中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

030406

鳩佔鵲巢巧護食－有限相連環狀排列之探討

學校名稱：　南投縣立大成國民中學

作者：	指導老師：
國二 王品云	江奇婉
國二 沈莞茜	林勝國
國二 陳可芯	

關鍵詞：　規律、同餘、環狀排列

摘要

本研究旨在探討科學研習月刊 62-2 期中「鳩佔鵲巢」的問題。首先小斑鳩編號是 0，喜鵲編號 1、2、3、4、5，沿著圓周排列，探討餵食的順序為選第一隻編號 k 喜鵲餵食，下一隻被餵食的鳥是由這隻鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻鳥。接著編號 r 喜鵲，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥，以此類推。但若餵到編號 0 斑鳩，會將食物吃光。探討喜鵲 n 隻，當食物 n 份、無限多份時，以及當餵食順序為順時針、逆時針交替時，所有喜鵲都吃到食物，其「位置排序」和小鳥數量之間的數學關係。並延伸討論(1)當斑鳩二隻位置相鄰時，(2)當喜鵲吃完一份食物後即飛走時。食物 n 份、所有喜鵲都吃到食物，其「位置排序」和小鳥數量之間的數學關係。

壹、 前言

一、 研究動機

本研究源自於科學研習月刊 62-2 期中「鳩佔鵲巢」的問題。題目摘錄如下：

> 鳥窩裡有五隻小喜鵲，以及一隻混進來的小斑鳩。這六隻小鳥圍成一圈，小斑鳩編號是 0，接著沿著圓周五隻喜鵲順時針座號為 1.2.3.4.5。
>
> 視力不好的喜鵲媽媽帶著五份食物回來，她餵食的方法相當有趣:首先她先選一隻小鳥餵食，假設這隻小鳥的座號是 k。下一隻被餵食的鳥是由這隻鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻鳥。然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵到斑鳩，食量大的斑鳩就會馬上把所有食物吃光。
>
> 因此，如果一開始喜鵲媽媽選了 0 號斑鳩，那這樣所有小喜鵲都要餓肚子了。如果一開始喜鵲媽媽選了 2 號小鳥餵食，則會有兩隻小喜鵲吃到食物，則餵食順序是
>
> 2 － 4 － 2 － 4 － 2
>
> 如果一開始喜鵲媽媽選了 3 號小鳥餵食，則會只有這隻小喜鵲吃到食物，因為餵食順序是 3 － 0
>
> 1. 喜鵲媽媽要從幾號小鳥開始餵食，會讓最多小喜鵲吃到食物？
> 2. 承上題，吃最多份食物的小喜鵲吃了幾分食物？
> 3. 你能不能幫五隻小喜鵲的位置排一個順序，使得喜鵲媽媽從某一隻開始餵食時，會讓五隻小喜鵲都吃到食物，但是小斑鳩沒吃到？

題目中提到用「位置如何排序」才能讓喜鵲全部都吃到食物，但是小斑鳩沒吃到，引起了我們的興趣，因此我們決定鎖定這個方向作為我們的研究主題，進行以下的研究討論。

二、研究目的

我們的研究目的如下：

題型一：餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物 n 份，當所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。

目的一：在題型一的條件下，探討其「位置排序」和小鳥數量之間的關係	
問題 1-1	小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物兩份。
問題 1-2	小斑鳩編號 0，三隻喜鵲編號 1、2、3，食物三份。
問題 1-3	小斑鳩編號 0，四隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物四份。
問題 1-4	小斑鳩編號 0，五隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物五份。

題型二：餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物無限份，當所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。

目的二：在題型二的條件下，探討其「位置排序」和小鳥數量之間的關係	
問題 2-1	小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物無限份。
問題 2-2	小斑鳩編號 0，三隻喜鵲編號 1、2、3，食物無限份。
問題 2-3	小斑鳩編號 0，四隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物無限份。
問題 2-4	小斑鳩編號 0，五隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物無限份。

題型三：餵食方式路徑二，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物 n 份，當所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。

目的三：在題型三的條件下，探討其「位置排序」和小鳥數量之間的關係	
問題 3-1	小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物兩份。
問題 3-2	小斑鳩編號 0，三隻喜鵲編號 1、2、3，食物三份。
問題 3-3	小斑鳩編號 0，四隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物四份。
問題 3-4	小斑鳩編號 0，五隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物五份。

三、 文獻探討

過去相關之科展與研究參考如下表：

文獻名稱	中華民國第六十二屆中小學科學展覽會作品 『黑白有段』
文獻研究內容摘要	探討： (一) 探討黑、白節數相同，毛毛蟲節數、段數與種類數的關係。 (二) 探討黑、白節數不同，毛毛蟲節數、段數與種類數的關係。 (三) 探討黑、白珠數相同，環狀分段排列珠數、段數與種類數的關係。 (四) 探討黑、白珠數不同，環狀分段排列珠數、段數與種類數的關係。 結論： (一) 環狀分段排列受珠數與段數最大公因數 f 影響，而有非循環直線排列與循環直線排列不同的環狀轉換模式。 (二) 非循環直線排列需扣除循環的直線排列再轉換為環狀排列。 (三) 循環直線排列需扣除子循環的直線排列再轉換為環狀排列。 (四) 若 f 質因數的個數大於 2，則子循環直線排列數可用文氏圖幫忙分析。

對本研究之啟發	直線排列、環狀排列、公因數、公倍數

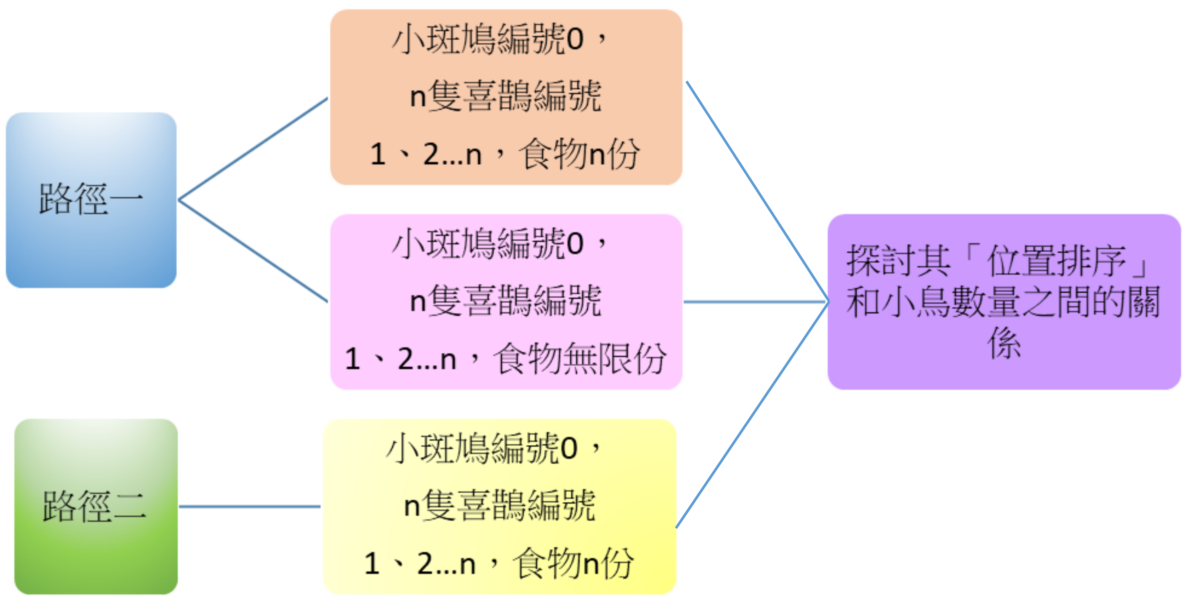
文獻名稱	中華民國第五十七屆高級中等學校組科學展覽會作品 『閃爍燈之循環性質研究與探討』
文獻研究內容摘要	探討： 一、探討 n 個燈直線排列的循環性質。 二、探討 n 個燈環狀排列的循環性質。 三、探討 m×n 個燈矩陣排列的循環性質。 四、探討 m×n×l 個燈三維陣列排列的循環性質。 五、改變操作規則，並探討各種排列之循環性質。 結論： 環狀的「循環」性 質。
對本研究之啟發	環狀排列

貳、研究設備及器材

紀錄單、計算機、紙、筆、電腦、Microsoft Office Word、Canva 軟體

參、研究過程與方法

一、研究架構 (圖作者自繪)



二、數學概念和名詞定義

(一) 環狀排列：沿著圓周排列的排列方式。

(二) 同餘(mod)：數論中的一種等價關係，當兩個整數除以同一個正整數，若得相同餘數，則二整數同餘。

(三) 食編號順序：a→b→c→d→...，意指從編號 a 開始沿著圓周數的第 a 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥 b，再沿著圓周數的第 b 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥 c，以此類推。

(四) $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$、$SS_n = \sum_{\substack{k=1 \\ i=k+1}}^{n-1} (a_k - a_i) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_n$。

(五) $S(a_x, a_y) = \sum_{k=x}^{y} k = a_x + ... + a_y$，$SS(a_x, a_y) = \sum_{\substack{k=x \\ i=k+1}}^{y-1} (a_k - a_i) = a_x - a_{x+1} + a_{x+2} - ...a_y$。

三、餵食路徑方式

路徑一：由編號 k 的喜鵲鳥出發，下一隻被餵食的喜鵲鳥是由這隻喜鵲鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻。然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵到斑鳩，食量大的斑鳩就會馬上把所有食物吃光。

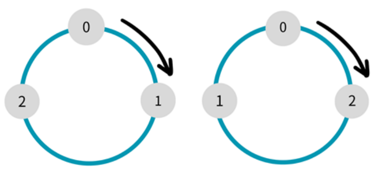
路徑二：由編號 k 的喜鵲鳥出發，下一隻被餵食的喜鵲鳥是由這隻喜鵲鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻。然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始逆時針沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如果餵到斑鳩，食量大的斑鳩就會馬上把所有食物吃光。

四、方法(一)直接排序

題型(一) 餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物 n 份，

(一) 問題 1-1：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物兩份

1. 數字 0、1、2 環狀排列，共有 $\frac{3!}{3} = 2$ 種，沿著圓周排序，如圖所示。(圖作者自繪)



2.

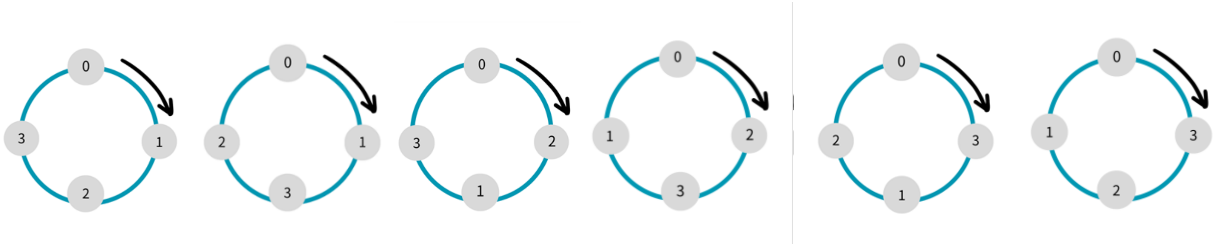
圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
012	1	1→ 2→1⋯	1 號-1 份、2 號-1 份	

	2	2→1→2⋯	1 號-1 份、2 號-1 份	
021	2	2→0	2 號-1 份、小斑鳩 1 份	1 號
	1	1→0	1 號-1 份、小斑鳩 1 份	2 號

2. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為 012，無論起始數字多少，兩隻喜鵲皆能各吃到一次，小斑鳩沒吃到且不會走到編號 0 小斑鳩的位置。

(二) 問題 1-2：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3，食物三份

1. 數字 0、1、2、3 環狀排列，共有 $\frac{4!}{4}=6$ 種，沿著圓周排序，如圖所示。(圖作者自繪)

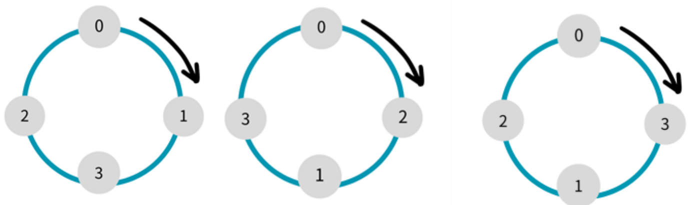


2.

圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
0123	1	1→ 2→0	1 號-1 份、2 號-1 份 小斑鳩 1 份	3 號
	2	2→0	2 號-1 份、小斑鳩 2 份	1 號、3 號
	3	3→2→0	3 號-1 份、2 號-1 份 小斑鳩 1 份	1 號
0132	1	1→3→1→3	1 號-2 份、3 號 1 份	2 號
	2	2→1→3→1	1 號-1 份、2 號-1 份 3 號 1 份	
	3	3→1→3→1	1 號-1 份、3 號 2 份	2 號
0213	1	1→3→1→3	1 號-2 份、3 號 1 份	2 號
	2	2→3→1→3	1 號-1 份、2 號-1 份	

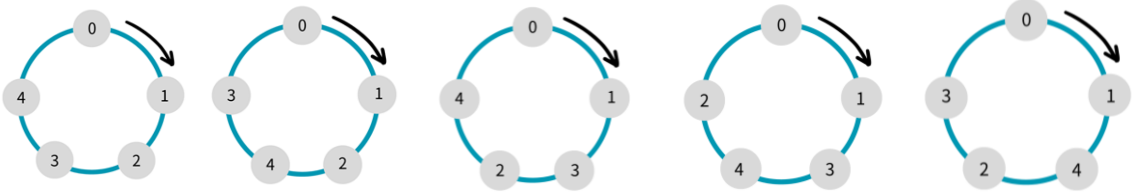
			3 號 1 份	
	3	3→1→3→1	1 號-1 份、3 號 2 份	2 號
0231	1	1→0	1 號-1 份、小斑鳩 2 份	2 號、3 號
	2	2→1→0	1 號-1 份、2 號 -1 份 小斑鳩 1 份	3 號
	3	3→2→1→0	1 號-1 份、2 號 -1 份 3 號 1 份	
0312	1	1→ 2→3→0	1 號-1 份、2 號 -1 份 3 號 1 份	
	2	2→3→0	2 號-1 份、3 號 -1 份 小斑鳩 1 份	1 號
	3	3→0	3 號-1 份、小斑鳩 2 份	1 號、2 號
0321	1	1→0	1 號-1 份、小斑鳩 2 份	2 號、3 號
	2	2→0	2 號-1 份、小斑鳩 2 份	1 號、3 號
	3	3→0	3 號-1 份、小斑鳩 2 份	1 號、2 號

3. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，圓周順時針編號排序為 0132、0213，起始數字為 1 和 3 時，下一個接續走到的數字為 3 和 1，而 1+3=4，4 即是喜鵲 3 隻和小斑鳩 1 隻的數量和，亦即是所有位置的總數，所以能吃到食物的只有編號 1 號和 3 號的喜鵲，如果繼續接續餵食，則會一直在編號 1、3 之間循環。
4. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，圓周順時針編號排序為 0312 起始數字為 1 時，喜鵲皆能吃到食物，若繼續走，則會走到數字編號 0 號小斑鳩的位置。(圖作者自繪)



(三) 問題 1-3：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物四份

3. 數字 0、1、2、3、4 環狀排列，共有 $\frac{5!}{5}=24$ 種，沿著圓周排序，取其 5 種討論。(圖作者自繪)



1. 24 種排列方式，取其四種排列如下

圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
01234	1	1→ 2→4→3→1	1 號-1 份、2 號-1 份 3 號-1 份、4 號-1 份	
	2	2→4→3→1→2	1 號-1 份、2 號-1 份 3 號-1 份、4 號-1 份	
	3	3→1→2→4→3	1 號-1 份、2 號-1 份 3 號-1 份、4 號-1 份	
	4	4→3→1→2→4	1 號-1 份、2 號-1 份 3 號-1 份、4 號-1 份	

圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
01243	1	1→ 2→3→2→3	1 號-1 份、2 號-2 份 3 號-1 份	4 號
	2	2→3→2→3→2	2 號-2 份、3 號-2 份	1 號、4 號
	3	3→2→3→2→3	2 號-2 份、3 號-2 份	1 號、4 號
	4	4→2→3→2→3	2 號-2 份、3 號-1 份 4 號-1 份	1 號

圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
01324	1	1→ 3→0	1 號-1 份、3 號-1 份 小斑鳩 2 份	2 號、4 號
	2	2→0	2 號-1 份 小斑鳩 3 份	1 號、3 號、 4 號

	3	3→0	3 號-2 份 小斑鳩 3 份	1 號、2 號、 4 號
	4	4→2→0	2 號-1 份、4 號-1 份 小斑鳩 2 份	1 號、3 號

圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
01342	1	1→ 3→0	1 號-1 份、3 號-1 份 小斑鳩 2 份	2 號、4 號
	2	2→1→ 3→0	1 號-1 份、2 號-1 份 3 號-1 份、小斑鳩 1 份	4 號
	3	3→0	3 號-1 份 小斑鳩 3 份	1 號、2 號、 4 號
	4	4→3→0	3 號-1 份、4 號-1 份 小斑鳩 2 份	1 號、2 號

圓周順時針編號排列	起始編號	餵食編號順序	能吃到食物的喜鵲編號以及各幾份食物	無法吃到食物的喜鵲編號
01423	1	1→4→1→4→1	1 號-2 份、4 號-2 份	2 號、3 號
	2	2→0	2 號-1 份 小斑鳩 3 份	1 號、3 號、 4 號
	3	3→4→1→4→1	1 號-1 份、3 號-1 份 4 號-2 份	2 號
	4	4→1→4→1→4	1 號-1 份、4 號-1 份	2 號、3 號

2. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為 01234 時，無論從幾號開始餵食，所有喜鵲皆能吃到食物，小斑鳩沒吃到且不會走到編號 0 小斑鳩的位置。如果繼續接續餵食，則會回到初始餵食的號碼，然後重複循環。
3. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為 01243 時，無論從幾號開始餵食，當連續餵食的喜鵲編號相加和等於 5 時，只有這兩隻喜鵲可以重複吃到食物。
   例如 4→$\underbrace{2\rightarrow 3}_{5}$→2→3

方法(一)直接排序-小結:

1. 我們發現當喜鵲數量是 2、4 隻時，圓周順時針編號排列 012、01234，不管起始編號是幾號，喜鵲每一隻皆能吃到食物，而且不會走到小斑鳩的位置。
2. 當喜鵲數量是 3 隻時，圓周順時針編號排列 0231 起始編號是 3 號，以及圓周順時針編號排列 0312 起始編號是 1 號，每一隻喜鵲吃完所有食物後，最後會走到小斑鳩 0 的位置。
3. 當喜鵲數量是 n 隻，小斑鳩 1 隻，食物 n 份，當連續餵食的喜鵲編號相加和等於 n+1 時，只有這兩隻喜鵲可以重複吃到食物。

五、方法(二)同餘

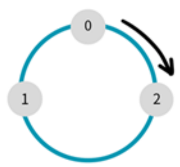
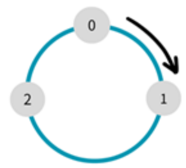
因為當喜鵲數量變多時，方法(一)直接排序則顯得冗長，我們藉由方法(一)發現，圓周排序喜鵲編號，當所有喜鵲皆能成功吃到食物時，餵食順序走的步數即是所有喜鵲編號相加之和。

題型(一)餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物 n 份

條件:每一隻喜鵲吃到食物 1 份，接著走到斑鳩。

(一) 問題 1-1：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物兩份

我們起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 1 個位置或 2 個位置開始。(圖作者自繪)

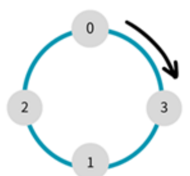
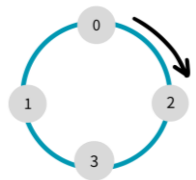
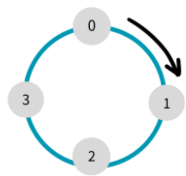
	
餵食編號順序: 1→0 或 2→0 無法所有喜鵲吃到食物。	餵食編號順序: 2→1→或 1→2 順序編號 2+1=3，相加和等於圓周位置數量， 所以餵食順序會到起始點位置，形成循環。

小結:

1. 二隻喜鵲和一隻小斑鳩共三隻，代表圓周位置數為 3，喜鵲編號號碼相加 1+2=3，$3\equiv 0 \pmod 3$ ，**無法回到小斑鳩 0 的位置**。
2. 當餵食順序 a→b
   a+b=3， $3\equiv 0 \pmod 3$ ，餵食順序回到起始點。

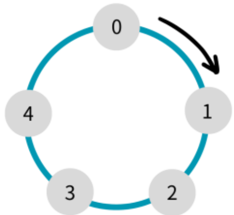
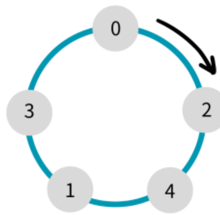
(二) 問題 1-2：小斑鳩編號 0，三隻喜鵲編號 1、2、3，食物三份

圓周位置數為 4，喜鵲編號號碼相加 1+2+3=6， $6\equiv 2 \pmod 4$ ，因此起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 2 個位置**開始。(圖作者自繪)

		
餵食編號順序: 1→2→3→0 $1+2\neq 2k$，$2+3\neq 2k$， $1+2+3\neq 4k$， 所有喜鵲吃完食物， 繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 3→2→1→0 $3+2\neq 2k$，$2+1\neq 2k$， $3+2+1\neq 4k$， 所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 2→0 2=2k，4÷2=2， 編號 2 號的喜鵲不能當起始號碼。

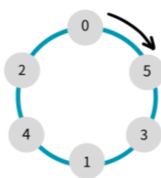
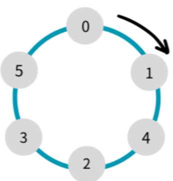
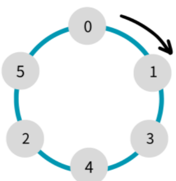
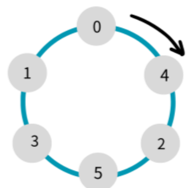
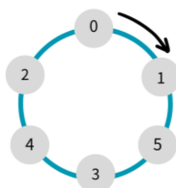
小結:
1. 三隻喜鵲和一隻小斑鳩共四隻，代表圓周位置數為 4，喜鵲編號號碼相加 1+2+3=6，$6\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ，不會回到起始點位置。
2. 當餵食順序 a→b→c→0
$6\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ ，起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 2 個位置**開始，
滿足 $a+b\neq 2k$，$b+c\neq 2k$，$a+b+c\neq 4k$，
能存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。

(三) 問題 1-3：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物四份 (圖作者自繪)

	
1. 圓周位置數為 5，喜鵲編號號碼相加 2+4+3+1=10， 每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下: 餵食編號順序: 2→4→3→1	2. 圓周位置數為 5，喜鵲編號號碼相加 4+2+1+3=10， 每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下: 餵食編號順序: 4→2→1→3

小結:
四隻喜鵲和一隻小斑鳩共五隻，代表圓周位置數為 5，喜鵲編號號碼相加 1+2+3+4=10，$10\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)$ 每隻喜鵲吃完 1 份食物後，會回到起始點，無法回到小斑鳩 0 的位置。

(四) 問題 1-4：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物五份
圓周位置數為 6，喜鵲編號號碼相加 1+2+3+4+5=15，$15\equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$ ，因此起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 3 個位置**開始。
每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下，當所有喜鵲吃完食物 1 份後，不會回到起始點位置。
當餵食順序 a→b→c→d→e→0 (圖作者自繪)

餵食編號順序: $1\to4\to3\to2\to5\to0$ 所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: $2\to5\to3\to1\to4\to0$ 所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: $4\to1\to3\to5\to2\to0$ 所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: $5\to2\to3\to4\to1\to0$ 所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序:$3\to0$ $3=3k$， $6\div2=3$， 編號 3 號的喜鵲不能當起始號碼。

小結:

1. 五隻喜鵲和一隻小斑鳩共六隻，代表圓周位置數為 6，喜鵲編號號碼相加 $1+2+3+4+5=15$，$15\equiv3(\bmod 6)$，每一隻喜鵲吃完 1 份食物後，不會回到起始點位置。
2. 當餵食順序 $a\to b\to c\to d\to e\to 0$ 滿足 $a+b\neq3k$，$b+c\neq3k$，$a+b+c\neq3k$、$a+b+c+d\neq3k$、$a+b+c+d+e\neq6k$、 $b+c+d\neq3k$、$c+d\neq3k\cdots$，任意 n 個連續編號相加之和$\neq3k$ 的條件，能存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。
3. 餵食編號順序: $1\to4\to3\to2\to5\to0$，餵食編號順序: $5\to2\to3\to4\to1\to0$ 兩者剛好是互逆關係。
   餵食編號順序: $2\to5\to3\to1\to4\to0$，餵食編號順序: $4\to1\to3\to5\to2\to0$ 兩者剛好是互逆關係。

六、題型(二) 餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物無限多份

(一) 問題 2-1：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物無限份
問題 2-3：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物無限份

1. 餵食編號順序: $\boxed{2\to1}\to\boxed{2\to1}\cdots$
   餵食編號順序:$\boxed{2\to4\to3\to1}\to\boxed{2\to4\to3\to1}\to2\to\cdots\cdots$
   餵食編號順序: $\boxed{4\to2\to1\to3}\to\boxed{4\to2\to1\to3}\to4\to\cdots\cdots$
   由方法(二)同餘法得知，當喜鵲數量 n 隻，編號 1、2、3、⋯、n，$S_n=1+2+3+\cdots+n$，
   當 $S_n\equiv0(\bmod n+1)$ 時，若每一隻喜鵲皆能吃到食物之下，餵食順序會回到起始點，無法停留在編號 0 的小斑鳩位置，因而造成無限循環。

(二) 問題 2-1：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物無限份
餵食編號順序:$\boxed{1\to2}\to1\to2\cdots$
餵食編號順序:$\boxed{2\to1}\to2\to1\cdots$
問題 2-2：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3，食物無限份
餵食編號順序:$\boxed{1\to3}\to1\to3\cdots$
餵食編號順序:$\boxed{3\to1}\to3\to1\cdots$
問題 2-3：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物無限份
餵食編號順序: $1\to\boxed{2\to3}\to2\to3\cdots$
餵食編號順序: $4\to\boxed{2\to3}\to2\to3\cdots$

問題 2-4：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物無限份

餵食編號順序: $\boxed{1\rightarrow 5}\rightarrow 1\rightarrow 5\cdots$

餵食編號順序: $\boxed{2\rightarrow 4}\rightarrow 2\rightarrow 4\cdots$

餵食編號順序: $\boxed{2\rightarrow 3\rightarrow 1}\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 1\cdots$

餵食編號順序: $\boxed{4\rightarrow 2}\rightarrow 4\rightarrow 2\cdots$

餵食編號順序: $\boxed{5\rightarrow 1}\rightarrow 5\rightarrow 1\cdots$

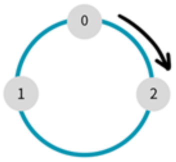
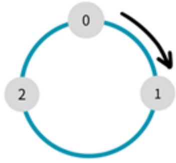
1. 由方法(一)和方法(二)得知，當喜鵲數量 n 隻，編號 1、2、3、…、n，$S(a_x,a_y)=a_x+a_{x+1}+\cdots+a_y$，當 $S(a_x,a_y)=n+1$ 時，餵食順序會回到編號 a_x，然後一直在=a_x、$a_{x+1}\cdots$、a_y 之間無限循環，若食物為有限個，則可得知那些喜鵲可以吃到最多食物，或是如何給最多喜鵲吃到食物。

七、題型(三)餵食方式路徑二，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物 n 份

條件:每一隻喜鵲吃到食物 1 份，接著走到斑鳩。

(一) 問題 3-1：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物兩份

因此起始點從小斑鳩逆時針方向往前 1 個位置或 2 個位置開始。(圖作者自繪)

	
餵食編號順序: $1\rightarrow 0$ 或 $2\rightarrow 0$ 無法所有喜鵲吃到食物。	餵食編號順序: $2\rightarrow 1\rightarrow 0$ 或 $1\rightarrow 2\rightarrow 0$ 順序編號 2-1=1，或 1-2=-1 回到編號 0 小斑鳩位置。

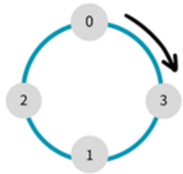
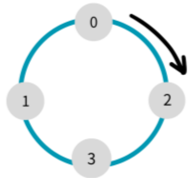
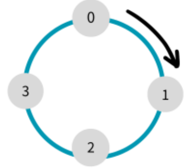
小結:

1. 二隻喜鵲和一隻小斑鳩共三隻，代表圓周位置數為 3，喜鵲編號號碼相加減 2-1=1 或 1-2=-1，回到小斑鳩 0 的位置。
2. 當餵食順序 $a\rightarrow b$
   $a-b=\pm 1$ 時，餵食順序回到小斑鳩 0 的位置。

(二) 問題 3-2：小斑鳩編號 0，三隻喜鵲編號 1、2、3，食物三份

圓周位置數為 4，順時針與逆時針交替，喜鵲編號號碼相加 1-2+3=2，或 3-2+1=2

$2\equiv 2 \pmod 4$，因此起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 2 個位置**開始，並且起始數字為 1 或 3。而喜鵲編號號碼相加 2-1+3=4，$4\equiv 0 \pmod 4$，或 2-3+1=0，$0\equiv 0 \pmod 4$，2 不能當起始數字。(圖作者自繪)

		
餵食編號順序: 1→2→3→0 $1-2\neq 2k$，$-2+3\neq 2k$， $1-2+3\neq 4k$，1-2+3=2， 所有喜鵲吃完食物後，最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 3→2→1→0 $3-2\neq 2k$，$-2+1\neq 2k$， $3-2+1\neq 4k$，3-2+1=2， 所有喜鵲吃完食物後，最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 2→0 2=2k，$4\div 2=2$， 編號 2 號的喜鵲不能當起始號碼。

小結:

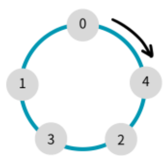
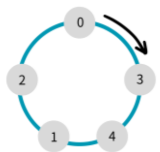
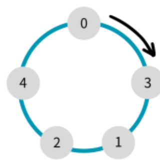
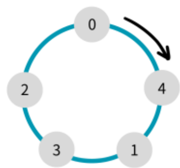
1. 三隻喜鵲和一隻小斑鳩共四隻，代表圓周位置數為 4，喜鵲編號號碼相加 1-2+3=2，$2\equiv 2 \pmod 4$ ，不會回到起始點位置，但 1-2+3=2，會回到小斑鳩位置。
2. 當餵食順序 a→b→c→0，a-b+c=k， $k\equiv 2 \pmod 4$ ，起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 2 個位置**開始，滿足 $a-b\neq 2k$，$-b+c\neq 2k$，$a+b+c\neq 4k$，a+b+c=2，
存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。

(三) 問題 3-3：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物四份

圓周位置數為 5，順時針與逆時針交替。

例如:喜鵲編號號碼相加 1-2+3-4=-2，$-2\equiv -2 \pmod 5$ ，起始點從小斑鳩依**順時針方向往前 2 個位置**開始，起始數字為 1，存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。

例如:喜鵲編號號碼相加 2-4+1-3=-4，$-4\equiv -4 \pmod 5$ ，起始點從小斑鳩依**順時針方向往前 4 個位置**開始，起始數字為 2，存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。(圖作者自繪)

圓周位置數為 5，喜鵲編號號碼相加 2-1+3-4=0，4-3+1-2=0， 每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下，回到起始點，不會留在編號 0 的小斑鳩位置。 餵食編號順序: 2→1→3→4→2 4→3→1→2→4	圓周位置數為 5，喜鵲編號號碼相加 1-2+3-4=-2， 每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下，最後走到編號 0 的小斑鳩。 餵食編號順序: 1→2→3→4→ 0	圓周位置數為 5，喜鵲編號號碼相加 2-4+1-3=-4， 每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下，最後走到編號 0 的小斑鳩。 餵食編號順序: 2→4→1→3→ 0

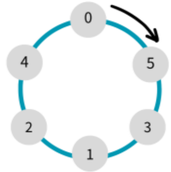
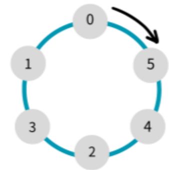
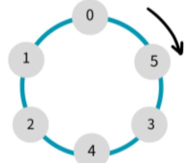
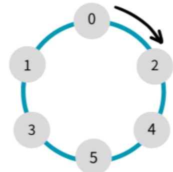
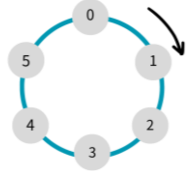
小結:四隻喜鵲和一隻小斑鳩共五隻，代表圓周位置數為 5，

1. 喜鵲編號號碼相加減後等於 0，每隻喜鵲吃完 1 份食物後，會回到起始點，然後無限循環，無法回到小斑鳩 0 的位置。
2. 喜鵲編號號碼相加 a-b+c-d=-2，$-2 \equiv -2 \pmod 5$ ，起始點從小斑鳩依**順時針方向往前 2 個位置**開始。
   餵食順序 a→b→c→d→0
   滿足 a-b≠-2，a-b≠3，-b+c≠0，a-b+c≠5k，a-b+c≠3，a-b+c≠-2 的條件。
   存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。
3. 喜鵲編號號碼相加 a-b+c-d=-4，$-4 \equiv -4 \pmod 5$ ，起始點從小斑鳩依**順時針方向往前 4 個位置**開始。
   當餵食順序 a→b→c→d→0
   滿足 a-b≠1，a-b≠-4，-b+c≠0，a-b+c≠5k，a-b+c≠1，a-b+c≠-4 的條件的條件。
   存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。

(四) 問題 3-4：小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物五份

順時針正數	逆時針負數	相加減之和	起始點位置	符合條件的餵食順序
1、2、3	4、5	-3	小斑鳩依順時針方向往前 3 個位置開始	無
1、2、4	3、5	-1	小斑鳩依順時針方向往前 1 個位置開始	134520、254310 431520、251340
1、2、5	3、4	1	小斑鳩依逆時針方向往前 1 個位置開始	無
1、3、4	2、5	1	小斑鳩依逆時針方向往前 1 個位置開始	無
1、3、5	2、4	3	小斑鳩依逆時針方向往前 3 個位置開始	123450、543210
1、4、5	2、3	5	小斑鳩依逆時針方向往前 5 個位置開始	135240、425310
2、3、4	1、5	3	小斑鳩依逆時針方向往前 3 個位置開始	213540、453120
2、3、5	1、4	5	小斑鳩依逆時針方向往前 5 個位置開始	無
2、4、5	1、3	7	小斑鳩依逆時針方向往前 1 個位置開始	235140、415320 532140、412350
3、4、5	1、2	9	小斑鳩依逆時針方向往前 3 個位置開始	無

圓周位置數為 6，喜鵲編號號碼相加減為 s， $s \equiv k(\bmod 6)$ ，k>0 時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 k 個位置開始，k<0 時起始點從小斑鳩依順時針方向往前 k 個位置開始。
當餵食順序 a→b→c→d→e→0
滿足 a-b≠6+k，a-b≠k，-b+c≠0，a-b+c≠6k，a-b+c≠6+k，a-b+c≠k 的條件。
例如: (圖作者自繪)

				
餵食編號順序: 1→2→3→4→5→0 ，1-2+3-4+5=3，所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 2→1→3→5→4→0 ，2-1+3-5+4=3，所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 4→5→3→1→2→0 ，4-5+3-1+2=3，所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 5→4→3→2→1→0 ，5-4+3-2+1=3，所有喜鵲吃完食物，繞完一圓周後最後停留在小斑鳩位置。	餵食編號順序: 3→0 3=3k，6÷2=3，編號 3 號的喜鵲不能當起始號碼。

小結:

1. 五隻喜鵲和一隻小斑鳩共六隻，代表圓周位置數為 6，喜鵲編號號碼相加減後等於 S，S≠6k，每一隻喜鵲吃完 1 份食物後，不會回到起始點位置。
2. 圓周位置數為 6，喜鵲編號號碼相加減為 s， $s \equiv k(\bmod 6)$ ，
   k>0 時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 k 個位置開始，
   k<0 時，起始點從小斑鳩依順時針方向往前 k 個位置開始。
   當餵食順序 a→b→c→d→e→0
   滿足 a-b≠6+k，a-b≠k，-b+c≠0，a-b+c≠6+k，a-b+c≠k、a-b+c-d≠6+k，a-b+c-d≠k、a-b+c-d+e≠6k，的條件。
   存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物 1 份，並且最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。
3. 餵食編號順序會存在互逆關係
   例如餵食編號順序: 1→2→3→4→5→0 和餵食編號順序: 5→4→3→2→1→0。
   例如餵食編號順序: 2→1→3→5→4→0 和餵食編號順序: 4→5→3→1→2→0。

肆、研究結果

一、 題型(一) 餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物 n 份，所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。

餵食方式路徑一：選一隻喜鵲編號 k，那麼下一隻被餵食的喜鵲是由這隻編號 k 開始，順時 針接著沿著圓周數的第 k 之喜鵲，然後接續這隻喜鵲編號 r，再由這隻編號 r 開

始，順時針接著沿著圓周數的第 r 之喜鵲，以此類推⋯

(一) **n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，n=2k 每一隻喜鵲皆能吃到食物 1 份**

> 性質 1：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、...、a_n
> 當 n=2k 時，當每一隻喜鵲皆餵食一次後，餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號 0 的小斑鳩位置。

<<證明>>

小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、...、a_n

當 n=2k 時

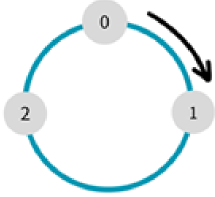
$$S_n = 0+1+2+3+...+2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

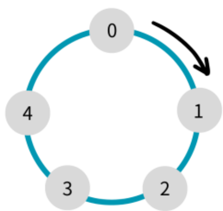
$$S_n = 0+1+2+3+...+2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \equiv 0(\bmod 2k+1)$$

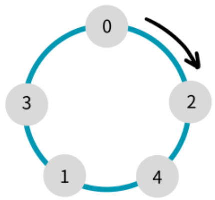
所以會繞圓周 t 圈，停留在初始位置。

故得證。

例如：(圖作者自繪)

小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2，食物二份		
餵食編號順序	圖示	圓周順時針編號排序
2→1→2→1⋯		201

小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4，食物四份		
餵食編號順序	圖示	圓周順時針編號排序
2→4→3→1→2→4→3→1→2→⋯⋯		23401

4→2→1→3→4→2→1→3→4→……		41302

(二) **n 隻喜鵲編號 1、2…n，n=2k-1 每一隻喜鵲皆能吃到食物 1 份**

斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當喜鵲編號 n=2k-1 時，必須滿足下列兩個條件

條件一：$a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv \frac{n+1}{2} (mod\, n+1)$

亦即 $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv k (mod\, 2\, k)$

條件二：$a_j + a_{j+1} + \ldots + a_p \not\equiv 0 (mod\, n+1)$，$j = 1$、$2$、…、$n-1$，$p > j$，不可以 $j = 1$，且 $p = n$

⇒ 則存在排列順序，起始點從小斑鳩依$\boxed{\text{逆時針方向往前 k 個位置}}$開始，每一隻喜鵲皆能餵食 1 份，最後停留在小斑鳩位置。

性質 2：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k-1 時，當每一隻喜鵲皆餵食一次後，則：

(1)餵食順序最後不會停留在起始位置。

(2)餵食完最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。則起始點從小斑鳩依$\boxed{\text{逆時針方向往前 k 個位置}}$開始。

<<證明>>

小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k-1 時

$$S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 2k - 1 = \frac{2k(2k-1)}{2} = k(2k-1)$$

$$S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 2k - 1 = \frac{2k(2k-1)}{2} = k(2k-1) \equiv k(\text{mod } 2k)$$

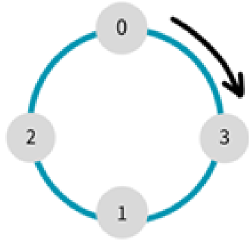
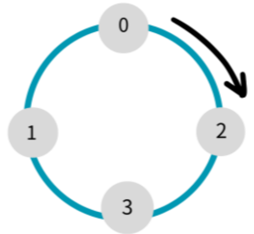
所以會繞圓周 t 圈，不會停留在初始位置。

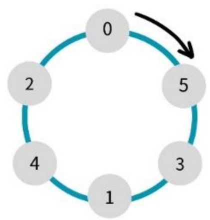
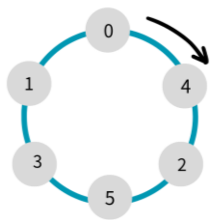
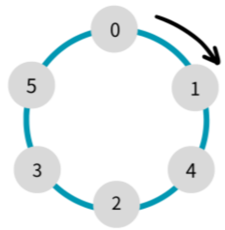
$$\because S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 2k - 1 = \frac{2k(2k-1)}{2} = k(2k-1) \equiv k(\text{mod } 2k)$$

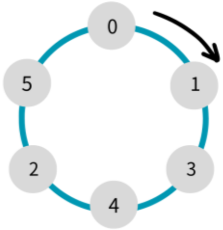
又 $\frac{2k-1+1}{2} = k$

∴起始點從小斑鳩依$\boxed{\text{逆時針方向往前 k 個位置}}$開始，故得證。

例如：(圖作者自繪)

小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3，食物三份		
餵食編號順序	圖示	圓周順時針編號排序
1→2→3→0		1203
3→2→1→0		3102

小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物五份		
餵食編號順序	圖示	圓周順時針編號排序
1→4→3→2→5→0		142053
5→2→3→4→1→0		531042
2→5→3→1→4→0		235014

4→1→3→5→2→0		425013

性質 3：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n 當 n=2k-1 時， 若餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n 為符合條件之數列， 則餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

<<證明>>

小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n ，n=2k-1

此數列滿足下列兩個條件

條件一：$a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv \frac{n+1}{2} (mod\, n+1)$

亦即 $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv k (mod\, 2k)$，$i = 1$、$2$、…、$n-1$，

條件二：$a_j + a_{j+1} + \ldots + a_p \not\equiv 0 (mod\, n+1)$， $j = 1$、2、…、$n-1$， $p > j$ ，不可以 $j = 1$，且 $p = n$

$\because a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

→ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv \dfrac{n+1}{2} (\mathrm{mod}\, n+1)$

if $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv \frac{n+1}{2} (mod\, n+1)$

then $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_n \not\equiv \frac{n+1}{2} (mod\, n+1)$

而對於所有 i 均成立

→ 數列 a_n、a_{n-1}、…、a_1 符合條件一、條件二

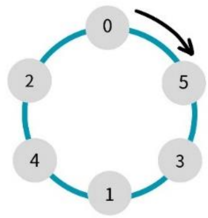
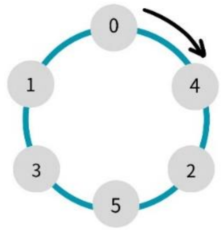
對於數列 a_n、a_{n-1}、…、a_1 可任取 a_m

而 $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_{m-l} = a_{m-l} + a_{m-l+1} + \ldots + a_m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n+1)$

(符合 $j = m - l$ ，$k = m$)

符合條件二　故得證

例如：(圖作者自繪)

小斑鳩編號 0，二隻喜鵲編號 1、2、3、4、5，食物五份		
餵食編號順序	圖示	圓周順時針編號排序
1→4→3→2→5→0		142053
5→2→3→4→1→0		531042

二、 題型(二) 餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物無限多份，所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。

性質 4：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

$S(a_x,a_y)=a_x+...+a_y=n+1$時，餵食順序會一直在編號 a_x、…、a_y 之間無限循環

<<證明>>

小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

If $S(a_x,a_y)=a_x+...+a_y=n+1$

Then $S(a_x,a_y)=a_x+...+a_y=n+1\equiv 0(\bmod n+1)$

所以會一直繞圓周 t 圈，並一直停留在 a_x、⋯、a_y 之間循環

故得證。

三、 題型(三)餵食方式路徑二，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物 n 份，當所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。

餵食方式路徑二：由編號 k 的喜鵲鳥出發，下一隻被餵食的喜鵲鳥是由這隻喜鵲鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻。然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始逆時針沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。但是如

果餵到斑鳩，食量大的斑鳩就會馬上把所有食物吃光。

(一) **n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，n=2k 每一隻喜鵲皆能吃到食物 1 份**

斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當喜鵲編號 n 時，

$SS(a_1, a_n) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_n = s$ ， $s \equiv x(\bmod n+1)$

x>0 時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

x<0 時，起始點從小斑鳩依順時針方向往前 x 個位置開始。

餵食順序必須滿足下列條件

條件一：$SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_p \neq 0$ ， $p \leq n$

條件二：$SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_p \neq k$ ， $p \leq n$

條件三：$SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_p \neq (n+1) + k$ ， $p \leq n$

⇒ 則存在排列順序，每一隻喜鵲皆能餵食 1 份，最後停留在小斑鳩位置。

性質 5：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

n=2k 時，在每一隻喜鵲皆餵食一次條件下，

當 $SS = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_n = 0$ 時，

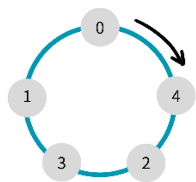
餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號 0 的小斑鳩位置。

<<證明>>

令起始點為原點，順時針為正向＋，逆時針為負向－，

當 $SS = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_n = 0$ 時，則回到原點，故得證。

(圖作者自繪)



2→ 1→3→4

性質 6：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k 時， $SS(a_1, a_n) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_n = s$ ， $s \equiv x(\bmod n+1)$

當 x>0 時，起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始， 存在符合條件之餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n 則起始點從小斑鳩依順時針方向往前 x 個位置開始， 存在符合條件之餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

<<證明>>

斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當喜鵲編號 n=2k 時，

$SS(a_1, a_n) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_n = s$ ， $s \equiv x(\bmod n+1)$

x>0 時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

條件一：$SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots a_p \neq 0$ ， $p \leq n$ 條件二：$SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_p \neq x$ ， $p \leq n$ 條件三：$SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_p \neq (\mathrm{n}+1) + x$ ， $p \leq n$

餵食順序必須滿足下列條件

$\because SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ..a_p \neq 0$ ， $p \leq n$

$\rightarrow SS(a_p, a_1) = -(a_1 - a_2 + ... + a_p) \neq 0 \cdots(1)$

$\because SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_p \neq x$ ， $p \leq n$

$\rightarrow SS(a_p, a_1) = -(a_1 - a_2 + ... + a_p) \neq -x$ ， $p \leq n \cdots(2)$

$\because SS(a_1, a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_p \neq (\mathrm{n}+1) + x$ ， $p \leq n$

$\rightarrow SS(a_1, a_p) = -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_p) \neq -[(\mathrm{n}+1) + x]$ ， $p \leq n \cdots(3)$

又 $SS(a_1, a_n) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_n = s$ ， $s \equiv x(\bmod n+1)$

$SS(a_n, a_1) = -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...a_n) = -s$ ， $-s \equiv -x(\bmod n+1)$

故則起始點從小斑鳩依順時針方向往前 x 個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

得證。

性質 7：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n 當 n=2k-1 時， $SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_n=s$ ，$s\equiv x(\mathrm{mod}\, n+1)$ 當 x>0 時，起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始， 存在符合條件之餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n 則起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始， 存在符合條件之餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

<<證明>>

斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當喜鵲編號 n=2k 時，

$SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_n=s$ ，$s\equiv x(\mathrm{mod}\, n+1)$

x>0 時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

條件一：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq 0$ ，$p\leq n$
條件二：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq x$ ，$p\leq n$
條件三：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq(\mathrm{n}+1)+x$ ，$p\leq n$

餵食順序必須滿足下列條件

$\because SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+..a_p\neq 0$ ，$p\leq n$

$\rightarrow SS(a_p，a_1)=-(a_1-a_2+...+a_p)\neq 0\cdots(1)$

$\because SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq x$ ，$p\leq n$

$\rightarrow SS(a_p，a_1)=-(a_1-a_2+...+a_p)\neq -x$ ，$p\leq n\cdots(2)$

$\because SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq(\mathrm{n}+1)+x$ ，$p\leq n$

$\rightarrow SS(a_1，a_p)=-(a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p)\neq-[(\mathrm{n}+1)+x]$， $p\leq n\cdots(3)$

又 $SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$ ， $s\equiv x(\bmod n+1)$ ，n=2k

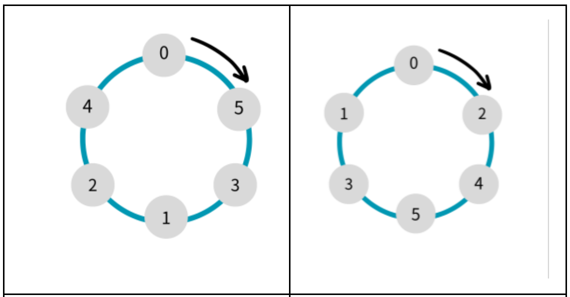
$SS(a_n，a_1)=SS(a_1、a_n)=s$ ， $s\equiv x(\bmod n+1)$

故則起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序 $a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$ 亦符合條件。

得證。

例如:



1→2→3→4→5→0	5→4→3→2→1→0

(圖作者自繪)

伍、討論

一、題型(一)：餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物 n 份，所有喜鵲都吃到食物，而小斑鳩沒吃到。當 n=7 時，我們依據滿足條件一和條件二，找到符合的餵食順序如下：

1234567	2137465	3214765	5136472	6142573	7245136
1576432	2346751	3241576	5274163	6315427	7254361
1634527	2573461	3614725	5647312	6542137	7312456
1643752	2746315	3752416	5674123	6751423	7654321

我們發現，當 n 數量變多時，即使已知道符合規則的條件，但工程仍屬浩大繁瑣，這時即要借助 C++協助解題。

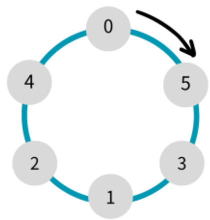
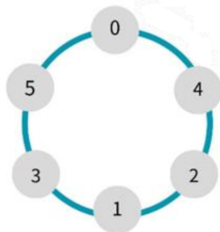
二、題型(一)：餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，食物 n 份，所有喜鵲都吃到食物，小斑鳩沒吃到，且最後走到編號 0 的斑鳩位置，整理成下表。

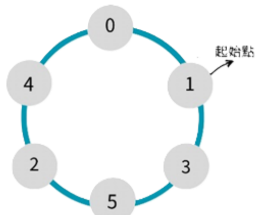
n 隻喜鵲	1 隻斑鳩+n 隻喜鵲	符合條件之餵食方法數	符合條件之餵食方法數占全部環狀排列方法之百分率
1	2	1	$\frac{1}{1}=100\%$
2	3	0	0

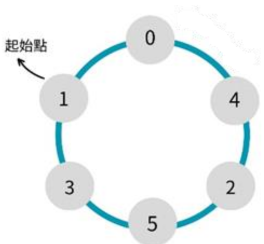
3	4	2	$\frac{2}{6} \approx 33\%$
4	5	0	0
5	6	4	$\frac{4}{120} \approx 3.33\%$
6	7	0	0
7	8	24	$\frac{24}{5040} \approx 0.48\%$
8	9	0	0
9	10	288	$\frac{288}{362880} \approx 0.079\%$

三、題型(三)：餵食方式路徑二，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物改成無限多份，每一隻喜鵲至少吃到食物 1 份，最後走到編號斑鳩位置。

(一) 無論起始位置，若餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n 為符合條件(順時針→逆時針→順時針…) 之數列，$a_1 - a_2 + \ldots$、a_n ，則另一個餵食編號順序 $-a_1 + a_2$、…、a_n 為符合條件(逆時針→順時針→逆時針…)之數列。而此兩數列的圖形，呈現鏡射對稱。如圖 (圖作者自繪) 。

餵食編號順序	餵食路徑	圖示	圓周順時針編號排序
1→2→3→4→5→0	順時針→逆時針→順時針…		124053
1→2→3→4→5→0	逆時針→順時針→逆時針…		135042

餵食編號順序	餵食路徑	圖示	圓周順時針編號排序
1→3→4→5→2→0	順時針→逆時針→順時針…		135240

1→3→4→5→2→0	逆時針→順時針→ 逆時針…		425310

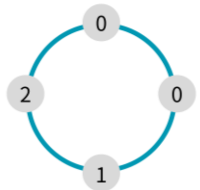
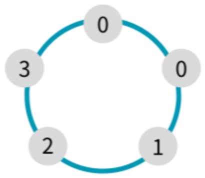
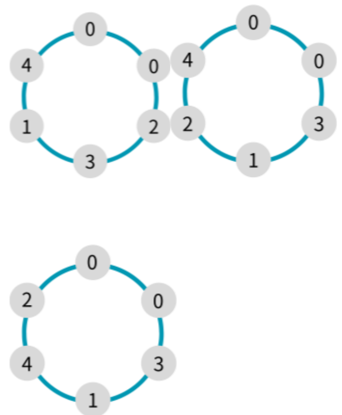
四、延伸探討一:

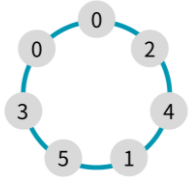
題型(四)餵食方式路徑一，兩隻小斑鳩編號 0 且位置相鄰，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物 n 份，條件:每一隻喜鵲吃到食物 1 份，最後走到其中一隻斑鳩。

由上述研究題型(一)至題型(三)中得知，

當 $\sum_{k=1}^{n} k \equiv m(\bmod n+2)$ 時，起始點即是從小斑鳩依**逆時針方向往前 m 個位置**開始。

我們找出 n 隻喜鵲，n=2~5，並考慮可旋轉方式，其滿足條件的餵食順序，整理如下表。(圖作者自繪)

n 隻 喜鵲	圓周位置數 2 隻斑鳩+n 隻喜鵲	同餘數 m $\sum_{k=1}^{n} k \equiv m(\bmod n+2)$	餵食順序	圖示
2	4	3	1→2→0	
3	5	1	3→1→2→0	
4	6	4	2 →1→4→3→0 3→4→1→2→0 1→4→3→2→0	

5	7	1	3→2→1→5→4→0	

當 $\sum_{k=1}^{n} k \equiv m(\bmod n+2)$ ， $m \neq 0$ ，代表起始點從最後停留小斑鳩的位置依逆時針方向往前 m 個位置開始，滿足 $\sum_{k=1}^{x} k \equiv p(\bmod n+2)$ ，

當(1)由左至右數第一隻編號 0 斑鳩為最後停留的小斑鳩，則 $p \neq ma$ 和 $p \neq ma+1$ 時，能有符合條件的餵食順序。

(2)由左至右數第二隻編號 0 斑鳩為最後停留的小斑鳩，則 $p \neq ma$ 和 $p \neq ma-1$ 時，能有符合條件的餵食順序。

五、延伸探討二:

題型(五)餵食方式路徑一，小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n-1，食物 n-1 份，條件: 每一隻喜鵲吃到食物 1 份後飛走，最後走到其中一隻斑鳩。

在題型(一)中斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n-1，將 1、2⋯n-1，形成數列 a_1、a_2、..、a_n

必須滿足條件一：$a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv \frac{n}{2} (mod\, n)$

令 $S_i = a_1 + a_2 + \ldots a_i$

定義數列 b_i 表示第 i 圈中經過(飛走)的喜鵲數量，
並定義符號%代表取的餘數，例如 5%2=1。

故第 j 圈對應之鳥為 $\left(a_{\left(\sum_{i=1}^{j-1} bi\right)+1}、a_{\left(\sum_{i=1}^{j-1} bi\right)+2} \ldots a_{\sum_{i=1}^{j} bi} \right)$ 取其 mod 為 $n - \sum_{i=1}^{j-1} b_i$ ，

故定義 $C_j = n - \sum_{i=1}^{j-1} b_i$ 。再定義 d_i 為第 i-1 圈繞完的餘數

$$即\begin{cases} d_j = (d_{j-1} + a_{(\sum_{i=1}^{j-1} b_u)+1} + a_{(\sum_{i=1}^{j-1} b_i)+2} \ldots a_{\sum_{i=1}^{j} b_i})\%C_j \\ d_1 = \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

(因為起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 $\frac{n}{2}$ 位置等同於有餘數 $\frac{n}{2}$)

故第 k 圈的條件一應改為 $d_k + a_{(\sum_{i=1}^{j-1} b_u)+1} + a_{(\sum_{i=1}^{j-1} b_i)+2} \ldots a_{\sum_{i=1}^{j} b_i} \equiv 0(\bmod C_k)$ 。

條件二原為：$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+j} \not\equiv 0 (mod\, n)$，因為喜鵲已飛走，不可能循環，因此一定滿足條件二。故只需要滿足條件一即可。

陸、結論

一、 結論

藉由本研究三個題型的探討，我們得到以下之定理推論和性質：

題型一：斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

依照餵食路徑一由編號 k 的喜鵲鳥出發，下一隻被餵食的喜鵲鳥是由這隻喜鵲鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻。然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。若餵到斑鳩，斑鳩會把所有食物吃光。

定理一：題型一條件下，食物 n 份，當存在排列順序，每一隻喜鵲皆能餵食 1 份，最後停留在小斑鳩位置。則：

(1) 喜鵲編號 n=2k-1，起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 k 個位置**開始。

(2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv \frac{n+1}{2} (mod\, n+1)$　　亦即$a_1 + a_2 + \ldots + a_i \not\equiv k (mod\, 2\, k)$

(3) $a_j + a_{j+1} + \ldots + a_p \not\equiv 0 (mod\, n+1)$， $j = 1$、2、…、$n-1$， $p > j$ ，不可以 $j = 1$， $p = n$

性質 1：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k 時，當每一隻喜鵲接餵食一次後，餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號 0 的小斑鳩位置。

性質 2：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k-1 時，當每一隻喜鵲接餵食一次後，則：

(1)餵食順序最後不會停留在起始位置。

(2)餵食完最後停留在編號 0 的小斑鳩位置。則起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前 k 個位置**開始。

性質 3：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k-1 時，

若餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n 為符合條件之數列，

則餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

性質 4：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、...、a_n

$S(a_x,a_y)=a_x+...+a_y=n+1$ 時，餵食順序會一直在編號 a_x、...、a_y 之間無限循環。

題型三：斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、...、a_n
依照餵食路徑一由編號 k 的喜鵲鳥出發，下一隻被餵食的喜鵲鳥是由這隻喜鵲鳥開始，順時針接著沿著圓周數的第 k 隻。然後看這隻鳥的編號是多少(比如說是 r)，再由這隻鳥開始逆時針沿著圓周數的第 r 隻鳥就是下一隻被餵食的鳥，以此類推。若餵到斑鳩，斑鳩會把所有食物吃光。

定理二：題型三條件下，斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列

a_1、a_2、...、a_n，食物 n 份，則：

(1) 當喜鵲編號 n 時，$SS(a_1, a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_n=s$，$s\equiv x(\bmod n+1)$

x>0 時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

x<0 時，起始點從小斑鳩依順時針方向往前 x 個位置開始。

(2) 餵食順序必須滿足下列條件

條件一：$SS(a_1, a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq 0$，$p\leq n$

條件二：$SS(a_1, a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq k$，$p\leq n$

條件三：$SS(a_1, a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_p\neq (\mathrm{n}+1)+k$，$p\leq n$

則存在排列順序，每一隻喜鵲皆能餵食 1 份，最後停留在小斑鳩位置

性質 5：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、...、a_n

n=2k 時，在每一隻喜鵲皆餵食一次條件下，

當 $SS=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_n=0$ 時，

餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號 0 的小斑鳩位置。

性質 6：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2⋯n，將 1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、...、a_n

當 n=2k 時，

$SS(a_1, a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_n=s$，$s\equiv x(\bmod n+1)$

當 x>0 時，起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n

則起始點從小斑鳩依順時針方向往前 x 個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

性質 7：小斑鳩編號 0，n 隻喜鵲編號 1、2…n，將 1、2…n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n

當 n=2k-1 時，

$SS(a_1, a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(\bmod n+1)$

當 x>0 時，起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n

則起始點從小斑鳩依逆時針方向往前 x 個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

定理三：題型(四)餵食方式路徑一，兩隻小斑鳩編號 0 且位置相鄰，n 隻喜鵲編號 1、2…n，食物 n 份，條件:每一隻喜鵲吃到食物 1 份，最後走到其中一隻斑鳩。

當 $\sum_{k=1}^{n} k\equiv m(\bmod n+2)$，$m\neq 0$，

代表起始點從最後停留小斑鳩的位置依**逆時針方向往前 m 個位置**開始，

滿足 $\sum_{k=1}^{x} k\equiv p(\bmod n+2)$，

則(1)由左至右數第一隻編號 0 斑鳩為最後停留的小斑鳩，則 $p\neq ma$ 和 $p\neq ma+1$ 時，能有符合條件的餵食順序。

(2)由左至右數第二隻編號 0 斑鳩為最後停留的小斑鳩，則 $p\neq ma$ 和 $p\neq ma-1$ 時，能有符合條件的餵食順序。

柒、參考資料

一、游森棚 (2023)。森棚教官的數學題－鳩佔鵲巢。科學研習期刊第 62 卷第 2 期。

二、邱自在、林宇凡(2022)。黑白有段。中華民國第 62 屆中小學科學展覽會國小組數學探究精神獎。

三、林柏均、曾愷威、潘祈睿 (2017)。閃爍燈之循環性質研究與探討。全國中小學第 57 屆科展高中組數學科第 3 名。

【評語】030406

（1）本研究源自於科學研習月刊 62-2 期中的「鳩佔鵲巢」問題，通過設計三個不同的題型來探討餵食路徑，分別研究所有喜鵲都吃到食物而小斑鳩沒吃到食物時，其「位置排序」和小鳥數量之間的關係。

（2）作者充分利用了同餘、環狀排列等數學工具，在三個不同設計題型下，均獲得了初步規律性的研究成果。建議作者能在斑鳩數一般化的情況下，多所著墨，如此可讓此作品更有其豐富性。

作品簡報

鳩佔鵲巢巧護食


－有限相連環狀排列之探討

摘要

本研究旨在探討科學研習月刊62-2期中「鳩佔鵲巢」的問題。首先小斑鳩編號是0，喜鵲編號1、2、3、4、5，沿著圓周排列，探討餵食的順序探討喜鵲n隻，當食物n份、無限多份時，以及當餵食順序為順時針、逆時針交替時，所有喜鵲都吃到食物，其「位置排序」和小鳥數量之間的數學關係。並延伸討論(1)當斑鳩二隻位置相鄰時，(2)當喜鵲吃完一份食物後即飛走時。食物n份、所有喜鵲都吃到食物，其「位置排序」和小鳥數量之間的數學關係。

壹、前言

一、研究動機

本研究源自科學研習月刊62-2期中「鳩佔鵲巢」的問題。題目摘錄如下：鳥窩裡有五隻喜鵲及斑鳩。這六隻鳥圍成一圈，斑鳩編號0，沿著圓周五隻喜鵲順時針座號為1.2.3.4.5。

喜鵲媽媽帶五份食物回來，餵食喜鵲，但是如果餵到斑鳩，食量大的斑鳩就會馬上把所有食物吃光。

「位置如何排序」才能讓喜鵲全部都吃到食物，但是斑鳩沒吃到?此問題引起我們的興趣，因此我們決定鎖定這個方向作為我們的研究主題，進行以下的研究討論。

二、研究目的

我們的研究目的如下：

題型一：餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物n份，當所有喜鵲都吃到食物，而斑鳩沒吃到。

目的一：在題型一的條件下，探討其「位置排序」和小鳥數量之間的關係。

題型二：餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物無限份，當所有喜鵲都吃到食物，而斑鳩沒吃到。

目的二：在題型二的條件下，探討其「位置排序」和小鳥數量之間的關係。

題型三：餵食方式路徑二，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物n份，當所有喜鵲都吃到食物，而斑鳩沒吃到。

目的三：在題型三的條件下，探討其「位置排序」和小鳥數量之間的關係。

參、研究過程與方法

一、名詞定義

（一）環狀排列　（二）同餘(mod)

（三）餵食編號順序

（四）$S_n=\sum_{k=0}^{n}k=0+1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$、$SS_n=\sum_{\substack{k=1\\i=k+1}}^{n-1}(a_k-a_i)=a_1-a_2+a_3-a_4+...a_n$

（五）$S(a_x,a_y)=\sum_{k=x}^{y}k=a_x+...+a_y$，$SS(a_x,a_y)=\sum_{\substack{k=x\\i=k+1}}^{y-1}(a_k-a_i)=a_x-a_{x+1}+a_{x+2}-...a_y$

二、餵食路徑方式

由編號k的喜鵲出發，下一隻被餵食的喜鵲是由這隻喜鵲開始。

路徑(一)：順時針沿圓周數的第k隻。看這隻鳥的編號是多少(比如是r)，再由這隻鳥沿圓周數的第r隻鳥就是下一隻餵食的鳥，以此類推。

路徑（二)：順時針接著沿圓周數的第k隻。看這隻鳥的編號是多少(比如是r)，再由這隻鳥開始逆時針沿圓周數的第r隻鳥就是下一隻餵食的鳥，以此類推。

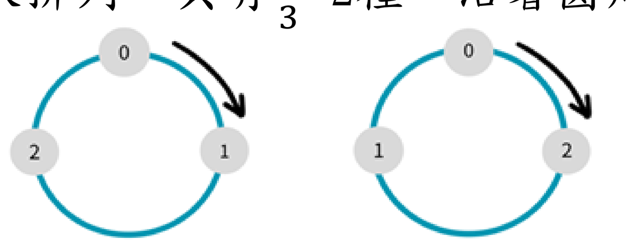
但是如果餵到斑鳩，食量大的斑鳩就會馬上把所有食物吃光。

三、方法(一)直接排序

題型(一) 餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物n份。

(一)問題1-1：斑鳩編號0，二隻喜鵲編號1、2，食物兩份

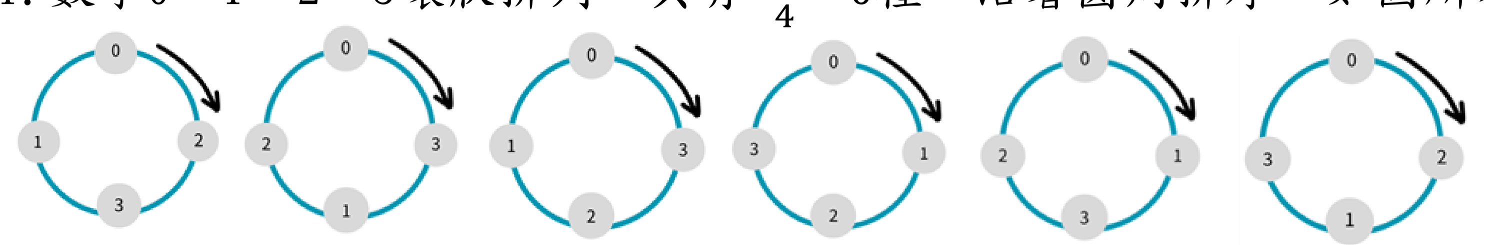
1. 數字0、1、2環狀排列，共有$\frac{3!}{3}$=2種，沿著圓周排序，如圖所示。



2. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為012，無論起始數字多少，兩隻喜鵲皆能各吃到一次，斑鳩沒吃到且不會走到編號0小斑鳩的位置。

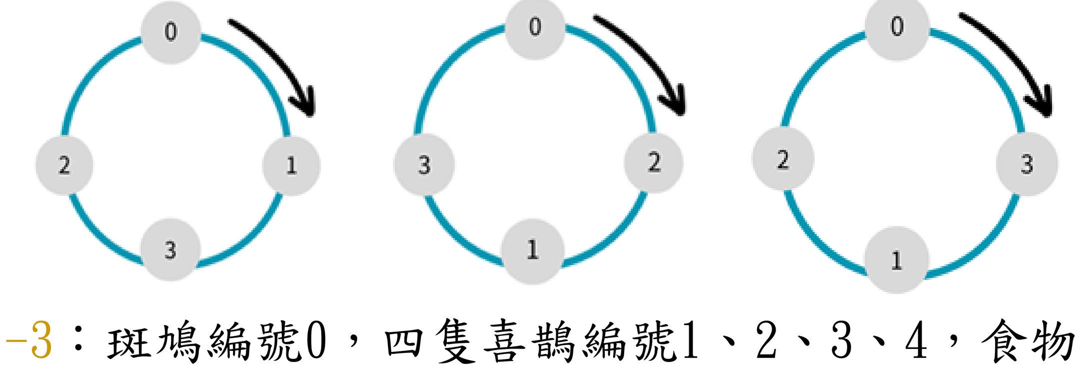
(二)問題1-2：斑鳩編號0，三隻喜鵲編號1、2、3，食物三份

1. 數字0、1、2、3環狀排列，共有$\frac{4!}{4}$=6種，沿著圓周排序，如圖所示。



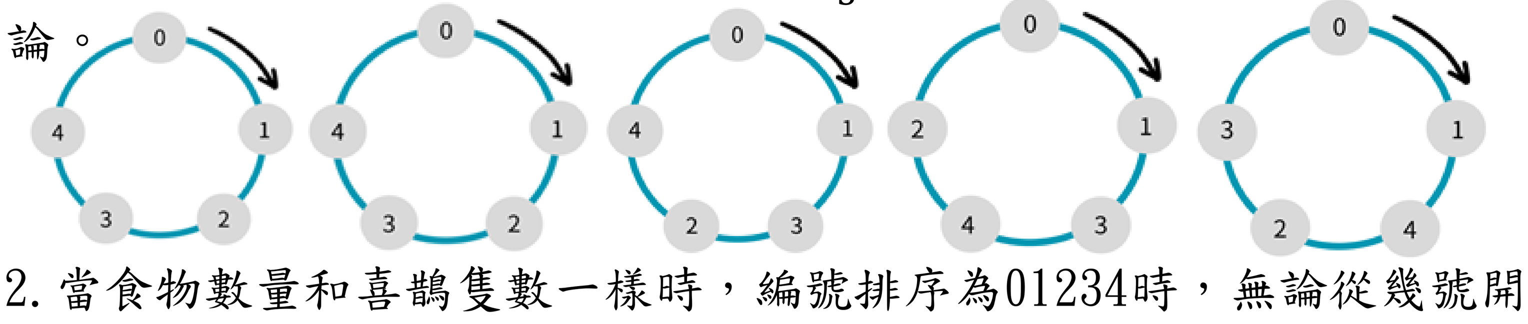
2. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為0132、0213，起始數字為1和3時，下一個接續走到的數字為3和1，而1+3=4，4即是喜鵲3隻和小斑鳩1隻的數量和，亦即是所有位置的總數，所以能吃到食物的只有編號1號和3號的喜鵲，如果繼續接續餵食，則會一直在編號1、3之間循環。

3. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為0132起始數字為3、編號排序為0312起始數字為1時，3隻喜鵲皆能吃到食物，並且若繼續走，則會走到數字編號0號斑鳩的位置。



(三)問題1-3：斑鳩編號0，四隻喜鵲編號1、2、3、4，食物四份

1. 數字0、1、2、3、4環狀排列，共有$\frac{5!}{5}$=24種，沿著圓周排序，取其5種討論。



2. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為01234時，無論從幾號開始餵食，所有喜鵲皆能吃到食物，斑鳩沒吃到且不會走到編號0斑鳩的位置。如果繼續接續餵食，則會回到初始餵食的號碼，然後重複循環。

3. 當食物數量和喜鵲隻數一樣時，編號排序為01243時，無論從幾號開始餵食，當連續餵食的喜鵲編號相加和等於5時，只有這兩隻喜鵲可以重複吃到食物。

例如 4→$\underbrace{2→3}_{5}$→2→3

方法(一)直接排序-小結：

1. 我們發現當喜鵲數量是2、4隻時，圓周順時針編號排列012、01234，不管起始編號是幾號，喜鵲每一隻皆能吃到食物，而且不會走到斑鳩的位置。
2. 當喜鵲數量是3隻時，圓周順時針編號排列0231起始編號是3號，以及圓周順時針編號排列0312起始編號是1號，每一隻喜鵲吃完所有食物後，最後會走到斑鳩0的位置。
3. 當喜鵲數量是n隻，斑鳩1隻，食物n份，當連續餵食的喜鵲編號相加和等於n+1時，只有這些喜鵲可以重複吃到食物。

四、方法(二)同餘

方法(一)直接排序則顯得冗長，我們藉由方法(一)發現，圓周排序喜鵲編號，當所有喜鵲皆能成功吃到食物時，餵食順序走的步數即是所有喜鵲編號相加之和。

題型(一)餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物n份

條件:每一隻喜鵲吃到食物1份，接著走到斑鳩。

(一)問題1-1：斑鳩編號0，二隻喜鵲編號1、2，食物兩份我們起始點從小斑鳩依逆時針方向往前1個位置或2個位置開始。

小結:

1. 二隻喜鵲和一隻斑鳩共三隻，代表圓周位置數為3，喜鵲編號號碼相加1+2=3，3 ≡ 0(mod3)，無法回到斑鳩0的位置。
2. 當餵食順序a→b
   a+b=3，3 ≡ 0(mod3)，餵食順序回到起始點。

(二)問題1-2：斑鳩編號0，三隻喜鵲編號1、2、3，食物三份，圓周位置數為4，喜鵲編號號碼相加1+2+3=6，6 ≡ 2(mod4)因此起始點從小斑鳩依逆時針方向往前2個位置開始。

小結:

1. 三隻喜鵲和一隻斑鳩共四隻，代表圓周位置數為4，喜鵲編號號碼相加1+2+3=6，6 ≡ 2(mod4)，不會回到起始點位置。
2. 當餵食順序a→b→c→0
   起始點從斑鳩依逆時針方向往前2個位置開始，滿足a+b≠2k，b+c≠2k，a+b+c≠4k，能存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的斑鳩位置。

(三)問題1-3：斑鳩編號0，四隻喜鵲編號1、2、3、4，食物四份

小結:

1. 四隻喜鵲和一隻斑鳩共五隻，代表圓周位置數為5，喜鵲編號號碼相加1+2+3+4=10，10 ≡ 0(mod5)每隻喜鵲吃完1份食物後，會回到起始點，無法回到斑鳩0的位置。

(四)問題1-4：斑鳩編號0，四隻喜鵲編號1、2、3、4、5，食物五份

圓周位置數為6，喜鵲編號號碼相加1+2+3+4+5=15，15 ≡ $3(mod6)$

因此起始點從斑鳩依逆時針方向往前3個位置開始。

每一隻喜鵲皆吃到食物的條件下，當所有喜鵲吃完食物1份後，不會回到起始點位置。

當餵食順序a→b→c→d→e→0

小結:

1. 五隻喜鵲和一隻斑鳩共六隻，代表圓周位置數為6，喜鵲編號號碼相加1+2+3+4+5=15，15 ≡ $3(mod6)$，每一隻喜鵲吃完1份食物後，不會回到起始點位置。
2. 當餵食順序a→b→c→d→e→0
   滿足a+b≠3k，b+c≠3k，a+b+c≠3k、a+b+c+d≠3k、a+b+c+d+e≠6k、b+c+d≠3k、c+d≠3k…，任意n個連續編號相加之和≠3k的條件，能存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，最後停留在編號0的斑鳩位置。
3. 餵食編號順序：1→4→3→2→5→0，餵食編序:5→2→3→4→1→0
   兩者剛好是互逆關係。
   餵食編號順序：2→5→3→1→4→0，餵食編序:4→1→3→5→2→0
   兩者剛好是互逆關係。

五、題型(二) 餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物無限多份

(一)問題2-1：斑鳩編號0，二隻喜鵲編號1、2，食物無限份

問題2-3：斑鳩編號0，四隻喜鵲編號1、2、3、4，食物無限份

1. 餵食編號順序:2→1→2→1…
   餵食編號順序：2→4→3→1→2→4→3→1→2……
   餵食編號順序：4→2→1→3→4→2→1→3→4……
   由方法(二)同餘法得知，當喜鵲數量n隻，編號1、2、…、n，S_n=1+2+3+…+n，當$S_n \equiv 0(mod n+1)$時，若每一隻喜鵲皆能吃到食物之下，餵食順序會回到起始點，無法停留在編號0的斑鳩位置，因而造成無限循環。

(二)問題2-1：斑鳩編號0，二隻喜鵲編號1、2，食物無限份

餵食編號順序：1→2→1→2…

餵食編號順序：2→1→2→1…

問題2-2：斑鳩編號0，三隻喜鵲編號1、2、3，食物無限份

餵食編號順序：1→3→1→3…

餵食編號順序：3→1→3→1…

問題2-3：斑鳩編號0，四隻喜鵲編號1、2、3、4，食物無限份

餵食編號順序：1→2→3→2→3…

餵食編號順序：4→2→3→2→3…

問題2-4：斑鳩編號0，五隻喜鵲編號1、2、3、4、5，食物無限份

餵食編號順序：1→5→1→5…

餵食編號順序：2→4→2→4…

餵食編號順序：2→3→1→2→3→1…

餵食編號順序：4→2→4→2…

餵食編號順序：5→1→5→1…

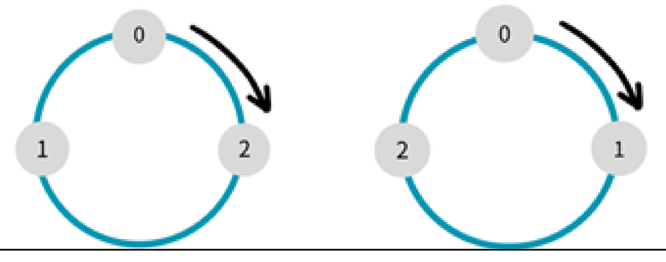
1. 由方法(一)和方法(二)得知，當喜鵲數量n隻，編號1、2、3、…、n，S(a_x,a_y)=a_x+a_{x+1}+…+a_y，當S(a_x, a_y)=n+1時，餵食順序會回到編號a_x，然後一直在a_x、a_{x+1}…、a_y之間無限循環，若食物為有限個，則可得知哪些喜鵲可以吃到最多食物，或是如何給最多喜鵲吃到食物。

六、題型(三)餵食方式路徑二，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2…n，食物n份

條件:每一隻喜鵲吃到食物1份，接著走到斑鳩。

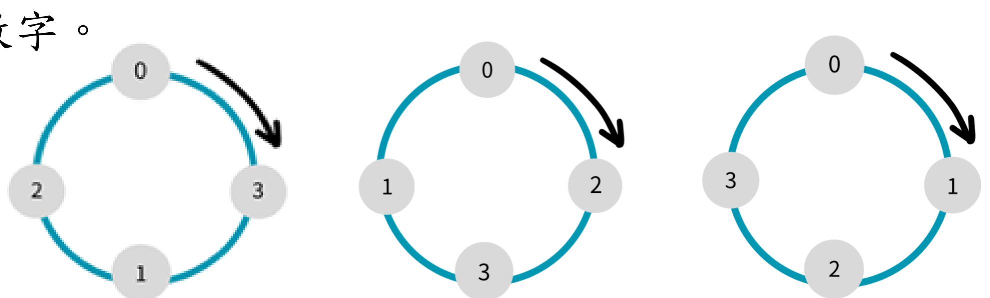
(一)問題3-1：斑鳩編號0，二隻喜鵲編號1、2，食物兩份

因此起始點從斑鳩逆時針方向往前1個位置或2個位置開始。



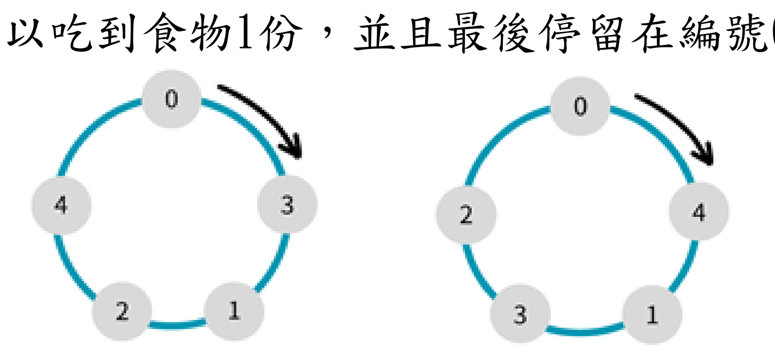
小結:
1. 二隻喜鵲和一隻斑鳩共三隻，代表圓周位置數為3，喜鵲編號碼相加減2-1=1或1-2=-1，回到斑鳩0的位置。
2. 當餵食順序a→b，a-b=±1時，餵食順序回到斑鳩0的位置。

(二)問題3-2：斑鳩編號0，三隻喜鵲編號1、2、3，食物三份圓周位置數為4，順時針與逆時針交替，喜鵲編號號碼相加1-2+3=2，或3-2+1=2，$2 \equiv 2(mod4)$，因此起始點從斑鳩依逆時針方向往前2個位置開始，並且起始數字為1或3。而喜鵲編號號碼相加2-1+3=4，$4 \equiv 0(mod4)$，或2-3+1=0，$0 \equiv 0(mod4)$，2不能當起始數字。



小結:
1. 三隻喜鵲和一隻斑鳩共四隻，代表圓周位置數為4，喜鵲編號號碼相加1-2+3=2，$2 \equiv 2(mod4)$，不會回到起始點位置，但1-2+3=2，會回到斑鳩位置。
2. 當餵食順序a→b→c→0，a-b+c=k，k≡ $2(mod4)$，起始點從斑鳩依逆時針方向往前2個位置開始，滿足a-b≠2k，-b+c≠2k，a+b+c≠4k，a+b+c=2，存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的斑鳩位置。

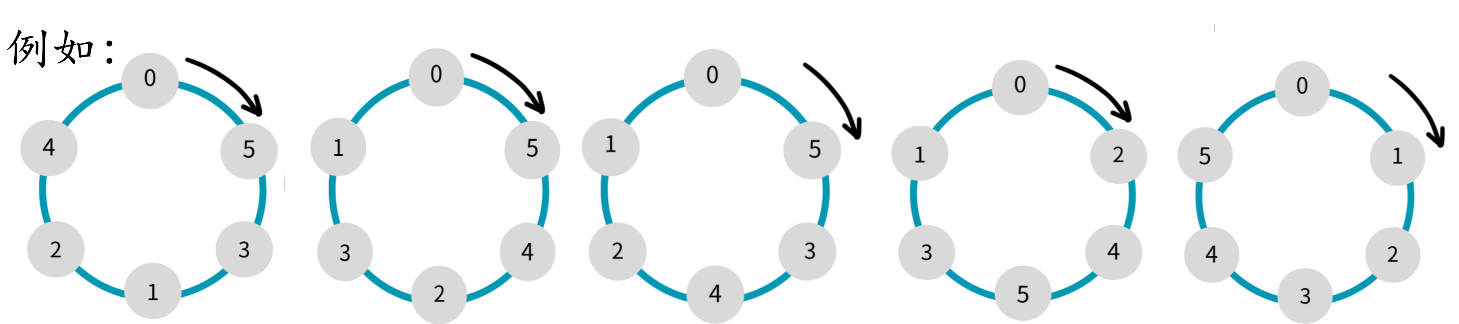
(三)問題3-3：斑鳩編號0，四隻喜鵲編號1、2、3、4，食物四份圓周位置數為5，順時針與逆時針交替。
例如:喜鵲編號號碼相加1-2+3-4=-2，-2≡-2$(mod5)$，起始點從斑鳩依順時針方向往前2個位置開始，起始數字為1，存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的鳩位置。
例如:喜鵲編號號碼相加2-4+1-3=-4，-4≡-4$(mod5)$，起始點從斑鳩依順時針方向往前4個位置開始，起始數字為2，存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的斑鳩位置。



小結:四隻喜鵲和一隻斑鳩共五隻，代表圓周位置數為5，
1. 喜鵲編號號碼相加減後等於0，每隻喜鵲吃完1份食物後，會回到起始點，然後無限循環，無法回到小斑鳩0的位置。
2. 喜鵲編號號碼相加a-b+c-d=-2，-2≡-2$(mod5)$ ，起始點從斑鳩依順時針方向往前2個位置開始。
餵食順序a→b→c→d→0
滿足a-b≠-2，a-b≠3，-b+c≠0，a-b+c≠5k，a-b+c≠3，a-b+c≠-2的條件存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的斑鳩位置。
3. 喜鵲編號號碼相加a-b+c-d=-4，-4≡-4$(mod5)$，起始點從小斑鳩依順時針方向往前4個位置開始。
當餵食順序a→b→c→d→0
滿足a-b≠1，a-b≠-4，-b+c≠0，a-b+c≠5k，a-b+c≠1，a-b+c≠-4的條件的條件。存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的斑鳩位置。

(四)問題3-4：斑鳩編號0，五隻喜鵲編號1、2、3、4、5，食物五份，圓周位置數為6，喜鵲編號號碼相加減為s，s≡k$(mod6)$，k>0時起始點從斑鳩依逆時針方向往前k個位置開始，k<0時起始點從斑鳩依順時針方向往前k個位置開始。
當餵食順序a→b→c→d→e→0
滿足a-b≠6+k，a-b≠k，-b+c≠0，a-b+c≠6+k，a-b+c≠k的條件。

例如:



小結:
1. 五隻喜鵲和一隻斑鳩共六隻，代表圓周位置數為6，喜鵲編號號碼相加減後等於S，S≠6k，每一隻喜鵲吃完1份食物後，不會回到起始點位置。
2. 圓周位置數為6，喜鵲編號號碼相加減為s，s≡k$(mod6)$，k>0時起始點從斑鳩依逆時針方向往前k個位置開始，k<0時，起始點從斑鳩依順時針方向往前k個位置開始。
當餵食順序a→b→c→d→e→0
滿足a-b≠6+k，a-b≠k，-b+c≠0，a-b+c≠6+k，a-b+c≠k、a-b+c-d 6+k，a-b+c-d≠k、a-b+c-d+e≠6k，的條件。存在排列方式讓所有喜鵲可以吃到食物1份，並且最後停留在編號0的斑鳩位置。
3. 餵食編號順序會存在互逆關係
例如餵食編號順序:1→2→3→4→5→0
和餵食編號順序:5→4→3→2→1→0。
例如餵食編號順序:2→1→3→5→4→0
和餵食編號順序:4→5→3→1→2→0。

肆、研究結果

一、題型(一) 餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，食物n份，所有喜鵲都吃到食物，而斑鳩沒吃到。

(一) n隻喜鵲編號1、2⋯n，n=2k每一隻喜鵲皆能吃到食物1 份

性質1：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n 當n=2k時，當每一隻喜鵲皆餵食一次後，餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號0的斑鳩位置。

<<證明>>
斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n
當n=2k時

$$S_n = 0+1+2+3+...+2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$$

$$S_n = 0+1+2+3+...+2k = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,2k+1)$$

所以會繞圓周 t 圈，停留在初始位置。
故得證。

(二)n隻喜鵲編號1、2⋯n，n=2k-1每一隻喜鵲皆能吃到食物1份

斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n
當喜鵲編號n=2k-1時，必須滿足下列兩個條件

條件一：$a_1+a_2+...+a_i \not\equiv \frac{n+1}{2}(\mathrm{mod}\,n+1)$

亦即 $a_1+a_2+...+a_i \not\equiv k(\mathrm{mod}\,2k)$

條件二:$a_j+a_{j+1}+... \not\equiv 0(mod n+1)$，j=1、2、⋯、n-1，p>j，不可以j=1，且p=n

則存在排列順序，起始點從斑鳩依逆時針方向往前k個位置開始，每一隻喜鵲皆能餵食1份，最後停留在斑鳩位置。

性質2：斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n
當n=2k-1時，當每一隻喜鵲皆餵食一次後，則：
(1)餵食順序最後不會停留在起始位置。
(2)餵食完最後停留在編號 0 的斑鳩位置。則起始點從斑鳩依逆時針方向往前k個位置開始。

<<證明>>
斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列a_1、a_2、⋯、a_n
當n=2k-1時
S_n=0+1+2+3+⋯+2k-1=$\frac{2k(2k-1)}{2}$=k(2k-1)
S_n=0+1+2+3+⋯+2k-1=$\frac{2k(2k-1)}{2}$=k(2k-1)≡ $k(mod2k)$
所以會繞圓周 t 圈，不會停留在初始位置。
∵ S_n=0+1+2+3+⋯+2k-1=$\frac{2k(2k-1)}{2}$=k(2k-1)≡ $k(mod2k)$
又$\frac{2k-1+1}{2}$=k
∴起始點從斑鳩依逆時針方向往前k個位置開始，故得證。

性質3：斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 a_1、a_2、…、a_n
當n=2k-1時，
若餵食編號順序 a_1、a_2、…、a_n 為符合條件之數列，
則餵食編號順序 a_n、a_{n-1}、…、a_1 亦符合條件。

<<證明>>
斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列a_1、a_2、⋯、a_n，n=2k-1
此數列滿足下列兩個條件
條件一:$a_1+a_2+...+a_i \not\equiv \frac{n+1}{2}(modn+1)$
亦即$a_1+a_2+...+a_i \not\equiv k(mod2k)$，$i$=1、2、...、n-1，
條件二:$a_j+a_{j+1}+...+a_p \not\equiv 0(mod\ n+1)$，$j$=1、2、...、n-1，
$p>j$，不可以j=1，p=n
∵ $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(n+1)}{2}$
→$a_1+a_2+\cdots+a_n \equiv \frac{n(n+1)}{2}(mod\ n+1)$
if $a_1+a_2+\cdots+a_i \not\equiv \frac{n(n+1)}{2}(mod\ n+1)$
then $a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n \not\equiv \frac{n(n+1)}{2}(mod\ n+1)$
而對於所有i均成立
→數列a_n、a_{n-1}、...、a_1符合條件一、條件二
對於數列a_n、a_{n-1}、...、a_1可任取a_m
而$a_m+a_{m-1}+\cdots+a_{m-l}$=$a_{m-l}+a_{m-l+1}+\cdots+a_m \not\equiv 0(mod\ n+1)$
符合$j=m-l$，$p=m$
符合條件二
故得證

二、題型(二)餵食方式路徑一，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，食物無限多份，所有喜鵲都吃到食物，而斑鳩沒吃到。

性質4：斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列a_1、a_2、...、a_n，S(a_x，a_y) = a_x+...+a_y = n + 1時，餵食順序會一直在編號a_x+...+a_y之間無限循環。

<<證明>>
斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 a_1 、a_2 、⋯、a_n
If S(a_x，a_y) = a_x+...+a_y = n + 1
Then S(a_x，a_y) = a_x+...+a_y = n + 1 ≡ 0($mod\ n+1$)
所以會一直繞圓周 t 圈，並一直停留在a_x、...、a_y之間循環
故得證。

三、題型(三)餵食方式路徑二，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，食物n份，當所有喜鵲都吃到食物，而斑鳩沒吃到。

(一)n隻喜鵲編號1、2⋯n，n=2k每一隻喜鵲皆能吃到食物1份
斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列a_1、a_2、...、a_n
當喜鵲編號n時，
$SS(a_1，a_p) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots a_n = s，s \equiv x(mod\ n+1)$
x>0時起始點從斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，
x<0時，起始點從斑鳩依順時針方向往前x個位置開始。
餵食順序必須滿足下列條件

條件一：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq 0$，$p\leq n$

條件二：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq x$，$p\leq n$

條件三：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq (n+1)+x$，$p\leq n$

則存在排列順序，每一隻喜鵲皆能餵食1份，最後停留在斑鳩位置。

性質5：斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 $a_1、a_2、\ldots、a_n$ n=2k時，在每一隻喜鵲皆餵食一次條件下，當 $SS=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=0$ 時，餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號0的斑鳩位置。

<<證明>>

令起始點為原點，順時針為正向+，逆時針為負向－，

當 $SS=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=0$ 時，則回到原點，故得證。

性質6：斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 $a_1、a_2、\ldots、a_n$ 當n=2k時，$SS=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(mod\ n+1)$ 當x>0時，起始點從斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，存在符合條件之餵食編號順序 $a_1、a_2、\ldots、a_n$ 則起始點從斑鳩依順時針方向往前x個位置開始，存在符合條件之餵食編號順序 $a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$ 亦符合條件。

<<證明>>

斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列

當喜鵲n=2k時，

$SS=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(mod\ n+1)$

x>0時起始點從斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，

條件一：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq 0$，$p\leq n$

條件二：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq x$，$p\leq n$

條件三：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq (n+1)+x$，$p\leq n$

餵食順序必須滿足下列條件

$\because$ $SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq 0$，$p\leq n$

→ $SS(a_p，a_1)=-(a_1-a_2+\cdots+a_p)\neq 0$(1)

$\because$ $SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq x$，$p\leq n$

→ $SS(a_p，a_1)=-(a_1-a_2+\ldots+a_p)\neq -x$，$p\leq n$...(2)

$\because$ $SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq (n+1)+x$，$p\leq n$

→$SS(a_1，a_p)=-(a_1-a_2+a_3-a_4\ldots a_p)\neq -[(n+1)+x]$ x，$p\leq n$

又$SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(mod\ n+1)$

$SS(a_n，a_1)=-(a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n)=-s$，$-s\equiv -x(mod\ n+1)$

故則起始點從斑鳩依順時針方向往前x個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序$a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$亦符合條件。

故得證。

性質7：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列 $a_1、a_2、\ldots、a_n$ 當n=2k-1時，$SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(mod\ n+1)$ 當x>0時，起始點從斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，存在符合條件之餵食編號順序$a_1、a_2、\ldots、a_n$ 則起始點從小斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，存在符合條件之餵食編號順序$a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$亦符合條件

<<證明>>

證明如下

伍、討論

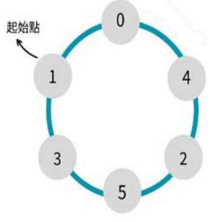
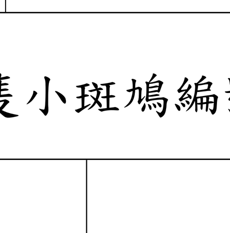
一、題型(一)：餵食方式路徑一。當n=7時，找到符合的餵食順序如下：

1234567	2137465	3214765	5136472	6142573	7245136
1576432	2346751	3241576	5274163	6315427	7254361
1634527	2573461	3614725	5647312	6542137	7312456
1643752	2746315	3752416	5674123	6751423	7654321

二、題型(一)：餵食方式路徑一，小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，食物n份，所有喜鵲都吃到食物，小斑鳩沒吃到，且最後走到編號0的斑鳩位置，整理成下表。

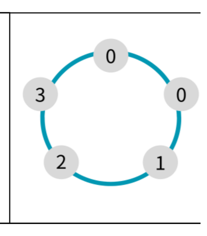
n 隻喜鵲	1 隻斑鳩+n 隻喜鵲	符合條件之餵食方法數	符合條件之餵食方法數占全部環狀排列方法之百分率
1	2	1	$\frac{1}{1}=100\%$
2	3	0	0
3	4	2	$\frac{2}{6}\approx 33\%$
4	5	0	0
5	6	4	$\frac{4}{120}\approx 3.33\%$
6	7	0	0
7	8	24	$\frac{24}{5040}\approx 0.48\%$
8	9	0	0
9	10	288	$\frac{288}{362880}\approx 0.079\%$

三、題型(三)：餵食方式路徑二無論起始位置，若餵食編號順序 $a_1-a_2+\cdots a_n$為符合條件(順時針→逆時針→順時針⋯) 之數列，則另一個餵食編號順序$-a_1+a_2-\ldots-a_n$，為符合條件(逆時針→順時針→逆時針⋯) 之數列。則兩數列的圖形呈現鏡射對稱

餵食編號順序	餵食路徑	圖示	圓周順時針編號排序
1→3→4→5→2→0	順時針→逆時針→順時針⋯		135240
1→3→4→5→2→0	逆時針→順時針→逆時針⋯		425310

四、延伸探討一:題型(四)餵食方式路徑一，兩隻小斑鳩編號0且位置相鄰

當 $\sum_{k=1}^{n}k\equiv m(\mathrm{mod}\,n+2)$ 時，起始點即是從小斑鳩依逆時針方向往前m個位置開始。

3	5	1	3→1→2→0	

當(1)由左至右數第一隻編號0斑鳩為最後停留的小斑鳩，則 $p\neq ma$，$p\neq ma+1$時，能有符合條件的餵食順序。

(2)由左至右數第二隻編號0斑鳩為最後停留的小斑鳩，則 $p\neq ma$，$p\neq ma-1$時，能有符合條件的餵食順序。

五、延伸探討二:

題型(五)餵食方式路徑一，條件:每一隻喜鵲吃到食物1份後飛走，最後走到其中一隻斑鳩。

令$S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$

定義數列b_i表示第i圈中經過(飛走)的喜鵲數量，並定義符號%代表取的餘數

故第j圈對應之鳥為$\left(a_{\left(\sum_{i=1}^{j-1}bi\right)+1}、a_{\left(\sum_{i=1}^{j-1}bi\right)+2}\ldots a_{\sum_{i=1}^{j}bi}\right)$ 取其mod為 $n-\sum_{i=1}^{j-1}b_i$，

故定義 $C_j=n-\sum_{i=1}^{j-1}b_i$。再定義$d_i$為第i−1圈繞完的餘數

即$\begin{cases} d_j=(d_{j-1}+a_{(\sum_{i=1}^{j-1}b_u)+1}+a_{(\sum_{i=1}^{j-1}b_i)+2}\ldots a_{\sum_{i=1}^{j}b_i})\%C_j \\ d_1=\frac{n}{2} \end{cases}$

故第k圈的條件一應改為 $d_k+a_{(\sum_{i=1}^{j-1}b_u)+1}+a_{(\sum_{i=1}^{j-1}b_i)+2}\ldots a_{\sum_{i=1}^{j}b_i}\equiv 0(\mathrm{mod}\,C_k)$ 。

條件二原為：:$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+i}\not\equiv 0(mod\ n)$，因為喜鵲已飛走，不可能循環，因此一定滿足條件二。故只需要滿足條件一即可。

陸、結論與未來展望

一、結論

藉由本研究三個題型的探討，我們得到以下之定理推論和性質

定理一：題型一條件下，食物n份，當存在排列順序，每一隻喜鵲皆能餵食1份，最後停留在小斑鳩位置。則：

(1) 喜鵲編號 n=2k-1，起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前k個位置**開始。

(2) $a_1+a_2+\ldots+a_i\not\equiv \frac{n+1}{2}(mod\ n+1)$　　亦即$a_1+a_2+\ldots+a_i\not\equiv k(mod\ 2k)$

(3) $a_j+a_{j+1}+\ldots+a_p\not\equiv 0(mod\ n+1)$，$j=1、2、\ldots、n-1$，$p>j$，不可以$j=1$，$p=n$

性質1：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

當n=2k時，當每一隻喜鵲接餵食一次後，餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號0的小斑鳩位置。

性質2：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

當n=2k-1時，當每一隻喜鵲接餵食一次後，則：

(1)餵食順序最後不會停留在起始位置。

(2)餵食完最後停留在編號0的小斑鳩位置。則起始點從小斑鳩依**逆時針方向往前k個位置**開始。

性質3：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

當n=2k-1時，

若餵食編號順序$a_1、a_2、\ldots、a_n$為符合條件之數列，

則餵食編號順序$a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$亦符合條件。

性質4：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

$S(a_x,a_y)=a_x+\ldots+a_y=n+1$時，餵食順序會一直在編號$a_x、\ldots、a_y$之間無限循環。

定理二：題型三條件下，斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列

$a_1、a_2、\ldots、a_n$，食物n份，則：

(1) 當喜鵲編號n時，$SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(\mathrm{mod}\,n+1)$

x>0時起始點從小斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，

x<0時，起始點從小斑鳩依順時針方向往前x個位置開始。

(2) 餵食順序必須滿足下列條件

條件一：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq 0$，$p\leq n$

條件二：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq x$，$p\leq n$

條件三：$SS(a_1，a_p)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_p\neq (n+1)+x$，$p\leq n$

則存在排列順序，每一隻喜鵲皆能餵食1份，最後停留在小斑鳩位置

性質5：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

n=2k時，在每一隻喜鵲皆餵食一次條件下，

當$SS=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=0$時，

餵食順序最後會停留在起始位置，無法停留在編號0的小斑鳩位置。

性質6：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

當n=2k時，

$SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(\mathrm{mod}\,n+1)$

當x>0時，起始點從小斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序$a_1、a_2、\ldots、a_n$

則起始點從小斑鳩依順時針方向往前x個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序$a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$亦符合條件。

性質7：小斑鳩編號0，n隻喜鵲編號1、2⋯n，將1、2⋯n，形成數列$a_1、a_2、\ldots、a_n$

當n=2k-1時，

$SS(a_1，a_n)=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots a_n=s$，$s\equiv x(\mathrm{mod}\,n+1)$

當x>0時，起始點從小斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序$a_1、a_2、\ldots、a_n$

則起始點從小斑鳩依逆時針方向往前x個位置開始，

存在符合條件之餵食編號順序$a_n、a_{n-1}、\ldots、a_1$亦符合條件。

定理三：題型(四)餵食方式路徑一，兩隻小斑鳩編號0且位置相鄰，n隻喜鵲編號1、2⋯n，食物n份，條件:每一隻喜鵲吃到食物1份，最後走到其中一隻斑鳩。

當$\sum_{k=1}^{n}k\equiv m(\mathrm{mod}\,n+2)$，$m\neq 0$，

代表起始點從最後停留小斑鳩的位置依**逆時針方向往前m個位置**開始，

滿足$\sum_{k=1}^{x}k\equiv p(\mathrm{mod}\,n+2)$，

則(1)由左至右數第一隻編號0斑鳩為最後停留的小斑鳩，則$p\neq ma$和$p\neq ma+1$時，能有符合條件的餵食順序。

(2)由左至右數第二隻編號0斑鳩為最後停留的小斑鳩，則$p\neq ma$和$p\neq ma-1$時，能有符合條件的餵食順序。

柒、參考資料詳見作品說明書