多邊形，藉此豐富和深化現有的幾何性質。由於圓外切多邊形和三角形都存在內心，這樣的結構對於推廣康威圓定理特別重要，因此，我們將聚焦於圓外切多邊形。此外，我們的研究將探索圓外切多邊形從每個頂點沿著相鄰邊的兩個方向以及其反方向延伸特定距離所形成新的端點是否形成特定的幾何結構，特別是是否存在共圓的性質。

與上述文獻相比，我們的研究聚焦於康威圓在圓外切多邊形中的幾何性質。我們專注於圓外切多邊形的特定幾何構造，這在前述文獻中並未深入探討。

貳、研究目的

根據研究動機，因此，本研究的目的在於：

一、探討康威圓定理推廣到圓外切多邊形，是否有相同的性質。

二、對於三角形和圓外切多邊形，判斷各邊「雙向」延長某距離的端點是否存在共圓的特性。若有，並設法證明。

參、研究設備與器材

研究設備包括：紙、筆、筆電、Geogebra 5.0。在研究內容中，我們利用幾何的證明知識，進行推理論證。

肆、研究過程與內容

為了將多邊形頂點與各邊雙向延長的端點確立一套明確的命名系統，我們定義命名規則：

一、研究方法

（一）命名規則

1. 圓外切 N 邊形（$N≧3$）的 N 個頂點 P_i，$\forall i = 1,2,3,\dots,n$。對於一個具有 N 個頂點的圓外切多邊形 $P_1P_2P_3\dots P_N$，為了方便討論幾何構造，我們引入了模數運算來定義頂點的索引。對於任意整數 i，我們定義 $P_{i+n}=P_i \pmod n$。這意味著當索引 i 的值超過 N 時，會自動繞回多邊形的起始頂點，形成一個閉合的循環。例如，若 $N = 5$（即五邊形），則 P_6 將等同於 P_1，P_7 等同於 P_2，依此類推。
2. 圓外切 N 邊形（$N≧3$）的半周長 s 是指所有邊長總和的一半。
3. 圓外切多邊形的內心 I，半徑為 r。
4. 圓外切多邊形的 N 個旁心 J_i，$\forall i = 1,2,3,\dots,n$，我們定義 $J_{i+n}=J_i \pmod n$。
5. 圓外切 N 邊形 $P_1P_2P_3\dots P_N$（$N≧3$）與其內切圓相切，切點分別為 T_1、T_2、…、T_N

   其中 T_1 在 $\overline{P_1P_2}$ 上、T_2 在 $\overline{P_2P_3}$ 上、…、T_{n-1} 在 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 上、T_n 在 $\overline{P_nP_1}$ 上。

   對於任意整數 i，我們定義 $T_{i+n}=T_i \pmod n$。
6. 圓外切 N 多邊形 $P_1P_2P_3\dots P_N$ 與其旁切圓 J_i 相切，旁切圓 J_i 的半徑為 r_i，

   我們定義 $r_{i+n}=r_i \pmod n$，$\forall i=1,2,3,\dots,n$。。
7. 對於一個圓外切 N 多邊形 $P_1P_2P_3\dots P_N$，$\forall i=1,2,3,\dots,n$，當 $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overline{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$ 與其旁切圓 J_{i-1} 相切，切點分別為 U_{i1}、U_{i2}、U_{i3}，其中 U_{i1} 在 $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ 上、U_{i2} 在 $\overline{P_iP_{i+1}}$ 上、U_{i3} 在 $\overrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$ 上；對於任意整數 i，我們定義 $U_{(i+n)1}=U_{i1} \pmod n$、$U_{(i+n)2}=U_{i2} \pmod n$ 、$U_{(i+n)3}=U_{i3} \pmod n$。
8. 設圓外切多邊形的 N 個頂點對內切圓的切線段長 $\overline{P_iT_i}=s_i$，$\forall i=1,2,3,\dots,n$。

   對於任意整數 i，我們定義 $s_{i+n}=s_i \pmod n$。
9. 在圓外切多邊形 $P_1P_2P_3\dots P_N$ 中，每個頂點 P_i 不僅關聯到其自身的索引，而且也產生新的端點，這些端點是基於從 P_i 沿著特定方向延伸的距離得來。

   對於每個整數 i，端點被定義如下：

   (1) 從 P_i 沿著向量 $\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$ 延伸延伸 $s-s_i$ 的距離得到端點 P_{ia}；

   (2) 從 P_i 沿著向量 $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ 延伸延伸 $s-s_i$ 的距離得到端點 P_{ib}；

   (3) 從 P_i 沿著向量 $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ 延伸延伸 $s-s_i$ 的距離得到端點 P_{ic}；

   (4) 從 P_i 沿著向量 $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ 延伸延伸 $s-s_i$ 的距離得到端點 P_{id}；

對於每個整數 i，我們引入以下模數定義：

$P_{(i+n)a}=P_{ia}\ (\mathrm{mod}\ n)$，$P_{(i+n)b}=P_{ib}\ (\mathrm{mod}\ n)$，$P_{(i+n)c}=P_{ic}\ (\mathrm{mod}\ n)$，$P_{(i+n)d}=P_{id}\ (\mathrm{mod}\ n)$

例如，如果 $N=5$，則 P_{6a} 將等同於 P_{1a}，P_{7b} 等同於 P_{2b}，依此類推。

（二）多邊形的內心：是指多邊形內切圓的圓心，即在一個多邊形內，到所有邊距離都相等的點，但不是所有的多邊形都有內心，本研究所探討的多邊形都具有內心。

（三）多邊形的旁心：指多邊形旁切圓的圓心，即在一個多邊形外，到多邊形的某邊與其相鄰兩邊的延長線距離都相等的點。

二、研究過程

（一）在圓外切 N 邊形中（$N\geq 4$），從每個頂點處沿著相交的邊延伸 $s-s_i$ 距離時，所形成的所有 P_{ia}、P_{ib} 端點將共同位於一個圓上。

1. 圓外切四邊形

【性質一】（康威圓定理在圓外切四邊形中的推廣）

已知圓外切四邊形 $P_1P_2P_3P_4$，

若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_4P_1}$ 延伸 $s-s_1$ 的距離取端點 $\boldsymbol{P_{1a}}$、$\boldsymbol{P_{1b}}$，

從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$ 延伸 $s-s_2$ 的距離取端點 $\boldsymbol{P_{2a}}$、$\boldsymbol{P_{2b}}$，

從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_4P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$ 延伸 $s-s_3$ 的距離取端點 $\boldsymbol{P_{3a}}$、$\boldsymbol{P_{3b}}$，

且從 P_4 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_4}$、$\overrightarrow{P_3P_4}$ 延伸 $s-s_4$ 的距離取端點 $\boldsymbol{P_{4a}}$、$\boldsymbol{P_{4b}}$，

則這八個端點 $\boldsymbol{P_{1a}}$、$\boldsymbol{P_{1b}}$、$\boldsymbol{P_{2a}}$、$\boldsymbol{P_{2b}}$、$\boldsymbol{P_{3a}}$、$\boldsymbol{P_{3b}}$、$\boldsymbol{P_{4a}}$、$\boldsymbol{P_{4b}}$ 必共圓。

【證明】

如圖 07，假設四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 與其內切圓相切，切點分別為 T_1、T_2、T_3、T_4，其中 T_1 在 $\overline{P_1P_2}$ 上、T_2 在 $\overline{P_2P_3}$ 上、T_3 在 $\overline{P_3P_4}$ 上、T_4 在 $\overline{P_4P_1}$ 上，易知 $\overline{IT_1}\perp\overline{P_1P_2}$、$\overline{IT_2}\perp\overline{P_2P_3}$、$\overline{IT_3}\perp\overline{P_3P_4}$、且 $\overline{IT_4}\perp\overline{P_4P_1}$。$\because\ \overline{P_{1a}T_1}=\overline{P_{1a}P_1}+\overline{P_1T_1}=(s-s_1)+s_1=s$，$\therefore\ \overline{P_{1a}I}=\sqrt{\overline{IT_1}^2+\overline{P_{1a}T_1}^2}=\sqrt{r^2+s^2}$，同理 $\overline{P_{1b}I}=\overline{P_{2a}I}=\overline{P_{2b}I}=\overline{P_{3a}I}=\overline{P_{3b}I}=\overline{P_{4a}I}=\overline{P_{4b}I}=\sqrt{r^2+s^2}$。

$\because\ \overline{P_{1a}I}=\overline{P_{1b}I}=\overline{P_{2a}I}=\overline{P_{2b}I}=\overline{P_{3a}I}=\overline{P_{3b}I}=\overline{P_{4a}I}=\overline{P_{4b}I}$，

$\therefore P_{1a}$、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、P_{3a}、P_{3b}、P_{4a}、P_{4b} 八點共圓。

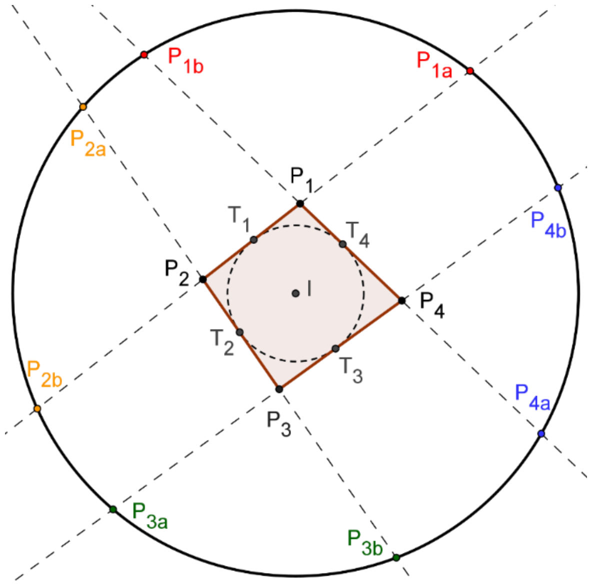

圖 07 圓外切四邊形的康威圓
(作者自行繪製)

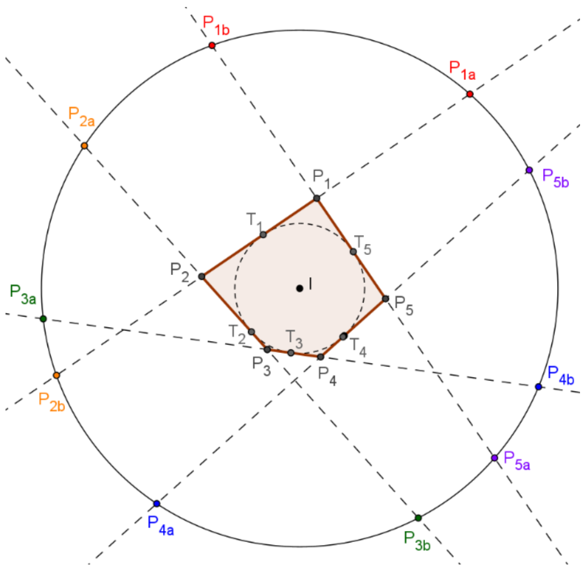

圖 08 圓外切五邊形的康威圓
(作者自行繪製)

2. 圓外切五邊形

【性質二】(康威圓定理在圓外切五邊形中的推廣)

已知圓外切五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$，

若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_5P_1}$延伸 $s-s_1$ 的距離取端點 P_{1a}、P_{1b}，

從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$延伸 $s-s_2$ 的距離取端點 P_{2a}、P_{2b}，

從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_4P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$延伸 $s-s_3$ 的距離取端點 P_{3a}、P_{3b}，

從 P_4 處分別沿著 $\overrightarrow{P_5P_4}$、$\overrightarrow{P_3P_4}$延伸 $s-s_4$ 的距離取端點 P_{4a}、P_{4b}，

且從 P_5 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_5}$、$\overrightarrow{P_4P_5}$延伸 $s-s_5$ 的距離取端點 P_{5a}、P_{5b}，

則這十個端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、P_{3a}、P_{3b}、P_{4a}、P_{4b}、P_{5a}、P_{5b} 必共圓。

【證明】

如圖 08，假設此五邊形與其內切圓相切，切點分別為 T_1、T_2、T_3、T_4、T_5，其中 T_1 在$\overline{P_1P_2}$上、T_2 在$\overline{P_2P_3}$上、T_3 在$\overline{P_3P_4}$上、T_4 在$\overline{P_4P_5}$上 T_5 在$\overline{P_5P_1}$上，易知$\overline{IT_1}\perp\overline{P_1P_2}$、$\overline{IT_2}\perp\overline{P_2P_3}$、$\overline{IT_3}\perp\overline{P_3P_4}$、$\overline{IT_4}\perp\overline{P_4P_5}$、且$\overline{IT_5}\perp\overline{P_5P_1}$。$\because \overline{P_{1a}T_1}=\overline{P_{1a}P_1}+\overline{P_1T_1}=(s-s_1)+s_1=s$，

$\therefore \overline{P_{1a}I}=\sqrt{\overline{IT_1}^2+\overline{P_{1a}T_1}^2}=\sqrt{r^2+s^2}$，同理$\overline{P_{1b}I}=\overline{P_{2a}I}=\overline{P_{2b}I}=\overline{P_{3a}I}=\overline{P_{3b}I}=\overline{P_{4a}I}=\overline{P_{5a}I}=\overline{P_{5b}I}=\sqrt{r^2+s^2}$，$\therefore P_{1a}$、$P_{1b}$、$P_{2a}$、$P_{2b}$、$P_{3a}$、$P_{3b}$、$P_{4a}$、$P_{4b}$、$P_{5a}$、$P_{5b}$ 十點共圓，

3. 一般化：圓外切 N 邊形（N≧3）

【性質三】（康威圓定理在圓外切多邊形中的推廣）

> 已知圓外切 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$，（N≧3）
>
> $\forall i=1, 2,\ldots, n$
>
> 若從 P_i 處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$延伸 $s-s_i$ 的距離取端點 P_{ia}、P_{ib}，
>
> 則這 $2n$ 個端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、…、P_{na}、P_{nb} 必共圓。

【證明】

假設此圓外切 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$，（N≧3）與其內切圓相切的切點分別為 T_i，$i=1,2,\ldots n$，其中 T_i 在$\overline{P_iP_{i+1}}$上，$\forall i=1, 2,\ldots, n$，易知$\overline{IT_i}\perp\overline{P_iP_{i+1}}$。

$\forall i=1,2,\ldots, n$，

$$\because \overline{P_{ia}T_i}=\overline{P_{ia}P_i}+\overline{P_iT_i}=(s-s_i)+s_i=s，\therefore \overline{P_{ia}I}=\sqrt{\overline{IT_i}^2+\overline{P_{ia}T_i}^2}=\sqrt{r^2+s^2}；$$

$$\because \overline{P_{ib}T_{i-1}}=\overline{P_{ib}P_i}+\overline{P_iT_{i-1}}=(s-s_i)+s_i=s，\therefore \overline{P_{ib}I}=\sqrt{\overline{IT_{i-1}}^2+\overline{P_{ib}T_{i-1}}^2}=\sqrt{r^2+s^2}$$

$$\Rightarrow \overline{P_{ia}I}=\overline{P_{ib}I}=\sqrt{r^2+s^2}，$$

∴這 $2n$ 個端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、…、P_{na}、P_{nb} 共圓。

例如：當 $N=6$ 時，如圖 09；當 $N=7$ 時，如圖 10。

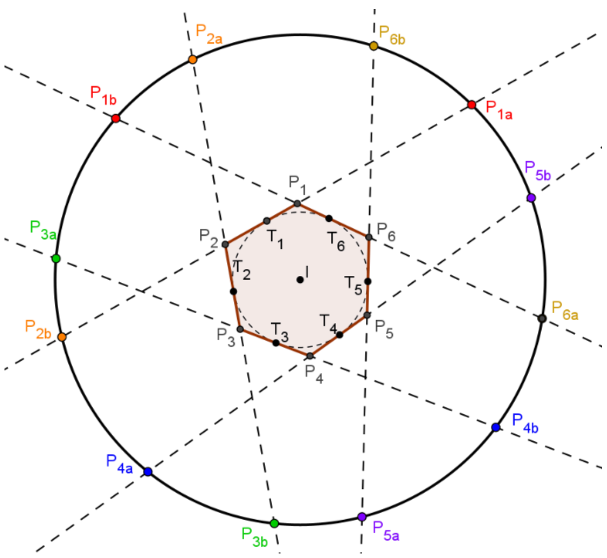

圖 09 圓外切六邊形的康威圓
(作者自行繪製)

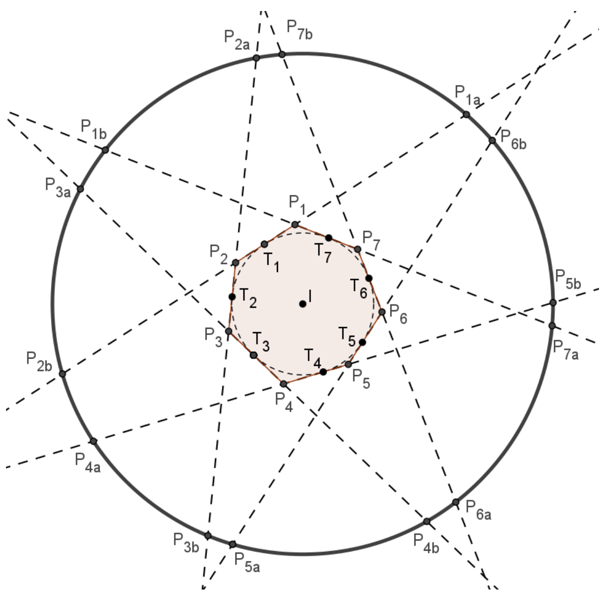

圖 10 圓外切七邊形的康威圓
(作者自行繪製)

（二）在圓外切 N 邊形中，從每個頂點處沿著相交的邊「雙向」延伸 $s-s_i$ 距離時，所形成的端點將分別位於 N 個圓上。

1. 三角形

【性質四】(三角形從每個頂點處沿著各邊雙向延長)

已知三角形 $P_1P_2P_3$，

若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$ 延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{1c}、P_{1d}，

從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$ 延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2a}、P_{2b}、P_{2c}、P_{2d}，

從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$ 延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3a}、P_{3b}、P_{3c}、P_{3d}，

則 (1) P_{1a}、P_{1d}、P_{3b}、P_{3c}、P_{2c}、P_{2d} 六點共圓。

(2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c}、P_{3c}、P_{3d} 六點共圓。

(3) P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{1c}、P_{1d} 六點共圓。

【證明】

我們首先聚焦於證明(3)這六點 P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{1c}、P_{1d} 共圓，類似的方法也可以應用於證明(1)、(2)的共圓性。

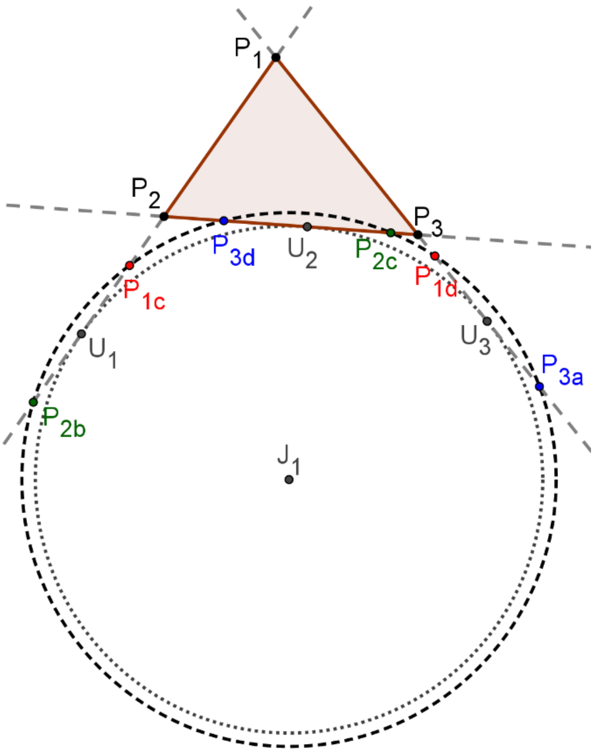

圖 11-a P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{1c}、P_{1d} 共圓

(作者自行繪製)

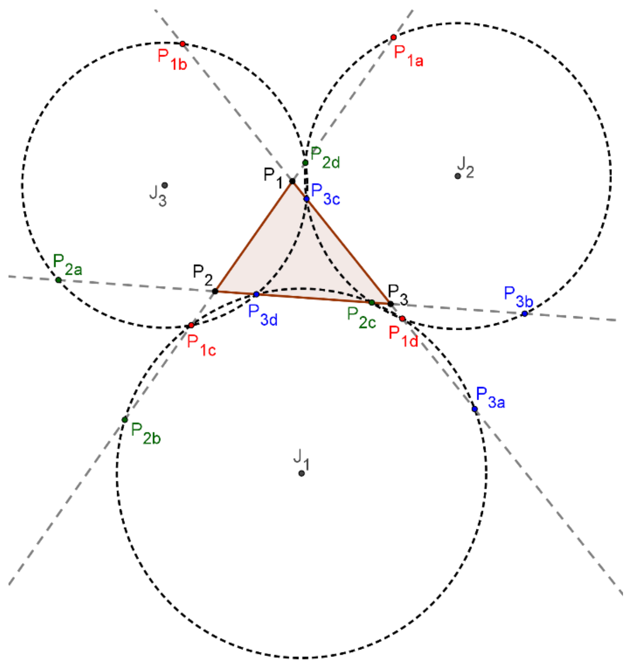

圖 11-b 三組六點共圓性質

(作者自行繪製)

如圖 11-a，作三角形 $P_1P_2P_3$ 的一旁切圓 J_1，使圓 J_1 分別與 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$相切於 U_1、U_2、U_3，其中 U_1 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$上、U_2 在$\overline{P_2P_3}$上、U_3 在 $\overrightarrow{P_1P_3}$上，易知$\overline{J_1U_1} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$、$\overline{J_1U_2} \perp \overline{P_2P_3}$、$\overline{J_1U_3} \perp \overrightarrow{P_1P_3}$，以及 $\overline{P_1U_1} = \overline{P_1U_3} = s$，可得 $\overline{P_2U_1} = \overline{P_1U_1} - \overline{P_1P_2} = s-(s_1+s_2)=s_3$；同理 $\overline{P_3U_3} = \overline{P_1U_3} - \overline{P_1P_3} = s-(s_1+s_3)=s_2$。

$\because \overline{P_2U_1}$ 和 $\overline{P_2U_2}$ 都是圓 J_1 的切線段，$\therefore \overline{P_2U_2} = \overline{P_2U_1} = s_3$； $\overline{P_3U_2}$ 和 $\overline{P_3U_3}$ 也是圓 J_1 的切線段，$\therefore \overline{P_3U_2} = \overline{P_3U_3} = s_2$；我們發現$\overline{P_{1c}U_1} = \overline{P_{1d}U_3} = \overline{P_{2b}U_1} = \overline{P_{2c}U_2} = \overline{P_{3a}U_3} = \overline{P_{3d}U_2} = s_1$，分別說明如下：

①$\overline{P_{1c}U_1} = \overline{P_1U_1} - \overline{P_1P_{1c}} = s-(s-s_1)=s_1$；②$\overline{P_{1d}U_3} = \overline{P_1U_3} - \overline{P_1P_{1d}} = s-(s-s_1)=s_1$；

③$\overline{P_{2b}U_1} = \overline{P_2P_{2b}} - \overline{P_2U_1} = (s-s_2)-s_3 = s-(s_2+s_3) = s-(s-s_1)=s_1$；

④$\overline{P_{2c}U_2} = \overline{P_2P_{2c}} - \overline{P_2U_2} = (s-s_2)-s_3 = s-(s_2+s_3) = s-(s-s_1)=s_1$；

⑤$\overline{P_{3a}U_3} = \overline{P_3P_{3a}} - \overline{P_3U_3} = (s-s_3)-s_2 = s-(s_3+s_2) = s-(s-s_1)=s_1$；

⑥$\overline{P_{3d}U_2} = \overline{P_3P_{3d}} - \overline{P_3U_2} = (s-s_3)-s_2 = s-(s_3+s_2) = s-(s-s_1)=s_1$；

因此，$\overline{P_{1c}U_1} = \overline{P_{1d}U_3} = \overline{P_{2b}U_1} = \overline{P_{2c}U_2} = \overline{P_{3a}U_3} = \overline{P_{3d}U_2} = s_1$。

接著，利用畢氏定理可得 $\overline{P_{1c}J_1} = \sqrt{\overline{J_1U_1}^2 + \overline{P_{1c}U_1}^2}$；$\overline{P_{1d}J_1} = \sqrt{\overline{J_1U_3}^2 + \overline{P_{1d}U_3}^2}$；$\overline{P_{2b}J_1} = \sqrt{\overline{J_1U_1}^2 + \overline{P_{2b}U_1}^2}$；$\overline{P_{2c}J_1} = \sqrt{\overline{J_1U_2}^2 + \overline{P_{2c}U_2}^2}$；$\overline{P_{3a}J_1} = \sqrt{\overline{J_1U_3}^2 + \overline{P_{3a}U_3}^2}$；$\overline{P_{3d}J_1} = \sqrt{\overline{J_1U_2}^2 + \overline{P_{3d}U_2}^2}$，又$\because \overline{J_1U_1} = \overline{J_1U_2} = \overline{J_1U_3} = r_1$，以及$\overline{P_{1c}U_1} = \overline{P_{1d}U_3} = \overline{P_{2b}U_1} = \overline{P_{2c}U_2} = \overline{P_{3a}U_3} = \overline{P_{3d}U_2} = s_1$，$\therefore \overline{P_{1c}J_1} = \overline{P_{1d}J_1} = \overline{P_{2b}J_1} = \overline{P_{2c}J_1} = \overline{P_{3a}J_1} = \overline{P_{3d}J_1} = \sqrt{r_1^2+s_1^2}$，

$\Rightarrow P_{1c}$、P_{1d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{3a}、P_{3d} 六點共圓，圓心是三角形 $P_1P_2P_3$ 的旁心 J_1。

同理可證：(1) P_{1a}、P_{1d}、P_{3b}、P_{3c}、P_{2c}、P_{2d} 六點共圓；(2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c}、P_{3c}、P_{3d} 六點共圓，如圖 11-b。

2. 圓外切四邊形

【性質五】(圓外切四邊形從每個頂點處沿著各邊雙向延長)

已知圓外切四邊形 $P_1P_2P_3P_4$，

若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_4P_1}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_4}$延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{1c}、P_{1d}，

從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2a}、P_{2b}、P_{2c}、P_{2d}，

從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_4P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_3P_4}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3a}、P_{3b}、P_{3c}、P_{3d}，

從 P_4 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_4}$、$\overrightarrow{P_3P_4}$、$\overrightarrow{P_4P_1}$、$\overrightarrow{P_4P_3}$延伸 $s-s_4$ 取端點 P_{4a}、P_{4b}、P_{4c}、P_{4d}，

則 (1) P_{1a}、P_{1d}、P_{4b}、P_{4c} 四點共圓。　(2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c} 四點共圓。

(3) P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 四點共圓。　(4) P_{4a}、P_{4d}、P_{3b}、P_{3c} 四點共圓。

【證明】

我們首先證明(3)這四點 P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 共圓，類似的方法也可以應用於證明(1)、(2)、(4)的共圓性。

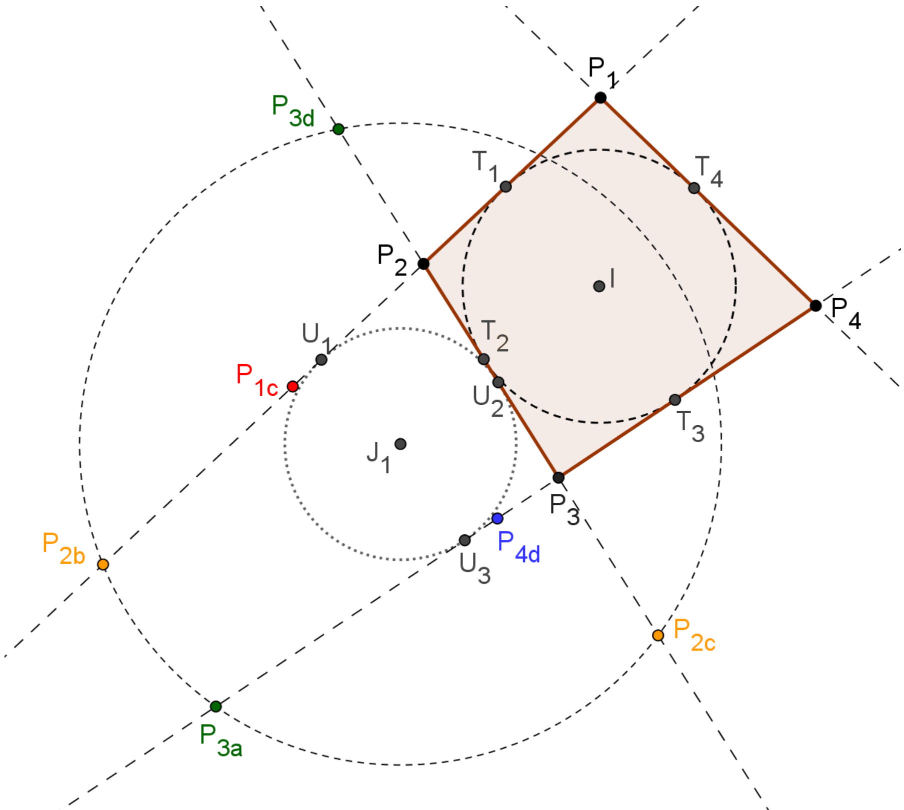

圖 12　P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 四點共圓。(作者自行繪製)

如圖 12，作四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 的一旁切圓 J_1，使圓 J_1 分別與 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_4P_3}$與其旁切圓 J_1 相切於 U_1、U_2、U_3，其中 U_1 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$上、U_2 在$\overline{P_2P_3}$上、U_3 在 $\overrightarrow{P_4P_3}$上，易知 $\overline{J_1U_1} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$、$\overline{J_1U_2} \perp \overline{P_2P_3}$、$\overline{J_1U_3} \perp \overrightarrow{P_4P_3}$，且 $\overline{P_2U_1} = \overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3U_2} = \overline{P_3U_3}$。$\because \overleftrightarrow{P_1P_2}$是圓 I 和圓 J_1 的外

公切線，$\overleftrightarrow{P_4P_3}$也是圓 I 和圓 J_1 的外公切線，$\therefore \overline{T_1U_1}=\overline{T_3U_3}=\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$，其中 $d_1=\overline{IJ_1}$。

$\because \overline{P_{2b}U_1}=\overline{T_1P_{2b}}-\overline{T_1U_1}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\overline{P_{3d}U_2}=\overline{P_3P_{3d}}-\overline{P_3U_2}=(s-s_3)-\overline{P_3U_2}=s-(\overline{T_3P_3}+\overline{P_3U_3})=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\overline{P_{2c}U_2}=\overline{P_2P_{2c}}-\overline{P_2U_2}=(s-s_2)-\overline{P_2U_2}=s-(\overline{T_1P_2}+\overline{P_2U_1})=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\overline{P_{3a}U_3}=\overline{T_3P_{3a}}-\overline{T_3U_3}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\therefore \overline{P_{2b}U_1}=\overline{P_{3d}U_2}=\overline{P_{2c}U_2}=\overline{P_{3a}U_3}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

考慮 $\overline{P_{2b}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_1}^2+\overline{P_{2b}U_1}^2}$、$\overline{P_{3d}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_2}^2+\overline{P_{3d}U_2}^2}$、

$\overline{P_{2c}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_2}^2+\overline{P_{2c}U_2}^2}$、$\overline{P_{3a}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_3}^2+\overline{P_{3a}U_3}^2}$

又$\because \overline{J_1U_1}=\overline{J_1U_2}=\overline{J_1U_3}=r_1$，且 $\overline{P_{2b}U_1}=\overline{P_{3d}U_2}=\overline{P_{2c}U_2}=\overline{P_{3a}U_3}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$

$\therefore \overline{P_{2b}J_1}=\overline{P_{3d}J_1}=\overline{P_{2c}J_1}=\overline{P_{3a}J_1}=\sqrt{r_1^2+(s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2})^2}$

$\Rightarrow$ P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 四點共圓，圓心是四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 的旁心 J_1。

同理可證：(1) P_{1a}、P_{1d}、P_{4b}、P_{4c} 四點共圓；(2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c} 四點共圓；(4) P_{4a}、P_{4d}、P_{3b}、P_{3c} 四點共圓，如圖 13。

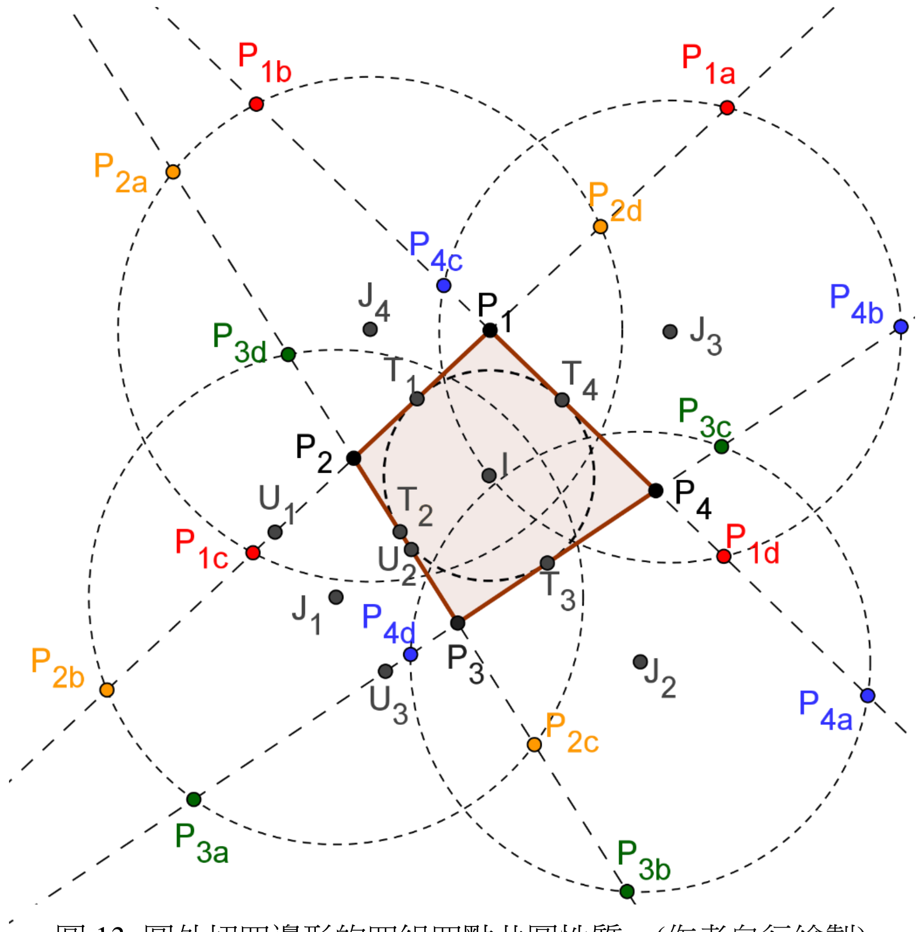

圖 13 圓外切四邊形的四組四點共圓性質。(作者自行繪製)

3. 圓外切五邊形

【性質六】(圓外切五邊形從每個頂點處沿著各邊雙向延長)

已知圓外切五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$，

若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_5P_1}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_5}$延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{1c}、P_{1d}，

從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2a}、P_{2b}、P_{2c}、P_{2d}，

從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_4P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_3P_4}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3a}、P_{3b}、P_{3c}、P_{3d}，

從 P_4 處分別沿著 $\overrightarrow{P_5P_4}$、$\overrightarrow{P_3P_4}$、$\overrightarrow{P_4P_5}$、$\overrightarrow{P_4P_3}$延伸 $s-s_4$ 取端點 P_{4a}、P_{4b}、P_{4c}、P_{4d}，

從 P_5 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_5}$、$\overrightarrow{P_4P_5}$、$\overrightarrow{P_5P_1}$、$\overrightarrow{P_5P_4}$延伸 $s-s_5$ 取端點 P_{5a}、P_{5b}、P_{5c}、P_{5d}，

則 (1) P_{1a}、P_{1d}、P_{5b}、P_{5c} 四點共圓； (2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c} 四點共圓；

(3) P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 四點共圓； (4) P_{4a}、P_{4d}、P_{3b}、P_{3c} 四點共圓；

(5) P_{5a}、P_{5d}、P_{4b}、P_{4c} 四點共圓。

【證明】

我們首先證明(3)這四點 P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 共圓，類似的方法也可以應用於證明(1)、(2)、(4)、(5)的共圓性。

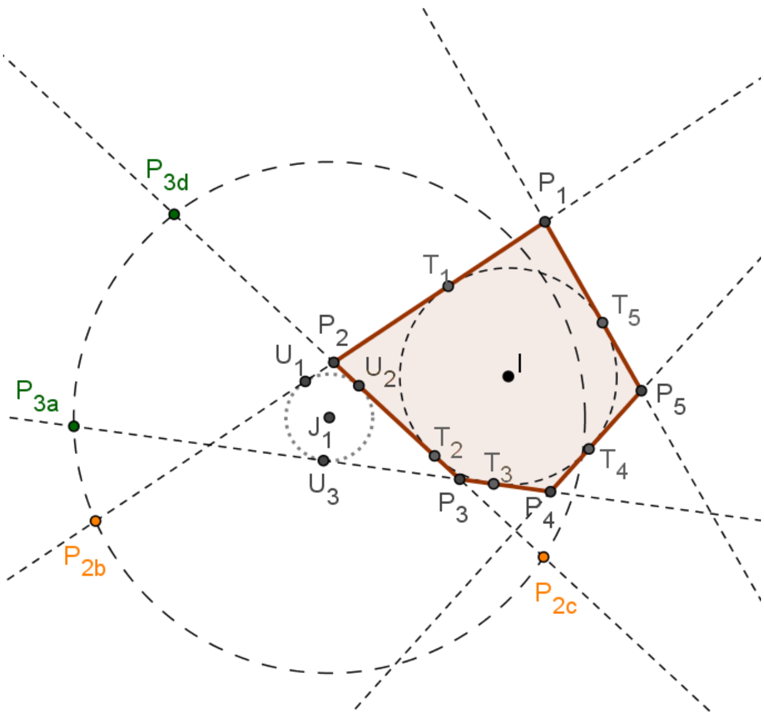

圖 14 P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 四點共圓(作者自行繪製)

如圖 14，作五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的一旁切圓 J_1，使圓 J_1 分別與 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_4P_3}$與其旁切圓 J_1 相切於 U_1、U_2、U_3，其中 U_1 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$上、U_2 在$\overline{P_2P_3}$上、U_3 在 $\overrightarrow{P_4P_3}$上，易知 $\overline{J_1U_1}\perp$

$\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overline{J_1U_2}\perp\overline{P_2P_3}$、$\overline{J_1U_3}\perp\overleftrightarrow{P_4P_3}$，且 $\overline{P_2U_1}=\overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3U_2}=\overline{P_3U_3}$。

$\because\overleftrightarrow{P_1P_2}$是圓 I 和圓 J_1 的外公切線，$\overleftrightarrow{P_4P_3}$也是圓 I 和圓 J_1 的外公切線，

$\therefore\overline{T_1U_1}=\overline{T_3U_3}=\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$，其中 $d_1=\overline{IJ_1}$。

$\because\overline{P_{2b}U_1}=\overline{T_1P_{2b}}-\overline{T_1U_1}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；$\overline{P_{3a}U_3}=\overline{T_3P_{3a}}-\overline{T_3U_3}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\overline{P_{3d}U_2}=\overline{P_3P_{3d}}-\overline{P_3U_2}=(s-s_3)-\overline{P_3U_2}=s-(\overline{T_3P_3}+\overline{P_3U_3})=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\overline{P_{2c}U_2}=\overline{P_2P_{2c}}-\overline{P_2U_2}=(s-s_2)-\overline{P_2U_2}=s-(\overline{T_1P_2}+\overline{P_2U_1})=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

$\therefore\overline{P_{2b}U_1}=\overline{P_{3a}U_3}=\overline{P_{3d}U_2}=\overline{P_{2c}U_2}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$；

考慮 $\overline{P_{2b}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_1}^2+\overline{P_{2b}U_1}^2}$、$\overline{P_{3a}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_3}^2+\overline{P_{3a}U_3}^2}$

$\overline{P_{3d}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_2}^2+\overline{P_{3d}U_2}^2}$、$\overline{P_{2c}J_1}=\sqrt{\overline{J_1U_2}^2+\overline{P_{2c}U_2}^2}$、

又$\because\overline{J_1U_1}=\overline{J_1U_2}=\overline{J_1U_3}=r_1$，且$\overline{P_{2b}U_1}=\overline{P_{3a}U_3}=\overline{P_{3d}U_2}=\overline{P_{2c}U_2}=s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2}$，

$\therefore\overline{P_{2b}J_1}=\overline{P_{3a}J_1}=\overline{P_{3d}J_1}=\overline{P_{2c}J_1}=\sqrt{r_1^2+(s-\sqrt{d_1^2-(r-r_1)^2})^2}$

$\Rightarrow P_{3a}$、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c} 四點共圓，圓心是五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的旁心 J_1。

同理可證得：(1) P_{1a}、P_{1d}、P_{5b}、P_{5c} 四點共圓； (2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c} 四點共圓；

(4) P_{4a}、P_{4d}、P_{3b}、P_{3c} 四點共圓；(5) P_{5a}、P_{5d}、P_{4b}、P_{4c} 四點共圓，如圖 15。

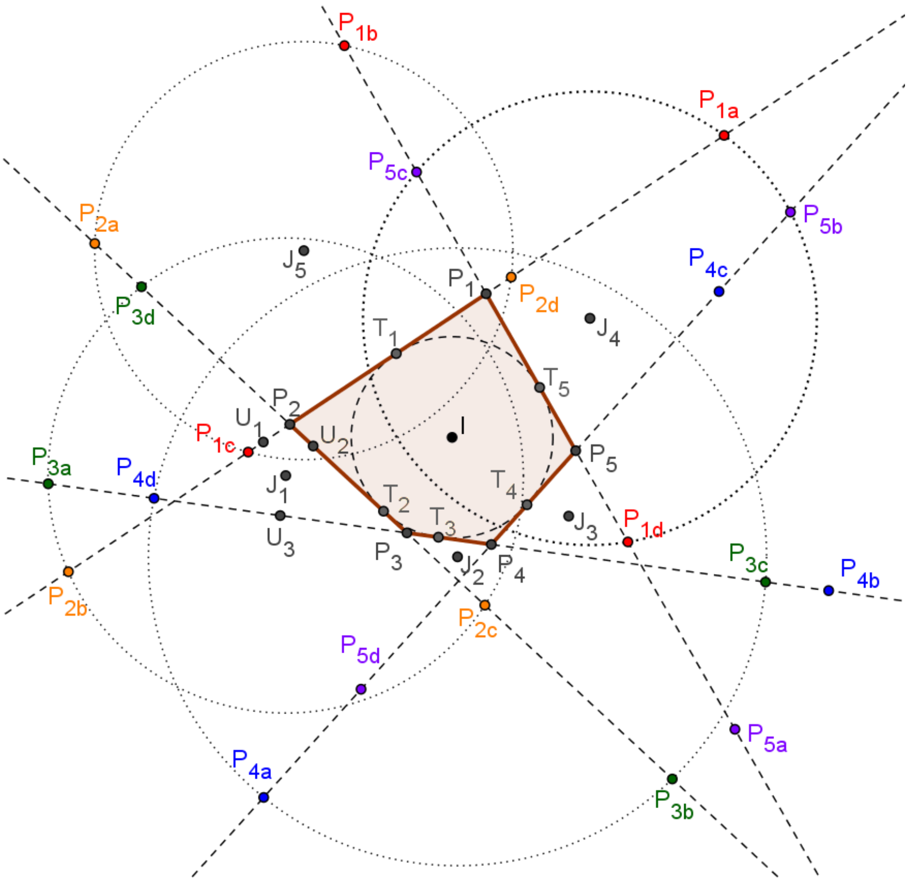

圖 15 圓外切五邊形的五組四點共圓性質(作者自行繪製)

4. 一般化：圓外切 N 邊形（$N \geqq 4$）

【性質七】（圓外切多邊形從每個頂點處沿著各邊雙向延長）

> 已知圓外切 N 邊形 $P_1P_2P_3\ldots P_n$，（$N \geqq 4$），$\forall i=1,2,3,\ldots,n$，若從 P_i 處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸 $s-s_i$ 的距離取端點 P_{ia}、P_{ib}、P_{ic}、P_{id}，則 $P_{(i+1)a}$、$P_{(i+1)d}$、P_{ib}、P_{ic} 四點共圓。

【證明】

$\forall i=1,2,3,\ldots,n$，

若此 N 邊形 $P_1P_2P_3\ldots P_n$，（$N \geqq 4$）的$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overline{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$與其旁切圓 J_{i-1} 相切，

切點分別為 U_{i1}、U_{i2}、U_{i3}，其中 U_{i1} 在$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$上、$U_{i2}$ 在$\overline{P_iP_{i+1}}$上、U_{i3} 在$\overrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$上，易知

$\overline{J_IU_{i1}} \perp \overleftrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overline{J_IU_{i2}} \perp \overline{P_iP_{i+1}}$、$\overline{J_IU_{i3}} \perp \overleftrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$，且 $\overline{P_iU_{i1}}=\overline{P_iU_{i2}}$、$\overline{P_{i+1}U_{i2}}=\overline{P_{i+1}U_{i3}}$。

$\because \overleftrightarrow{P_{i-1}P_i}$和$\overleftrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$是圓 I 和圓 J_{i-1} 的外公切線，

$\therefore \overline{T_{i-1}U_{i1}}=\overline{T_{i+1}U_{i3}}=\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$，其中 $d_{i-1}=\overline{IJ_{i-1}}$

$\because \overline{P_{(i+1)a}U_{i3}}=\overline{T_{i+1}P_{(i+1)a}}-\overline{T_{i+1}U_{i3}}=s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

$\overline{P_{(i+1)d}U_{i2}}=\overline{P_{i+1}P_{(i+1)d}}-\overline{P_{i+1}U_{i2}}=(s-s_{i+1})-\overline{P_{i+1}U_{i2}}=(s-\overline{T_{i+1}P_{i+1}})-\overline{P_{i+1}U_{i2}}$

$=s-(\overline{T_{i+1}P_{i+1}}+\overline{P_{i+1}U_{i2}})=s-(\overline{T_{i+1}P_{i+1}}+\overline{P_{i+1}U_{i3}})=s-\overline{T_{i+1}U_{i3}}=s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

$\overline{P_{ib}U_{i1}}=\overline{T_{i-1}P_{ib}}-\overline{T_{i-1}U_{i1}}=s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

$\overline{P_{ic}U_{i2}}=\overline{P_iP_{ic}}-\overline{P_iU_{i2}}=(s-s_i)-\overline{P_iU_{i2}}=s-(\overline{T_{i-1}P_i}+\overline{P_iU_{i2}})$

$=s-(\overline{T_{i-1}P_i}+\overline{P_iU_{i1}})=s-\overline{T_{i-1}U_{i1}}=s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$，

$\therefore \overline{P_{(i+1)a}U_{i3}}=\overline{P_{(i+1)d}U_{i2}}=\overline{P_{ib}U_{i1}}=\overline{P_{ic}U_{i2}}=s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

考慮$\overline{P_{(i+1)a}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i3}}^2+\overline{P_{(i+1)a}U_{i3}}^2}$、$\overline{P_{(i+1)d}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i2}}^2+\overline{P_{(i+1)d}U_{i2}}^2}$

$\overline{P_{ib}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i1}}^2+\overline{P_{ib}U_{i1}}^2}$、$\overline{P_{ic}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i2}}^2+\overline{P_{ic}U_{i2}}^2}$，

又$\because \overline{J_{i-1}U_{i1}}=\overline{J_{i-1}U_{i2}}=\overline{J_{i-1}U_{i3}}=r_{i-1}$，

且 $\overline{P_{(i+1)a}U_{i3}}=\overline{P_{(i+1)d}U_{i2}}=\overline{P_{ib}U_{i1}}=\overline{P_{ic}U_{i2}}=s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2}$，

$\therefore \overline{P_{(i+1)a}J_{i-1}}=\overline{P_{(i+1)d}J_{i-1}}=\overline{P_{ib}J_{i-1}}=\overline{P_{ic}J_{i-1}}=\sqrt{r_{i-1}^2+(s-\sqrt{d_{i-1}^2-(r-r_{i-1})^2})^2}$

$\Rightarrow P_{(i+1)a}$、$P_{(i+1)d}$、P_{ib}、P_{ic} 共圓，故得證。

例如：當 $N=6$ 時，如圖 16；當 $N=7$ 時，如圖 17。

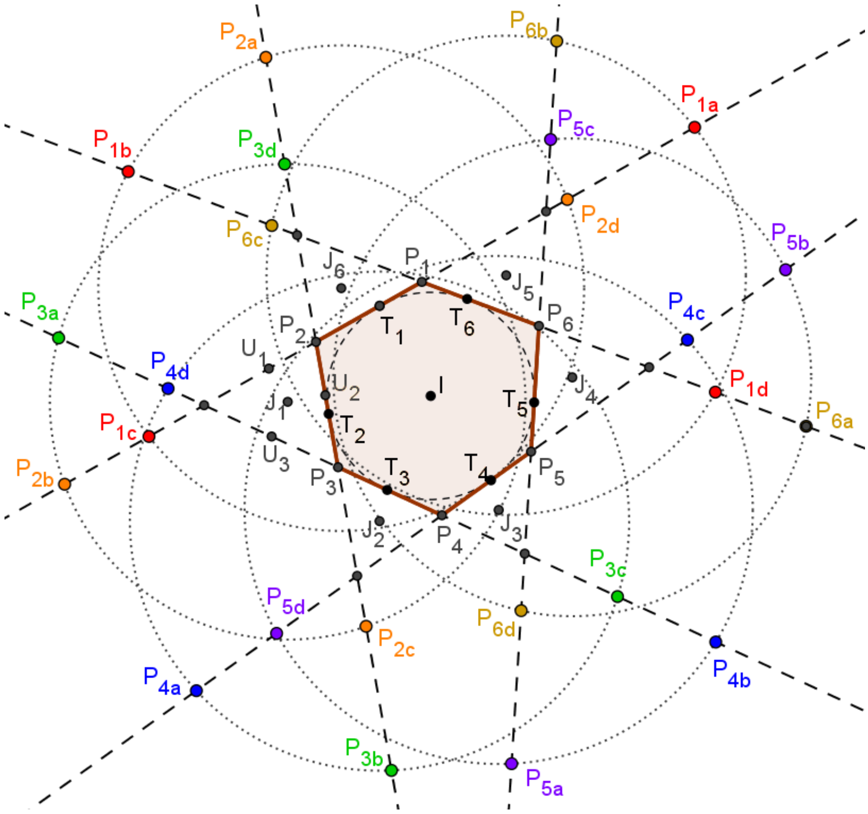

圖 16 圓外切六邊形的六組四點共圓(作者自行繪製)

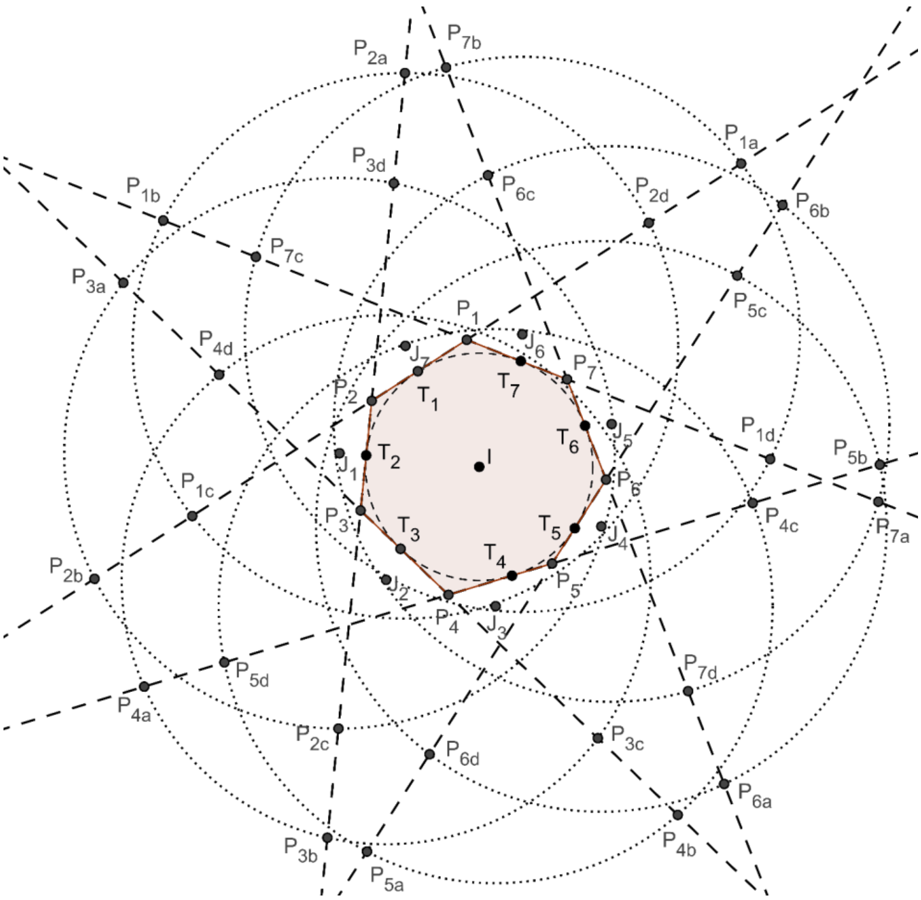

圖 17 圓外切七邊形的七組四點共圓(作者自行繪製)

伍、研究結果

本研究成功將康威圓定理從三角形推廣到了圓外切多邊形，包括圓外切四邊形、五邊形以至於更高邊形。藉由證明，我們得到對於任何圓外切 N 邊形，當從每個頂點沿著相交的邊延伸特定距離時，所形成的新端點依然保持共圓的性質。這一結果不僅說明康威圓定理在更複雜多邊形中的普遍適用性，也揭示了幾何圖形深層的共通性。

特別是，我們的研究展示了在圓外切多邊形中所延伸端點形成共圓的圓心位置與原多邊形的內心或旁心有關。以下是本研究所整理的結果：

一、在圓外切 N 邊形中（$N≧3$），從每個頂點處沿著相交的邊延伸 $s-s_i$ 距離時，所形成的所有 P_{ia}、P_{ib} 端點將共同位於一個圓上。

已知圓外切 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$，（$N≧3$） $\forall i=1,2,\ldots,n$，若從 P_i 處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$延伸 $s-s_i$ 的距離取端點 P_{ia}、P_{ib}，則這 $2n$ 個端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、…、P_{na}、P_{nb} 必共圓，且圓心恰好是圓外切 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$ 的內心 I。

二、在圓外切 N 邊形中，從每個頂點處沿著相交的邊「雙向」延伸 $s-s_i$ 距離時，所形成的端點將分別位於 N 個圓上。

（一）$N=3$ 時，在三角形 $P_1P_2P_3$，

若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{1c}、P_{1d}，

從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2a}、P_{2b}、P_{2c}、P_{2d}，

從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3a}、P_{3b}、P_{3c}、P_{3d}，

則 (1) P_{1a}、P_{1d}、P_{3b}、P_{3c}、P_{2c}、P_{2d} 六點共圓。

(2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c}、P_{3c}、P_{3d} 六點共圓。

(3) P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{1c}、P_{1d} 六點共圓。

（二）**$N≧4$ 時**，圓外切 N 邊形 $P_1P_2P_3\ldots P_n$，

若從 P_i 處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸 $s-s_i$ 的距離取端點 P_{ia}、P_{ib}、P_{ic}、P_{id}，則 $P_{(i+1)a}$、$P_{(i+1)d}$、P_{ib}、P_{ic} 四點共圓。

陸、討論

一、三角形各組共圓點數量多出兩個的探討

在本研究中，我們發現三角形在經過操作後，相對於邊數四以上的多邊形，能夠在共圓點的數量上竟然多出兩個，三組就多出這六個點 P_{1c}、P_{1d}、P_{2c}、P_{2d}、P_{3c}、P_{3d}，我們想進一步探討這六個共圓點和原本的三角形結構本身有何關係。

在考慮三個圓 J_1、J_2、和 J_3 的相對位置時，我們發現：圓 J_2 和圓 J_3 共享點 P_{2d} 和點 P_{3c}。這意味著這兩個點位於這兩個圓的交點上，並形成了一條公弦 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$。圓 J_1 和圓 J_2 共享點 P_{1d} 和 P_{2c}，這些點同樣位於這兩個圓的交點上，形成了另一條公弦 $\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$。圓 J_3 和圓 J_1 共享點 P_{3d} 和 P_{1c}，這些點位於這兩個圓的交點上，形成了第三條公弦 $\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$。

本研究將進一步考察這三條公弦的延長線是否會相交於一點，形成共點。我們想使用解析幾何方法來分析三條公弦是否共點，首先設置三角形的頂點座標，以及透過這些坐標來表示其他相關點。

（一）探討三公弦 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 是否交於一點

【性質八】（三條公弦延長線共點）

已知三角形 $P_1P_2P_3$，若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$ 延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1c}、P_{1d}；從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$ 延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2c}、P_{2d}；從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$ 延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3c}、P_{3d}，連接 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$，則 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 三線共點。

【證明】不失一般性，假設 $P_1(u, v)$、$P_2(0, 0)$、$P_3(1, 0)$，$\overline{P_1P_2}=c$，$\overline{P_3P_1}=b$，

則 $P_{2c}(b, 0)$、$P_{3d}(1-c, 0)$，再利用分點公式可得：$P_{1c}\left(\frac{cu-u}{c},\frac{cv-v}{c}\right)$、$P_{1d}\left(\frac{bu-u+1}{b},\frac{bv-v}{b}\right)$、

$P_{2d}(\frac{bu}{c},\frac{bv}{c})$ 、 $P_{3c}(\frac{cu+b-c}{b},\frac{cv}{b})$、。

接著，利用兩點式，化簡每條公弦延長線的方程分別為：

$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}: (cv + bv)x + (c - cu - bu)y = bv$ ——①

$\overleftrightarrow{P_{1c}P_{3d}}: vx - (u + c)y = v - vc$ ——②

$\overleftrightarrow{P_{2c}P_{1d}}: vx + (b + 1 - u)y = bv$ ——③

設 $\overleftrightarrow{P_{1c}P_{3d}}$ 和 $\overleftrightarrow{P_{2c}P_{1d}}$ 的交點是 N，利用②和③式可解出 $N(\frac{u(b+c-1)+b-c+1}{b+c+1},\frac{v(b+c-1)}{b+c+1})$，如圖 18。

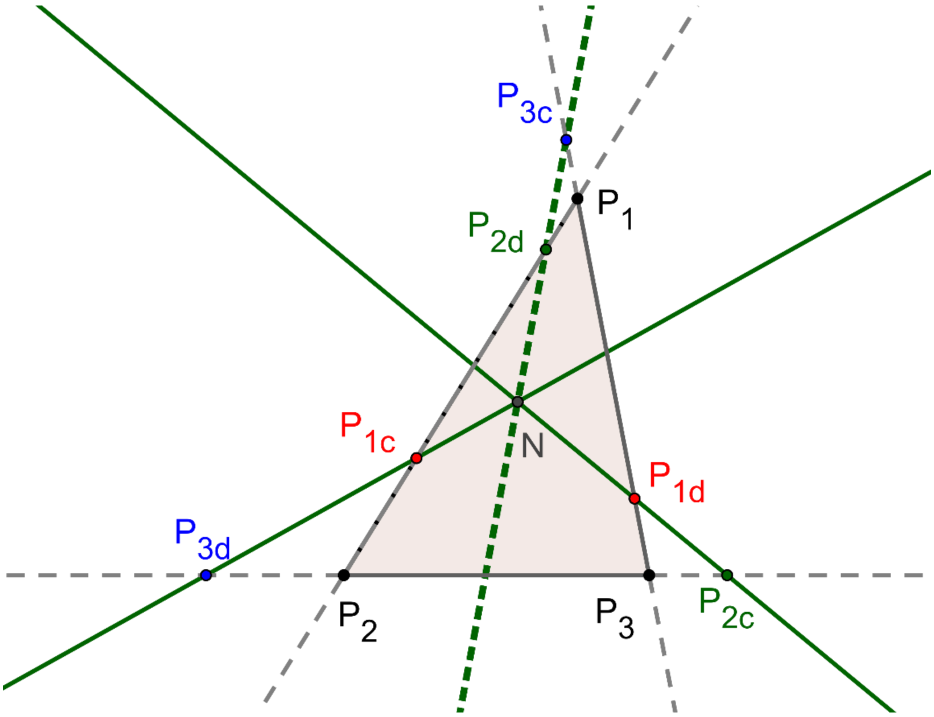

圖 18 三條公弦延長線共點(作者自行繪製)

然後將 N 點坐標代入①式，以判斷 N 點是否在$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$上。

$\because N$ 點坐標代入①等號的左邊 $= v(c+b)\frac{u(b+c-1)+(b-c+1)}{b+c+1} + [c - u(c+b)] \cdot \frac{v(b+c-1)}{b+c+1}$

$= \frac{v}{b+c+1}[u(c+b)(b+c-1) + (c+b)(b-c+1) + c(b+c-1) - u(c+b)(b+c-1)]$

$= \frac{v}{b+c+1}[(bc - c^2 + c + b^2 - bc + b) + (bc + c^2 - c)]$

$= \frac{v}{b+c+1}(b^2 + bc + b) = \frac{bv}{b+c+1}(b+c+1)$

$= bv$

$=$①等號的右邊，

因此，N 點在$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$上，也就是說$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 三線共點，故得證。

我們發現$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 三公弦相交於一點，又經過進一步的探索，令人驚訝的是，這一交點竟然恰好位於三角形 $P_1P_2P_3$ 的內心和重心的共線上。底下我們利用向量的方法來證明這個共線性質。

（二）三公弦 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 交點的性質

【性質九】（三條公弦延長線的交點與原三角形的內心重心共線）

已知 I 點和 G 點分別是三角形 $P_1P_2P_3$ 的內心和重心，若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$ 延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1c}、P_{1d}；從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$ 延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2c}、P_{2d}；從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$ 延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3c}、P_{3d}，設 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 三線交於 N 點，則 I 點、G 點、N 點三點共線，且 $\overline{GN}=2\,\overline{IG}$。

【證明】

不失一般性，假設 $P_1(u, v)$、$P_2(0, 0)$、$P_3(1, 0)$，$\overline{P_1P_2}=c$，$\overline{P_3P_1}=b$，則利用分點公式可

得：$I(\frac{u+c}{1+b+c},\frac{v}{1+b+c})=(\frac{3u+3c}{3(1+b+c)},\frac{3v}{3(1+b+c)})$、$G(\frac{u+1}{3},\frac{v}{3})=(\frac{u(b+c+1)+(b+c+1)}{3(1+b+c)},\frac{v(b+c+1)}{3(1+b+c)})$

$N(\frac{u(b+c-1)+b-c+1}{b+c+1},\frac{v(b+c-1)}{b+c+1})$，欲證：$\overrightarrow{GN}=2\overrightarrow{IG}$

$\because \overrightarrow{IG}=(\frac{u(b+c-2)+(b-2c+1)}{3(1+b+c)},\frac{(b+c-2)}{3(1+b+c)})$

$\overrightarrow{GN}=(\frac{u(3b+3c-3-b-c-1)+3b-3c+3-b-c-1}{3(1+b+c)},\frac{v(3b+3c-3-b-c-1)}{b+c+1})$

$=(\frac{u(2b+2c-4)+(2b-4c+2)}{3(1+b+c)},\frac{v(2b+2c-4)}{b+c+1})=2\overrightarrow{IG}$

$\therefore I$ 點、G 點、N 點三點共線，且 $\overline{GN}=2\,\overline{IG}$，如圖 19。

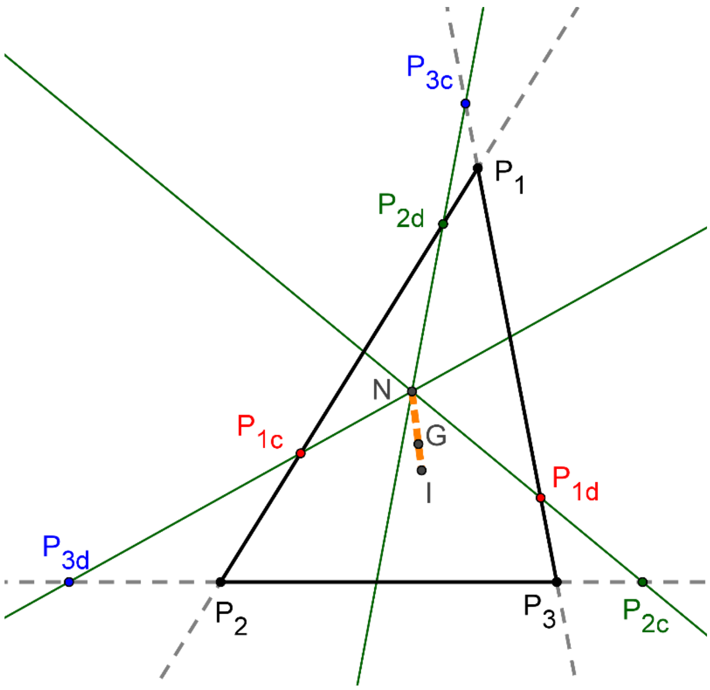

圖 19　三條公弦延長線的交點與三角形的內心、重心共線(作者自行繪製)

（三）三公弦的交點與三角形的奈格爾點重合

因此，三公弦$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 的交點 N，與三角形中的內心 I、重心 G 呈現出明顯的共線性，特別是滿足$\overline{GN}=2\overline{IM}$的條件下，此一發現引起了猜想，我們臆測 N 點為三角形的奈格爾點(*Nagel point*)。在進一步的探索之前，底下先介紹三角形的奈格爾點的定義，然後採用坐標幾何的方法來驗證三公弦$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 的交點 N 是否與奈格爾點的定義一致，從而確認了我們的猜想。

【定義】三角形的奈格爾點(*Nagel point*)

> 在三角形 $P_1P_2P_3$ 中，已知圓 J_1、圓 J_2、圓 J_3 分別是三角形 $P_1P_2P_3$ 的旁切圓，其中圓 J_1 在$\angle P_2P_1P_3$ 內，圓 J_2 在$\angle P_3P_2P_1$ 內，圓 J_3 在$\angle P_1P_3P_2$ 內；若圓 J_1 與$\overline{P_2P_3}$相切於點 U_1，圓 J_2 與$\overline{P_1P_3}$相切於點 U_2，圓 J_3 與$\overline{P_1P_2}$相切於點 U_3，則$\overline{P_1U_1}$、$\overline{P_2U_2}$、$\overline{P_3U_3}$三線交於一點，此點稱為三角形 $P_1P_2P_3$ 的奈格爾點(*Nagel point*)，簡記為 Na。

奈格爾點以十九世紀德國數學家 *Christian Heinrich von Nagel* 命名，他在 1836 年提到這個點，如圖 20。

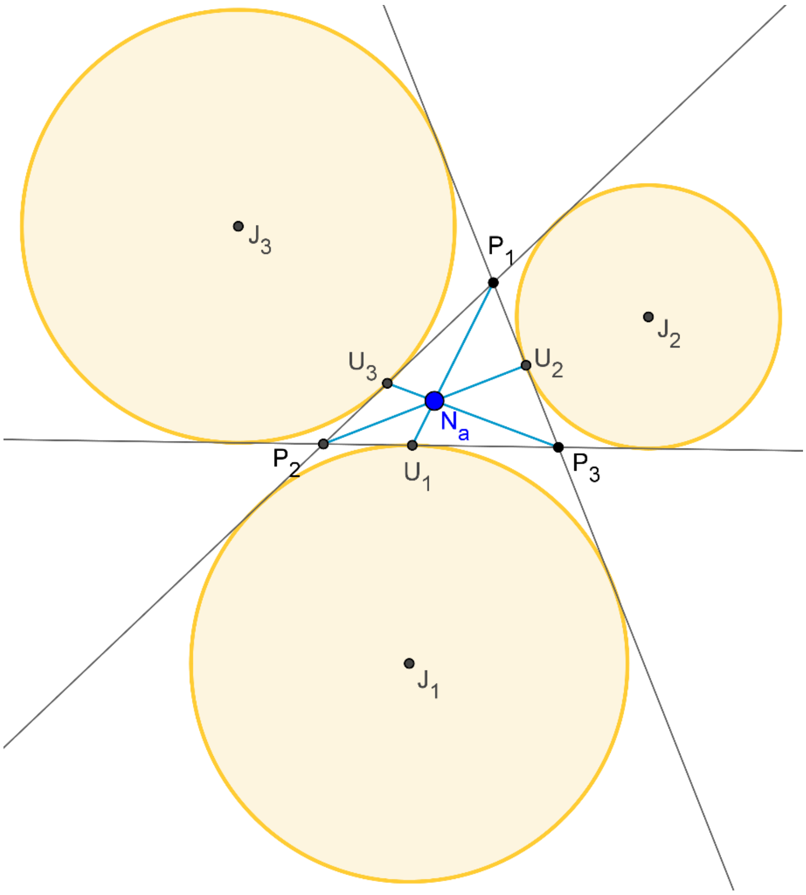

圖 20 三角形 $P_1P_2P_3$ 的奈格爾點 Na (*Nagel point*) (作者自行繪製)

接下來我們證明三公弦$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 的交點 N 與三角形 $P_1P_2P_3$ 的奈格爾點 Na 重合。我們首先證明 P_1、N、U_1 三點共線，以及 P_3、N、U_3 三點共線，從而確認$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 的交點 N 滿足三角形的奈格爾點的定義，即 N 與 Na 重合。為了要證明三點共線，我們先提出一個引理：

【引理】三點共線的充分條件

已知坐標平面上三點 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$、$C(c_1,c_2)$，若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=0$，則 A、B、C 三點共線。

【證明】 當 $a_1=b_1=c_1$，明顯成立。

考慮 $a_1\neq b_1$，$b_1\neq c_1$，則 $a_1-b_1\neq 0$ 且 $b_1-c_1\neq 0$

$$\because \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=0\text{，且 }\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & 0 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 \end{vmatrix}\text{，}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (a_1-b_1)(b_2-c_2)-(b_1-c_1)(a_2-b_2)=0$，

$\Rightarrow (a_1-b_1)(b_2-c_2)=(b_1-c_1)(a_2-b_2) \Rightarrow \frac{b_2-c_2}{b_1-c_1}=\frac{a_2-b_2}{a_1-b_1}$。

$\therefore \overleftrightarrow{BC}$的斜率$=\overleftrightarrow{AB}$的斜率，因此 A、B、C 三點共線。

1. P_1、N、U_1 三點共線

【性質十】(P_1、N、U_1 三點共線)

如圖 21，已知圓 J_1 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的旁切圓，其中圓 J_1 在$\angle P_2P_1P_3$ 內，且圓 J_1 與$\overline{P_2P_3}$ 相切於點 U_1。若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1c}、P_{1d}；從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2c}、P_{2d}；從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3c}、P_{3d}，設$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 三線交於 N 點，則 P_1、N、U_1 三點共線。

【證明】

不失一般性，假設 $P_1(u,v)$、$P_2(0,0)$、$P_3(1,0)$，$\overline{P_1P_2}=c$，$\overline{P_3P_1}=b$，

則利用餘弦定理可得 $b^2=c^2+1-2c\cdot cos(\angle P_3P_2P_1)=c^2+1-2u$，

再利用分點公式可求得 $N(\frac{u(b+c-1)+b-c+1}{b+c+1},\frac{v(b+c-1)}{b+c+1})$、旁心 $J_1\left(\frac{-u+c}{-1+b+c},\frac{-v}{-1+b+c}\right)$

進一步推得旁心 J_1在$\overleftrightarrow{P_2P_3}$的垂足 $U_1(\frac{-u+c}{-1+b+c},0)$。

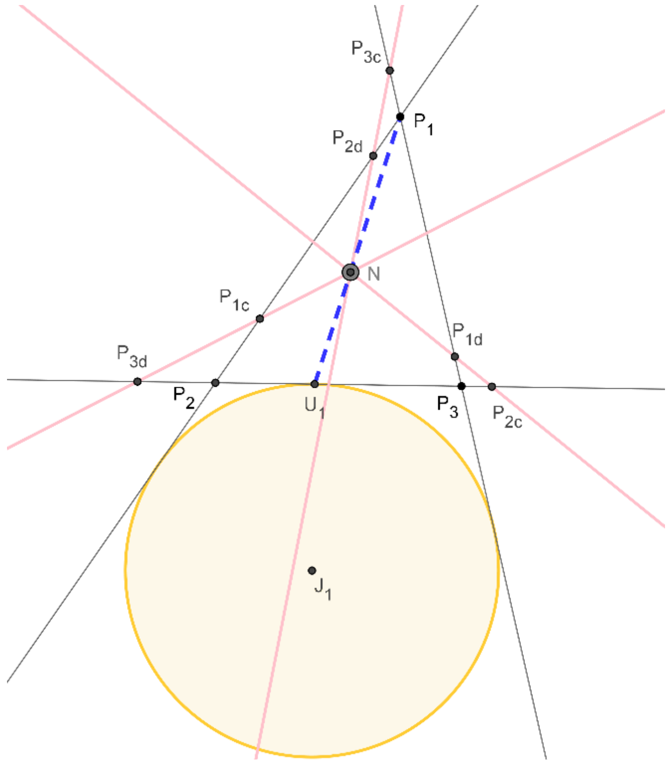

圖 21　P_1、N、U_1 三點共線(作者自行繪製)

欲證 P_1、N、U_1 三點共線，考慮$\begin{vmatrix} \frac{u}{\frac{u(b+c-1)+b-c+1}{1+b+c}} & \frac{v}{\frac{v(b+c-1)}{1+b+c}} & 1 \\ & & 1 \\ \frac{-u+c}{-1+b+c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}\begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ u(b+c-1)+b-c+1 & b+c-1 & 1+b+c \\ -u+c & 0 & -1+b+c \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ b-c+1 & b+c-1 & 1+b+c \\ -u+c & 0 & -1+b+c \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-c+1 & -2 & 1+b+c \\ -u+c & 1-b-c & -1+b+c \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}\begin{vmatrix} b-c+1 & -2 \\ -u+c & 1-b-c \end{vmatrix}$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}[(1-c+b)(1-c-b)+2(-u+c)]$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}[(1-c)^2-b^2-2u-2c]$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}[1-2c+c^2-b^2-2u+2c]$$

$$=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}[1+c^2-b^2-2u]=\frac{v}{(1+b+c)(-1+b+c)}\times 0=0$$

∴根據引理，P_1、N、U_1 三點共線。

2. P_3、N、U_3 三點共線

【性質十一】（P_3、N、U_3 三點共線）

如圖 22，已知圓 J_3 是三角形 $P_1P_2P_3$ 的旁切圓，其中圓 J_3 在 $\angle P_1P_3P_2$ 內，且圓 J_3 與 $\overline{P_1P_2}$ 相切於點 U_3。若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$ 延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1c}、P_{1d}；從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$ 延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2c}、P_{2d}；從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$ 延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3c}、P_{3d}，設 $\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 三線交於 N 點，則 P_3、N、U_3 三點共線。

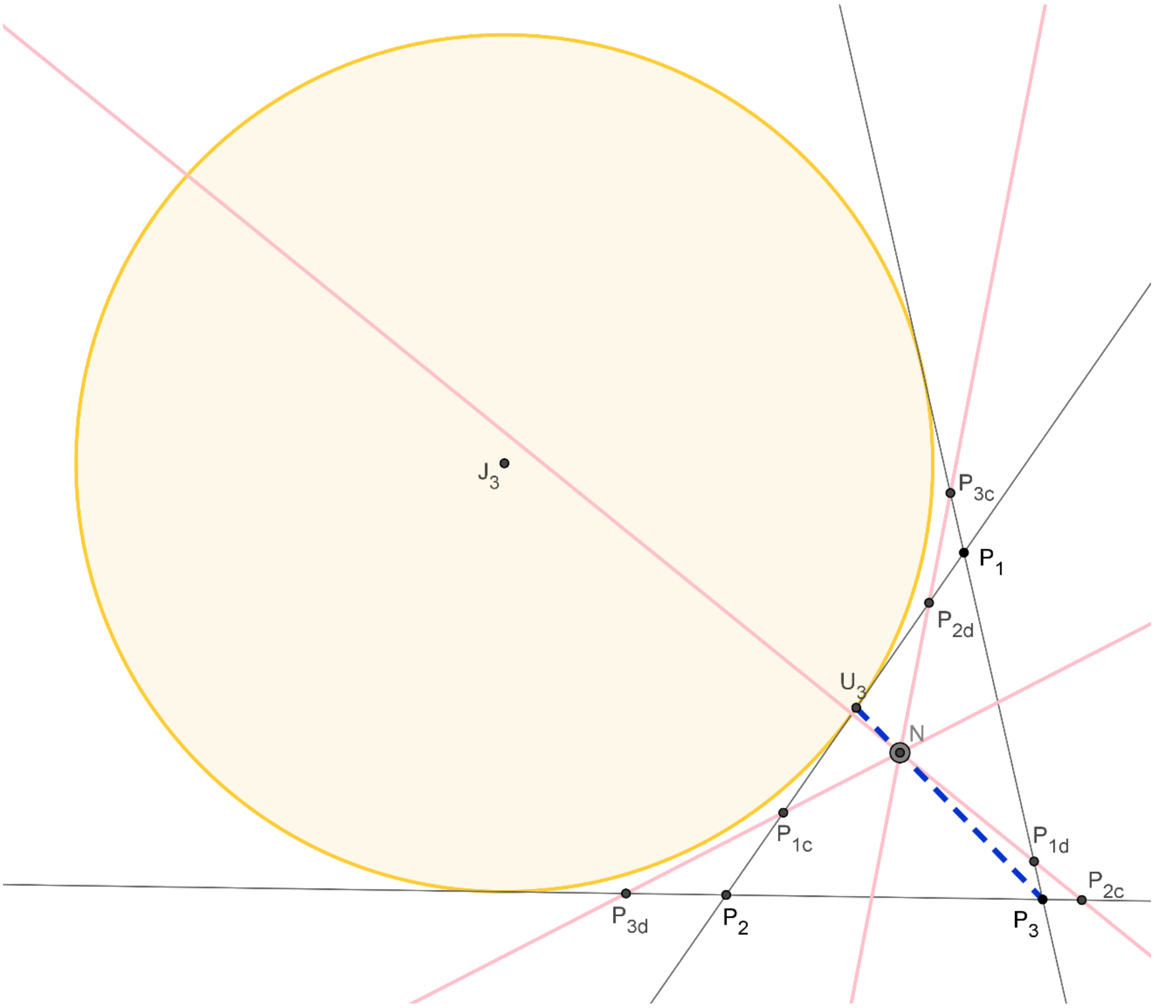

圖 22　P_3、N、U_3 三點共線(作者自行繪製)

【證明】

仿性質十的證明，假設 $P_1(u, v)$、$P_2(0, 0)$、$P_3(1, 0)$，$\overline{P_1P_2}=c$，$\overline{P_3P_1}=b$，

則 $b^2=c^2+1-2u$。

利用分點公式可求得 $N\left(\frac{u(b+c-1)+b-c+1}{b+c+1}, \frac{v(b+c-1)}{b+c+1}\right)$、旁心 $J_3\left(\frac{u-c}{1+b-c}, \frac{v}{1+b-c}\right)$

進一步推得旁心 J_3在$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的垂足 $U_3\left(\frac{cu-u^2}{c(1+b-c)}, \frac{cv-uv}{c(1+b-c)}\right)$；

欲證 P_3、N、U_3 三點共線，

考慮$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{u(b+c-1)+b-c+1}{1+b+c} & \frac{v(b+c-1)}{1+b+c} & 1 \\ \frac{u(c-u)}{c(1+b-c)} & \frac{v(c-u)}{c(1+b-c)} & 1 \end{vmatrix}$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u(b+c-1)+b-c+1 & b+c-1 & 1+b+c \\ u(c-u) & c-u & c(1+b-c) \end{vmatrix}$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u(b+c-1)+b-c+1 & b+c-1 & 2c+u-ub-uc \\ u(c-u) & c-u & c+bc-uc-v^2 \end{vmatrix}$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}\begin{vmatrix} b+c-1 & 2c+u-ub-uc \\ c-u & c+bc-uc-v^2 \end{vmatrix}$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}\begin{vmatrix} b+c-1 & 2c \\ c-u & c+bc-c^2 \end{vmatrix}$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}\begin{vmatrix} b+c-1 & 2 \\ c-u & 1+b-c \end{vmatrix}$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}[(b+c-1)(b-c+1)-2(c-u)]$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}[b^2-(c-1)^2-2c+2u]$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}(b^2-c^2+2c-1-2c+2u)$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}(b^2-c^2-1+2u)$

$=\frac{v}{c(1+b+c)(1+b-c)}\times 0$

$=0$

∴根據引理，P_3、N、U_3 三點共線。

因為 P_1、N、U_1 三點共線，且 P_3、N、U_3 三點共線，所以 N 點與三角形的奈格爾點 Na 重合。以上我們透過證明，成功驗證了三條公弦$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$ 的交點 N 與三角形的奈格爾點 Na 重合。透過這些共線性的證明，我們進一步強化了對交點 N 的理解，確定其不僅是這些公弦的交點，而且確實符合奈格爾點 Na 的定義。這一結果不僅展示了幾何圖形的優美與精確性，也為三角形的進一步研究提供了有價值的參考。

二、邊數四以上的圓外切多邊形更一般化的推廣

在本研究中，我們發現即使在圓外切多邊形中，每個頂點沿相交邊延伸特定距離形成的新端點仍然展示出共圓性質。然而，當我們考慮到延伸距離的特定限制時，與 de Villiers 提到的 Side Divider Theorem 相比，因為該定理有三角形某邊上或延長線的任一點，如圖 04-a 中 P 點是 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的**任意點**，這展示了更廣泛的適用性；因此，探討在圓外切多邊形中是否能得出類似的一般化結果變得尤為重要。

我們嘗試對圓外切多邊形進行更廣泛的推廣，以期與 Side Divider Theorem 相呼應。以下的性質十二是我們在圓外切多邊形對於康威圓定理的**更一般化**的推廣：

（一）$\boldsymbol{Q_{1a}}$ 點在 $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_{1a}}}$ 上的推廣

【性質十二】（在圓外切多邊形中**更一般化**的推廣）

已知圓外切 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$（$N\geqq 4$），切點分別為 T_1、T_2、…、T_N，其中 T_1 在 $\overline{P_1P_2}$ 上、T_2 在 $\overline{P_2P_3}$ 上、…、T_{n-1} 在 $\overline{P_{n-1}P_n}$ 上、T_n 在 $\overline{P_nP_1}$ 上。

若 $\boldsymbol{Q_{1a}}$ 點是 $\overrightarrow{P_1P_{1a}}$ 上**任意點**，且 $\overline{\boldsymbol{Q_{1a}}T_1}=x$，且 $x>\max(s_1, s_2, s_3,\ldots, s_n)$，

$\forall i=1,2,3,\ldots,n$，從 P_i 處分別沿著 $\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ 延伸 $x-s_i$ 的距離取端點 Q_{ia}、Q_{ib}、Q_{ic}、Q_{id}，並定義 $Q_{(i+n)a}=Q_{ia} \pmod n$，$Q_{(i+n)b}=Q_{ib} \pmod n$，$Q_{(i+n)c}=Q_{ic} \pmod n$，$Q_{(i+n)d}=Q_{id} \pmod n$，

則：(1) 這 $2n$ 個端點 $\boldsymbol{Q_{1a}}$、Q_{1b}、Q_{2a}、Q_{2b}、…、Q_{na}、Q_{nb} 必共圓。

(2) $Q_{(i+1)a}$、$Q_{(i+1)d}$、Q_{ib}、Q_{ic} 四點共圓，$\forall i=1,2,3,\ldots,n$。

【證明】

(1) $\because \overline{\boldsymbol{Q_{1a}}T_1}=x$，$\overline{IT_1}=r$，$\therefore \overline{\boldsymbol{Q_{1a}}I}=\sqrt{\overline{IT_1}^2+\overline{\boldsymbol{Q_{1a}}T_1}^2}=\sqrt{r^2+x^2}$，

又 $\overline{Q_{1b}T_n}=\overline{Q_{1b}P_1}+\overline{P_1T_n}=(x-s_1)+s_1=x$，$\overline{IT_n}=r$，$\therefore \overline{Q_{1b}I}=\sqrt{\overline{IT_n}^2+\overline{Q_{1b}T_n}^2}=\sqrt{r^2+x^2}$；

且 $\forall i=2,3,\ldots,n$，

$\because \overline{Q_{ia}T_i}=\overline{Q_{ia}P_i}+\overline{P_iT_i}=(x-s_i)+s_i=s$，$\therefore \overline{Q_{ia}I}=\sqrt{\overline{IT_i}^2+\overline{Q_{ia}T_i}^2}=\sqrt{r^2+x^2}$，

$\because \overline{Q_{ib}T_{i-1}}=\overline{Q_{ib}P_i}+\overline{P_iT_{i-1}}=(x-s_i)+s_i=s$，$\therefore \overline{Q_{ib}I}=\sqrt{\overline{IT_{i-1}}^2+\overline{Q_{ib}T_{i-1}}^2}=\sqrt{r^2+x^2}$

$\Rightarrow \forall i=1,2,\ldots,n$，$\overline{Q_{ia}I}=\overline{Q_{ib}I}=\sqrt{r^2+x^2}$，

$\therefore$ 這 $2n$ 個端點 $\boldsymbol{Q_{1a}}$、Q_{1b}、Q_{2a}、Q_{2b}、…、Q_{na}、Q_{nb} 共圓。

(2) $\forall i=1,2,3,\ldots,n$，

若此 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$，($N\geqq4$) 的$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overline{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$與其旁切圓 J_{i-1} 相切，切點分別為 U_{i1}、U_{i2}、U_{i3}，其中 U_{i1} 在$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$上、$U_{i2}$ 在$\overline{P_iP_{i+1}}$上、U_{i3} 在$\overrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$上，易知 $\overline{J_IU_{i1}}\perp\overleftrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overline{J_IU_{i2}}\perp\overline{P_iP_{i+1}}$、$\overline{J_IU_{i3}}\perp\overleftrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$，且 $\overline{P_iU_{i1}}=\overline{P_iU_{i2}}$、$\overline{P_{i+1}U_{i2}}=\overline{P_{i+1}U_{i3}}$。

$\because\overleftrightarrow{P_{i-1}P_i}$和$\overleftrightarrow{P_{i+2}P_{i+1}}$是圓 I 和圓 J_{i-1} 的外公切線，

$\therefore\overline{T_{i-1}U_{i1}}=\overline{T_{i+1}U_{i3}}=\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$，其中 $d_{i-1}=\overline{IJ_{i-1}}_{\ i}$，

$\because\overline{Q_{(i+1)a}U_{i3}}=\overline{P_{i+1}Q_{(i+1)a}}-\overline{P_{i+1}U_{i3}}=(x-s_{i+1})-\overline{P_{i+1}U_{i3}}=x-\overline{T_{i+1}U_{i3}}=x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

$\overline{Q_{(i+1)d}U_{i2}}=\overline{P_{i+1}Q_{(i+1)d}}-\overline{P_{i+1}U_{i2}}=(x-s_{i+1})-\overline{P_{i+1}U_{i3}}=x-\overline{T_{i+1}U_{i3}}=x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

$\overline{Q_{ib}U_{i1}}=\overline{P_iQ_{ib}}-\overline{P_iU_{i1}}=(x-s_i)-\overline{P_iU_{i1}}=x-(\overline{T_{i-1}P_i}+\overline{P_iU_{i1}})=x-\overline{T_{i-1}U_{i1}}$

$=x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

$\overline{Q_{ic}U_{i2}}=\overline{P_iQ_{ic}}-\overline{P_iU_{i2}}=(x-s_i)-\overline{P_iU_{i2}}=x-(\overline{T_{i-1}P_i}+\overline{P_iU_{i1}})=x-\overline{T_{i-1}U_{i1}}$

$=x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$，

$\therefore\overline{Q_{(i+1)a}U_{i3}}=\overline{Q_{(i+1)d}U_{i2}}=\overline{Q_{ib}U_{i1}}=\overline{Q_{ic}U_{i2}}=x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$；

考慮$\overline{Q_{(i+1)a}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i3}}^2+\overline{Q_{(i+1)a}U_{i3}}^2}$、$\overline{Q_{(i+1)d}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i2}}^2+\overline{Q_{(i+1)d}U_{i2}}^2}$、

$\overline{Q_{ib}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i1}}^2+\overline{Q_{ib}U_{i1}}^2}$、$\overline{Q_{ic}J_{i-1}}=\sqrt{\overline{J_{i-1}U_{i2}}^2+\overline{Q_{ic}U_{i2}}^2}$，

又$\because\overline{J_{i-1}U_{i1}}=\overline{J_{i-1}U_{i2}}=\overline{J_{i-1}U_{i3}}=r_{i-1}$，

且$\overline{Q_{(i+1)a}U_{i3}}=\overline{Q_{(i+1)d}U_{i2}}=\overline{Q_{ib}U_{i1}}=\overline{Q_{ic}U_{i2}}=x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2}$，

$\therefore\overline{Q_{(i+1)a}J_{i-1}}=\overline{Q_{(i+1)d}J_{i-1}}=\overline{Q_{ib}J_{i-1}}=\overline{Q_{ic}J_{i-1}}=\sqrt{r_{i-1}{}^2+(x-\sqrt{d_{i-1}{}^2-(r-r_{i-1})^2})^2}$

$\Rightarrow Q_{(i+1)a}$、$Q_{(i+1)d}$、Q_{ib}、Q_{ic} 共圓。故得證。

在性質十二中，我們發現當點 $\boldsymbol{Q_{1a}}$ 被拖曳到 $\boldsymbol{P_{1a}}$ 的位置，此時$\overline{\boldsymbol{Q_{1a}}P_1}=s-s_1$，$Q_{ib}$ 會和 P_{ib} 重合，Q_{ia} 都會和 P_{ia} 重合，$\forall i=1,2,\ldots,n$，這正是性質七的直觀證明。因此性質十二是性質七的更一般化的推廣，具有更廣泛的適用性。

（二）$\boldsymbol{Q_{1a}}$點在 $\overrightarrow{P_1P_2}$上的推論

我們推論若 $\boldsymbol{Q_{1a}}$點是 $\overrightarrow{P_1P_2}$上**任意點**，也會有類似的性質，我們敘述如下：

【推論】（在圓外切多邊形中**更一般化**的推廣）

已知圓外切 N 邊形 $P_1P_2\ldots P_n$（$\boldsymbol{N\geqq 4}$），切點分別為 T_1、T_2、…、T_N，其中 T_1 在$\overline{P_1P_2}$上、T_2 在$\overline{P_2P_3}$上、…、T_{n-1} 在$\overline{P_{n-1}P_n}$上、T_n 在 $\overline{P_nP_1}$ 上。

若 $\boldsymbol{Q_{1a}}$點是 $\overrightarrow{P_1P_2}$上**任意點**，將 $\boldsymbol{Q_{1a}}$點所在位置討論如下：

（一）若 $\boldsymbol{Q_{1a}}$點在 $\overline{P_1T_1}$ 上，$\overline{\boldsymbol{Q_{1a}}T_1}=x$，且 $x<\min(s_1, s_2, s_3,\ldots, s_n)$，

$\forall i=1,2,3,\ldots,n$，從 P_i 處分別沿著$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$、$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$延伸 s_i-x 的距離取端點 Q_{ia}、Q_{ib}、Q_{ic}、Q_{id}，

（二）若 $\boldsymbol{Q_{1a}}$點在 $\overrightarrow{T_1P_2}$上，$\overline{\boldsymbol{Q_{1a}}T_1}=x$，

$\forall i=1,2,3,\ldots,n$，從 P_i 處分別沿著$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$、$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$延伸 s_i+x 的距離取端點 Q_{ia}、Q_{ib}、Q_{ic}、Q_{id}，

則滿足上列（一）或（二）的條件時，並定義 $Q_{(i+n)a}=Q_{ia}\ (\mathrm{mod}\ n)$，$Q_{(i+n)b}=Q_{ib}\ (\mathrm{mod}\ n)$，$Q_{(i+n)c}=Q_{ic}\ (\mathrm{mod}\ n)$，$Q_{(i+n)d}=Q_{id}\ (\mathrm{mod}\ n)$，

都有：

(1) 這 $2n$ 個端點 $\boldsymbol{Q_{1a}}$、Q_{1b}、Q_{2a}、Q_{2b}、…、Q_{na}、Q_{nb} 必共圓。

(2) $Q_{(i+1)a}$、$Q_{(i+1)d}$、Q_{ib}、Q_{ic} 四點共圓，$\forall i=1,2,3,\ldots,n$。

例如：當 $N=4$ 時，我們展示 $\boldsymbol{Q_{1a}}$點是 $\overrightarrow{P_1P_2}$上**任意點時**的情形如圖 23-a 和圖 23-b。

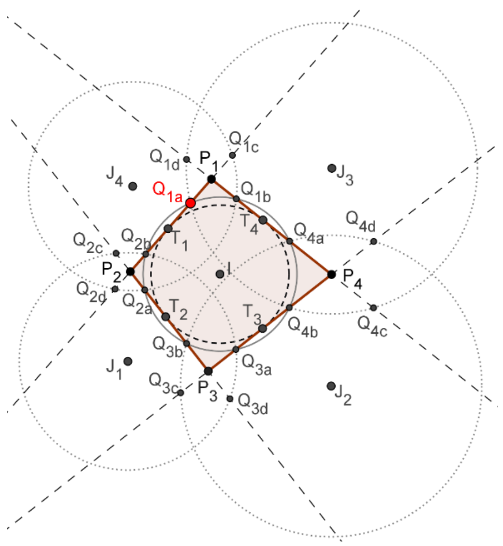

圖 23-a　$\boldsymbol{Q_{1a}}$點在 $\overline{P_1T_1}$ 上(作者自行繪製)

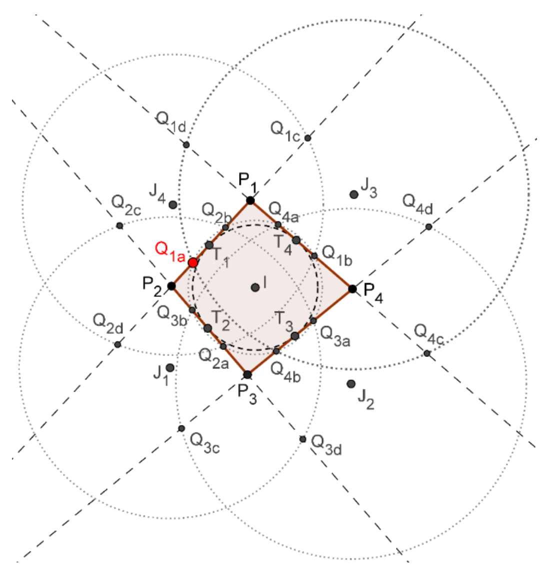

圖 23-b　$\boldsymbol{Q_{1a}}$點在 $\overrightarrow{T_1P_2}$上(作者自行繪製)

柒、結論

本研究的目的是探討圓外切 N 邊形中，從每個頂點沿相交邊延伸一定距離形成新端點的幾何特性，作為康威圓定理的推廣。綜合本研究的結果與討論，說明本研究的結論如下：

一、在三角形 $P_1P_2P_3$ 中，若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1a}、P_{1b}、P_{1c}、P_{1d}，從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2a}、P_{2b}、P_{2c}、P_{2d}，從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3a}、P_{3b}、P_{3c}、P_{3d}，則有以下共圓性質：

（一）P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、P_{3a}、P_{3b} 共圓；

（二）P_{1c}、P_{1d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{3a}、P_{3d} 共圓；

（三）P_{1a}、P_{1d}、P_{2c}、P_{2d}、P_{3b}、P_{3c} 共圓；

（四）P_{1b}、P_{1c}、P_{2a}、P_{2d}、P_{3c}、P_{3d} 共圓。

二、在圓外切 N 邊形 $P_1P_2P_3\ldots P_n$（$N\geq 4$）中，$\forall i=1,2,3,\ldots,n$，若從 P_i 處分別沿著 $\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸 $s-s_i$ 的距離取端點 P_{ia}、P_{ib}、P_{ic}、P_{id}，則有下列共圓性質：

（一）P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、…、P_{na}、P_{nb} 這 $2n$ 個點皆共圓。

（二）$P_{(i+1)a}$、$P_{(i+1)d}$、P_{ib}、P_{ic} 四點共圓，$\forall i=1,2,3,\ldots,n$。

三、在三角形 $P_1P_2P_3$ 中，若從 P_1 處分別沿著 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{P_1P_3}$延伸 $s-s_1$ 取端點 P_{1c}、P_{1d}；從 P_2 處分別沿著 $\overrightarrow{P_2P_3}$、$\overrightarrow{P_2P_1}$延伸 $s-s_2$ 取端點 P_{2c}、P_{2d}；從 P_3 處分別沿著 $\overrightarrow{P_3P_1}$、$\overrightarrow{P_3P_2}$延伸 $s-s_3$ 取端點 P_{3c}、P_{3d}，則$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$三線共點，此點恰好是三角形 $P_1P_2P_3$ 的奈格爾點(*Nagel point*)。

捌、參考資料

1. "John Horton Conway". www.cardcolm.org. Archived from the original on 20 May 2020. Retrieved 29 May 2020.
2. Weisstein, Eric W. "Conway Circle". MathWorld. Retrieved 29 May 2020.
3. Beveridge, C. Conway's Circle, a proof without words, retrieved December 8, 2020 from https://aperiodical.com/2020/05/the-big-lock-down-math-off-match-14
4. Carnot, L. (1803). *Géométrie de position*. Paris, France: Chez J. B. M. Duprat.
5. de Villiers, M. (2023). Conway's Circle Theorem as a Special Case of a More General Side Divider Theorem. *Learning and Teaching Mathematics*, (34), 37-42.

【評語】030407

(1) 本作品主要目的是將康威圓定理從三角形推廣到圓外切四邊形、五邊形及更一般 N 邊形的情形。主要結果如下：對於任何圓外切 N 邊形，當從每個頂點沿著相交的邊延伸特定距離時，所形成的新端點依然保持共圓的性質，共圓的圓心位置與原多邊形的內心或旁心相關。

(2) 作者以解析幾何的手法，結合行列式的運算，進而得到一些諸點共圓的規律及諸點共線的性質，方法堪稱簡潔。但基本上是同一手法運用在不同邊形上，令人驚奇的部分較少，是比較可惜的。

作品簡報

康威圓定理在圓外切多邊形的推廣

壹、前言

康威圓定理（Conway's Circle Theorem）

由英國數學家*John Horton Conway*提出。如果將三角形的每個頂點處相交的兩邊延長與對邊等長的距離，則所得到的三條線段的六個端點都會位於一個圓上，該圓的圓心恰好是三角形的內心。這個定理的驚人之處在於，雖然三條線段的六個端點看似獨立，但它們卻存在共圓這個美妙的性質，如圖01。

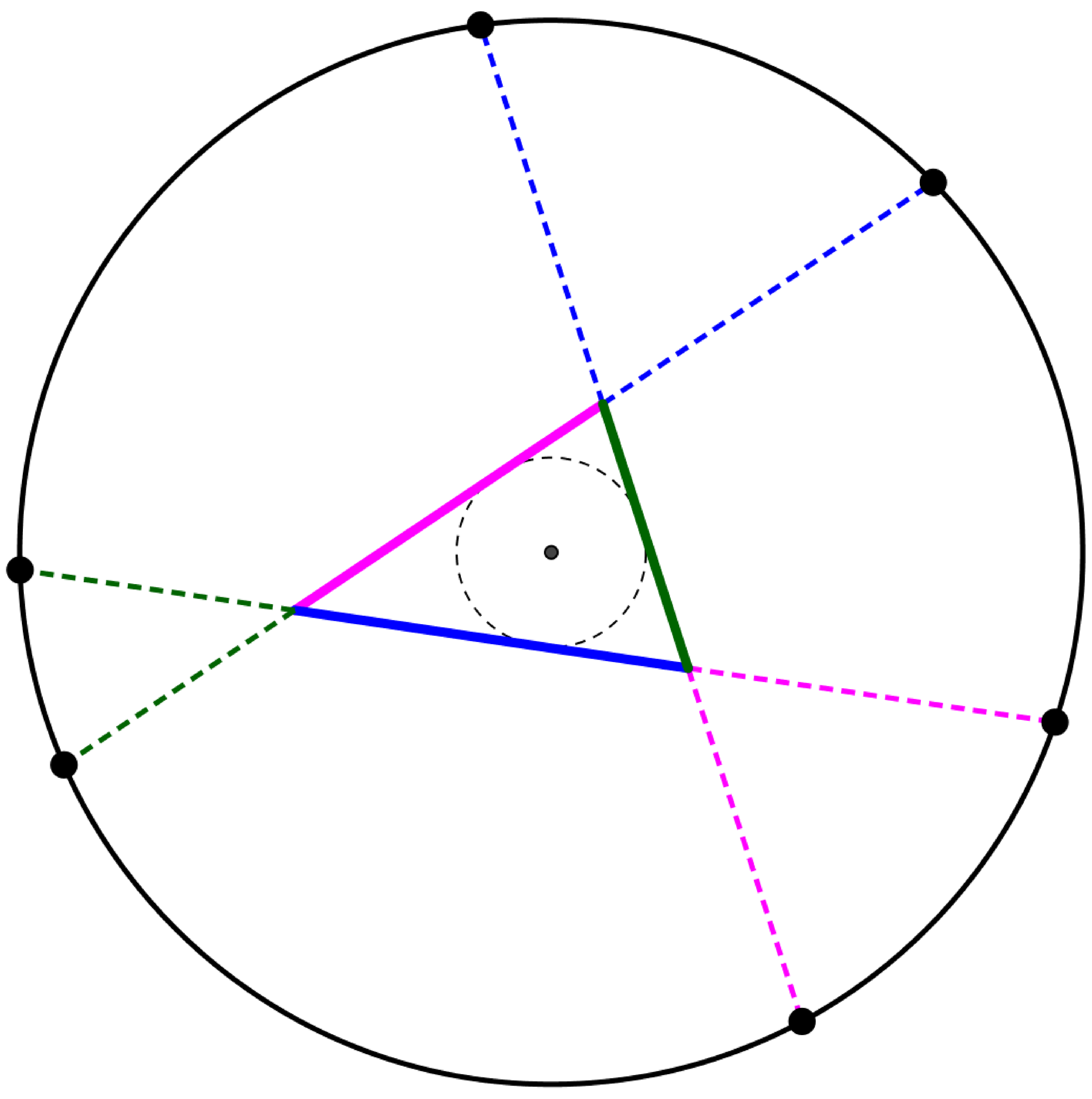

圖01康威圓定理(作者自行繪製)

文獻探討

給定任意△ABC，設$\overleftrightarrow{AB}$上有一任意點P。在三角形各邊上建構$\overline{BQ}=\overline{BP}$，$\overline{CR}=\overline{CQ}$，$\overline{AS}=\overline{AR}$，$\overline{BT}=\overline{BS}$，$\overline{CU}=\overline{CT}$，結果就有$\overline{AP}=\overline{AU}$，且$P$、$Q$、$R$、$S$、$T$、$U$六點共圓的美妙性質。因為$P$點是$\overleftrightarrow{AB}$上的任意點，當點$P$被拖曳到$\overline{AB}$的外側且$\overline{BP}=b$時，如圖04，正好就產生了康威圓的配置，給出康威圓定理的直觀證明。

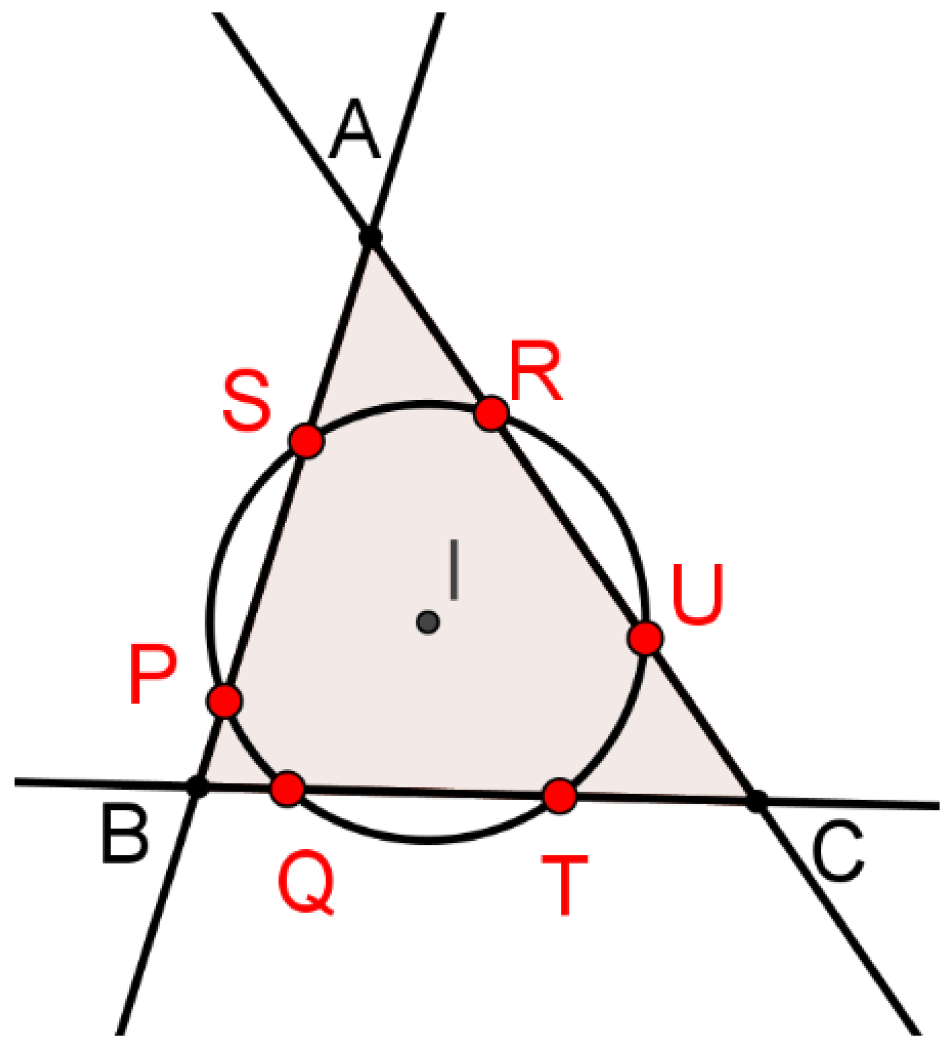

圖04 *Side divider theorem* (作者自行繪製)

貳、研究目的

四邊形以上怎麼推廣？

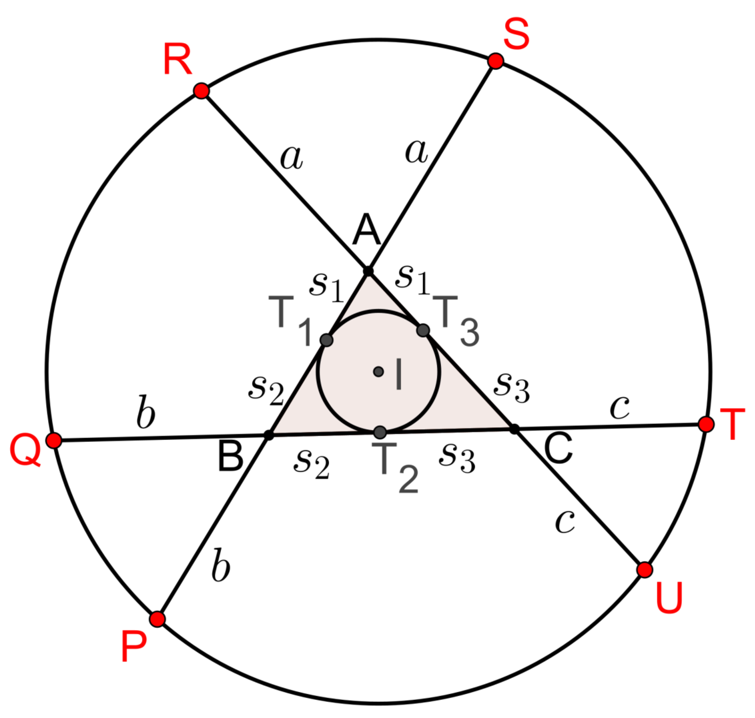

圖05-a 三角形內切圓與各邊切點到各頂點的距離與周長的關係（作者自行繪製）

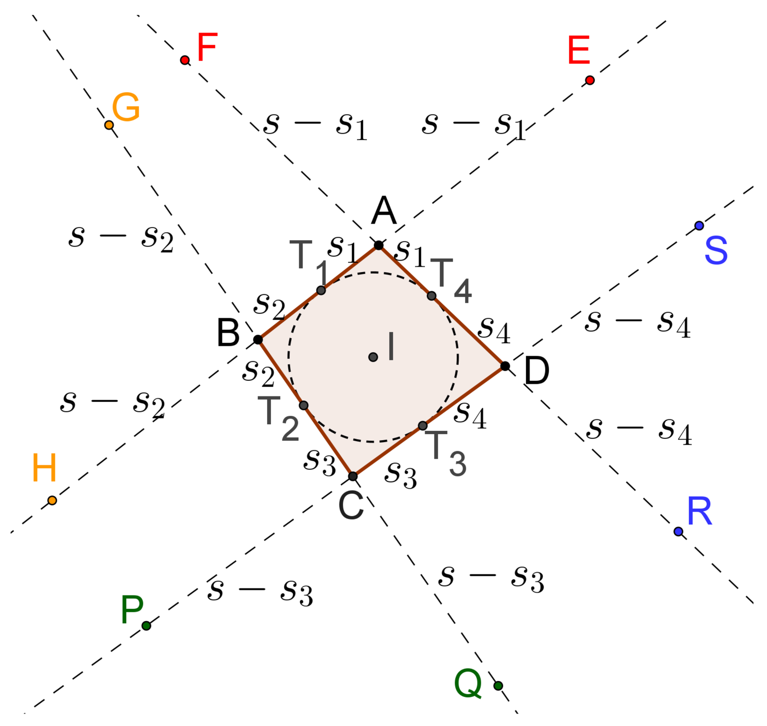

圖05-b 四邊形$ABCD$的每個頂點處相交的兩邊依序延長$s-s_i$（作者自行繪製）

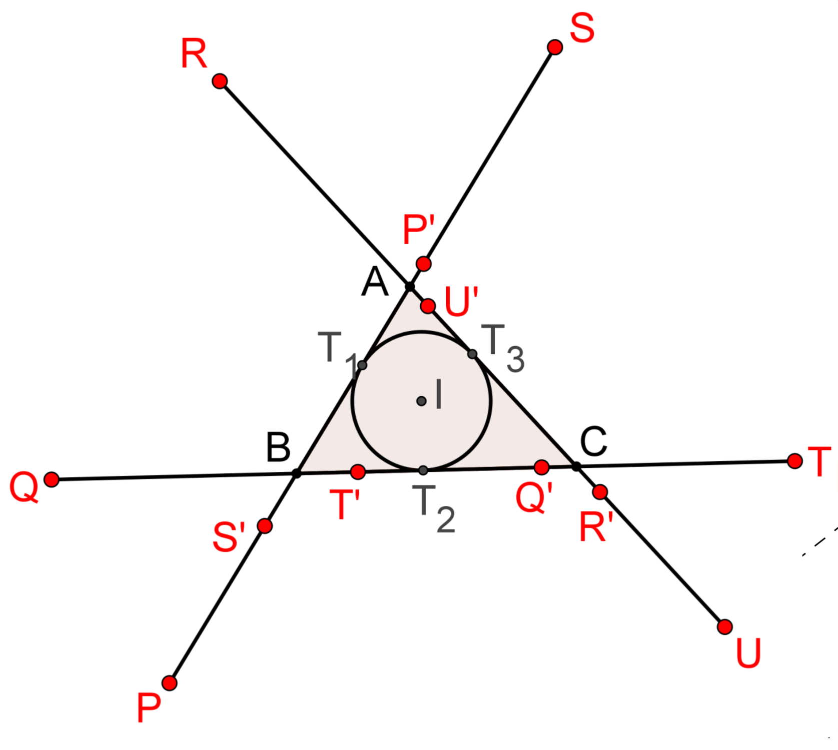

圖06-a 三角形每個頂點沿著相鄰邊的兩個方向及其「反方向」延伸$s-s_i$（作者自行繪製）

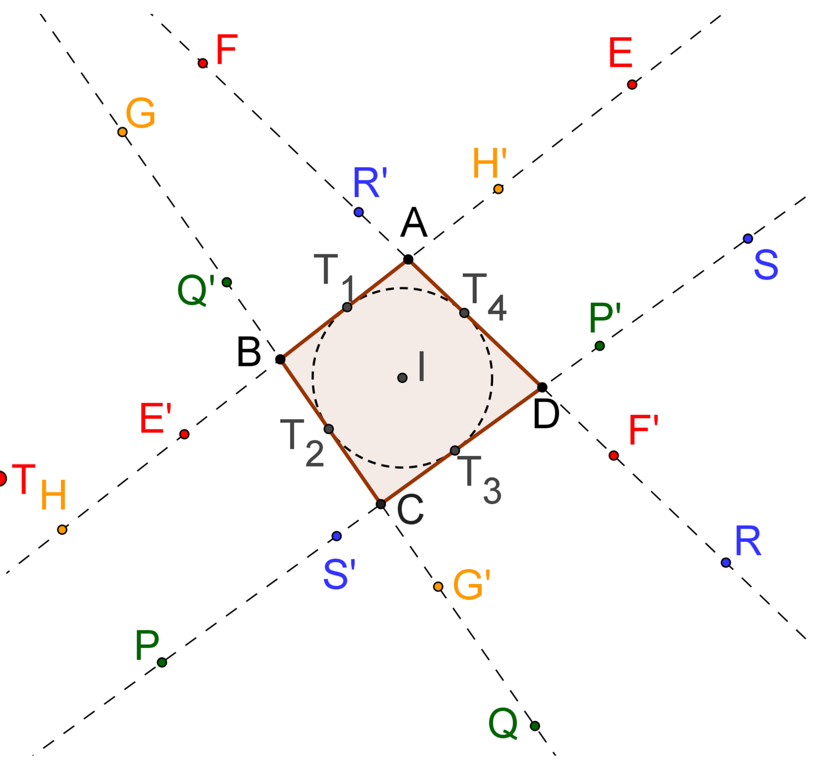

圖06-b 多邊形每個頂點沿著相鄰邊的兩個方向及其「反方向」延伸$s-s_i$（作者自行繪製）

根據前言，本研究的目的在於：

一、探討康威圓定理推廣到圓外切多邊形，是否有相同的性質。

二、對於三角形和圓外切多邊形，判斷各邊「雙向」延長某距離的端點是否存在共圓的特性。若有，並設法證明。

參、研究設備與器材

研究設備包括：紙、筆、筆電、Geogebra 5.0。

肆、研究方法

命名規則

如圖06-c，在圓外切多邊形$P_1P_2P_3\dots P_N$中，我們從圓外切N邊形每個頂點P_i處沿著相交的邊延伸一定的距離形成新端點，端點被定義如下：

(1) 從P_i沿著向量$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$延伸延伸$s-s_i$的距離得到端點$P_{ia}$；

(2) 從P_i沿著向量$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$延伸延伸$s-s_i$的距離得到端點$P_{ib}$；

(3) 從P_i沿著向量$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$延伸延伸$s-s_i$的距離得到端點$P_{ic}$；

(4) 從P_i沿著向量$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸延伸$s-s_i$的距離得到端點$P_{id}$。

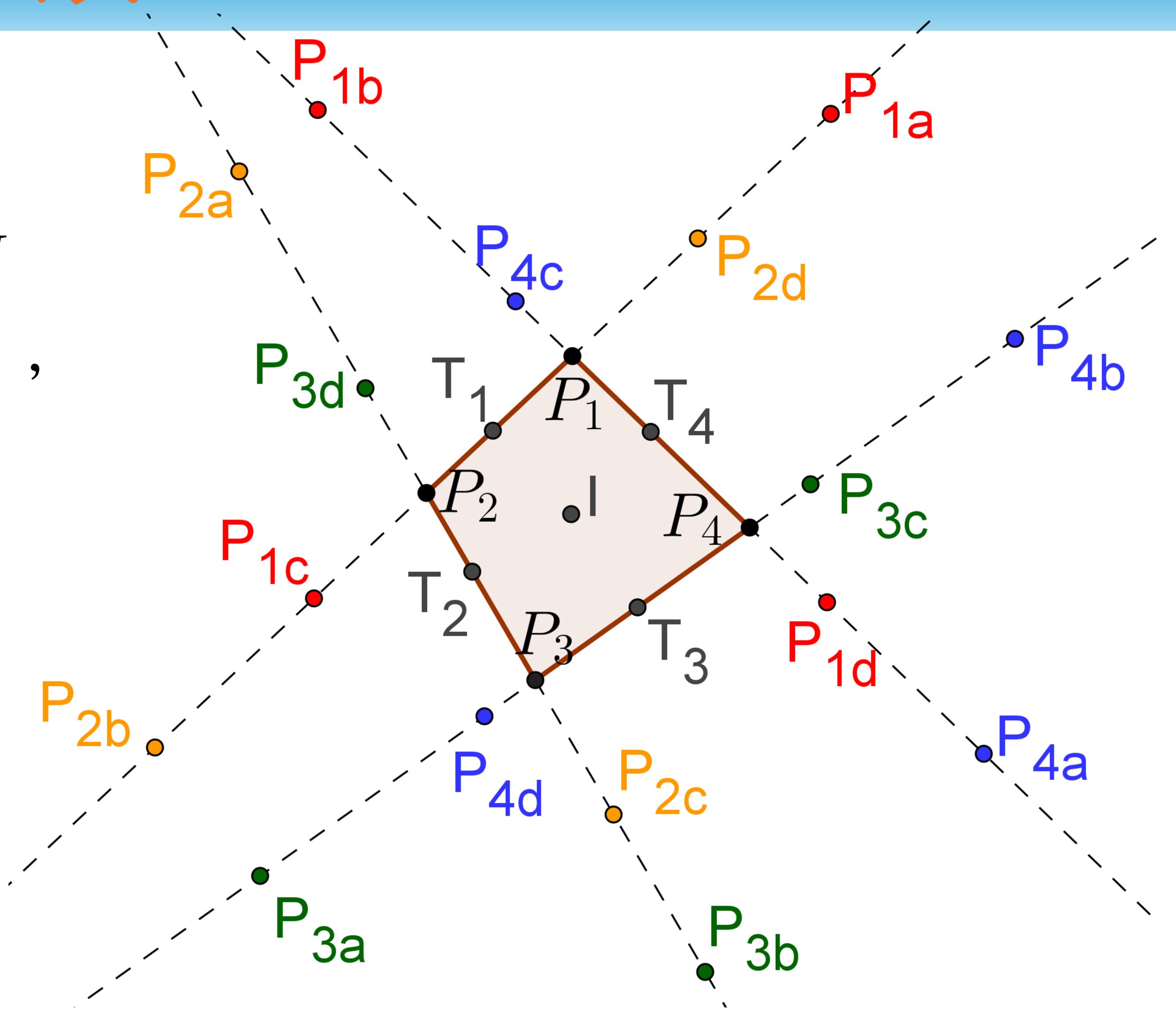

圖06-c 四邊形及其延伸新端點的命名規則(作者自行繪製)

伍、研究結果

一、在圓外切多邊形中，從每個頂點處沿著相交的邊延伸$s-s_i$距離時，所形成的所有P_{ia}、P_{ib}端點將共同位於一個圓上。

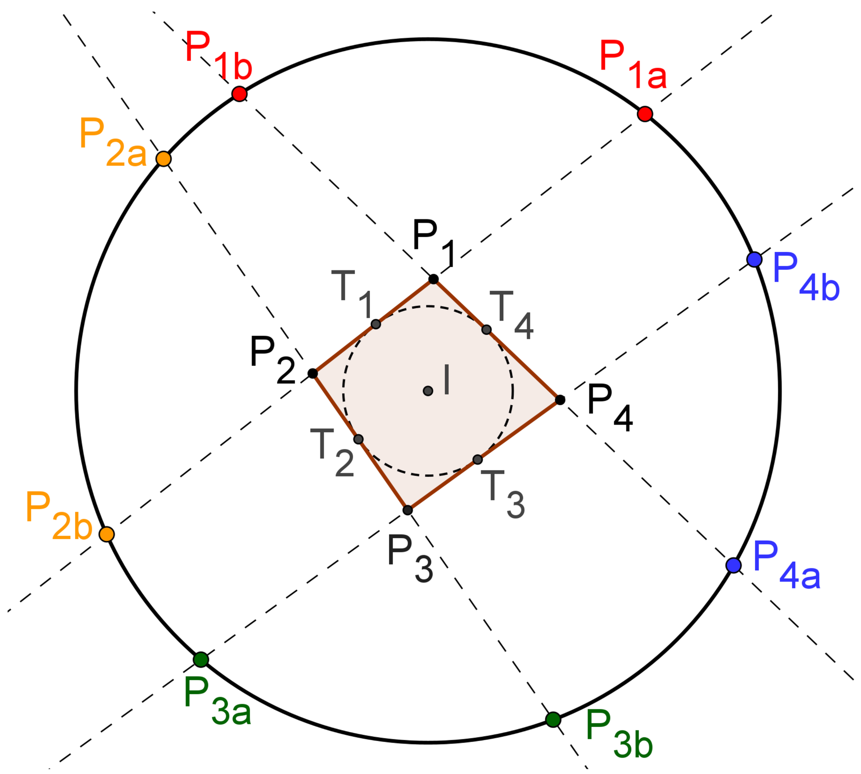

圖07 圓外切四邊形的康威圓
(作者自行繪製)

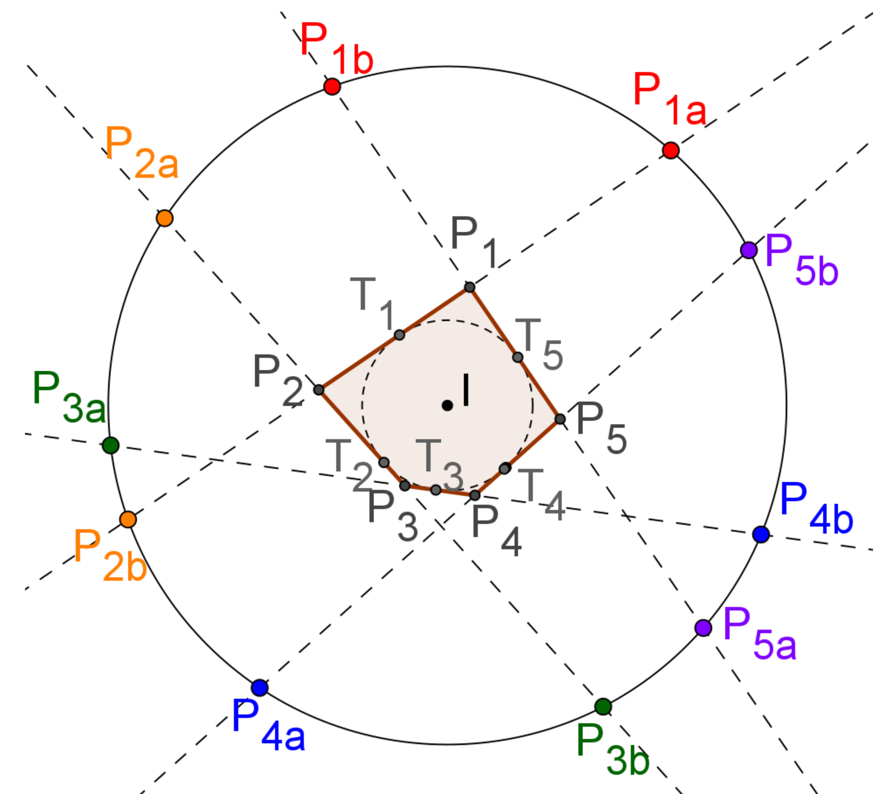

圖08 圓外切五邊形的康威圓
(作者自行繪製)

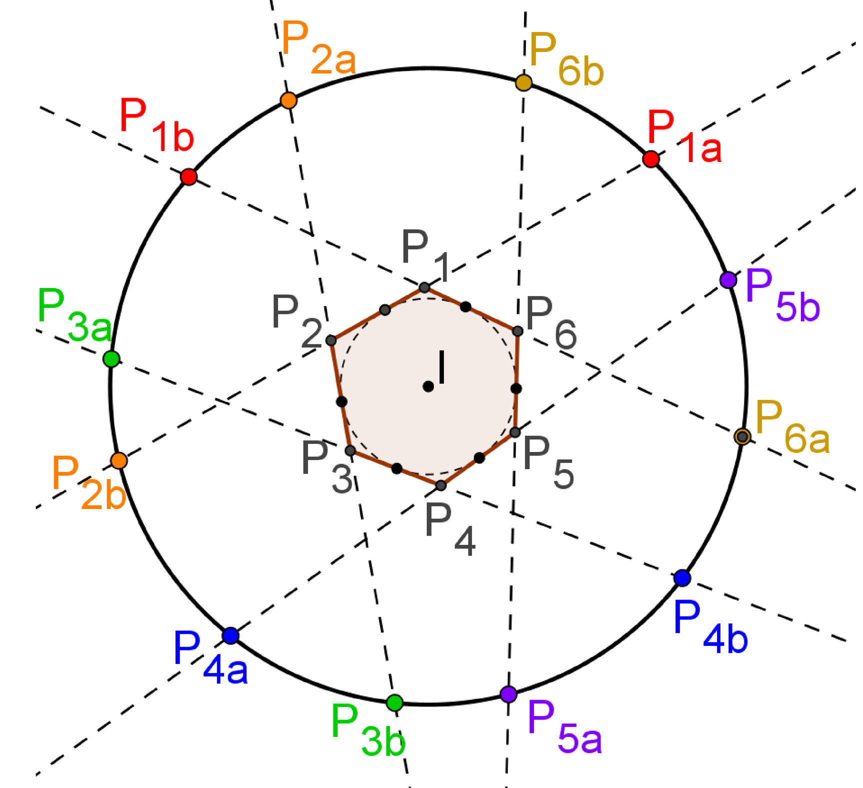

圖09 圓外切六邊形的康威圓
(作者自行繪製)

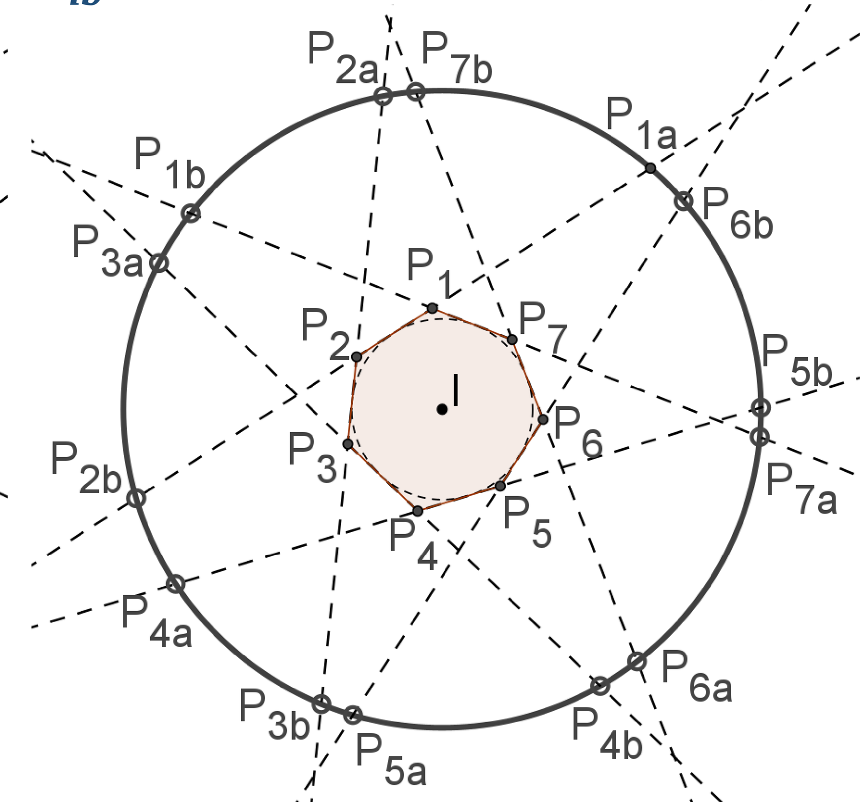

圖10 圓外切七邊形的康威圓
(作者自行繪製)

二、在圓外切N邊形中，從每個頂點處沿著相交的邊「雙向」延伸$s-s_i$距離時，所形成的端點將分別位於N個圓上。

（一）$N=3$時，則 (1) P_{1a}、P_{1d}、P_{3b}、P_{3c}、$\boldsymbol{P_{2c}}$、$\boldsymbol{P_{2d}}$六點共圓。 (2) P_{2a}、P_{2d}、P_{1b}、P_{1c}、$\boldsymbol{P_{3c}}$、$\boldsymbol{P_{3d}}$六點共圓。

(3) P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}、$\boldsymbol{P_{1c}}$、$\boldsymbol{P_{1d}}$六點共圓。

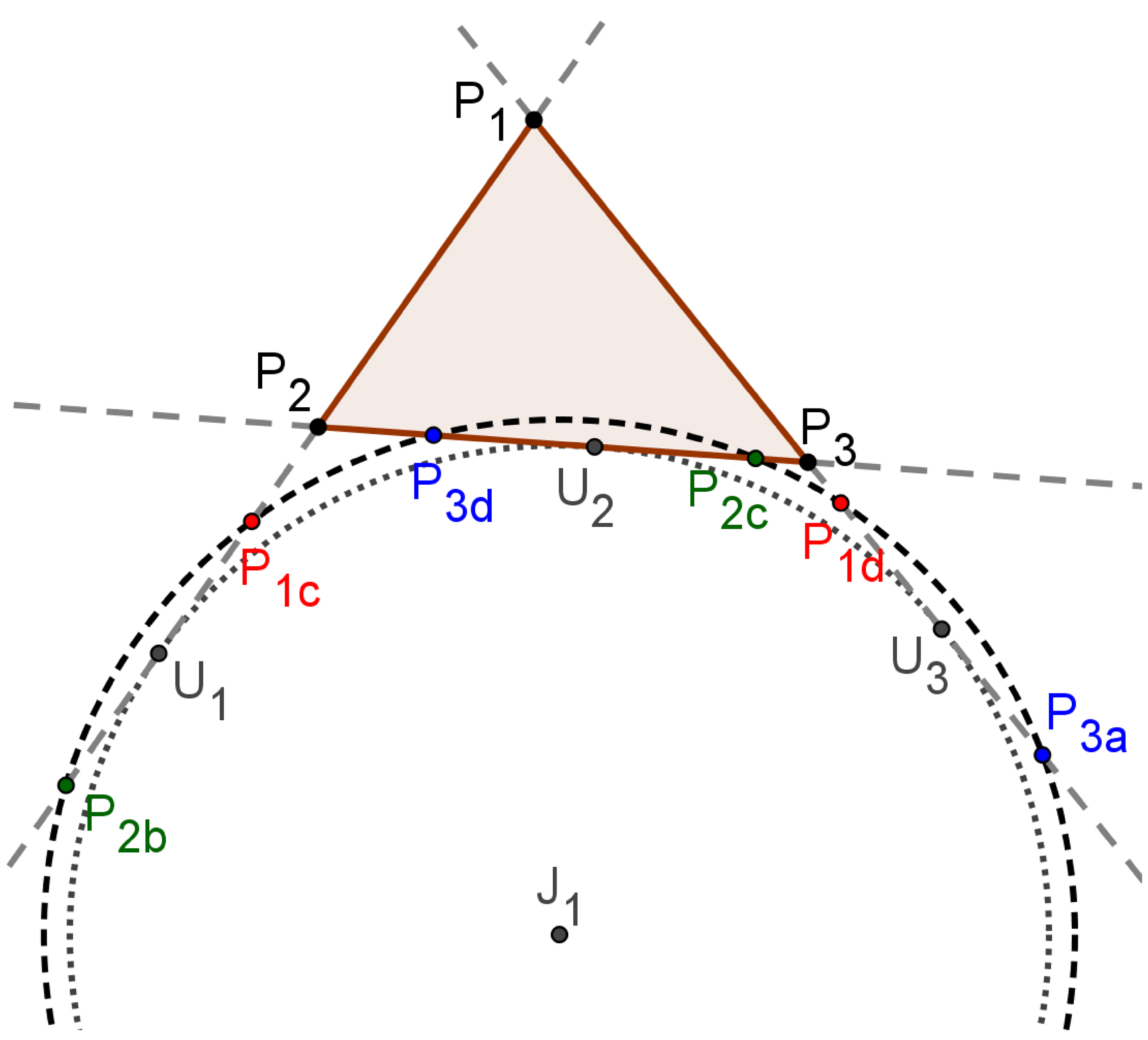

圖11-a　P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}、P_{1c}、P_{1d}共圓(作者自行繪製)

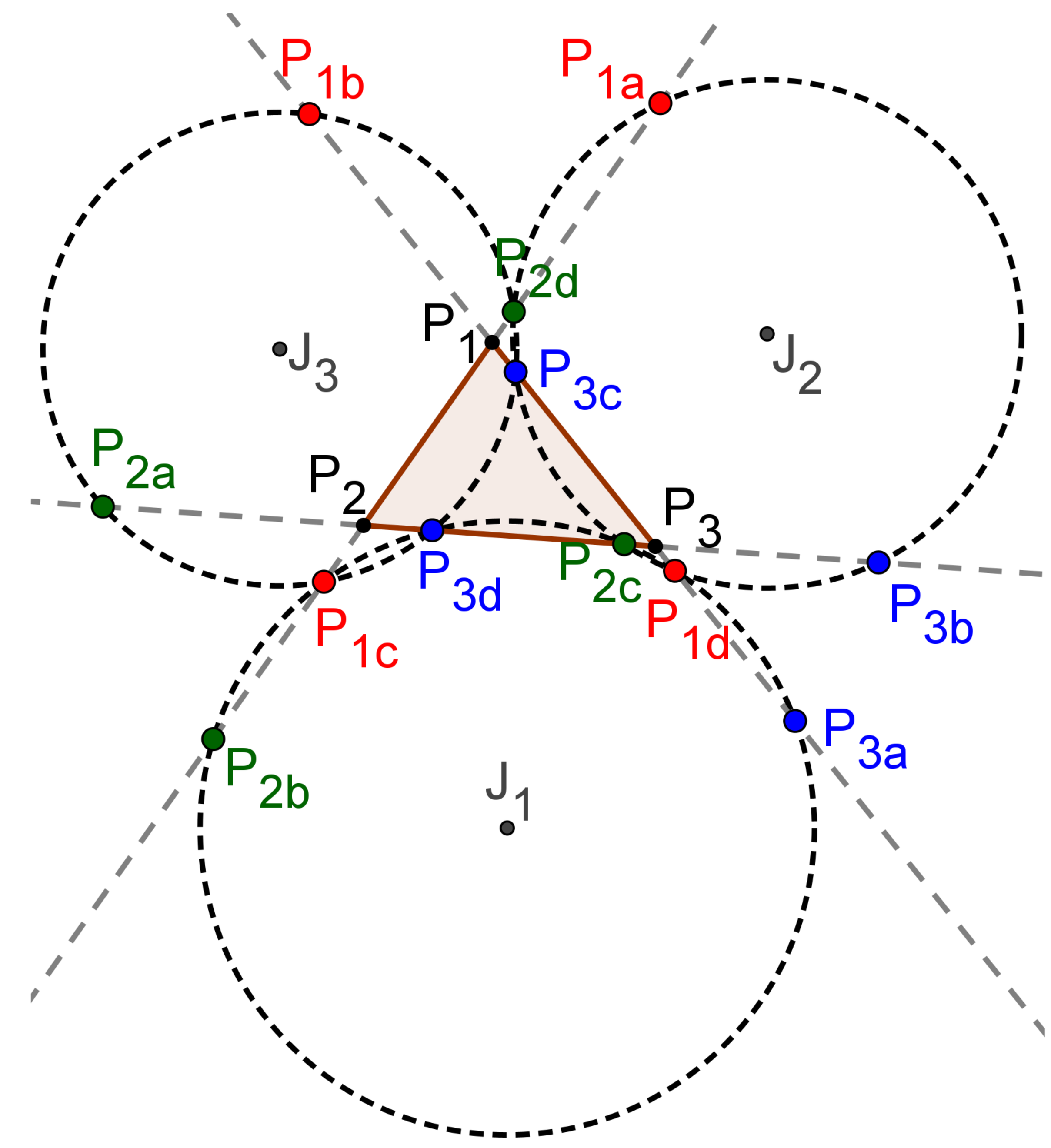

圖11-b　三組六點共圓性質(作者自行繪製)

（二）$\boldsymbol{N \geq 4}$時，圓外切N邊形若從P_i處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸$s-s_i$的距離取端點$P_{ia}$、$P_{ib}$、$P_{ic}$、$P_{id}$，

則$\boldsymbol{P_{(i+1)a}}$、$\boldsymbol{P_{(i+1)d}}$、$\boldsymbol{P_{ib}}$、$\boldsymbol{P_{ic}}$四點共圓。

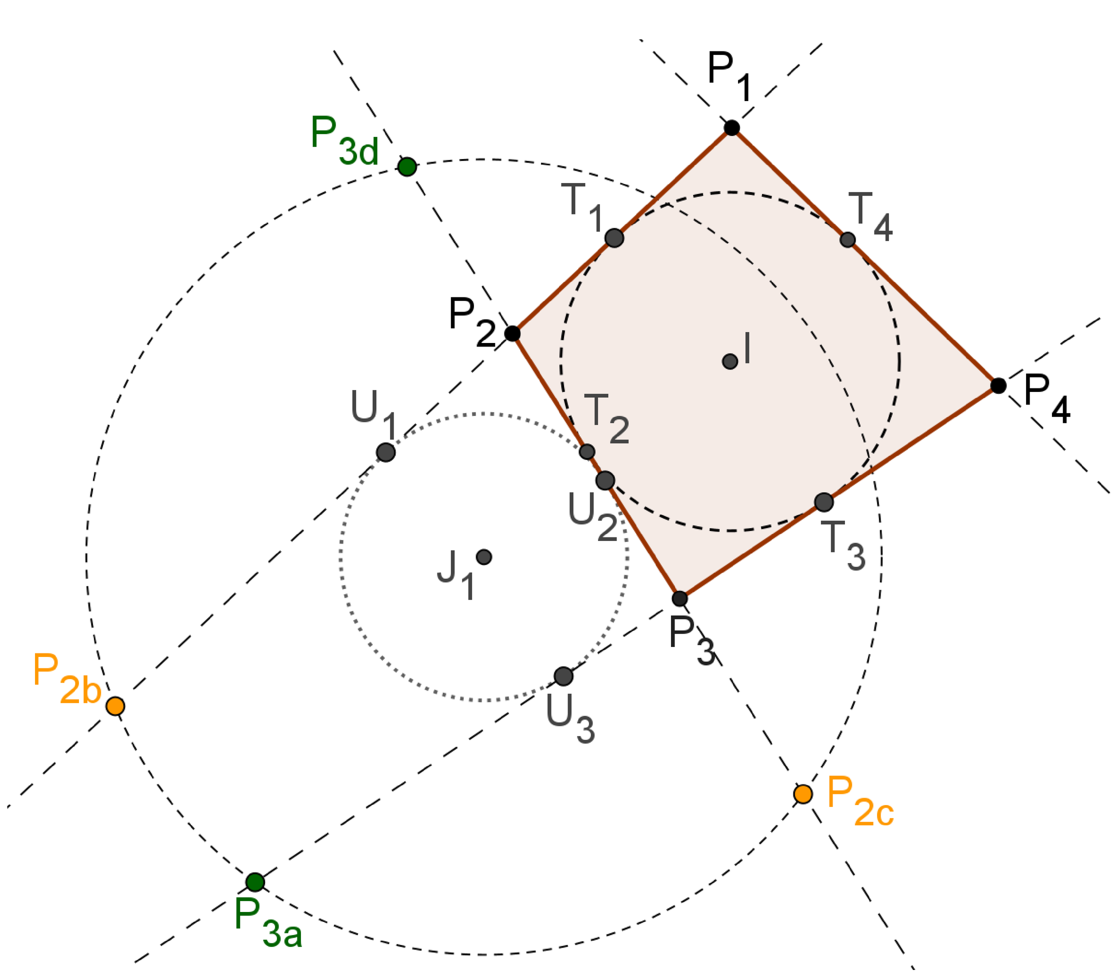

圖12 P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}四點共圓(作者自行繪製)

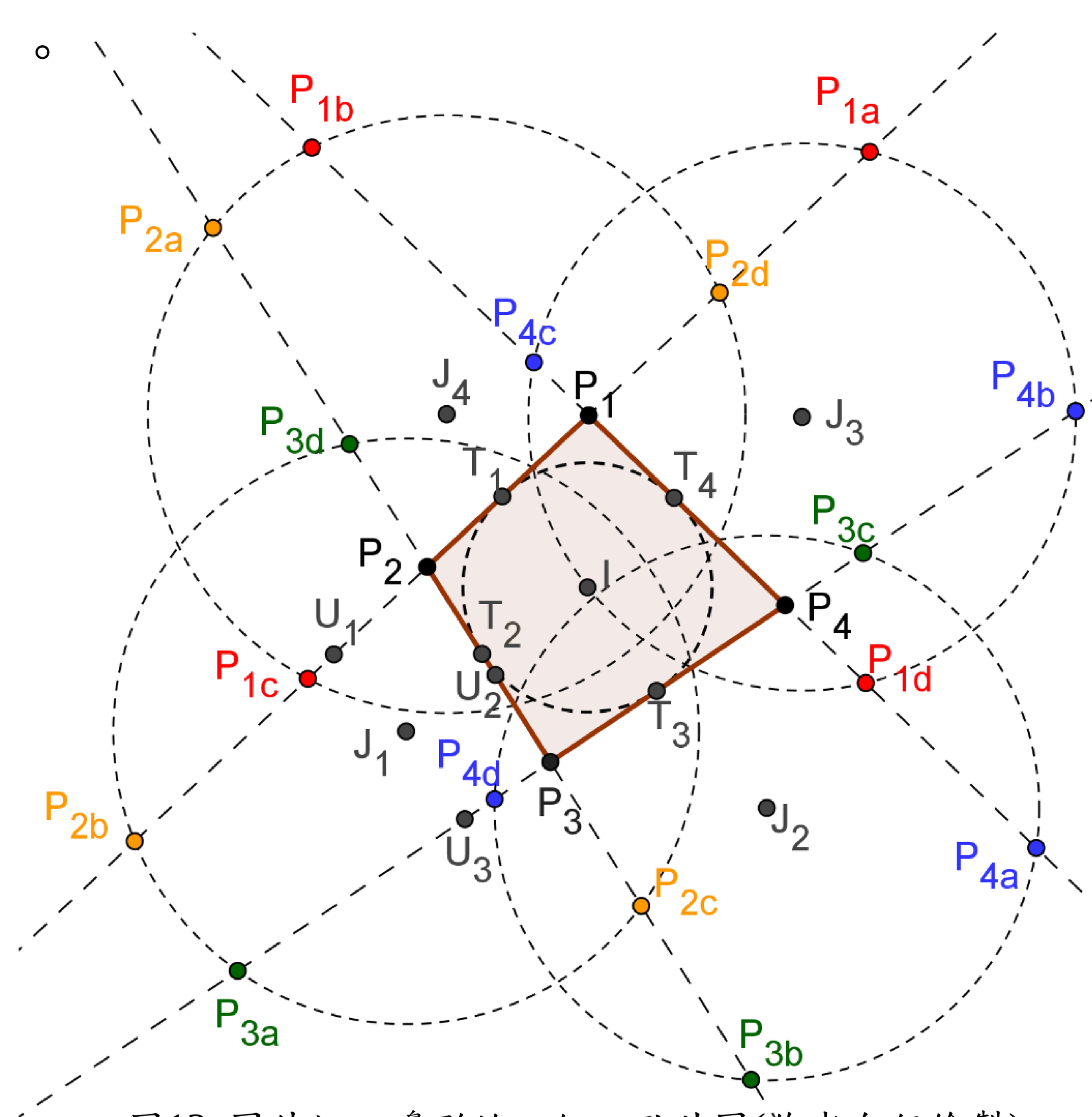

圖13 圓外切四邊形的四組四點共圓(作者自行繪製)

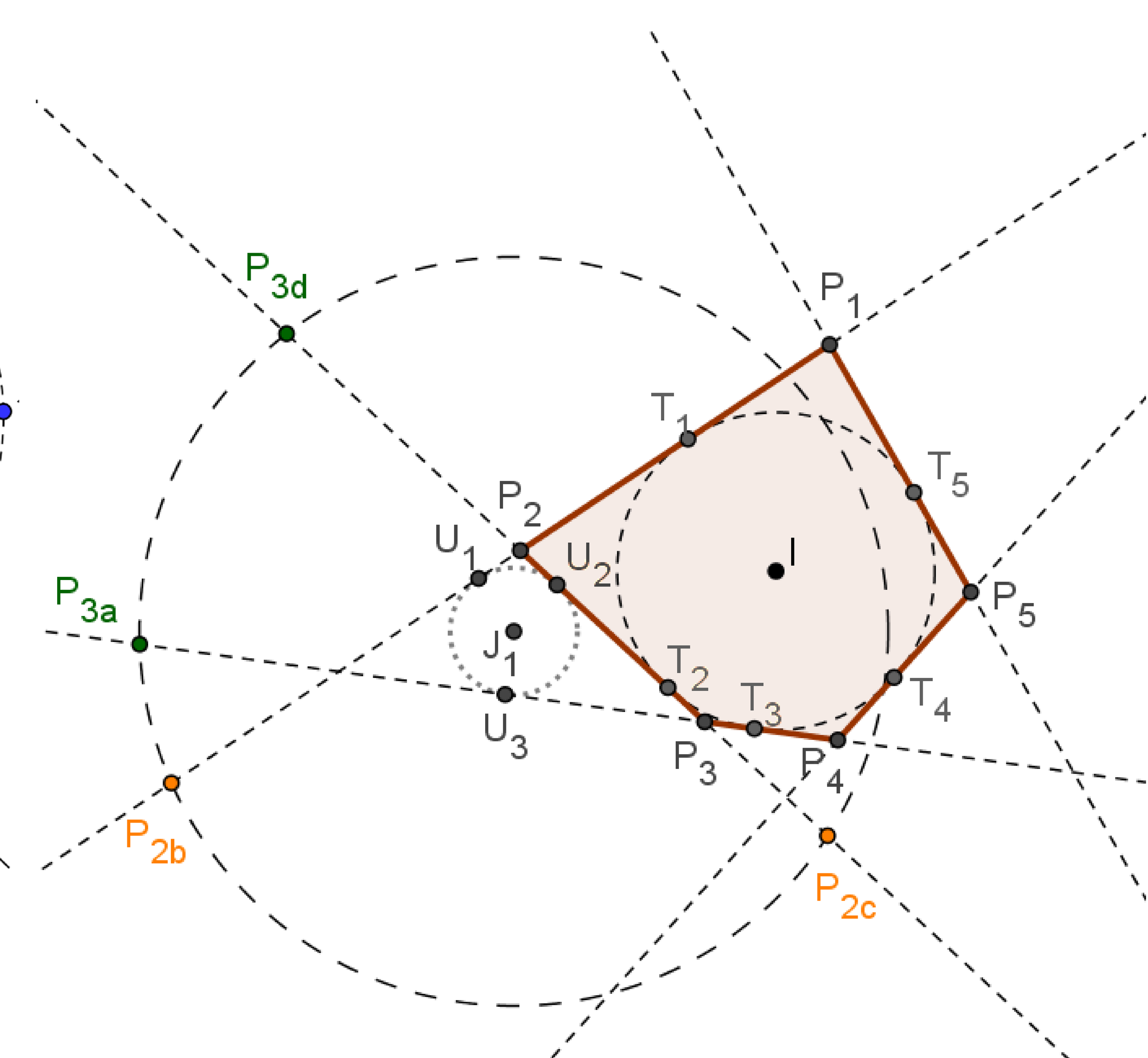

圖14　P_{3a}、P_{3d}、P_{2b}、P_{2c}四點共圓(作者自行繪製)

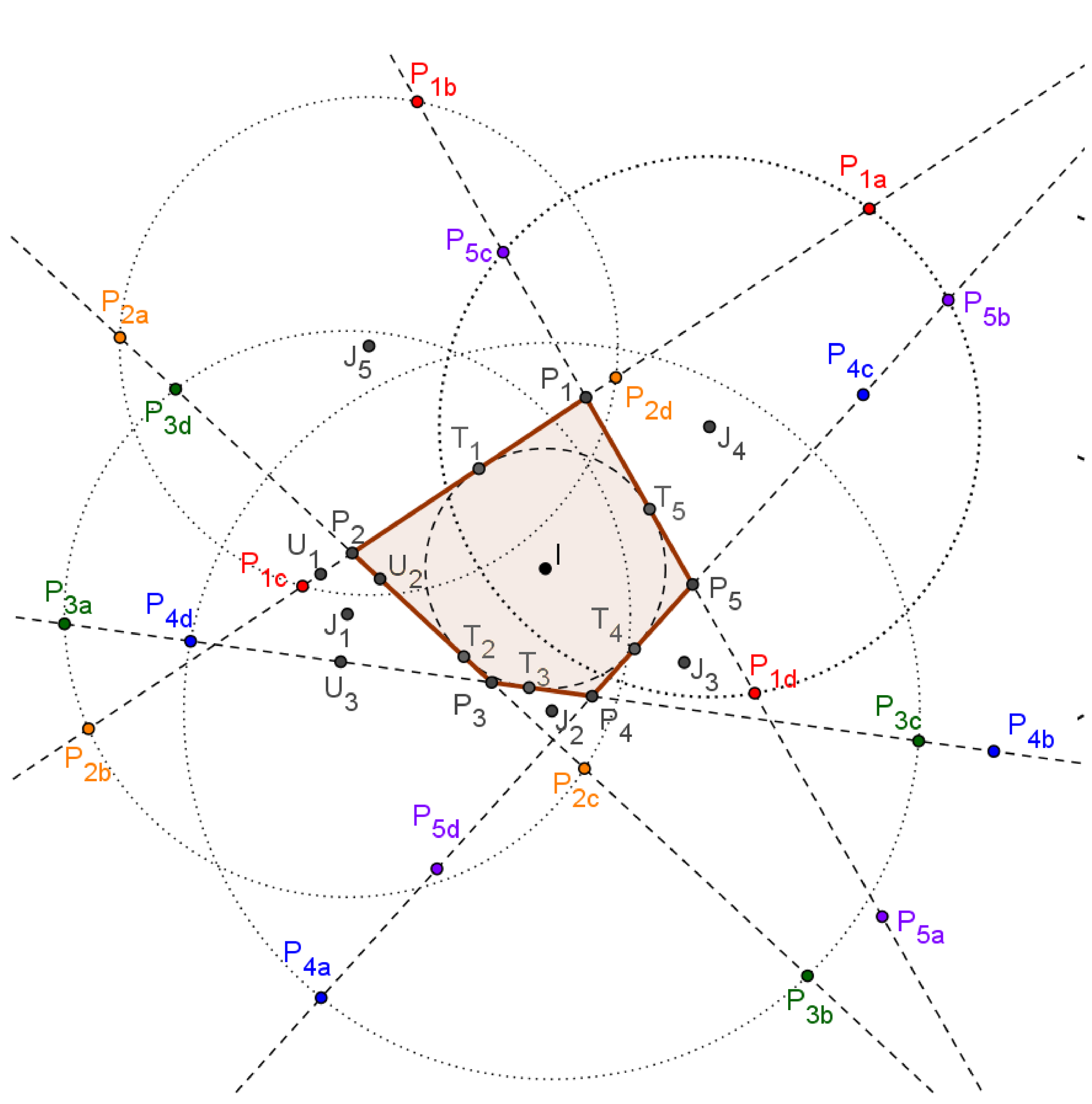

圖15 圓外切五邊形的五組四點共圓(作者自行繪製)

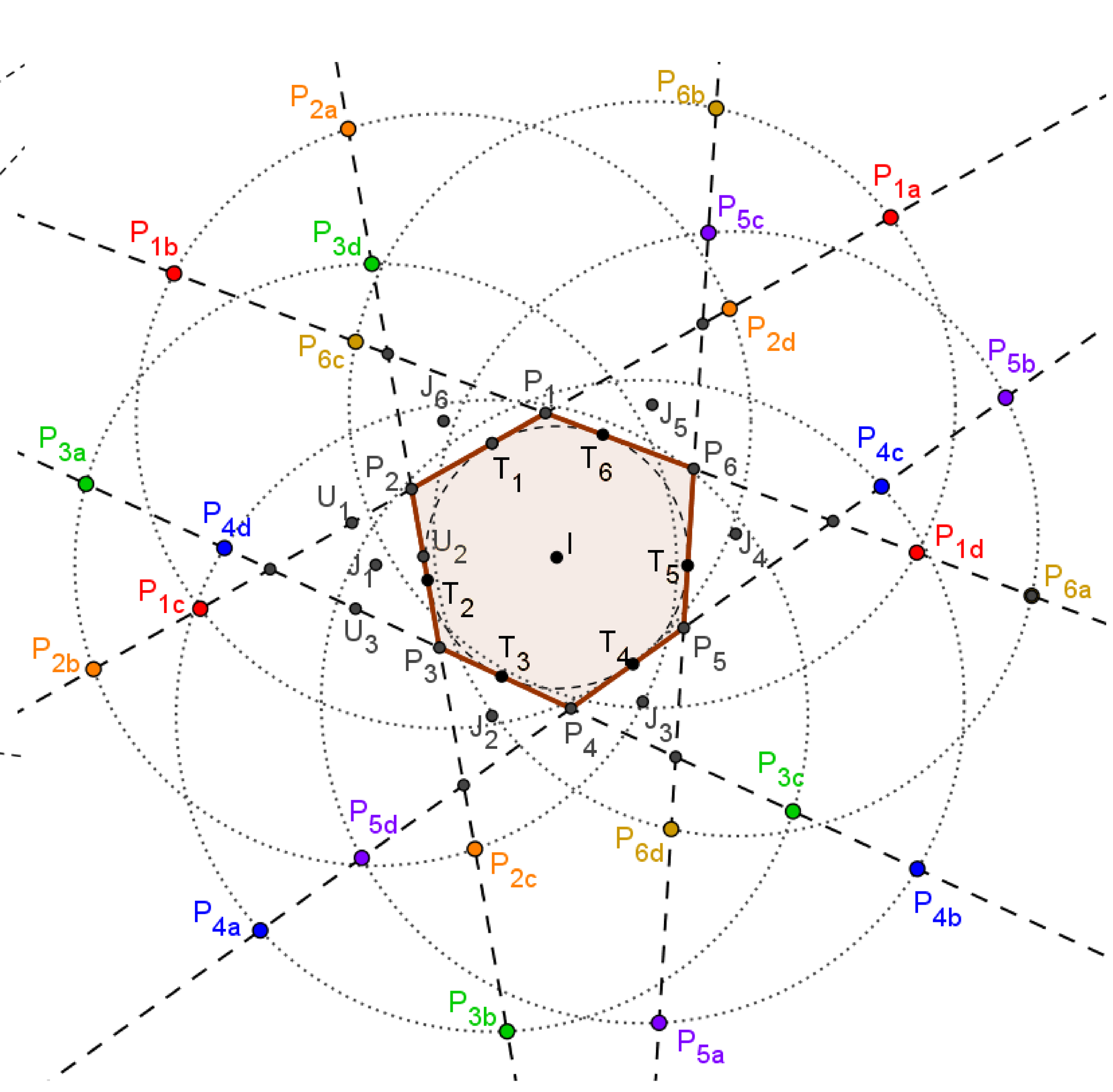

圖16 圓外切六邊形的六組四點共圓(作者自行繪製)

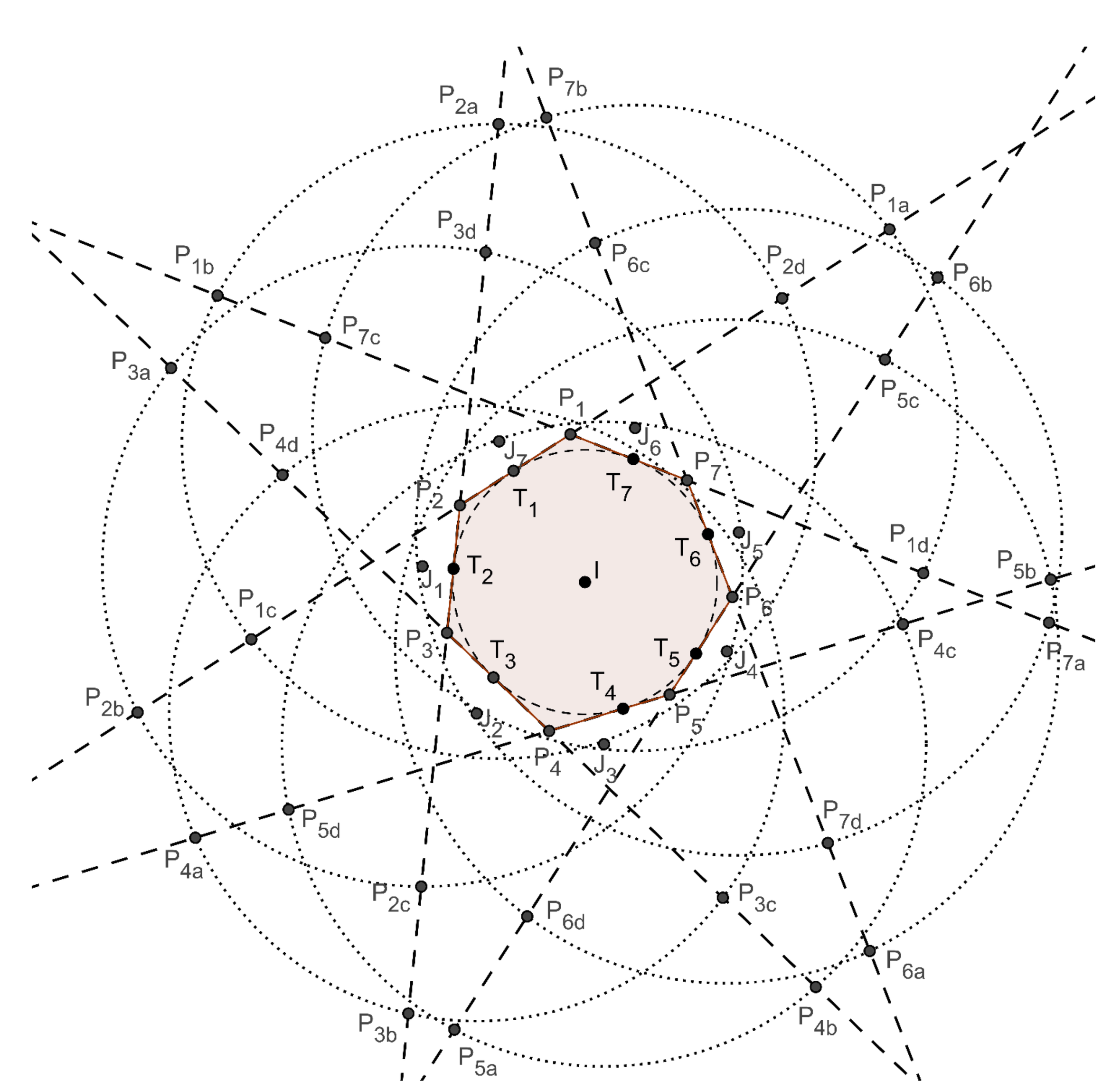

圖17 圓外切七邊形的七組四點共圓(作者自行繪製)

陸、討論

一、三角形各組共圓點數量多出兩個的探討

三公弦$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$交於一點$N$，此點與內心、重心共線，正是三角形的奈格爾點

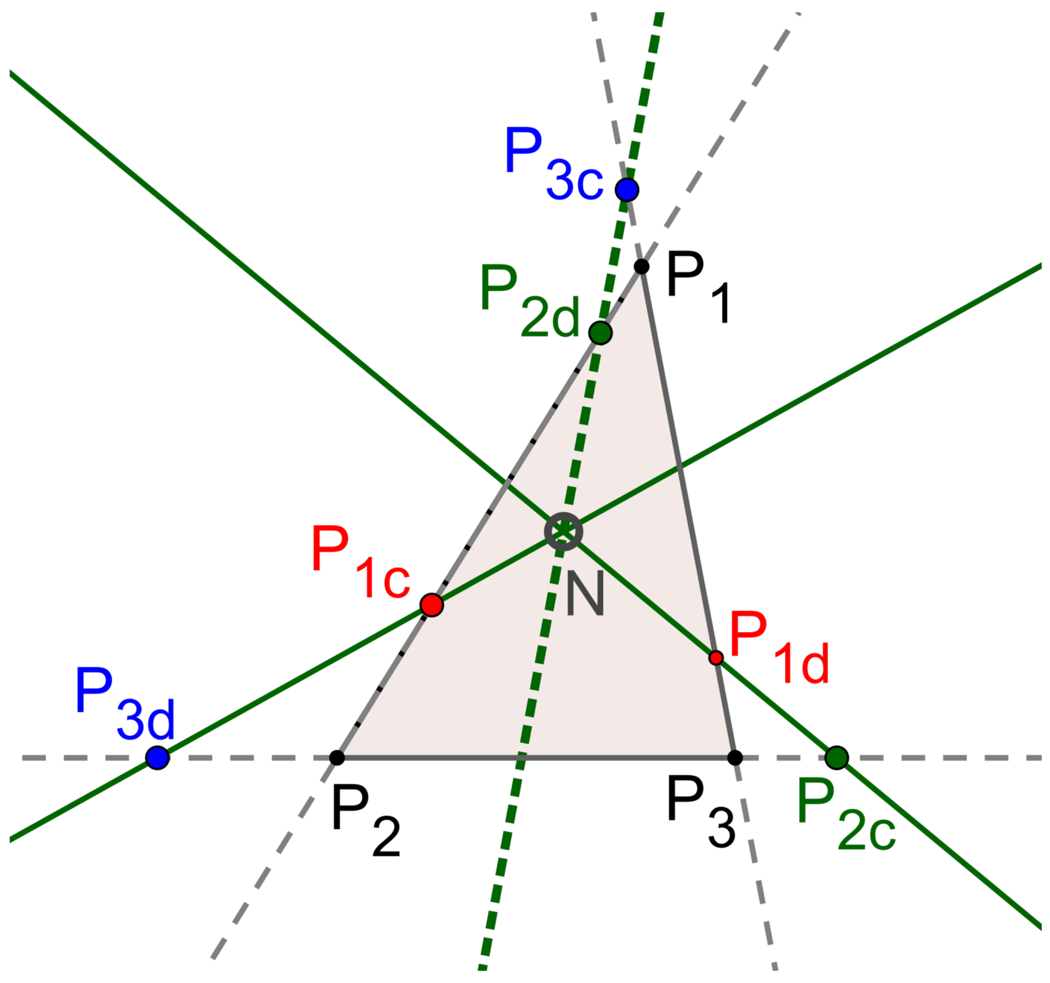

圖18 三條公弦延長線共點(作者自行繪製)

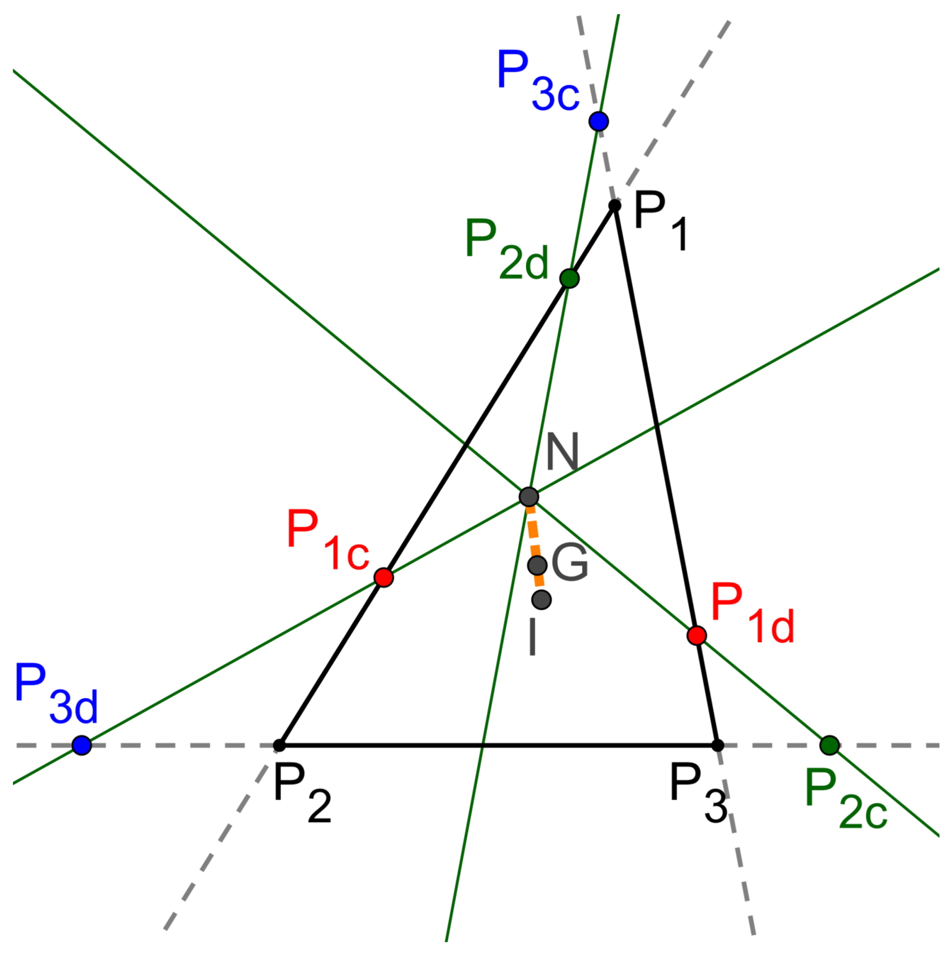

圖19三公弦交點N與內心重心共線(作者自行繪製)

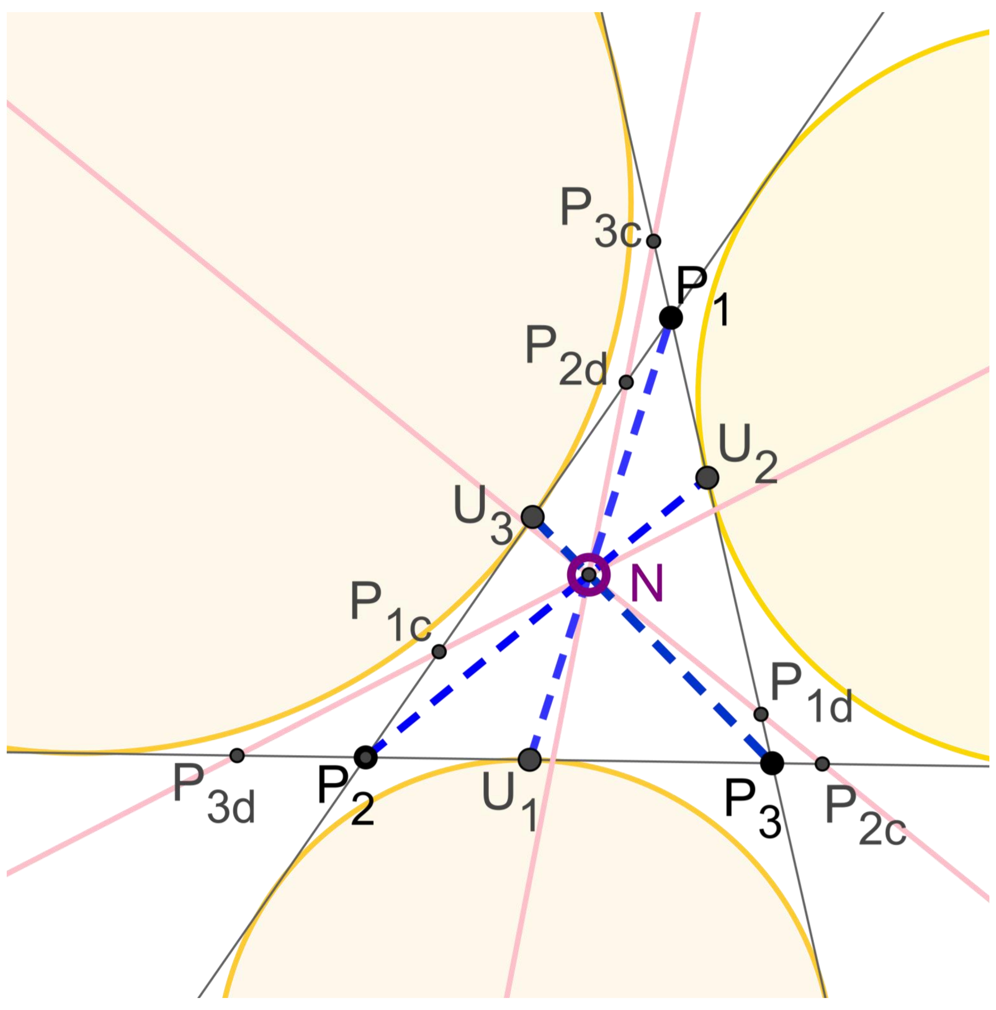

圖20 三公弦交點N是三角形的*Nagel point*(作者自行繪製)

二、邊數四以上的圓外切多邊形更一般化的推廣

（一）若Q_{1a}點是$\overrightarrow{P_1P_{1a}}$上任意點，且$\overline{Q_{1a}T_1}=x$，且$x>max(s_1, s_2, s_3,\dots, s_n)$，$\forall i=1,2,3,\dots,n$，從$P_i$處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸$x-s_i$的距離取端點$Q_{ia}$、$Q_{ib}$、$Q_{ic}$、$Q_{id}$，

並定義$Q_{(i+n)a}=Q_{ia}$，$Q_{(i+n)b}=Q_{ib}$，$Q_{(i+n)c}=Q_{ic}$，$Q_{(i+n)d}=Q_{id}\ (mod\ n)$，如圖23-*a*

則：(1) 這$2n$個端點$\mathbf{Q_{1a}}$、Q_{1b}、Q_{2a}、Q_{2b}、…、Q_{na}、Q_{nb}必共圓。

(2) $Q_{(i+1)a}$、$Q_{(i+1)d}$、Q_{ib}、Q_{ic}四點共圓，$\forall i=1,2,3,\dots,n$。

（二）我們推論若Q_{1a}點是$\overline{P_1P_2}$上任意點，也會有類似的性質，如圖23-*b*。

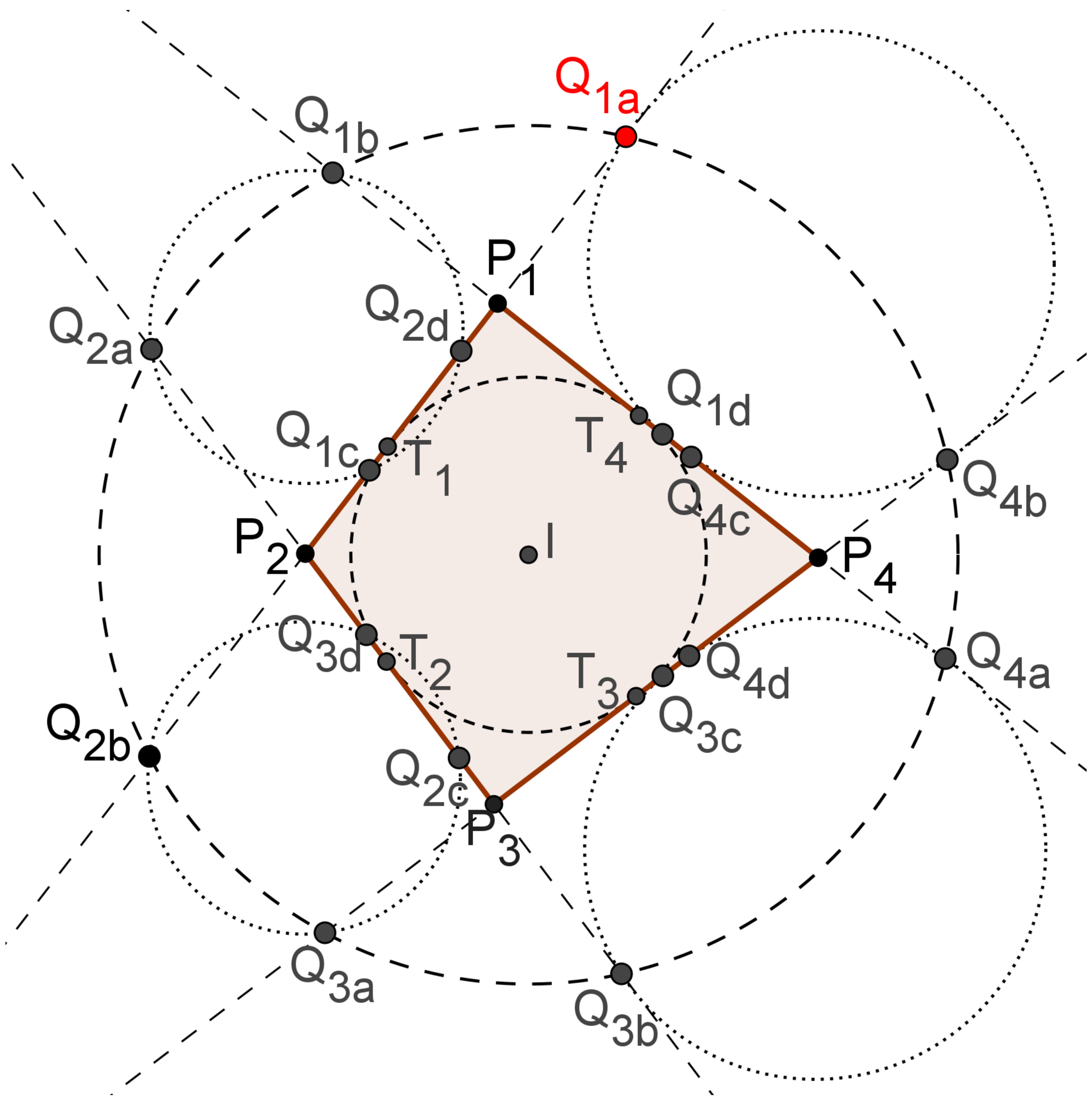

圖23-*a* Q_{1a}點在$\overrightarrow{P_1P_{1a}}$上(作者自行繪製)

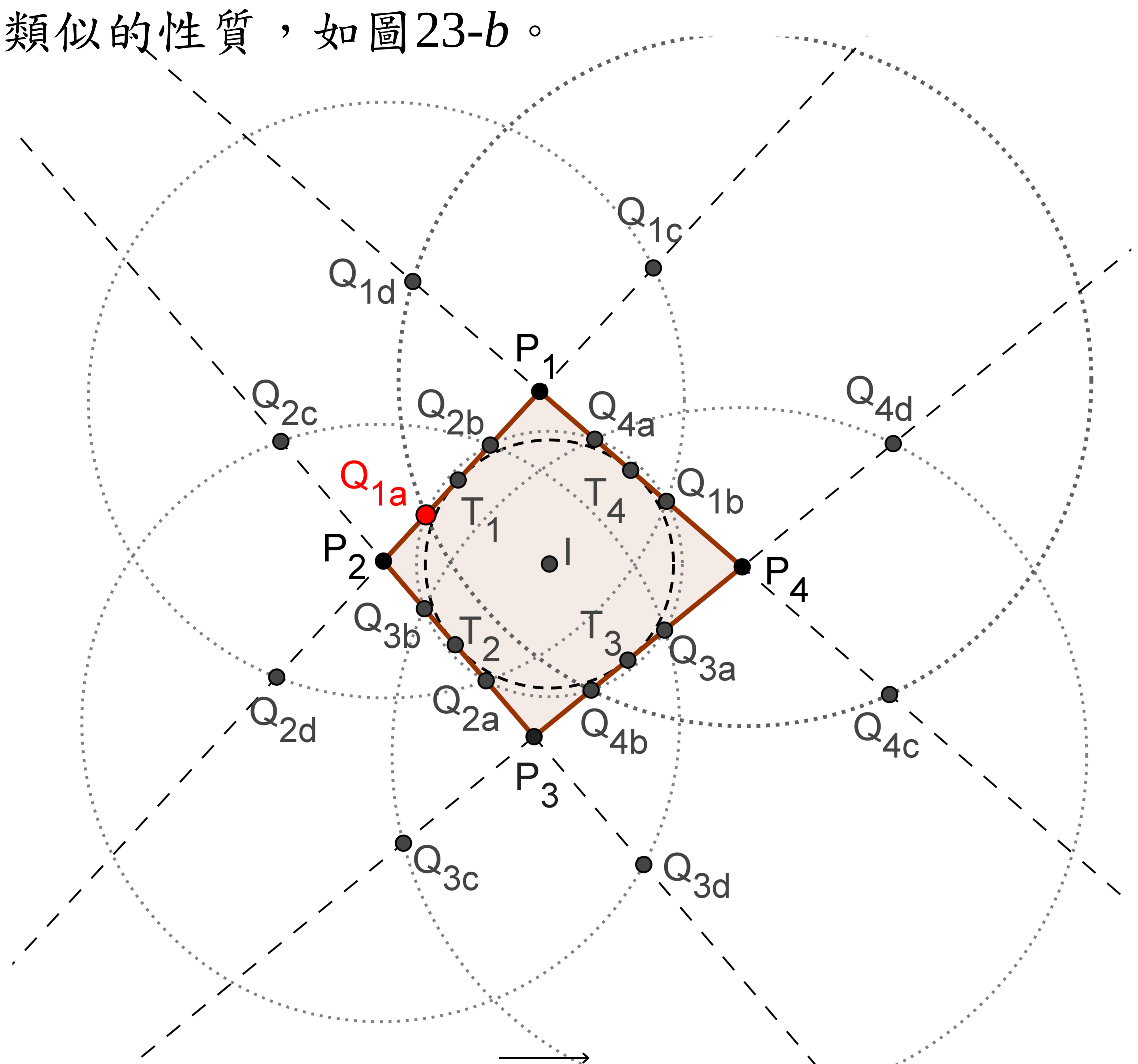

圖23-*b* Q_{1a}點在$\overline{P_1P_2}$上(作者自行繪製)

柒、結論

一、在三角形$P_1P_2P_3$中，$\forall i=1,2,3$，若從P_i處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸$s-s_i$的距離取端點$P_{ia}$、$P_{ib}$、$P_{ic}$、$P_{id}$，則有以下共圓性質：

（一）P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、P_{3a}、P_{3b}六點共圓；

（二）$P_{(i+1)a}$、$P_{(i+1)d}$、P_{ib}、P_{ic}、$P_{(i+2)c}$、$P_{(i+2)d}$六點共圓，$\forall i=1,2,3$。

二、在圓外切N邊形$P_1P_2P_3\dots P_n$（$N\geqq4$）中，$\forall i=1,2,3,\dots,n$，若從P_i處分別沿著$\overrightarrow{P_{i+1}P_i}$、$\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$、$\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$、$\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$延伸$s-s_i$的距離取端點$P_{ia}$、$P_{ib}$、$P_{ic}$、$P_{id}$，則有下列共圓性質：

（一）P_{1a}、P_{1b}、P_{2a}、P_{2b}、…、P_{na}、P_{nb}共圓。（二）$P_{(i+1)a}$、$P_{(i+1)d}$、P_{ib}、P_{ic}四點共圓，$\forall i=1,2,3,\dots,n$

三、三角形$P_1P_2P_3$經過此操作後所得到的這六個點P_{1c}、P_{1d}、P_{2c}、P_{2d}、P_{3c}、P_{3d}，則$\overleftrightarrow{P_{2d}P_{3c}}$、$\overleftrightarrow{P_{1d}P_{2c}}$、$\overleftrightarrow{P_{3d}P_{1c}}$三線共點，此點正是三角形$P_1P_2P_3$的奈格爾點(*Nagel point*)。

捌、參考文獻

[1] "John Horton Conway". www.cardcolm.org. Archived from the original on 20 May 2020. Retrieved 29 May 2020.

[2] Weisstein, Eric W. "Conway Circle". Math World. Retrieved 29 May 2020.

[3] Carnot, L. (1803). *Géométrie de position*. Paris, France: Chez J. B. M. Duprat.

[4] de Villiers, M. (2023). Conway's Circle Theorem as a Special Case of a More General Side Divider Theorem. *Learning and Teaching Mathematics*, (34), 37-42.