中華民國第 64 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

第三名

030405

圓外切多邊形邊延長線的前「式」今生！

學校名稱： 新竹縣立自強國民中學

作者：	指導老師：
國二 陳泓源	鄭芬如

關鍵詞： 圓外切多邊形、邊延長線、心頂點外接圓

圓外切多邊形邊延長線的前「式」今生！

摘　要

1. 根據文獻[1]、[2]，關於圓外切四邊形一組對角兩頂點和內切圓圓心形成的三角形之心頂點外接圓與該四邊形邊延長線相交產生的線段與邊長關係式，推廣到圓外切 n 邊形時，得到漂亮的關係一般式；圓外切 n 邊形的 n 個心頂點外接圓中，相鄰兩圓間的邊延長線關係式，藉由定義兩圓交點與邊延長線相交的位置關係得到完整的表示。
2. 由第一代圓外切 n 邊形聯想作出第二代圓外切 $2n-4$ 邊形時，其心頂點外接圓與其各邊延長線交點有<u>共點</u>現象。
3. 單一個或任相鄰兩個心頂點外接圓分別與原內切圓的面積（或周長）及特定線段之比值乘積是一個<u>定值（或另一個定值）</u>。
4. 推廣到圓外切 n 邊形的 n 個旁心也得到旁心頂點外接圓相關的邊延長線關係式。

壹、研究動機

上獨立研究課時，老師介紹了數學傳播期刊第 45 卷第 3 期的一篇文章：「2021 年第 62 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答」[1]和新竹縣第 62 屆中小科學展覽會的「圓外切多邊形的「環環相扣」− 圓外切多邊形各邊延長線相交的性質探討」[2]兩篇相關的作品，我們聯想並作出特殊的第二代圓外切 n 邊形，從第 63 屆開始進行研究，第 64 屆繼續推廣延伸，也就是從意外發現該第二代圓外切 n 邊形的心頂點外接圓與特定邊延長線相交在圓上的點會產生重合的情形，開始想探討**共點時**原圓外切 n 邊形的邊長間有何關係？又欲將文獻[1]中圓外切四邊形的關係式，推廣到圓外切 n 邊形中，以及探討相鄰兩心頂點外接圓特定邊延長線與特定邊長的關係一般式究竟為何？因此，開始了我們的研究之路。

貳、研究設備與器材

紙、筆、電腦、*GSP* 動態幾何繪圖軟體、*Smartdraw* 繪圖軟體。

參、研究目的

一、 探討第一代圓外切 n 邊形中，單一心頂點外接圓的特定邊延長線段與特定邊長關係式；任意相鄰兩個心頂點外接圓的特定邊延長線與特定邊長關係式和兩圓交點、邊延長線交點與心交點位置關係之影響。

二、 第一代圓外切 n 邊形中，單一個「心頂點外接圓」與特定邊延長線的交點之**共點情形**與原邊長的關係。

三、 由第一代圓外切 n 邊形的心頂點外接圓與特定邊延長線的交點作出第二代圓外切 $2n-4$ 邊形，並探討第二代心頂點外接圓與特定邊延長線相交的性質。

四、 探討第一代圓外切 n 邊形中，其內切圓和任一心頂點外接圓的面積（或周長）關係式，以及任意相鄰兩個心頂點外接圓面積（或周長）關係式。

五、 推廣到與角平分線有關的旁心，探討屬於**旁心頂點外接圓**的邊延長線關係式。

肆、研究過程與結果

名詞定義與性質

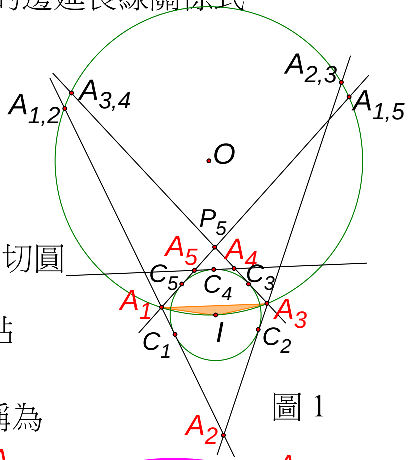


圖 1

一、心頂點外接圓[2]：如圖 1，圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，內切圓圓心 I 與頂點 A_1 、 A_3 形成的 ΔA_1IA_3 之外接圓 O，稱為心頂點外接圓。再定義 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_5}$ 與圓 O 的交點稱為心交點，分別為 $A_{1,2}$ 、 $A_{2,3}$ 、 $A_{3,4}$ 及 $A_{1,5}$ 。 $\overline{A_{1,2}A_1}$ 、 $\overline{A_{1,5}A_5}$ 、 $\overline{A_{3,4}A_4}$ 和 $\overline{A_{2,3}A_3}$ 稱為邊延長線段， ΔA_1IA_3 又稱為心頂點三角形。

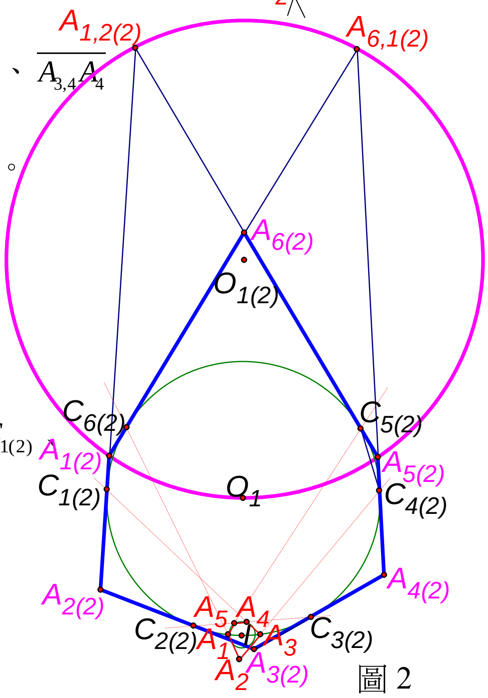


圖 2

二、第二代圓外切 n 邊形和第二代心頂點外接圓：如圖 2，圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 所有邊延長線 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 、 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 、 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 、 $\overleftrightarrow{A_1A_5}$ 和 $\overleftrightarrow{A_2A_1}$ 與心頂點外接圓 O_1 的交點分別為 $C_{1(2)}$ 、 $C_{2(2)}$ 、 $C_{3(2)}$ 、 $C_{4(2)}$ 、 $C_{5(2)}$ 、 $C_{6(2)}$ ，其中 $\overleftrightarrow{A_4A_5}$ 會有兩個交點 $C_{2(2)}$ 與 $C_{3(2)}$ 。再利用這些點當作切點作出第二代

圓外切六邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}A_{5(2)}A_{6(2)}$ (藍色)和第二代的心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ (紫紅色)。

性質 1[1]：如圖 3 是文獻 1 的參考圖形，圓外切四邊形 $ABCD$ 中四邊的延長線會與 ΔAIC 的外接圓 ω 交於 X、Y、T、Z，該文獻中等式為

$$\overline{AD}+\overline{DT}+\overline{TX}+\overline{XA}=\overline{CD}+\overline{DY}+\overline{YZ}+\overline{ZC}$$

從文獻等式的證明中可知

(1) $\overline{XT}=\overline{YZ}$；(2) $\overline{XI}=\overline{YI}$、$\overline{TI}=\overline{ZI}$

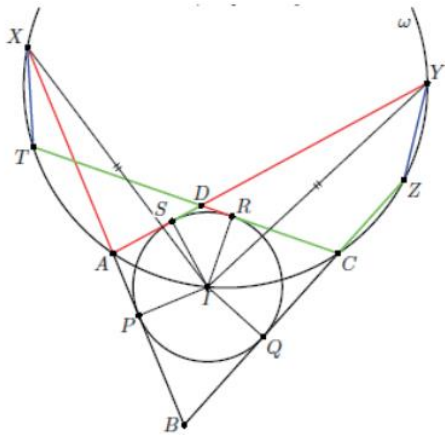
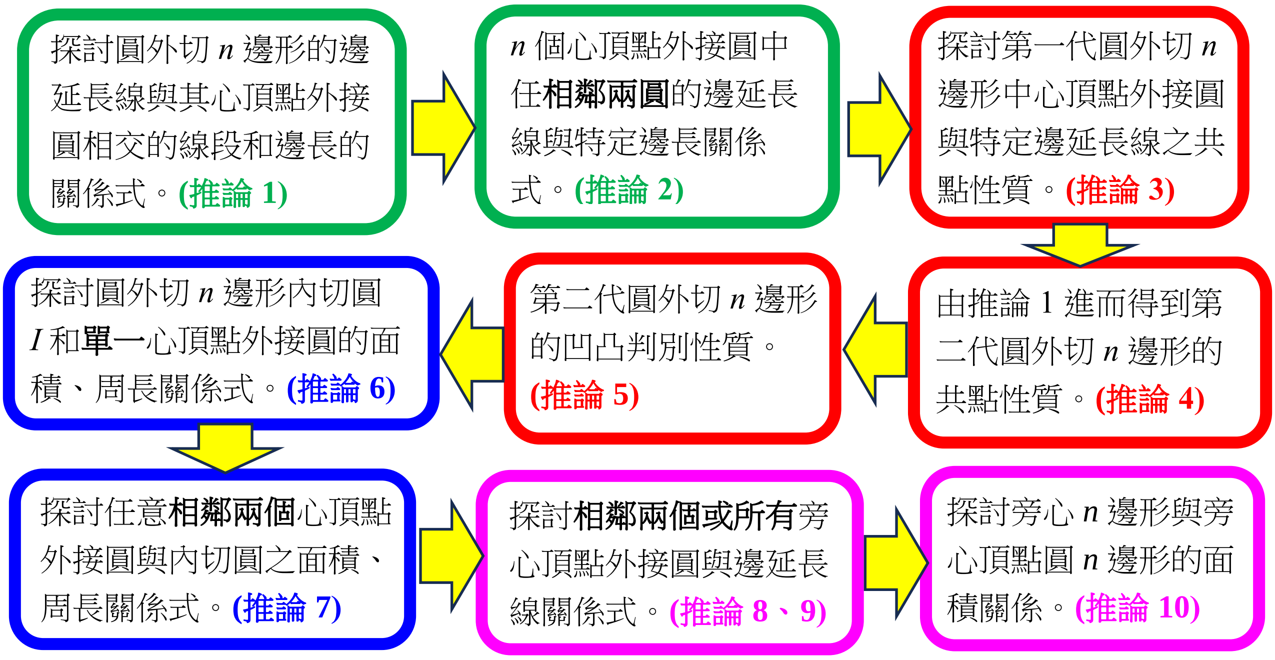


圖 3 文獻 1 的參考圖形

【研究架構流程圖】



一、心頂點外接圓中特定邊延長線與特定邊長的關係一般式

在心頂點外接圓中分別以包 1、$n-i$（$4\le i\le n-2$，$i\in\mathbb{N}$，$n\ge 6$）、$n-3$點來分析探討。

(一)包 1 點：如圖 4～6，在 $n=5,6,7$ 時，依照**性質 1** 中的等式[1]，可得

$$n=5\Rightarrow \overline{A_{1,2}A_{5,4}}+\overline{A_{5,4}A_5}+\overline{A_5A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{4,3}A_{5,1}}+\overline{A_{5,1}A_5}+\overline{A_5A_4}+\overline{A_4A_{4,3}}$$

$$n=6\Rightarrow \overline{A_{1,2}A_{6,5}}+\overline{A_{6,5}A_6}+\overline{A_6A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{5,4}A_{6,1}}+\overline{A_{6,1}A_6}+\overline{A_6A_5}+\overline{A_5A_{5,4}}$$

$$n=7\Rightarrow \overline{A_{1,2}A_{7,6}}+\overline{A_{7,6}A_7}+\overline{A_7A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{6,5}A_{7,1}}+\overline{A_{7,1}A_7}+\overline{A_7A_6}+\overline{A_6A_{6,5}}$$

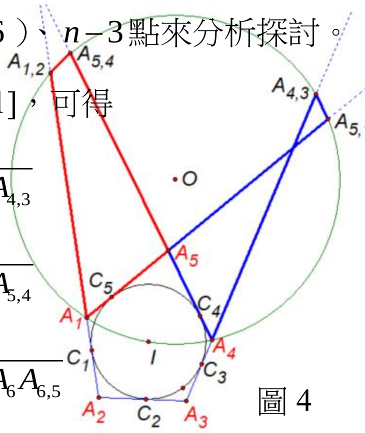


圖 4

觀察其規律，可得到關係一般式如推論 1 中所示。

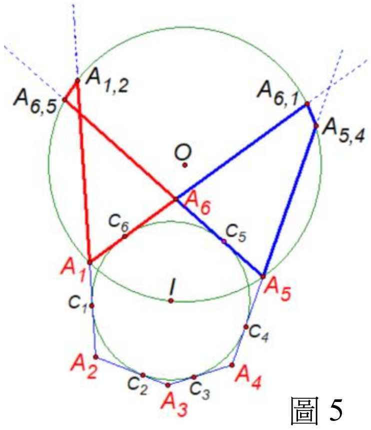


圖 5

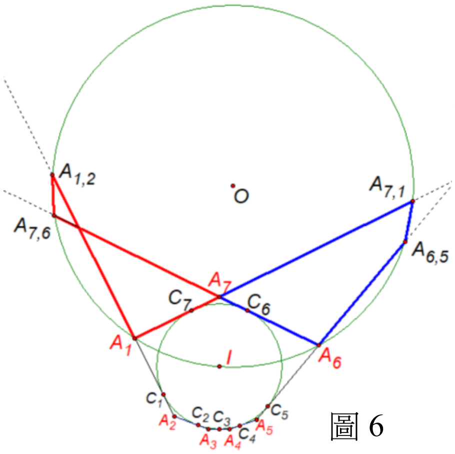


圖 6

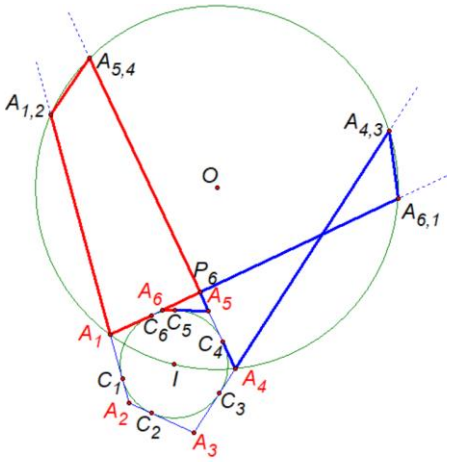


圖 7

(二) 包$n-i$點（以$n-i$為奇數和偶數的例子來分析如下）

1. 以$n=6$，$i=4$，$n-i=2$為例來說明，如圖 7，可得

$$\overline{A_{1,2}A_{5,4}}+\overline{A_{5,4}P_6}+\overline{P_6A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{4,3}A_{6,1}}+\overline{A_{6,1}P_6}+\overline{P_6A_4}+\overline{A_4A_{4,3}}$$

$$\Rightarrow \overline{A_{1,2}A_{5,4}}+\overline{A_{5,4}P_6}+\overline{P_6A_6}+\overline{A_6C_6}+\overline{C_6A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{4,3}A_{6,1}}+\overline{A_{6,1}P_6}+\overline{P_6A_5}+\overline{A_5C_4}+\overline{C_4A_4}+\overline{A_4A_{4,3}}$$

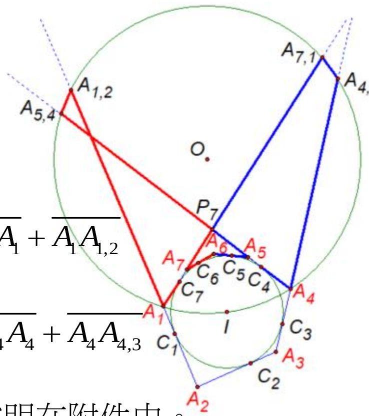
$$\Rightarrow \overline{A_{1,2}A_{5,4}}+\overline{A_{5,4}P_6}+\overline{P_6A_6}+\overline{A_6C_5}+\overline{C_6A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{4,3}A_{6,1}}+\overline{A_{6,1}P_6}+\overline{P_6A_5}+\overline{A_5C_5}+\overline{C_4A_4}+\overline{A_4A_{4,3}}$$

2. 在$n=7$，$i=4$，$n-i=3$的情況下，如圖 8，可得

$$\overline{A_{1,2}A_{5,4}}+\overline{A_{5,4}P_7}+\overline{P_7A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{4,3}A_{7,1}}+\overline{A_{7,1}P_7}+\overline{P_7A_4}+\overline{A_4A_{4,3}}$$

經整理化簡、同理可證得 $\overline{A_{1,2}A_{5,4}}+\overline{A_{5,4}P_7}+\overline{P_7A_7}+\overline{A_6A_7}+\overline{C_7A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$

$$=\overline{A_{4,3}A_{7,1}}+\overline{A_{7,1}P_7}+\overline{P_7A_5}+\overline{A_5A_6}+\overline{C_4A_4}+\overline{A_4A_{4,3}}$$



其他邊數 n 及 i 值可同理可得相同規律的關係式，並詳細說明在附件中。

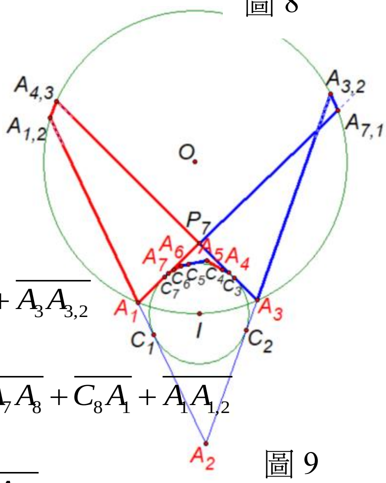
圖 8

(三) 包$n-3$點（以邊數n為奇數和偶數的例子來分析如下）

以$n=7$為例，如圖 9，依照前面的推導方式，可得

$$\overline{A_{1,2}A_{4,3}}+\overline{A_{4,3}P_7}+\overline{P_7A_7}+\overline{A_6A_7}+\overline{A_5C_4}+\overline{C_7A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$$

$$=\overline{A_{3,2}A_{7,1}}+\overline{A_{7,1}P_7}+\overline{P_7A_4}+\overline{A_4C_4}+\overline{A_5A_6}+\overline{C_3A_3}+\overline{A_3A_{3,2}}$$



以$n=8$為例，如圖 10，可得 $\overline{A_{1,2}A_{4,3}}+\overline{A_{4,3}P_8}+\overline{P_8A_8}+\overline{A_5A_6}+\overline{A_7A_8}+\overline{C_8A_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$

圖 9

$$=\overline{A_{3,2}A_{8,1}}+\overline{A_{8,1}P_8}+\overline{P_8A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}+\overline{C_3A_3}+\overline{A_3A_{3,2}}$$

經由不同邊數 n 的推導結果，觀察規律後可得到關係一般式統整在推論 1 中。

推論 1：在圓外切多邊形中，第一代心頂點外接圓與特定邊延長線會相交，其特定邊延長線段長和特定邊長關係一般式，以包 1 點、包 $n-i$ 點，包 $n-3$ 點三種情況分別如下：

1. 包 1 點

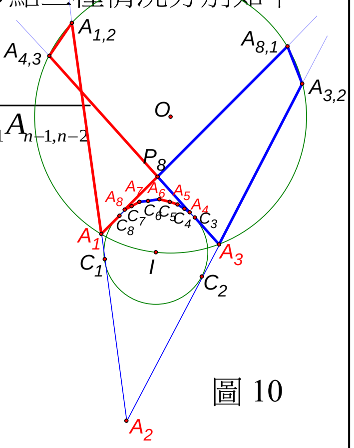


圖 10

$$\overline{A_{1,2}A_{n,n-1}}+\overline{A_{n,n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{n-1,n-2}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}A_n}+\overline{A_nA_{n-1}}+\overline{A_{n-1}A_{n-1,n-2}}$$

2. 包 $n-i$ 點（分成 $n-i$ 為奇數和偶數兩種）

(1) $n-i=2k+1$ 時，k 為整數 且 $k\ge 1$，$4\le i\le n-2$，$n\ge 6$

$$\overline{A_{1,2}A_{i+1,i}}+\overline{A_{i+1,i}P_n}+\overline{P_nA_n}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-3}{2}}\overline{A_{n-1-2x}A_{n-2x}}\right)+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$$

$$=\overline{A_{i,i-1}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_{i+1}}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-3}{2}}\overline{A_{n-2-2x}A_{n-1-2x}}\right)+\overline{C_iA_i}+\overline{A_iA_{i,i-1}}$$

(2) $n-i=2k$ 時，k 為整數且 $k\ge 1$，$4\le i\le n-2$，$n\ge 6$，當 $n-i=2$ 時，Σ 部分不存在。

$$\overline{A_{1,2}A_{i+1,i}}+\overline{A_{i+1,i}P_n}+\overline{P_nA_n}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-4}{2}}\overline{A_{n-1-2x}A_{n-2x}}\right)+\overline{A_{i+2}C_{i+1}}+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$$

$$=\overline{A_{i,i-1}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}C_{i+1}}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-4}{2}}\overline{A_{n-2-2x}A_{n-1-2x}}\right)+\overline{C_iA_i}+\overline{A_iA_{i,i-1}}$$

3. 包 $n-3$ 點（分成邊數 n 為奇數和偶數兩種）

(1) $n=2k+1$，k 為整數且 $k\ge 2$

$$\overline{A_{1,2}A_{4,3}}+\overline{A_{4,3}P_n}+\overline{P_nA_n}+\sum_{x=3}^{[n/2]}\overline{A_{2x}A_{2x+1}}+\overline{A_5C_4}+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$$

$$=\overline{A_{3,2}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_4}+\overline{A_4C_4}+\sum_{x=3}^{[n/2]}\overline{A_{2x-1}A_{2x}}+\overline{C_3A_3}+\overline{A_3A_{3,2}}$$

(2) $n=2k$，k 為整數且 $k\ge 3$

$$\overline{A_{1,2}A_{4,3}}+\overline{A_{4,3}P_n}+\overline{P_nA_n}+\sum_{x=3}^{n/2}\overline{A_{2x-1}A_{2x}}+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}$$

$$=\overline{A_{3,2}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_4}+\sum_{x=3}^{n/2}\overline{A_{2x-2}A_{2x-1}}+\overline{C_3A_3}+\overline{A_3A_{3,2}}$$

二、圓外切 *n* 邊形中，任意兩相鄰心頂點外接圓邊延長線段與特定邊長的關係

如圖 11，在圓O_1中由推論 1 可得

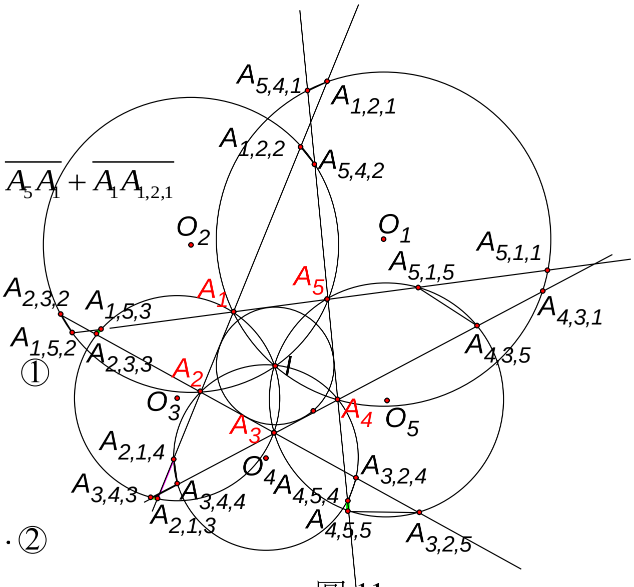


圖 11

$$\overline{A_{5,1,1}A_{4,3,1}}+\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{1,2,1}A_{5,4,1}}+\overline{A_{5,4,1}A_5}+\overline{A_5A_1}+\overline{A_1A_{1,2,1}}$$

$\because \overline{A_{5,1,1}A_{4,3,1}}=\overline{A_{1,2,1}A_{5,4,1}}$ [1]，上式可變成

$$\Rightarrow \overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{5,4,1}A_5}+\overline{A_5A_1}+\overline{A_1A_{1,2,1}}\cdots\cdots①$$

同理，由圓O_2可得類似關係式為

$$\Rightarrow \overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}=\overline{A_{5,4,2}A_5}+\overline{A_5A_1}+\overline{A_1A_{1,2,2}}\cdots\cdots②$$

$$①-②\Rightarrow \overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}-\overline{A_{1,5,2}A_1}-\overline{A_1A_2}-\overline{A_2A_{2,3,2}}=\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}$$

$$\Rightarrow \overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}\cdots\cdots③$$

③式為圓O_1和O_2邊延長線段長與相關特定邊長的關係式，但此關係式**會因兩圓心交點位置、邊延長線交點位置與兩圓交點位置這三種相對位置的變化而有所改變，因此需新定義新名詞，方便進行更完整的分析。**以圓外切六邊形為例，如圖 12，分別定義如下：

1. E_i點為相鄰兩個心頂點外接圓O_i、O_{i+1}除了圓心I之外的另一個交點。

2. D_i為相鄰兩個心頂點外接圓O_i、O_{i+1}有關的兩條邊延長線的交點。

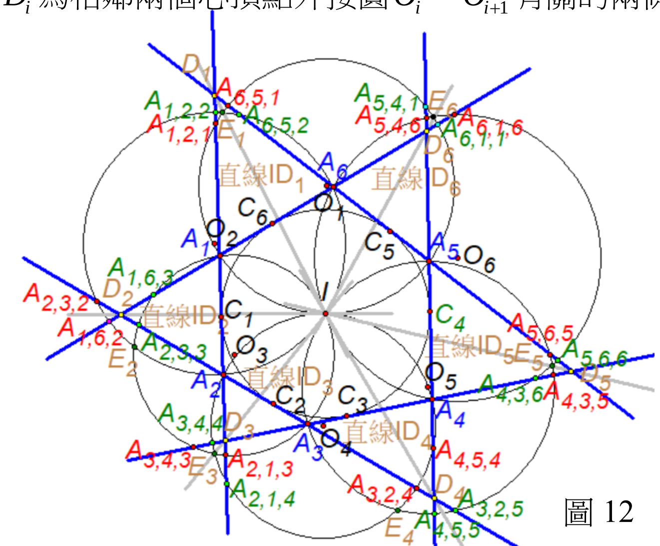


圖 12

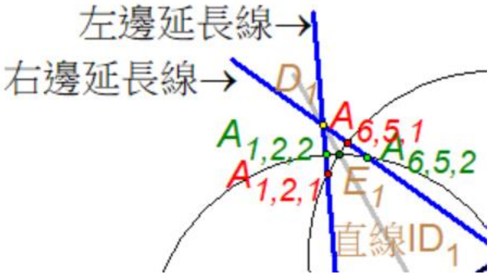


圖 13

判斷位置為上或下、左或右時，統一先將$\overleftrightarrow{ID_i}$（灰色直線）**旋轉調整成鉛直線（點**$D_i$**在上、點**$I$**在下）後**再判斷位置關係：

3. V_1：D_i同時在相鄰兩心頂點外接圓外時，稱為V_1情況，如圖 13；

V_2：D_i 在左邊心頂點外接圓內，恰在右邊心頂點外接圓外時，稱為V_2 情況，如圖 14；

V_3：D_i 同時在相鄰兩心頂點外接圓內時，稱為V_3 情況，如圖 15；

V_4：D_i 在左邊心頂點外接圓外，恰在右邊心頂點外接圓內時，稱為V_4 情況，如圖 16。

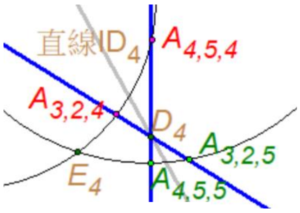


圖 14

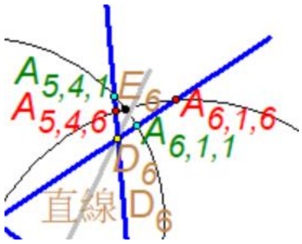


圖 15

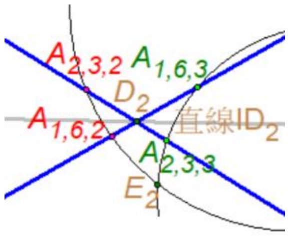


圖 16

5. 兩條邊延長線相交後形成四個區域，F_1、F_2、F_3 和 F_4，定義如圖 17 所示。接著 E_i 點分別在 F_1、F_2、F_3 和 F_4 四個區域時，探討 D_i 點與兩心頂點外接圓的四種位置關係（V_1、V_2、V_3 和 V_4）是否成立？

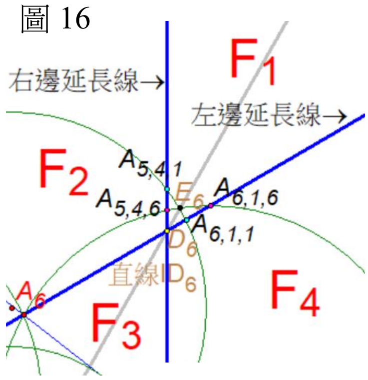


圖 17

E_i 點在 F_1、F_2、F_3 和 F_4 四個區域搭配與 D_i 有關的V_1、V_2、V_3 和V_4 四種位置情況，會有(F_1,V_1)、(F_1,V_2)、(F_1,V_3)、(F_1,V_4)，還有$(F_2,V_1)\sim(F_2,V_4)$、$(F_3,V_1)\sim(F_3,V_4)$和$(F_4,V_1)\sim(F_4,V_4)$共 16 種位置關係。其中(F_1,V_1)、(F_2,V_2)、(F_3,V_3)、(F_4,V_4)不可能發生。於是剩下的 12 種位置關係中，又猜測某些情況可能不會發生，茲從圖形中已經存在的情況，或是藉由移動切點可以產生的情況來分析說明上述四種可能不會發生的情況如下：

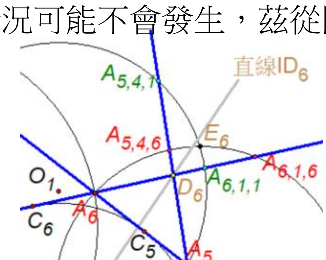


圖 18 (F_1,V_3)情況

（一）(F_1,V_2)**不存在的說明**

1. 由 D_i 同時在相鄰兩心頂點外接圓內的情況(F_1,V_3)討論：

如圖 18，點 D_6 是 $\overline{A_1A_6}$ 延長線和 $\overline{A_5A_4}$ 延長線的交點，點 E_6 在 F_1 情況時，會在 $A_{6,1,6}A_{5,4,6}$ 上。若(F_1,V_3)要轉變成(F_1,V_2)，可以移動點 C_3 嘗試使點 D_6 到點 $A_{5,4,1}$ 的下方、點 $A_{5,4,6}$ 的上方。且移動過程中，點 D_6 會與點 $A_{5,4,6}$、$A_{6,1,6}$ 同時重合，如圖 19，此時

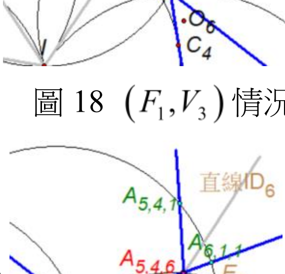


圖 19

$A_{6,1,6}A_{5,4,6}=0$，則 E_6 就不會在 $A_{6,1,6}A_{5,4,6}$ 上，不會形成 F_1 情況，繼續移動點 C_3 使點 D_6 到點 $A_{5,4,1}$ 的下方、點 $A_{5,4,6}$ 的上方，如圖 20，此時變成 (F_4,V_2) 情況。移動其他相關切點 C_4 和 C_6 也會出現相同的轉變情況。

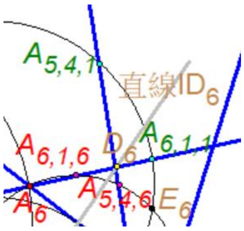


圖 20

2. 由 D_i 在左邊心頂點外接圓內，恰在右邊心頂點外接圓外，且 E_i 點在 F_4 區時的 (F_4,V_2) 討論：

圖 21

如圖 21，點 E_4 若要在 F_1 區域，代表該點要在 $A_{3,2,5}A_{4,5,5}$ 上。點 E_4 是圓 O_4，圓 O_5 的交點，在 V_2 的情況時，點 D_4 須在 $\overline{A_{4,5,4}A_{4,5,5}}$ 上。移動點 C_1 使得點 E_4 和 $A_{4,5,5}$ 重合，如圖 22，則點 $A_{4,5,4}$ 也會移過來重合，所以 $\overline{A_{4,5,4}A_{4,5,5}}=0$，此時點 D_4 就不會在 $\overline{A_{4,5,4}A_{4,5,5}}$ 上，不會形成 V_2 情況，即從 F_4 區移動到 F_1 區過程時，V_2 情況轉變成 V_3 情況。故 (F_4,V_2) 不可能轉變成 (F_1,V_2)。

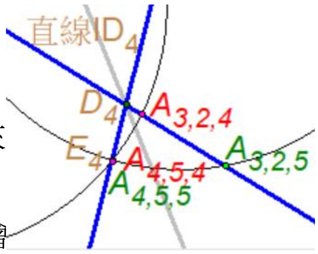


圖 22

綜合以上說明，可知 (F_1,V_2) 的情況不可能產生的。

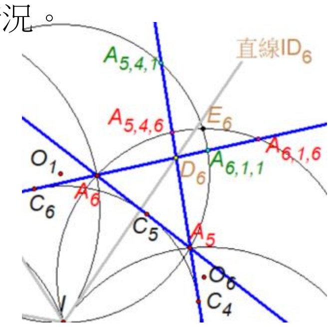


圖 23

（二）(F_1,V_4) 不存在的說明

1. 由 D_i 同時在相鄰兩心頂點外接圓內的情況 (F_1,V_3) 討論：

如圖 23，若要 (F_1,V_3) 變成 (F_1,V_4)，要使點 D_6 位在 $\overline{A_{6,1,1}A_{6,1,6}}$ 上，但在移動過程中，點 D_6 會與點 $A_{6,1,1}$ 和點 $A_{5,4,1}$ 重合，如圖 24，$A_{6,1,1}A_{5,4,1}=0$，則點 E_6 不會在 $A_{6,1,1}A_{5,4,1}$ 上，無法形成 F_1 情況，而是轉變成 F_2 情況。故 (F_1,V_3) 不可能轉變成 (F_1,V_4)。

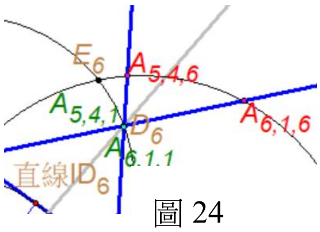


圖 24

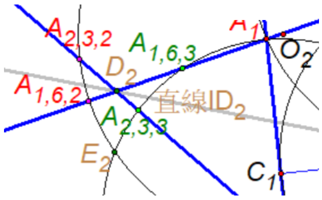


圖 25

2. 如圖 25 是 (F_2,V_4) 情況，若要 (F_2,V_4) 轉變成 (F_1,V_4)，點 E_2 要在 $A_{2,3,2}A_{1,6,2}$ 之間。點 E_2 是圓 O_2 和圓 O_3 的交點，在 V_4 的情況時，

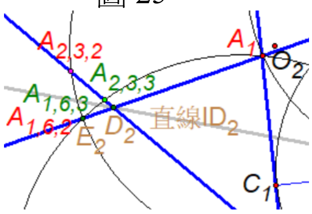


圖 26

點D_2在點$A_{1,6,3}$的上方，點$A_{1,6,2}$的下方。移動點C_3使得點E_2和點$A_{1,6,2}$重合，如圖 26，點$A_{1,6,3}$也會移過來重合，所以$\overline{A_{1,6,2}A_{1,6,3}}=0$，此時點$D_2$就不會在點$A_{1,6,3}$的上方，點$A_{1,6,2}$的下方，即不會形成$V_4$情況，而是轉變成$V_3$情況，故$(F_2,V_4)$無法轉變成$(F_1,V_4)$。

綜合以上說明，可知(F_1,V_4)的情況不可能產生的。

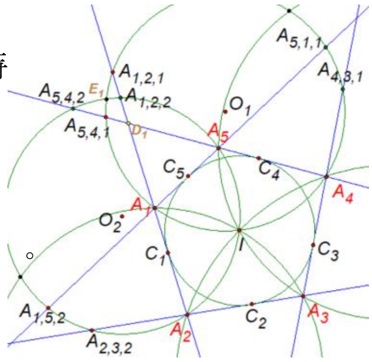


圖 27

(F_3,V_2)和(F_3,V_4)情況不可能發生的理由同(F_1,V_2)、(F_1,V_4)兩種不可能情況類似，在此不再說明（詳細說明在附件中）。藉由以上分析，可統整出圓外切 n 邊形中任意兩相鄰心頂點外接圓邊延長線段與特定邊長所有可能的關係一般式。

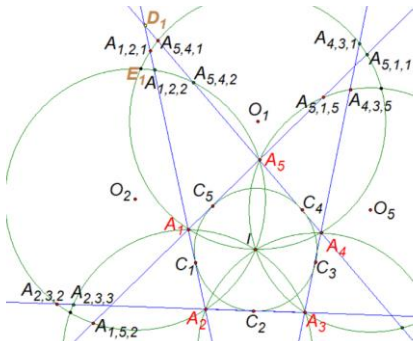


圖 28

(三) 以圓外切五邊形為例，對圓O_1、O_2來說明，

1. (F_1,V_3)情況，如圖 27，可得關係式為

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{5,4,1}A_5}+\overline{A_5A_1}+\overline{A_1A_{1,2,1}}\cdots\cdots①$$

$$\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}=\overline{A_{5,4,2}A_5}+\overline{A_5A_1}+\overline{A_1A_{1,2,2}}\cdots\cdots②$$，由①－②

$$\Rightarrow \overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}$$

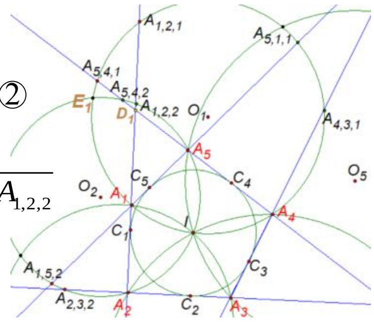


圖 29

2. (F_2,V_1)、(F_2,V_3)、(F_2,V_4)、(F_3,V_1)情況，如圖 28~31，

同(F_1,V_3)情況的推導原則，可得關係式如下：

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}$$

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}$$

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}$$

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}$$

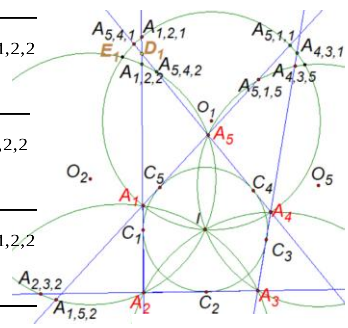


圖 30

3. (F_4,V_1)、(F_4,V_2)和(F_4,V_3)情況，同前面的推導原則，也可得：

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}$$

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}$$

$$\overline{A_{4,3,1}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{5,1,1}}+\overline{A_{5,4,1}A_{5,4,2}}+\overline{A_{1,2,1}A_{1,2,2}}=\overline{A_{1,5,2}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{2,3,2}}$$

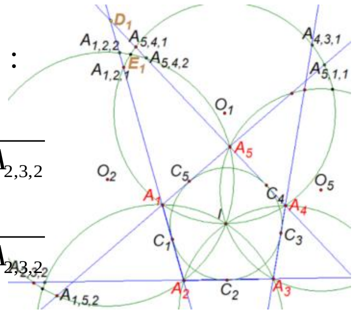


圖 31

根據以上分析，在其他邊數的圓外切 n 邊形中也可得到相同規律的關係式（詳細分析說明在附件中），並將結果統整在推論 2 中。

推論 2：

在第一代心頂點外接圓中，任意相鄰兩心頂點外接圓與邊延長線的交點連線段和對應的原邊長之關係一般式統整為下列四種：

1. (F_2,V_1)、(F_2,V_3)、(F_2,V_4)情況下的關係一般式（圓O_i心交點皆在圓O_{i+1}心交點的上方）為

$$\begin{aligned}&\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}\\&=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}\end{aligned};$$

2. (F_4,V_1)、(F_4,V_2)、(F_4,V_3)情況下的關係一般式（圓O_i心交點皆在O_{i+1}心交點的下方）為

$$\begin{aligned}&\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}\\&=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}\end{aligned};$$

3. (F_3,V_1)情況下的關係一般式（兩圓的心交點交錯，邊延長線交點(D_i)在兩圓外）為

$$\begin{aligned}&\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}\\&=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}\end{aligned};$$

4. (F_1,V_3)情況下的關係一般式（兩圓的心交點交錯，邊延長線交點(D_i)在兩圓內）為

$$\begin{aligned}&\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}\\&=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}\end{aligned},$$

其中$i=1,2,3,\cdots,n$，若下標值$>n$，則取下標值 $\bmod n$ 為新下標值。

三、第一代圓外切 n 邊形的心頂點外接圓與特定邊延長線之交點的共點探討

由圖 2，將第二代圓外切六邊形的特定邊 $\overline{A_{1(2)}A_{2(2)}}$、$\overline{A_{5(2)}A_{6(2)}}$、$\overline{A_{1(2)}A_{6(2)}}$ 和 $\overline{A_{4(2)}A_{5(2)}}$ 延長，雖與第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 有交點，卻出現**兩兩共點**的情況。為了了解這些重合的交點對圓外切 n 邊形的邊長有什麼影響或關係？於是從第一代圓外切 n 邊形中，心頂點外接圓內部所包的圓外切 n 邊形頂點數不同，由包 1、$n-i$（$i=4,\cdots,n-2$）和 $n-3$ 點三種情況來分析，在這裡一律由最左邊頂點當作 A_1 開始以逆時針命名其他頂點 A_2、A_3、…、A_n。

(一) 圓外切四邊形

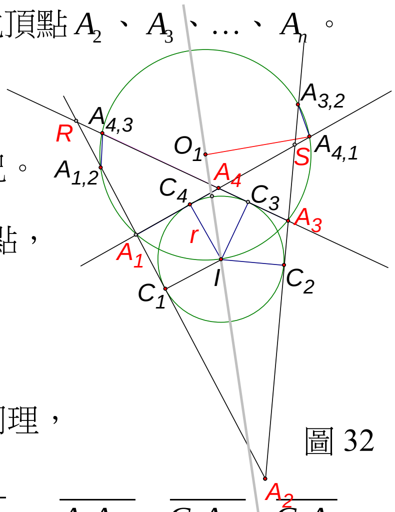


圖 32

1.如圖 32，圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 只有包 1 點（A_4）的情況。可移動任一切點 C_1、C_2、C_3 或 C_4 使得兩組心交點分別共點，即 $A_{1,2}$ 和 $A_{4,3}$ 重合、$A_{4,1}$ 和 $A_{3,2}$ 重合，如圖 33。

2.圖 33 中，$\because \Delta IC_1A_{4,3} \cong \Delta IC_2A_{3,2}(RHS)$ $\therefore \overline{A_{4,3}C_1} = \overline{A_{3,2}C_2}$ 同理，

$\Delta IC_4A_{3,2} \cong \Delta IC_3A_{4,3}(RHS)$ $\therefore \overline{A_{3,2}C_4} = \overline{A_{4,3}C_3}$ 又 $\overline{C_4A_4} = \overline{C_3A_4}$ $\therefore \overline{A_4A_{4,3}} = \overline{C_3A_{4,3}} - \overline{C_3A_4}$

$= \overline{C_4A_{3,2}} - \overline{C_4A_4} = \overline{A_4A_{3,2}}$，因為點 $A_{4,3}$ 為點 $A_{3,2}$ 對 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 的鏡射點[1] $\Rightarrow$ A_4 點在對稱軸 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 上。

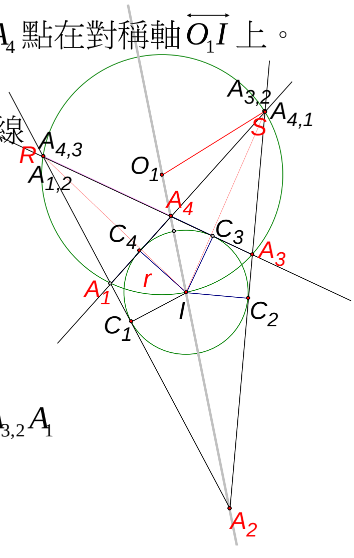


圖 33

3.$\because \overline{A_{4,3}C_1} = \overline{A_{3,2}C_2}$ 且 $A_{4,3}$、A_1、C_1、A_2 共線和 $A_{3,2}$、A_3、C_2、A_2 共線

又 $\overline{C_1A_2} = \overline{C_2A_2}$ $\therefore \overline{A_{4,3}A_2} = \overline{A_{3,2}A_2} \Rightarrow \Delta A_2A_{4,3}A_{3,2}$ 為等腰三角形

$\therefore \overleftrightarrow{O_1I}$ 也會通過 A_2 點，亦即 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 為等腰 $\Delta A_2A_{4,3}A_{3,2}$ 的對稱軸。

又 $\overline{A_4A_{4,3}} = \overline{A_4A_{3,2}}$、$\angle A_{4,3}A_4A_1 = \angle A_{3,2}A_4A_3$、$\angle A_1A_{4,3}A_3 = \dfrac{1}{2}A_1IA_3 = \angle A_3A_{3,2}A_1$

$\therefore \Delta A_4A_{4,3}A_1 \cong \Delta A_4A_{3,2}A_3\left(ASA\right) \Rightarrow \overline{A_4A_1} = \overline{A_4A_3}$，$\overline{A_1A_{4,3}} = \overline{A_3A_{3,2}}$

$\Rightarrow \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ 故此時圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 變成箏形。

4.反過來想，若圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 是箏形，心交點 $A_{1,2}$ 和 $A_{4,3}$、$A_{4,1}$ 和 $A_{3,2}$ 是否會分別重合呢？參考圖 34 並說明如下：

(1)已知條件為 $\overline{A_1A_4}=\overline{A_4A_3}\Rightarrow$ 四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 為箏形

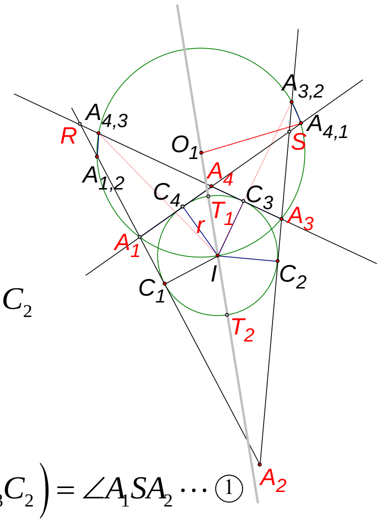


圖 34

(2) $\overleftrightarrow{O_1I}$ 為其對稱軸，令 T_1 、 T_2 分別為 C_4C_3 和 C_1C_2 與 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 的交點，

則 T_1 、 T_2 分別為 C_4C_3 和 C_1C_2 的中點，$\therefore C_4T_1=T_1C_3$ ，$C_1T_2=T_2C_2$

又點 A_4 、 A_2 必在 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 上 且 C_4 和 C_3 、 C_1 和 C_2 互為對稱點

$\Rightarrow$ 圓 I 的圓外角 $\angle A_3RA_2=\frac{1}{2}\left(C_3C_2C_1-C_3C_4C_1\right)=\frac{1}{2}\left(C_4C_1C_2-C_4C_3C_2\right)=\angle A_1SA_2\cdots$①

又 A_1 和 A_3 互為對稱點，故 R、S 也互為對稱點。

(3)對圓 O_1 來說，當 $\angle A_3RA_1$ 是圓外角時， $\angle A_1SA_3$ 就是圓內角，反之亦然。以前者情形來分

析 $\angle A_3RA_1=\frac{1}{2}\left(A_1IA_3-A_{4,3}A_{1,2}\right)$ 、 $\angle A_1SA_3=\frac{1}{2}\left(A_1IA_3+A_{3,2}A_{4,1}\right)\Rightarrow\angle A_3RA_1+\angle A_1SA_3=A_1IA_3$ 、

$\angle A_1SA_3-\angle A_3RA_1=A_{4,3}A_{1,2}=A_{3,2}A_{4,1}\cdots\cdots$②，由①、②式可得 $A_{4,3}A_{1,2}=A_{3,2}A_{4,1}=0$ ■

(二) 圓外切五邊形

在圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中心頂點外接圓 O_1 內有包 1 點（ A_5 ）和包 2 點（ A_5 和 A_4 ）兩種情況，如圖 35 和圖 36，分別分析說明如下：

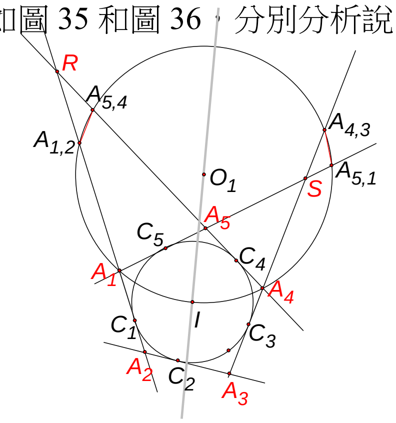


圖 35

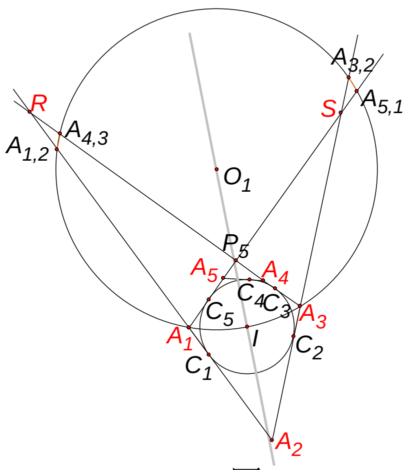


圖 36

1. 從包 1 點情形開始，證明如下：

(1)已知條件為心交點 $A_{5,4}$ 和 $A_{1,2}$ 、點 $A_{4,3}$ 和 $A_{5,1}$ 分別重合時，如圖 37，

同四邊形的理由可得 點 A_5 在 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 上且 C_5 和 C_4 互為對稱點，

又 $\Delta A_{5,4}A_5A_1\cong\Delta A_{4,3}A_5A_4$ $(ASA)\Rightarrow\overline{A_1A_5}=\overline{A_4A_5}\Rightarrow$ 點 A_1 和 A_4 互為對稱點。

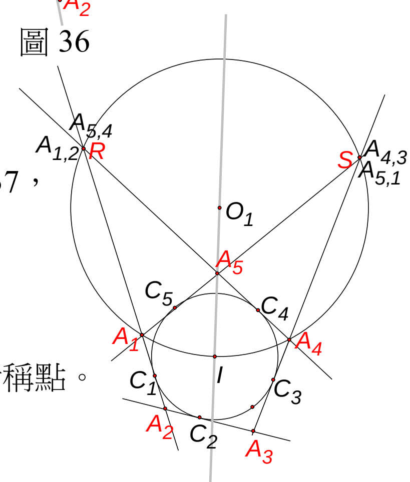


圖 37

(2)**已知條件** $\overline{A_1A_5} = \overline{A_5A_4}$，則點 A_5 在對稱軸 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 上，參考圖 35。

因為 $\angle A_{1,2}RA_{5,4} = \frac{1}{2}\left(C_1C_3C_4 - C_1C_5C_4\right)$、$\angle A_{4,3}SA_{5,1} = \frac{1}{2}\left(C_5C_1C_3 - C_5C_4C_3\right)$

又 $\angle A_{1,2}RA_{5,4} = \frac{1}{2}\left(A_1IA_4 - A_{1,2}A_{5,4}\right)$，$\angle A_{4,3}SA_{5,1} = \frac{1}{2}\left(A_1IA_4 + A_{4,3}A_{5,1}\right)$

$\Rightarrow C_5C_1C_3 - C_5C_4C_3 - C_1C_3C_4 + C_1C_5C_4 = A_{4,3}A_{5,1} + A_{1,2}A_{5,4} \cdots\cdots$ ③

又 $\overline{A_1C_5} = \overline{C_4A_4}$ $\therefore \overline{A_1C_1} = \overline{A_4C_3} \Rightarrow C_1$ 和 C_3 也為對稱點，

得出 $C_1C_5 = C_3C_4$ $\therefore C_1C_3C_4 = C_5C_1C_3$ 且 $C_1C_5C_4 = C_5C_4C_3$

則③式變成 $A_{4,3}A_{5,1} + A_{1,2}A_{5,4} = 0$ $\therefore A_{4,3}A_{5,1} = A_{1,2}A_{5,4} = 0$ 故得證

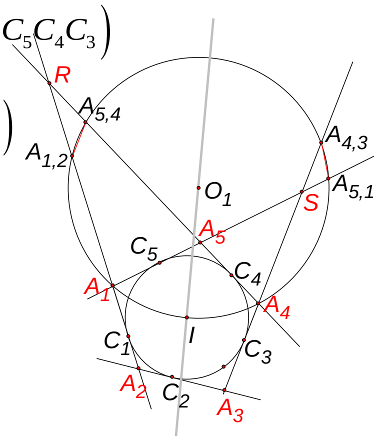


圖 35

邊數 $n \geq 5$ 的圓外切 n 邊形，其心頂點外接圓在包 1 點的情況下都有相同規律的共點性質，故省略證明。

2. 包 2 點情形，分析說明如下：

(1)**已知條件為心交點 $A_{4,3}$ 和 $A_{1,2}$、點 $A_{3,2}$ 和 $A_{5,1}$ 分別重合時**，如圖 38，

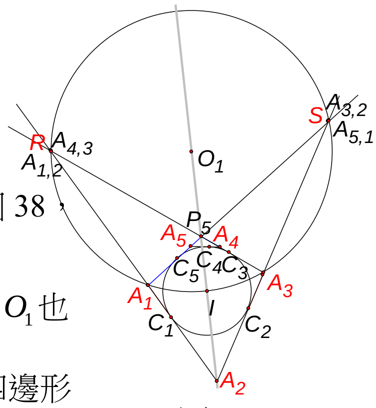


圖 38

邊 $\overline{A_4A_3}$ 和 $\overline{A_5A_1}$ 的延長線也會交於另一點 P_5，則心頂點外接圓 O_1 也可看作是圓外切四邊形 $A_1A_2A_3P_5$ 的，因此就可以沿用圓外切四邊形的共點性質，也就是當點 $A_{4,3}$ 和 $A_{1,2}$、點 $A_{3,2}$ 和 $A_{5,1}$ 分別重合時，會產生新的圓外切四邊形 $A_1A_2A_3P_5$ 是一個箏形。對於原圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 而言，就只有一組鄰邊相等，即 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$，其他邊長則不一定相等。

(2)參考圖 36，已知條件為 $\overline{A_1P_5} = \overline{P_5A_3} \Rightarrow$ 四邊形 $A_1A_2A_3P_5$ 為箏形且 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 為其對稱軸，則可同四邊形的推導原理，得到圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，$\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_4A_3}$、$\overline{A_3A_2}$ 和 $\overline{A_5A_1}$ 的延長線分別在圓 O_1 上產生的心交點會重合 ■

(三) 圓外切六邊形及圓外切 n 邊形

當 $n \geq 6$ 時，包 1、$n-i$ 及 $n-3$ 點的情況皆可同圓外切四、五邊形的推導原理可證得對應邊

數的共點性質。將圓外切 n 邊形心頂點外接圓與特定邊延長線的共點性質統整如推論 3 所示。

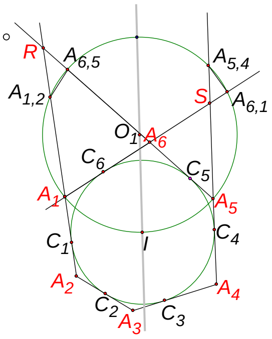


圖 39　$n=6$ 時包 1 點的圖形

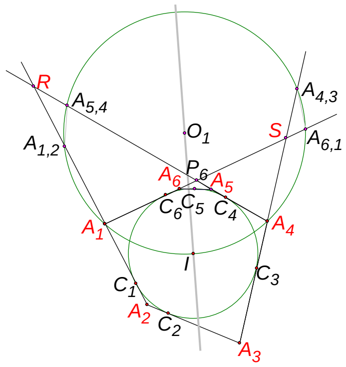


圖 40　$n=6$ 時包 2 點的圖形

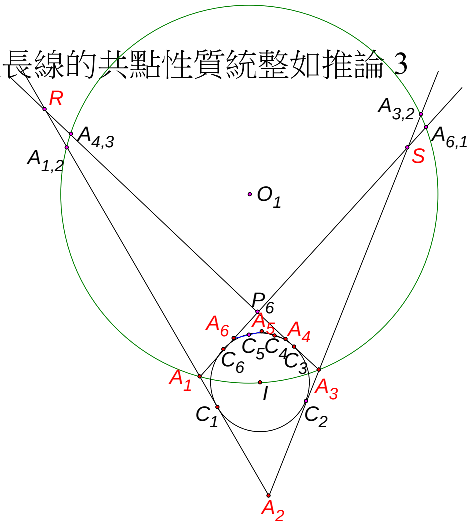


圖 41　$n=6$ 時包 3 點的圖形

推論 3：**【邊延長線共點性質】**

圓外切 n 邊形中，由內切圓圓心 I 及特定兩頂點所形成三角形之心頂點外接圓與特定邊延長線之心交點共點時該特定邊長與邊延長線段的關係，稱為**邊延長線共點性質**。分別有心頂點外接圓內包 1 個頂點（A_n）、包 $n-i$ 個頂點（A_n、A_{n-1}、…、A_{i+1}）及包 $n-3$ 個頂點（A_n、A_{n-1}、…、A_4）三種情況，其中 $4\le i\le n-2$，$i\in\mathbb{N}$，$n\ge 6$。**圓外切四、五邊形分別只有包 1 點與包 1、2 點情況**。

1. 包 1 個頂點：

   若 $\overline{A_1A_n}=\overline{A_nA_{n-1}}$，**若且唯若** $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_nA_{n-1}}$ 的延長線、$\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$ 的延長線分別會在心頂點外接圓上共點。**在 $n=4$ 時，兩充分必要條件皆恰可得到箏形**。

2. 包 $n-i$ 個頂點：（P_n 為 $\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_{i+1}A_i}$ 的延長線在心頂點外接圓內的交點）

   若 $\overline{A_1P_n}=\overline{P_nA_i}$，**若且唯若** $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_{i+1}A_i}$ 的延長線、$\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_iA_{i-1}}$ 的延長線分別會在心頂點外接圓上共點。（$4\le i\le n-2$，$i,n\in\mathbb{N}$，$n\ge 6$）

3. 包 $n-3$ 個頂點：（P_n 為 $\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_4A_3}$ 的延長線在心頂點外接圓內的交點）

   若 $\overline{A_1P_n}=\overline{P_nA_3}$，**若且唯若** $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_4A_3}$ 的延長線、$\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_3A_2}$ 的延長線分別會在心頂點外接圓上共點。

四、第二代圓外切多邊形

(一) 第一代與第二代圓外切多邊形的邊數關係

1. **圓外切四邊形**：如同 P.2~3 的名詞定義所述，第二代圓外切 n 邊形是由原圓外切 n 邊形的所有邊延長後與心頂點外接圓 O_1 的交點所形成，如圖 42 的 $C_{1(2)}$ 、 $C_{2(2)}$ 、 $C_{3(2)}$ 、 $C_{4(2)}$ ，利用圓心 O_1 與這些當作切點的四個點作出第二代圓外切四邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}$ 和第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 。再將四個邊 $\overline{A_{1(2)}A_{4(2)}}$ 、 $\overline{A_{2(2)}A_{3(2)}}$ 、 $\overline{A_{1(2)}A_{2(2)}}$ 和 $\overline{A_{4(2)}A_{3(2)}}$ 延長，在第二代心頂點圓 $O_{1(2)}$ 上分別出現了共點的現象，即共點於 ***R*** 和 ***S*** 點。

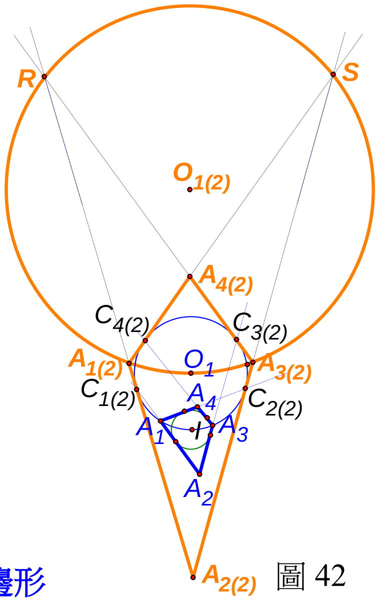


圖 42

2. 繼續推廣到圓外切五邊形，可以產生第二代是圓外切六邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}A_{5(2)}A_{6(2)}$ ，如圖 43，且是在第一代圓外切五邊形包 2 點的情形下作出的。圓外切五邊形所有邊的延長線與圓 O_1 的交點共有六個，其中包在圓 O_1 內的 2 頂點形成的邊延長線可以有兩個交點， $C_{2(2)}$ 和 $C_{3(2)}$ 。把這六個交點當作切點作出第二代圓外切六邊形與第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 。其中四個邊 $\overline{A_{1(2)}A_{6(2)}}$ 和 $\overline{A_{5(2)}A_{4(2)}}$ 、 $\overline{A_{1(2)}A_{2(2)}}$ 和 $\overline{A_{6(2)}A_{5(2)}}$ 延長線在圓 $O_{1(2)}$ 上分別共點於 *R* 和 *S* 點。但是第一代圓外切五邊形包 1 點的情形只能作出第二代四邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}$ ，理由同四邊形一樣，如圖 44。

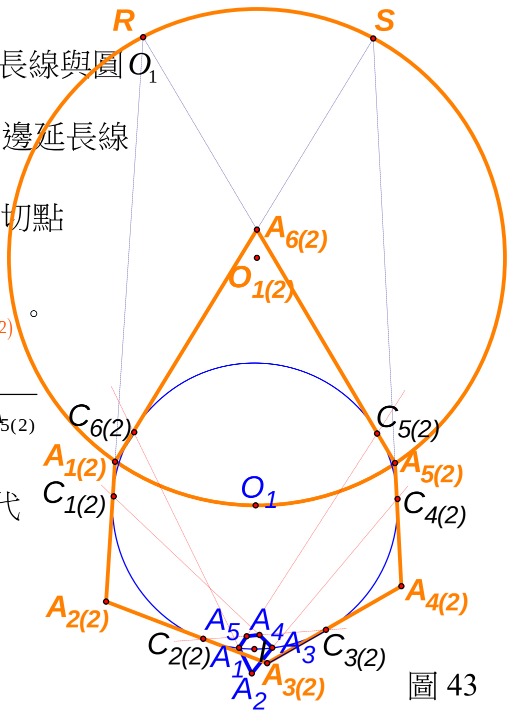


圖 43

3. 圓外切六邊形的情況，依照上面的作圖方式可在第一代圓外切六邊形包 1 點、包 2 點及包 3 點的條件下，分別得到如圖 45、46 和 47 的結果，也就是分別為第二代圓外切四邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}$ 、六邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}A_{5(2)}A_{6(2)}$ 和

八邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}A_{5(2)}A_{6(2)}A_{7(2)}A_{8(2)}$。

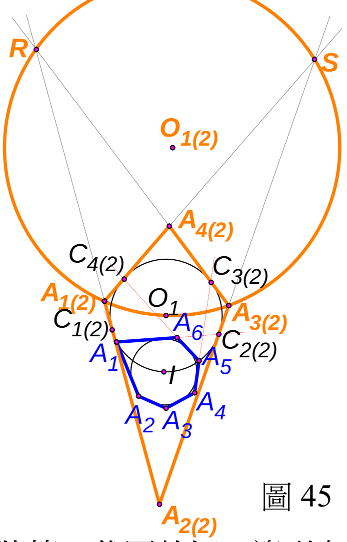


圖 45

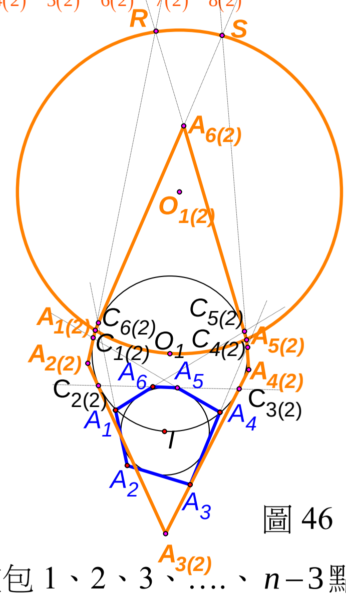


圖 46

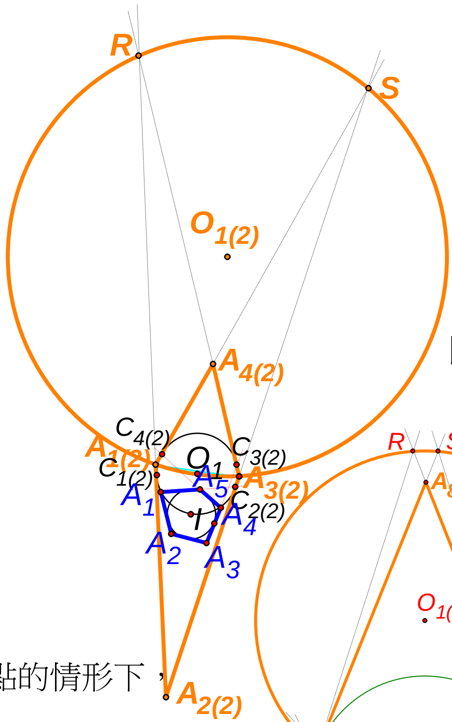


圖 44

將第一代圓外切 n 邊形在包 1、2、3、….、 $n-3$ 點的情形下，產生第二代圓外切 m 邊形的結果統整在**表格一**中，其中 $n \geq 4$，參考圖 42～47，且每一種邊數的第一代圓外切 n 邊形在包最多頂點數 $n-3$ 的條件下，可產生最多邊數的第二代圓外切 $2n-4$ 邊形。

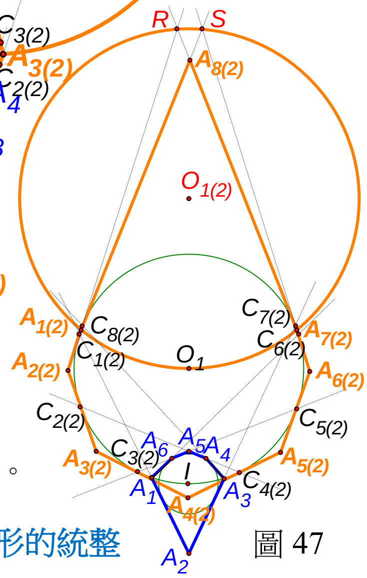


圖 47

表格一：第一代圓外切 n 邊形可以產生第二代圓外切 m 邊形的統整

邊數 n	包 **1** 點	包 **2** 點	包 **3** 點	包 **4** 點	包 **5** 點	…	包 $n-3$ 點
4	第二代 四邊形	無	無	無	無	…	第二代 四邊形
5	第二代 四邊形	第二代 六邊形	無	無	無	…	第二代 六邊形
6	第二代 四邊形	第二代 六邊形	第二代 八邊形	無	無	…	第二代 八邊形
7	第二代 四邊形	第二代 六邊形	第二代 八邊形	第二代 十邊形	無	…	第二代 十邊形
8	第二代 四邊形	第二代 六邊形	第二代 八邊形	第二代 十邊形	第二代 十二邊形	…	第二代 十二邊形
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮
n	第二代 四邊形	第二代 六邊形	第二代 八邊形	第二代 十邊形	第二代 十二邊形	…	第二代 $2n-4$ 邊形

(二) 第二代心頂點外接圓與特定邊延長線相交的共點現象

第二代圓外切 n 邊形的心頂點外接圓與特定邊長的延長線相交後，兩兩心交點會分別

重合，如圖 42～47 中的重合點 R 和 S。此共點現象可依據推論 1 來說明如下：

1. **第一代圓外切四邊產生的第二代圓外切四邊形**，如圖 42，由文獻 1 的證明中可知，第一代心頂點外接圓 O_1 與特定邊延長線的兩組心交點 $C_{1(2)}$ 和 $C_{4(2)}$ 、 $C_{2(2)}$ 和 $C_{3(2)}$ 在不重合時，$\overline{C_{1(2)}C_{4(2)}}=\overline{C_{2(2)}C_{3(2)}}$ ，且 $C_{1(2)}$ 和 $C_{4(2)}$ 分別為 $C_{2(2)}$ 和 $C_{3(2)}$ 對 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 的鏡射點。又 $\overline{A_{4(2)}C_{4(2)}}=\overline{A_{4(2)}C_{3(2)}}$ ，所以點 $A_{4(2)}$ 必在 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 上，

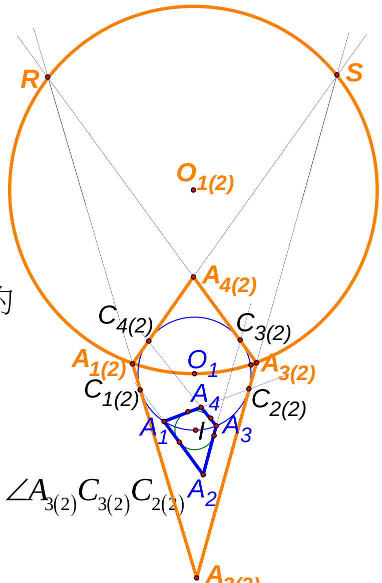


圖 42

$\therefore \angle A_{4(2)}C_{4(2)}C_{1(2)}=\angle A_{4(2)}C_{3(2)}C_{2(2)}$ （對稱角）$\Rightarrow \angle A_{1(2)}C_{4(2)}C_{1(2)}=\angle A_{3(2)}C_{3(2)}C_{2(2)}$

$\therefore \Delta A_{1(2)}C_{4(2)}C_{1(2)}\cong \Delta A_{3(2)}C_{3(2)}C_{2(2)}\,(ASA)\Rightarrow \overline{C_{4(2)}A_{1(2)}}=\overline{C_{3(2)}A_{3(2)}}$

$\Rightarrow \overline{A_{1(2)}A_{4(2)}}=\overline{A_{4(2)}A_{3(2)}}$ 故由推論 1 可得第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 與兩組特定邊延長線的心交點會分別重合，且點 $A_{4(2)}$ 也在對稱軸 $\overleftrightarrow{O_{1(2)}O_1}$ 上，亦即 $\overleftrightarrow{O_{1(2)}O_1}$ 和 $\overleftrightarrow{O_1I}$ 會重合 ■

2. 參考表格一，第一代圓外切五、六、….、n 邊形分別在包 1、2、…..、$n-3$ 點的條件下，產生的第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 只會包住第二代圓外切四、六、….、$2n-4$ 邊形的一個頂點。故可同四邊形的推導原理，分別得到第二代圓外切四、六、…、$2n-4$ 邊形中的 $\overline{A_{4(2)}A_{1(2)}}=\overline{A_{4(2)}A_{3(2)}}$ 、 $\overline{A_{6(2)}A_{1(2)}}=\overline{A_{6(2)}A_{5(2)}}$ 、……、 $\overline{A_{2n-4(2)}A_{1(2)}}=\overline{A_{2n-4(2)}A_{2n-5(2)}}$ ，進而由推論 3 可得第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 與兩組特定邊延長線的心交點會分別重合 ■

將第一代與第二代圓外切多邊形的邊數關係，以及第二代圓外切多邊形的共點性質統整在推論 4，如下所述。

推論 4：**【第二代圓外切多邊形上的共點性質】**

1. **邊數關係**：第一代圓外切 n 邊形在包 1、2、….、$n-3$ 個頂點的條件下，可作出 $n-3$ 種第二代圓外切 m 邊形，邊數分別為 $m=4,6,\cdots,2n-4$ ，其中 $n\geq 4$ 。
2. 第二代圓外切多邊形中只有**一個頂點**被包在其心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 內，且其特定兩組邊延長線會在圓 $O_{1(2)}$ 上分別**共點**。

證明：共點性質已在前面分析說明過。對於推論中第 2 點提到：第二代圓外切多邊形中只有**一個頂點**被包在其心頂點外接圓$O_{1(2)}$內，參考圖 48、49。此乃因為第二代圓外切四邊形的頂點$A_{1(2)}$和$A_{3(2)}$、第二代圓外切十二邊形的頂點$A_{1(2)}$和$A_{11(2)}$分別是由第一代心頂點外接圓上的兩組心交點$C_{1(2)}$和$C_{4(2)}$、$C_{3(2)}$和$C_{2(2)}$點，以及$C_{1(2)}$和$C_{12(2)}$、$C_{11(2)}$和

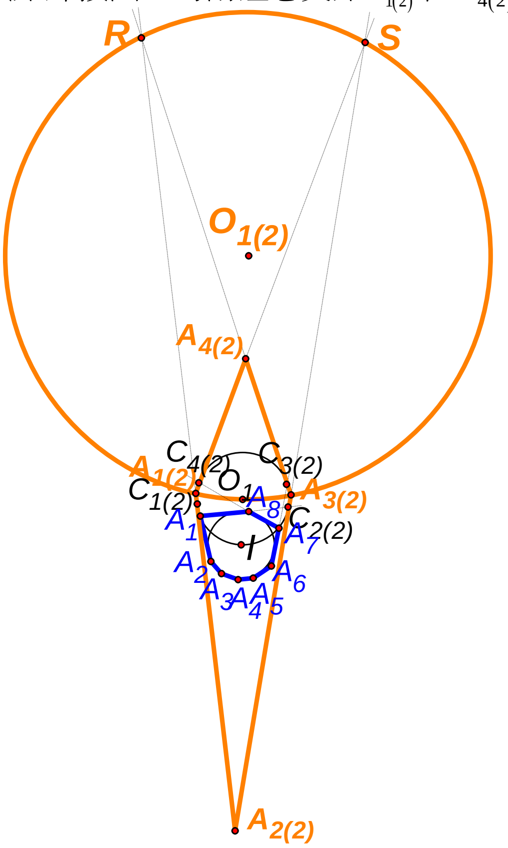


圖 48　圓外切八$(n=8)$邊形包 1 點時產生第二代圓外切四邊形

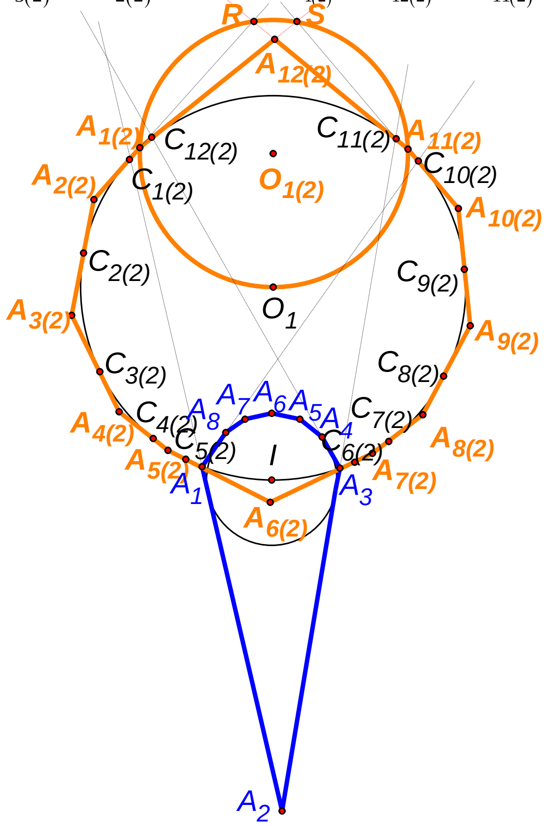


圖 49　圓外切八邊形$(n=8)$包 5 $(n-3=8-3=5)$點時產生第二代圓外切十二$(2n-4=16-4=12)$邊形

$C_{10(2)}$點當作切點所作出的切線相交而得到的，此時切點中的$C_{4(2)}$和$C_{3(2)}$、$C_{12(2)}$和$C_{11(2)}$的切線也會分別交於一點，即為第二代圓外切四、十二邊形的最後一個頂點$A_{4(2)}$和$A_{12(2)}$，且唯一包含在第二代心頂點外接圓內，故得證。

五、第二代圓外切多邊形的凹凸判別性質

前面討論的第二代圓外切多邊形皆是凸多邊形，如圖 42～49，但也會出現如圖 50、51 的兩種第二代圓外切凹多邊形（該橘色圖形的各邊或邊延長線仍會與圓O_1相切），觀察到產生凹

多邊形的關鍵角度是圖 50 中的 $\angle C_{1(2)}O_1C_{2(2)}\left(=C_{1(2)}IC_{2(2)}\right)$ 和 $\angle C_{4(2)}O_1C_{3(2)}$ 及圖 51 中的 $\angle C_{2(2)}O_1C_{3(2)}\left(=C_{2(2)}IC_{3(2)}\right)$ 和 $\angle C_{6(2)}O_1C_{5(2)}$，它們皆是開口向上的圓心角。稱這兩組分別位在第一代心頂點外接圓最下方與最上方的心交點（切點）們形成的角為**凹凸判別角**。觀察其他邊數的凹凸規律關係後，總結出判別性質如推論 5 所示。

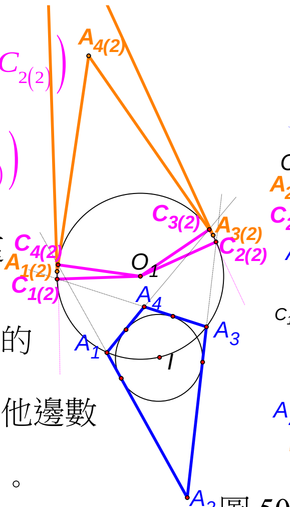


圖 50

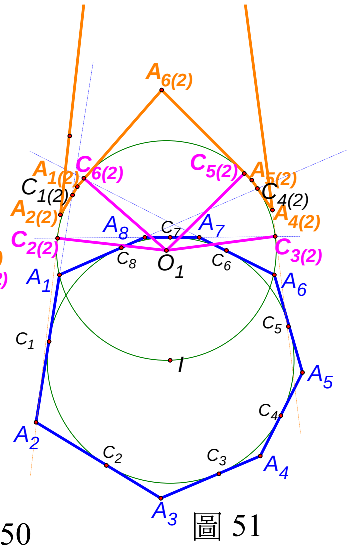


圖 51

推論 5：若第一代心頂點外接圓 O_1 上的凹凸判別角符合下列兩種情況之一時，**第二代圓外切 n 邊形為凹多邊形**。其中，$m=1,2,\cdots,n-3$ 表示圓 O_1 所包的頂點數。

1. $\angle C_{m(2)}O_1C_{m+1(2)}\left(=C_{m(2)}IC_{m+1(2)}\right)>180°\Rightarrow$ 兩個凹凸判別角皆開口向上；

2. $\overset{\frown}{C_{2m+2(2)}C_{2m+1(2)}}>180°$（該弧為優弧）$\Rightarrow$ 兩個凹凸判別角皆開口向下。

證明：**1.** 參考圖 42 和 49，第一代心頂點外接圓 O_1 在包 m 點時，第二代凸圓外切 n 邊形的邊的一個內角為 $\angle C_{m(2)}A_{m+1(2)}C_{m+1(2)}$ 且 $\angle C_{m(2)}A_{m+1(2)}C_{m+1(2)}+\angle C_{m(2)}O_1C_{m+1(2)}=180°$

又 $\angle C_{m(2)}O_1C_{m+1(2)}=C_{m(2)}IC_{m+1(2)}$。已知 $0°<C_{m(2)}IC_{m+1(2)}<360°$，當 $\angle C_{m(2)}O_1C_{m+1(2)}$ 大於 $180°$，小於 $360°$ 時，亦是 $180°<C_{m(2)}IC_{m+1(2)}<360°$ 時，則 $-180°<\angle C_{m(2)}A_{m+1(2)}C_{m+1(2)}<0°$。因為 $0°$、$-180°$ 分別為 $360°$、$180°$ 的同界角，故 $180°<\angle C_{m(2)}A_{m+1(2)}C_{m+1(2)}<360°$，該 n 邊形有一優角，故為第二代圓外切凹 n 邊形，如圖 50 及 51。

2. 第二代圓外切 n 邊形最上方的內角為 $\angle C_{2m+2(2)}A_{2m+2(2)}C_{2m+1(2)}$ 且 $\angle C_{2m+2(2)}A_{2m+2(2)}C_{2m+1(2)}+\angle C_{2m+2(2)}O_1C_{2m+1(2)}=180°$，同 **1** 的推導原理可得，當 $\overset{\frown}{C_{2m+2(2)}C_{2m+1(2)}}>180°$（該弧為優弧）時，第二代圓外切 n 邊形為凹多邊形，如圖 52。

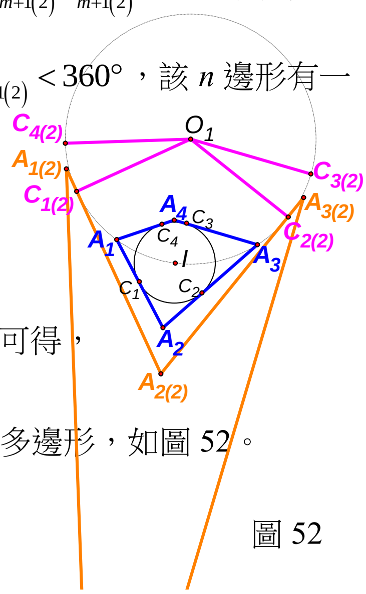


圖 52

六、 第一代圓外切 n 邊形之內切圓與心頂點外接圓的面積、周長關係

(一) 面積關係

1. 圓外切四邊形（只有包 1 點）

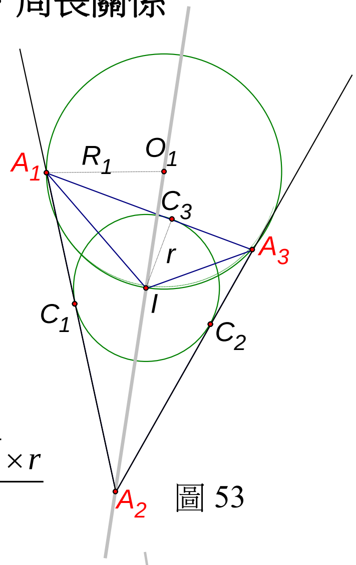


圖 53

先從三角形內切圓半徑與心頂點外接圓半徑關係開始探討，如圖 53，$\Delta A_1A_2A_3$ 中，圓 I 為其內切圓，半徑為 r，由圓心 I、兩頂點 A_1 和 A_3 所作的心頂點外接圓 O_1，半徑為 R_1。

由正弦定理可得 ΔA_1IA_3面積$=\dfrac{\overline{A_1I}\times\overline{IA_3}\times\overline{A_1A_3}}{4R_1}$，又 $\Delta A_1IA_3=\dfrac{\overline{A_1A_3}\times r}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{A_1I}}{R_1}\times\dfrac{\overline{IA_3}}{r}=2$。再觀察圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，如圖 54，

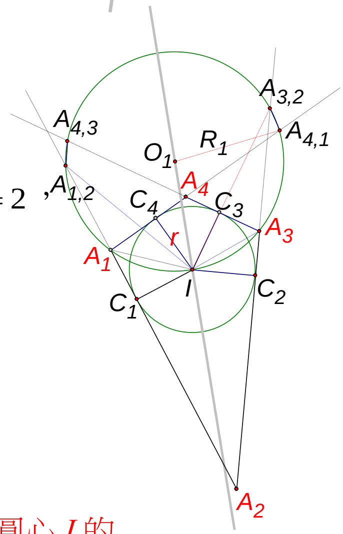


圖 54

在 $\Delta A_{1,2}A_1I$ 中，$\dfrac{\overline{A_1I}\times\overline{A_{1,2}I}}{R_1r}=2\cdots$①、在 $\Delta A_{3,2}A_3I$ 中，$\dfrac{\overline{A_3I}\times\overline{A_{3,2}I}}{R_1r}=2$，

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_{1,2}I}}{R_1^2}\times\frac{\overline{A_3I}\times\overline{A_{3,2}I}}{r^2}=4\text{，}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A_{1,2}I}\times\overline{A_{3,2}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_3I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}\cdots\cdots③$$

即圖 54 中心交點 $A_{1,2}$ 和另一邊不對稱的心交點 $A_{3,2}$ 分別與內切圓心 I 的連線段 $\overline{A_{1,2}I}$ 、 $\overline{A_{3,2}I}$ 的乘積與心頂點外接圓 O_1 面積的比值，乘以頂點 A_1 、 A_3 分別和內切圓心 I 的連線段 $\overline{A_1I}$ 、 $\overline{A_3I}$ 的乘積與內切圓 I 面積的比值是一個**定值**。

又由性質 1-(2)可知，圖 54 中，同理可證得③式也可寫成

$$\frac{\overline{A_{4,1}I}\times\overline{A_{4,3}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_3I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}$$ 。再用相同的推導原理，

也可從①式得到$\Rightarrow \dfrac{\overline{A_{1,2}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\dfrac{\overline{A_1I}}{\text{內切圓周長}}=\dfrac{1}{2\pi^2}\doteq 0.05066$，也就是心交點 $A_{1,2}$ 和 I 的連線段與心頂點外接圓 O_1 周長的比值，乘以頂點 A_1 和 I 的連線段與內切圓周

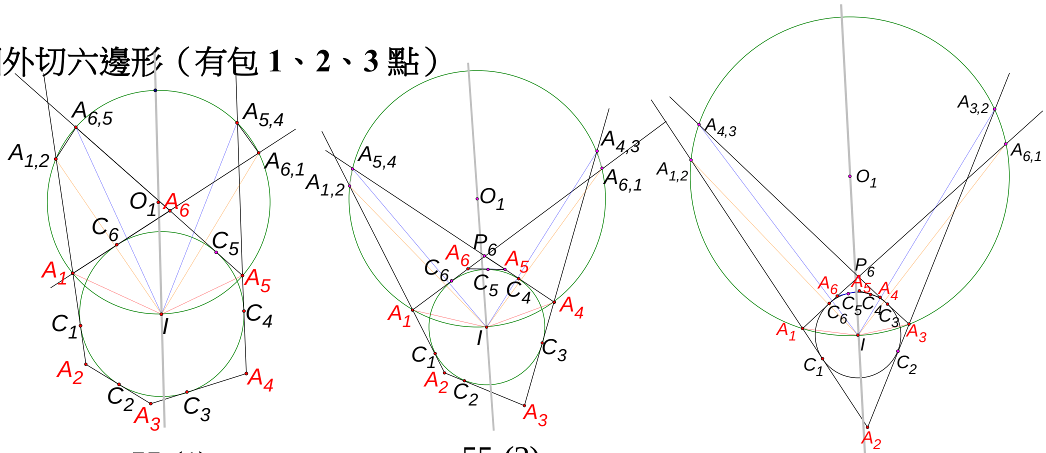
長的比值也是一個定值，且與頂點 A_1 有關的心交點 $A_{4,1}$ 也有同樣的關係式，即

$\frac{\overline{A_{4,1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_1I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{1}{2\pi^2}\doteq 0.05066$。另外一組與頂點 A_3 有關的心交點

$A_{3,2}$ 或 $A_{4,3}$ 也會得到相同定值的關係式，即

$$\frac{\overline{A_{3,2}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_3I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{\overline{A_{4,3}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_3I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{1}{2\pi^2}\doteq 0.05066$$

2. 圓外切六邊形（有包 1、2、3 點）



55-(1) 55-(2) 55-(3)

圖 55-(1)～(3)為圓外切六邊形包 1、2、3 點的圖形

如圖 55-(1)～(3)，分別為包 1、2、3 點的示意圖，同圓外切四邊形的推導原理，一樣可得到關於心頂點外接圓 O_1 與內切圓 I 面積依包 1、2、3 點的三種關係式，

以心交點 $A_{1,2}$ 為起始，$\underbrace{\frac{\overline{A_{1,2}I}\times\overline{A_{5,4}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_5I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}}_{\text{包1點}}$、

$\underbrace{\frac{\overline{A_{1,2}I}\times\overline{A_{4,3}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_4I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}}_{\text{包2點}}$、$\underbrace{\frac{\overline{A_{1,2}I}\times\overline{A_{3,2}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_3I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}}_{\text{包3點}}$；

若以心交點 $A_{6,1}$ 為起始，$\underbrace{\frac{\overline{A_{6,1}I}\times\overline{A_{6,5}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_5I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}}_{\text{包1點}}$、

$\underbrace{\frac{\overline{A_{6,1}I}\times\overline{A_{5,4}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_4I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}}_{\text{包2點}}$、$\underbrace{\frac{\overline{A_{6,1}I}\times\overline{A_{4,3}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_3I}}{\text{內切圓面積}}=\frac{4}{\pi^2}}_{\text{包3點}}$。

而心頂點外接圓 O_1 與內切圓 I 的周長關係式也同理可得以下式子，如圖 55(1)～(3)：

與頂點 A_1 有關（對於所有的 k 值），

$$\frac{\overline{A_{1,2}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_1 I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{\overline{A_{n,1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_1 I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{1}{2\pi^2}$$；

與頂點 A_{n-k} 有關，

$$\frac{\overline{A_{n-k,n-k-1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{\overline{A_{n-k+1,n-k}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{1}{2\pi^2}$$

（包 k 點），$n=6$ ，$k=1,2,\cdots$，$n-3$ 。

上列關於圓外切四、六邊形的心頂點外接圓與內切圓的面積、周長關係一般式的一致規律性可以說明對於任意邊數 n 的圓外切多邊形，在包 1、2、3、....、$n-3$ 點的情形下皆成立，故統整出推論 6 如下。

推論 6：

1. 面積關係一般式

圓外切 n 邊形中，心頂點外接圓 在包 1、2、…、$n-3$ 點情形下，心頂點外接圓 O_1 與內切圓 I 面積（或周長）的關係與①特定心交點和 I 的連線段，以及②特定頂點和 I 的連線段有關。以下各有包 k 點的情形，其中 $k=1,2,\cdots,n-3$ 。

以心交點 $A_{1,2}$ 為起始，則 $\dfrac{\overline{A_{1,2}I}\times\overline{A_{n-k,n-k-1}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\dfrac{\overline{A_1 I}\times\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓面積}}=\dfrac{4}{\pi^2}$ （包 k 點）；

若以心交點 $A_{n,1}$ 為起始，則 $\dfrac{\overline{A_{n,1}I}\times\overline{A_{n-k+1,n-k}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\dfrac{\overline{A_1 I}\times\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓面積}}=\dfrac{4}{\pi^2}$ （包 k 點）。

2. 周長關係一般式

與頂點 A_1 有關，

$$\frac{\overline{A_{1,2}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_1 I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{\overline{A_{n,1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_1 I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{1}{2\pi^2}$$；

與頂點 A_{n-k} 有關，

$$\frac{\overline{A_{n-k,n-k-1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{\overline{A_{n-k+1,n-k}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\frac{\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓周長}}=\frac{1}{2\pi^2}$$ 。

七、圓外切 n 邊形中任意兩相鄰心頂點外接圓間的面積、周長關係

如圖 56，圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 只有 2 個心頂點外接圓，由心頂點三角形 ΔA_1IA_3 和 ΔA_4IA_2 所得到的這 2 個心頂點外接圓圓心的下標序，是以心頂點三角形最左一個頂點序來命名，也是依圓外切四邊形逆時針方向的頂點序取得。故 ΔA_1IA_3 的心頂點外接圓圓心為 O_1；ΔA_4IA_2 的心頂點外接圓圓心為 O_4。四邊形四邊延長線分別會與圓 O_1、O_4 相交，這些心交點下標的前二碼是同前面名詞定義一樣，第三碼則依探討的心頂點外接圓圓心下標序來加入。例如圓 O_1 上的心交點有 $A_{1,2,1}$、$A_{4,3,1}$、$A_{3,2,1}$ 和 $A_{4,1,1}$，它們下標的第三碼都是 1；圓 O_4 上的心交點有 $A_{2,1,4}$、$A_{3,4,4}$、$A_{3,2,4}$ 和 $A_{4,1,4}$，它們下標的第三碼都是 4。往後其他圓外切 n 邊形 n 個心頂點外接圓圓心的下標，以及各自圓上心交點下標的三碼皆以此方式命名，好方便後續的探討。又為了得到最多的心頂點外接圓，這裡只討論包 1 點的情況。

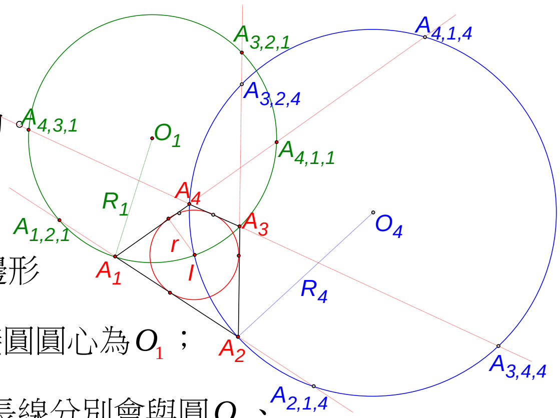


圖 56

(一) 圓外切四邊形

1. 面積關係：如圖 56，由心頂點三角形 ΔA_1IA_3 和 ΔA_4IA_2 分別產生兩個心頂點外接圓 O_1 和 O_4，採用 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_3A_2}$ 邊延長線與圓 O_1 的兩個心交點 $A_{1,2,1}$ 和 $A_{3,2,1}$ 來列出面積的關係式；採用 $\overline{A_4A_1}$ 和 $\overline{A_2A_1}$ 邊延長線與圓 O_4 的兩個心交點 $A_{4,1,4}$ 和 $A_{2,1,4}$ 來列出面積的關係式。由推論 6-1 可得兩個心頂點外接圓 O_1、O_4 對於內切圓 I 的面積比值關係式，

對於圓 O_1，$\dfrac{\overline{A_{1,2,1}I}\times\overline{A_{3,2,1}I}}{\text{外接圓}O_1\text{面積}}\times\dfrac{\overline{A_1I}\times\overline{A_3I}}{\text{內切圓}I\text{面積}}=\dfrac{4}{\pi^2}$；

對於圓 O_4，$\dfrac{\overline{A_{4,1,4}I}\times\overline{A_{2,1,4}I}}{\text{外接圓}O_4\text{面積}}\times\dfrac{\overline{A_4I}\times\overline{A_2I}}{\text{內切圓}I\text{面積}}=\dfrac{4}{\pi^2}$

$$\Rightarrow\frac{\overline{A_{1,2,1}I}\times\overline{A_{3,2,1}I}\times\overline{A_1I}\times\overline{A_3I}}{\text{外接圓}O_1\text{面積}}=\frac{\overline{A_{4,1,4}I}\times\overline{A_{2,1,4}I}\times\overline{A_4I}\times\overline{A_2I}}{\text{外接圓}O_4\text{面積}}=\frac{4}{\pi^2}\times\text{內切圓}I\text{面積}\cdots\cdots①$$

亦即特定心交點與 I 的連線段乘以特定頂點與 I 的連線段之乘積與對應的心頂點外接圓面積之比值是相等的，且是內切圓 I 面積的 $\dfrac{4}{\pi^2}$ 倍。心頂點外接圓 O_1 和 O_4 上另

外的心交點$A_{4,3,1}$和$A_{4,1,1}$、$A_{3,2,4}$和$A_{3,4,4}$也可由推論 6-1 列出與①式一樣的關係式。

2. 周長關係：如圖 56，由推論 6-2 可知，周長關係是只與一個心交點和一個頂點有關，所以對於心頂點外接圓O_4和O_1，故採用同時與頂點A_4和A_1有關的邊$\overline{A_4A_1}$延長線產生的心交點$A_{4,1,1}$和$A_{4,1,4}$來討論心頂點外接圓O_1、O_4和內切圓周長的關係。

$$\underbrace{\frac{\overline{A_{4,1,4}I}\times\overline{A_4I}}{\text{心頂點外接圓}O_4\text{周長}}}_{\text{對於圓}O_4}=\underbrace{\frac{\overline{A_{4,1,1}I}\times\overline{A_1I}}{\text{心頂點外接圓}O_1\text{周長}}}_{\text{對於圓}O_1}=\frac{1}{2\pi^2}\times\text{內切圓}I\text{周長}\cdots\cdots②$$

同面積關係一樣，心頂點外接圓O_4上另外的心交點$A_{3,2,4}$、$A_{2,1,4}$和$A_{3,4,4}$，圓O_1上另外的心交點$A_{1,2,1}$、$A_{4,3,1}$和$A_{3,2,1}$也可以由推論 6-2 列出與②式一樣的關係式。

(二) 其他邊數的圓外切 n 邊形，n 個心頂點外接圓間的面積（或周長）與內切圓面積或周長）的關係，同四邊形有一樣規律的關係式，並整理在推論 7 中。

推論 7： 在圓外切 n 邊形中包 1 點情形下，

1.面積關係：其邊延長線相交的 2 個特定心交點和內切圓圓心 I 的連線段與 2 個特定頂點和圓心 I 連線段的乘積與對應心頂點外接圓面積的比值都**相等**，且都是內切圓 I 面積的$\frac{4}{\pi^2}$倍，即對於圓O_i，$\frac{\overline{A_{i,i+1,i}I}\times\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}I}\times\overline{A_iI}\times\overline{A_{i+n-2}I}}{\text{心頂點外接圓}O_i\text{面積}}=\frac{4}{\pi^2}\times\text{內切圓}I\text{面積}$；

2.周長關係：任相鄰心頂點外接圓（圓O_i和O_{i+1}）與特定邊延長線（$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$）相交的心交點和內切圓圓心 I 的連線段與特定邊頂點和圓心 I 連線段的乘積與對應心頂點外接圓周長的比值都**相等**，且都是內切圓 I 周長的$\frac{1}{2\pi^2}$倍，即

對於圓O_i和O_{i+1}，$\frac{\overline{A_{i,i+1,i}I}\times\overline{A_iI}}{\text{心頂點外接圓}O_i\text{周長}}=\frac{\overline{A_{i,i+1,i+1}I}\times\overline{A_{i+1}I}}{\text{心頂點外接圓}O_{i+1}\text{周長}}=\frac{1}{2\pi^2}\times\text{內切圓}I\text{周長}$，

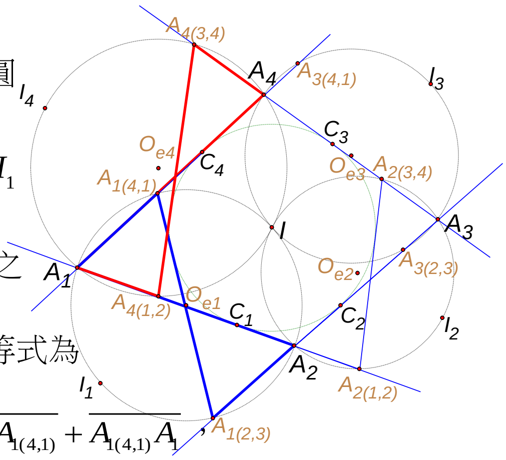
其中$i=1,2,\cdots,n$，以上各式若下標值 $>n$，則取下標值 mod n 為新下標值。

證明：因篇幅有限，故省略說明。詳細推導內容在附件中。

八、旁心頂點外接圓與邊延長線的關係

(一)相鄰兩旁心頂點外接圓與邊延長線關係式

與角平分線有關的還有旁切圓及旁心，如圖 57，$I_1 \sim I_4$ 為圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的旁心，其中圓 O_{e4} 、O_{e1} 為旁心 I_4 、I_1 和頂點 A_4 、A_1 、A_2 形成的心頂點三角形 $\Delta A_4I_4A_1$ 、$\Delta A_1I_1A_2$ 之心頂點外接圓。依據文獻 1 的等式，找到屬於旁心的相關等式為



$$\overline{A_1A_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}+\overline{A_{4(3,4)}A_{4(1,2)}}+\overline{A_{4(1,2)}A_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{1(2,3)}}+\overline{A_{1(2,3)}A_{1(4,1)}}+\overline{A_{1(4,1)}A_1}$$

圖 57

另外還有一組旁心 I_2 、I_3 也有一樣規律的等式。奇數邊的圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，也有兩組相鄰旁心的邊延長線等式。將觀察其他邊數的圓外切 n 邊形之旁心的邊延長線關係式統整如推論 8 所示。

推論 8：**相鄰旁心頂點外接圓與邊延長線關係式**

圓外切 n 邊形中，$I_1 \sim I_n$ 為 n 個旁心，相鄰兩旁心頂點外接圓與邊延長線迴圈關係式為：

$$\overline{A_{i(i+n-1,i)}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i(i+1,i+2)}}+\overline{A_{i(i+1,i+2)}A_{i(i+n-1,i)}}=\overline{A_{i+1(i,i+1)}A_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+2}}+\overline{A_{i+2}A_{i+1(i+2,i+3)}}+\overline{A_{i+1(i+2,i+3)}A_{i+1(i,i+1)}}$$

其中，在 $n=2k$ 或 $n=2k+1$ 時，若下標序從 $i=t$ 開始，則 $i=t,t+2,t+4,\cdots,t+2k-2$，$t=1,2,3,\cdots,n$；若下標值$_{(F_3,V_1)}$，則取下標值 $\bmod n$ 為新下標值。

證明：如圖 57，$\because \overline{A_1I_1}=\overline{A_{1(2,3)}I_1}$，$\overline{A_{1(4,1)}I_1}=\overline{A_2I_1}$，$\overline{A_{1(4,1)}A_1}=\overline{A_2A_{1(2,3)}} \Rightarrow A_{1(4,1)}I_1A_{1(2,3)}=A_1I_1A_2$

$\Rightarrow \overline{A_{1(4,1)}A_{1(2,3)}}=\overline{A_1A_2}$（等弧對等弦）又 $\overline{A_1I}=\overline{A_{1(2,3)}I}=\overline{A_{4(3,4)}I}$，$\overline{IC_1}=\overline{IC_2}$，

$\angle IC_1A_1=\angle IC_2A_{1(2,3)}=90^\circ$ $\quad \therefore \triangle A_1IC_1 \simeq \triangle A_{1(2,3)}IC_2(RHS)$，同理 $\triangle A_1IC_4 \simeq \triangle A_{4(3,4)}IC_3(RHS)$、

$\triangle IC_1A_1 \simeq \triangle IC_4A_1(RHS)$ $\Rightarrow \triangle A_{1(2,3)}IC_2 \simeq \triangle A_1IC_1 \simeq \triangle A_1IC_4 \simeq \triangle A_{4(3,4)}IC_3$

$\Rightarrow \overline{A_1C_4}+\overline{C_3A_{4(3,4)}}=\overline{A_1C_1}+\overline{A_{1(2,3)}C_2} \Rightarrow \overline{A_1C_4}+\overline{C_3A_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}=\overline{A_1C_1}+\overline{A_{1(2,3)}A_2}+\overline{A_2C_2}$

$\Rightarrow \overline{A_1C_4}+\overline{C_4A_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}=\overline{A_1C_1}+\overline{A_{1(2,3)}A_2}+\overline{C_1A_2} \Rightarrow \overline{A_1A_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{1(2,3)}}$

又 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_{1(2,3)}A_{1(4,1)}}$，$\overline{A_2A_{1(2,3)}}=\overline{A_1A_{1(4,1)}}$，$\overline{A_1A_4}=\overline{A_{4(3,4)}A_{4(1,2)}}$，$\overline{A_4A_{4(3,4)}}=\overline{A_1A_{4(1,2)}}$

$\Rightarrow \overline{A_1A_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}+\overline{A_{4(3,4)}A_{4(1,2)}}+\overline{A_{4(1,2)}A_1}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{1(2,3)}}+\overline{A_{1(2,3)}A_{1(4,1)}}+\overline{A_{1(4,1)}A_1}$ 。

如圖 58，圓外切五邊形也同理可證得，對於圓 O_{e1} 和 O_{e2}、圓 O_{e3} 和 O_{e4} 的邊延長線等式分別為

$$\overline{A_{1(5,1)}A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_{1(2,3)}}+\overline{A_{1(2,3)}A_{1(5,1)}}$$

$$=\overline{A_{2(1,2)}A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_{2(3,4)}}+\overline{A_{2(3,4)}A_{2(1,2)}}$$ 與

$$\overline{A_{3(2,3)}A_3}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_4A_{3(4,5)}}+\overline{A_{3(4,5)}A_{3(2,3)}}=\overline{A_{4(3,4)}A_4}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_5A_{4(5,1)}}+\overline{A_{4(5,1)}A_{4(3,4)}}$$ 。

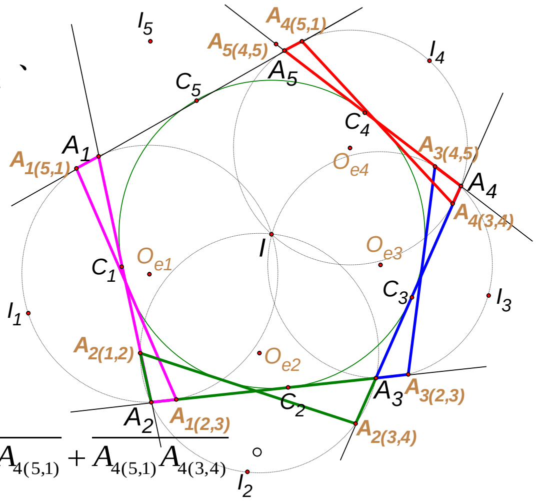


圖 58

(二)所有旁心頂點外接圓與邊延長線關係式

所有旁心頂點外接圓與對應邊延長線，也有漂亮的迴圈關係式，如圖 59，$\because \overline{A_1I}=\overline{A_{4(3,4)}I}$，

$\overline{A_{4(1,2)}I}=\overline{A_4I}$，又 $\overline{A_1A_{4(1,2)}}=\overline{A_{4(3,4)}A_4} \Rightarrow \overline{A_1I}+\overline{IA_{4(1,2)}}+\overline{A_{4(1,2)}A_1}=\overline{A_{4(3,4)}I}+\overline{IA_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}$

同理可得 $\overline{A_2I}+\overline{IA_{1(2,3)}}+\overline{A_{1(2,3)}A_2}=\overline{A_{1(4,1)}I}+\overline{IA_1}+\overline{A_1A_{1(4,1)}}$、

$\overline{A_3I}+\overline{IA_{2(3,4)}}+\overline{A_{2(3,4)}A_3}=\overline{A_{2(1,2)}I}+\overline{IA_2}+\overline{A_2A_{2(1,2)}}$、

$\overline{A_4I}+\overline{IA_{3(4,1)}}+\overline{A_{3(4,1)}A_4}=\overline{A_{3(2,3)}I}+\overline{IA_3}+\overline{A_3A_{3(2,3)}}$，將 4 個等式相加可得

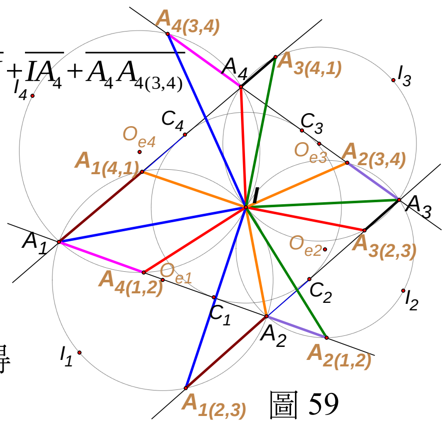


圖 59

由 A_1 開始，$\overline{A_1A_{4(1,2)}}+\overline{A_{4(1,2)}I}+\overline{IA_2}+\overline{A_2A_{1(2,3)}}+\overline{A_{1(2,3)}I}+\overline{IA_3}+\overline{A_3A_{2(3,4)}}+\overline{A_{2(3,4)}I}+\overline{IA_4}+\overline{A_4A_{3(4,1)}}+\overline{A_{3(4,1)}I}+\overline{IA_1}$

$=\overline{A_1A_{1(4,1)}}+\overline{A_{1(4,1)}I}+\overline{IA_2}+\overline{A_2A_{2(1,2)}}+\overline{A_{2(1,2)}I}+\overline{IA_3}+\overline{A_3A_{3(2,3)}}+\overline{A_{3(2,3)}I}+\overline{IA_4}+\overline{A_4A_{4(3,4)}}+\overline{A_{4(3,4)}I}+\overline{IA_1}$，也回到

A_1 結束，且從任一頂點開始都可以回到該點結束。其他邊數的圓外切多邊形也有相同規律的迴圈關係式。將此關係一般式整理在推論 9 中。

推論 9：圓外切 n 邊形的所有旁心頂點外接圓與邊延長線的迴圈關係一般式為

從 A_i 開始 $\overline{A_iA_{i(i+n-1,i)}}+\overline{A_{i(i+n-1,i)}I}+\sum_{x=i+1}^{i+n-1}\overline{IA_x}+\overline{A_xA_{x(x+n-1,x)}}+\overline{A_{x(x+n-1,x)}I}+\overline{IA_i}$

$=\overline{A_iA_{i-1(i,i+1)}}+\overline{A_{i+n-1(i,i+1)}I}+\sum_{x=i+1}^{i+n-1}\overline{IA_x}+\overline{A_xA_{x+n-1(x,x+1)}}+\overline{A_{x+n-1(x,x+1)}I}+\overline{IA_i}$ 回到 A_i 結束，

其中，$i=1,2,3,\cdots,n$，若下標值>n，則取下標值 mod n 為新下標值。

(三)旁心 n 邊形與旁心頂點圓 n 邊形的關係

如圖 60，八邊形 $O_{e1}O_{e2}\sim O_{e8}$ 是由圓外切八邊形的 8 個旁心頂點外接圓圓心形成，稱作**旁心頂點圓八邊形**，與旁心八邊形 $I_1I_2I_3\sim I_8$ 是相似的，且對應邊互相平行。

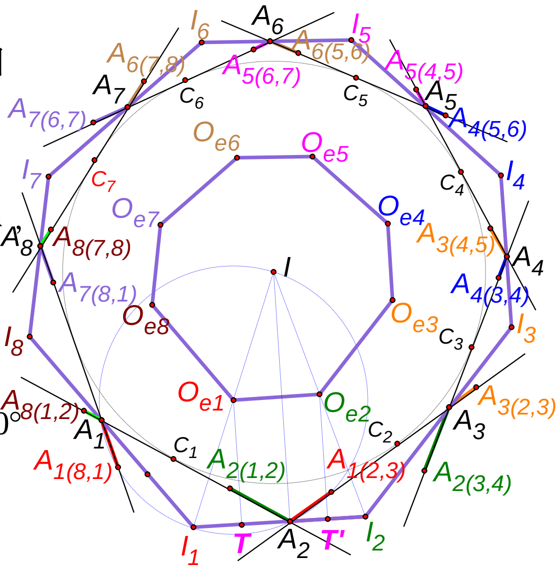


圖 60

證明如下：因為 I、O_{e1}、I_1 三點共線，I、O_{e2}、I_2 也是，$\because \angle IA_2I_1=90^\circ$，$T$ 為 $\overline{I_1A_2}$ 的中點 $\Rightarrow \angle O_{e1}TI_1=90^\circ$

$\angle O_{e1}I_1T=\angle II_1A_2 \therefore \triangle A_2II_1\sim\triangle TO_{e1}I_1\ \ (AA)$

$\Rightarrow \overline{II_1}:\overline{O_{e1}I_1}=\overline{IA_2}:\overline{O_{e1}T}=\overline{I_1A_2}:\overline{I_1T}=2:1$，同理，$\triangle A_2II_2\sim\triangle T'O_{e2}I_2$

$\Rightarrow \overline{II_2}:\overline{O_{e2}I_2}=\overline{IA_2}:\overline{O_{e2}T'}=\overline{I_2A_2}:\overline{I_2T'}=2:1\Rightarrow \overline{O_{e1}O_{e2}}\,//\,\overline{I_1I_2}$，其他七組對應邊也會互相平行，進而得到八組對應邊成比例（2:1）；同位角相等性質得到每組對應角也對應相等，故得證

推論 10：圓外切 n 邊形中，旁心 n 邊形是旁心頂點圓 n 邊形的 2 倍放大圖，且對應邊互相平行。

伍、討論與結論

一、單一心頂點外接圓中特定邊延長線段與特定邊長的關係（推論 1）

將文獻[1]中**圓外切四邊形**的等式推廣到**圓外切 n 邊形**中，且進一步以心頂點外接圓包 1、$n-i$、$n-3$ 點來分析而得到漂亮的結果如前面 P.5 推論 1 所示。其中包 $n-i$（$4\le i\le n-2$）點的情況，可分成 $n-i$ 為奇數和偶數兩種；包 $n-3$ 點的情況可分成邊數 n 為奇數或偶數兩種。**四邊形只有包 1 點情況，五邊形只有包 1、2 點情況。**

二、任兩相鄰心頂點外接圓中特定邊延長線段與特定邊長的關係（推論 2）

在第一代心頂點外接圓中，任意兩相鄰心頂點外接圓間邊延長線之交點（D_i）與兩圓的交點（E_i）的相對位置會影響兩圓間邊延長線段長與特定邊長的關係式，經分析統整後歸納成四種情況與對應的關係一般式如以下表格所示。**關係式中等號兩邊共有 8 個線段，其中紅、藍兩種線段根據 (F_i,V_j)（$i\neq j$）不同，在關係式中的位置亦不同。**

邊延長線交點與兩圓交點的位置關係	特定邊延長線段長與特定邊長關係式 （$i=1,2,3,\cdots,n$，若下標值$>n$，則取下標值 $\bmod n$ 為新下標值）
(F_2,V_1)、(F_2,V_3)、(F_2,V_4)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$
(F_4,V_1)、(F_4,V_2)、(F_4,V_3)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}$
(F_3,V_1)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}$
(F_1,V_3)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$

三、第一代圓外切 n 邊形的心頂點外接圓與特定邊延長線之交點的共點性質

推論 3：圓外切 n 邊形中，心頂點外接圓與特定邊延長線共點時該特定邊長的關係，稱為**邊延長線共點性質**。分別有心頂點外接圓內包 1 個頂點（A_n）、包 $n-i$ 個頂點（A_n、A_{n-1}、…、A_{i+1}）及包 $n-3$ 個頂點（A_n、A_{n-1}、…、A_4）三種情況，其中 $4\le i\le n-2$，$i\in\mathbb{N}$，$n\ge 6$。**圓外切四、五邊形分別只有包 1 點與包 1、2 點情況**。

1. **包 1 個頂點**：若 $\overline{A_1A_n}=\overline{A_nA_{n-1}}$，**若且唯若** $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_nA_{n-1}}$、$\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$ 的延長線分別會在心頂點外接圓上共點。**在 $n=4$ 時，兩充分必要條件皆恰可得到箏形**。

2. **包 $n-i$ 個頂點**：若 $\overline{A_1P_n}=\overline{P_nA_i}$（$P_n$ 為 $\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_{i+1}A_i}$ 延長線在心頂點外接圓內的交點），**若且唯若** $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_{i+1}A_i}$、$\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_iA_{i-1}}$ 的延長線分別會在心頂點外接圓上共點。

3. **包 $n-3$ 個頂點**：若 $\overline{A_1P_n}=\overline{P_nA_3}$（$P_n$ 為 $\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_4A_3}$ 延長線在心頂點外接圓內的交點），**若且唯若** $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_4A_3}$、$\overline{A_nA_1}$ 和 $\overline{A_3A_2}$ 的延長線分別會在心頂點外接圓上共點。

四、第一代與第二代圓外切多邊形的邊數關係與共點性質

推論 4：**【第二代圓外切多邊形上的共點性質】**

1. 第一代與第二代圓外切多邊形的**邊數關係**：

第一代圓外切 n 邊形在**包 1、2、3、....、$n-3$ 個**頂點的條件下，可作出 $n-3$ 種第二代圓外切多邊形，**邊數分別為 $4,6,8,\cdots,2n-4$**，其中 $n\ge 4$。

2. 第二代圓外切多邊形中只有一個頂點被包在其心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ 內，且其特定兩組邊延長線會在圓 $O_{1(2)}$ 上**分別共點**並且無法再作出第三代圓外切多邊形。

五、第二代圓外切多邊形的凹凸判別性質（推論 5）

1. 在 $m=1$（包 1 點）時，若第一代心頂點三角形中 2 頂點分別所在的內角為銳角時，**若且唯若** $\angle C_{4(2)}O_1C_{3(2)}$（或 $\angle C_{1(2)}O_1C_{2(2)}$）的開口向下，即 $C_{4(2)}IC_{3(2)}$（或 $C_{1(2)}IC_{2(2)}$）$<180°$ 且其一半與對應內角相等；該內角為鈍角時；**若且唯若** $\angle C_{1(2)}O_1C_{2(2)}$（或 $\angle C_{4(2)}O_1C_{3(2)}$）的開口向上，即 $C_{1(2)}IC_{2(2)}$（或 $\angle C_{4(2)}O_1C_{3(2)}$）$>180°$ 且其一半與對應內角互補。
2. 在 $m\ne 1$時，只有最上方兩組心交點形成的圓心角（含最上方判別角）與討論的 2 內角有關，關係如第 1 點所述。最下方的判別角 $\angle C_{m(2)}O_1C_{m+1(2)}$ 則與其他內角（與圓 O_1 無關）有關。

六、第一代圓外切 *n* 邊形中單一或相鄰兩心頂點外接圓與內切圓的面積、周長關係（推論 6、7）

1. 圓外切 n 邊形中，單一心頂點外接圓在包 k（$k=1,2,\cdots,n-3$）點情形下，心頂點外接圓 O_1 與內切圓 I **面積（或周長）**分別與特定心交點和 I 的連線段、特定頂點和 I 的連線段之比值乘積是一個**定值** $\boldsymbol{\frac{4}{\pi^2}}$（或 $\boldsymbol{\frac{1}{2\pi^2}}$）。

2. (1)面積關係：在**包 1 點**情形下，n 個心頂點外接圓 $O_1\sim O_n$，任一圓 O_i 中其邊延長線與之相交的 **2 個特定心交點和內切圓圓心 I 的連線段與 2 個特定邊頂點和圓心 I 連線段的乘積與對應心頂點外接圓面積的比值**都相等，且都是內切圓 I 面積的 $\frac{4}{\pi^2}$ 倍。

(2)周長關係：**包 1 點**情形下，因為一個邊延長線同時與相鄰的外接圓相交，故需用成對的兩外接圓來觀察。由前面的分析，可得相鄰心頂點外接圓（圓 O_i 和 O_{i+1}）與對應邊

延長線（$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$）相交的**心交點和內切圓圓心 I 的連線段與特定邊頂點和圓心 I 連線段的乘積與對應心頂點外接圓周長的比值**都**相等**，且都是內切圓 I 周長的 $\dfrac{1}{2\pi^2}$ 倍。

結論六中提到的定值（常數），其獨特性及亮點在於任意邊數 n 及不滿足推論 3 共點性質情況下皆成立，且第一代心頂點外接圓亦是第二代圓外切 m 邊形的內切圓，推論 6 和 7 的面積或周長關係式在兩代之間都適用。

七、旁心頂點外接圓與邊延長線的關係（推論 8～10）

與角平分線有關的旁切圓的圓心，其旁心頂點外接圓與邊延長線相交產生的兩組心交點連線段同時與相鄰兩圓有關，故以兩圓為一組來探討，得到迴圈似的邊延長線關係式。對於所有旁心頂點外接圓亦是如此。另外，圓外切 n 邊形的旁心 n 邊形是旁心頂點圓 n 邊形的 2 倍放大圖。最後**推論 1 包 1 點情形的關係式與推論 8 有關**，於是統整得到

對於圓 O_k，$k=1,2,\cdots,n$，參考圖 61 和 62，

$$\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-2,k+n-1,k}}+\overline{A_{k+n-2,k+n-1,k}A_{k,k+1,k}}+\overline{A_{k,k+1,k}A_{k+n-1(k,k+1)}}+\overline{A_{k+n-1(k,k+1)}A_k}+\overline{A_kA_{k+n-1}}$$
$$+\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-1(k+n-2,k+n-1)}}+\overline{A_{k+n-1(k+n-2,k+n-1)}A_{k+n-1(k,k+1)}}=\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-1,k,k}}+\overline{A_{k+n-1,k,k}A_{k+n-3,k+n-2,k}}$$
$$+\overline{A_{k+n-3,k+n-2,k}A_{k+n-2(k+n-3,k+n-2)}}+\overline{A_{k+n-2(k+n-3,k+n-2)}A_{k+n-2}}+\overline{A_{k+n-2}A_{k+n-1}}+\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-2(k+n-1,k)}}$$
$$+\overline{A_{k+n-2(k+n-1,k)}A_{k+n-2(k+n-3,k+n-2)}}$$

，若下標值$>n$，則取下標值 mod n 為新下標值。

【圖片說明】本說明書中只有圖 3 是引用文獻 1 中的圖形，其餘圖形都是作者自行製作。

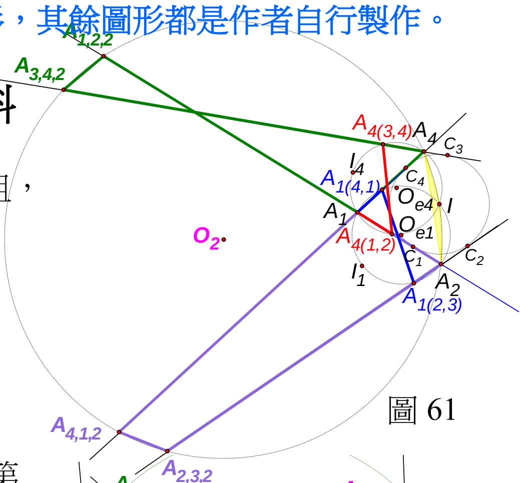


圖 61

陸、參考文獻資料

1. 教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組，【2021 年第 62 屆國際數學奧林匹亞競賽 試題解答】，數學傳播期刊 45 卷 3 期，2021 年 9 月。
2. 彭凱晟、鍾佑成，圓外切多邊形外的「環環相扣」－圓外切多邊形各邊延長線相交的性質探討，新竹縣第 62 屆中小學科學展覽會國中組數學科第二名，2022 年 5 月。
3. 國中數學第五冊，新北市康軒文教公司。
4. 笹部真市郎原著，幾何學辭典，九章出版社譯，2003 年。

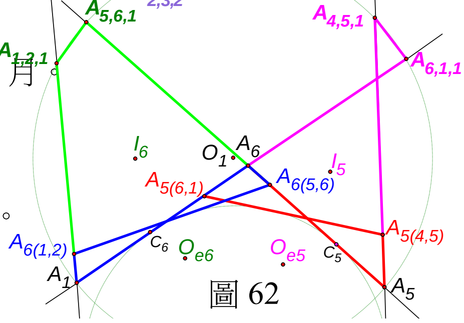


圖 62

【評語】030405

此研究作品是作者延伸推廣其上一屆（第 63 屆）科展主題，然而在此次成果中，作者得到下述完備的研究結果是一大亮點：A）圓外接 N 邊形的心頂點外接圓與特定邊延長線相交在圓上的點會產生重合的情形。B）探討圓外接 N 邊形中，單一心頂點外接圓的特定邊延長線段與特定邊長關係式。C）將上述研究成果推廣到探究以旁心頂點外接圓的邊延長線關係式主題。此研究成果中，作者活用了學到的三角形、圓、直線等平面幾何工具，導出並證明了觀察到的關係式。未來可對於第二代多與著墨，探討如第一代的性質，及第一、二代一些如周長及面積等的相關性性質，看他們間是否有一些規則性。作者頗有數學能力，但報告書符號與排版皆非常雜亂，難以閱讀，是本作品的一大缺失，亦影響此作品的評價，是相當可惜的部分。

作品簡報

圓外切多邊形邊延長線的前「式」今生！

壹、研究動機：

從聯想、作出特殊的第二代圓外切 n 邊形開始第 63 屆的研究，第 64 屆繼續推廣延伸，即「心頂點外接圓」特定邊延長線相交的共點性質，再到特定邊延長線段和特定邊長關係式……

貳、研究目的與研究架構流程圖：

一、探討圓外切 n 邊形中單一或相鄰兩心頂點外接圓的邊延長線關係式。

二、探討第一代圓外切 n 邊形「心頂點外接圓」與特定邊延長線之共點性質，再得到第二代圓外切 m 邊形的 n、m 關係、共點性質及其凹凸性。

三、探討圓外切 n 邊形內切圓和單一以及任意相鄰「心頂點外接圓」之面積、周長關係式。

四、探討旁心頂點外接圓的邊延長線關係式。

探討圓外切 n 邊形的邊延長線與其心頂點外接圓相交的線段和邊長的關係。(推論 1)

n 個心頂點外接圓中任相鄰兩圓的邊延長線與特定邊長關係式。(推論 2)

第一代圓外切 n 邊形共點性質。(推論 3)

第二代圓外切 m 邊形的共點性質。(推論 4)

第二代圓外切 m 邊形的凹凸判別性質。(推論 5)

探討圓外切 n 邊形內切圓 I 和單一或相鄰心頂點外接圓的面積、周長關係式。(推論 6、7)

探討相鄰兩個或所有旁心頂點外接圓與邊延長線關係式。(推論 8、9)

探討旁心 n 邊形與旁心頂點圓 n 邊形的面積關係。(推論 10)

參、研究過程、方法與推論結果：

已知性質與名詞定義

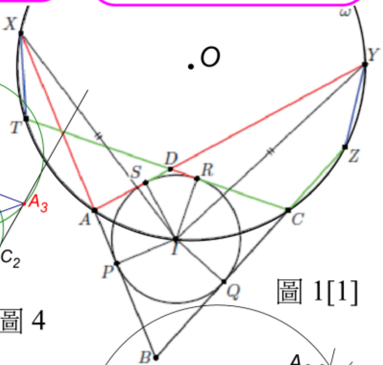


圖 1[1]

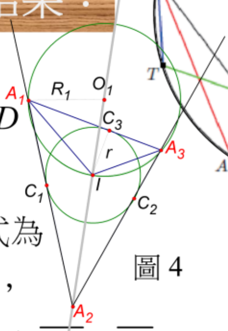


圖 4

性質[1]：如圖 1，圓外切四邊形 $ABCD$ 中四邊的延長線與 ΔAIC 的外接圓 ω 交於 X、Y、T、Z，該文獻中主要等式為

$\overline{AD}+\overline{DT}+\overline{TX}+\overline{XA}=\overline{CD}+\overline{DY}+\overline{YZ}+\overline{ZC}$，

由證明可知：(1) $\overline{XI}=\overline{YI}$、$\overline{TI}=\overline{ZI}$；(2) $\overline{XT}=\overline{YZ}$。

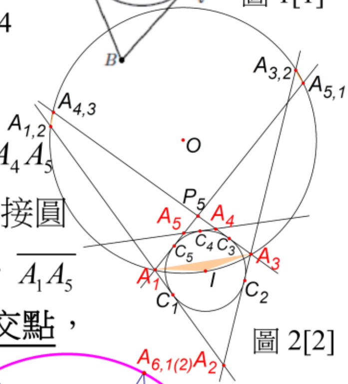


圖 2[2]

心頂點外接圓[2]：如圖 2，圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，內切圓圓心 I 與頂點 A_1、A_3 形成的 ΔA_1IA_3 之外接圓 O 稱為心頂點外接圓。再定義 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_4}$、$\overline{A_1A_5}$ 的延長線與圓 O 的交點 $A_{1,2}$、$A_{3,2}$、$A_{4,3}$ 及 $A_{5,1}$ 為心交點，ΔA_1IA_3 稱為心頂點三角形。

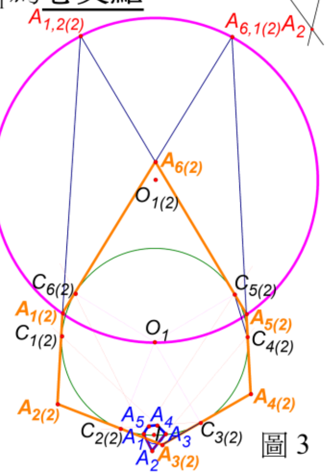


圖 3

第二代圓外切 n 邊形和心頂點外接圓：

如圖 3，第一代圓外切五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，所有邊延長交於第一代心頂點外接圓 O_1 的交點為 $C_{3(2)}$、$C_{4(2)}$、$C_{5(2)}$、$C_{6(2)}$、$C_{1(2)}$、$C_{2(2)}$，再用這些點當切點作出第二代圓外切六邊形 $A_{1(2)}A_{2(2)}A_{3(2)}A_{4(2)}A_{5(2)}A_{6(2)}$ (橘色)和第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$ (紫紅色)。

一、心頂點外接圓中特定邊延長線段與特定邊長的關係一般式(參考圖 2、5、6、7)

推論 1：包 1 點、包$n-i$(=奇數 或 偶數) 點、包$n-3$(n 為奇數或偶數) 點三種關係：

包 1 點：$\overline{A_{1,2}A_{n,n-1}}+\overline{A_{n,n-1}A_n}+\overline{A_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{n-1,n-2}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}A_n}+\overline{A_nA_{n-1}}+\overline{A_{n-1}A_{n-1,n-2}}$

包$n-i$點：$\overline{A_{1,2}A_{i+1,i}}+\overline{A_{i+1,i}P_n}+\overline{P_nA_n}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-3}{2}}\overline{A_{n-1-2x}A_{n-2x}}\right)+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{i,i-1}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_{i+1}}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-3}{2}}\overline{A_{n-2-2x}A_{n-1-2x}}\right)+\overline{C_iA_i}+\overline{A_iA_{i,i-1}}$

$\overline{A_{1,2}A_{i+1,i}}+\overline{A_{i+1,i}P_n}+\overline{P_nA_n}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-4}{2}}\overline{A_{n-1-2x}A_{n-2x}}\right)+\overline{A_{i+2}C_{i+1}}+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{i,i-1}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}C_{i+1}}+\left(\sum_{x=0}^{\frac{n-i-4}{2}}\overline{A_{n-2-2x}A_{n-1-2x}}\right)+\overline{C_iA_i}+\overline{A_iA_{i,i-1}}$

包$n-3$點：$\overline{A_{1,2}A_{4,3}}+\overline{A_{4,3}P_n}+\overline{P_nA_n}+\sum_{x=3}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\overline{A_{2x}A_{2x+1}}+\overline{A_5C_4}+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{3,2}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_4}+\overline{A_4C_4}+\sum_{x=3}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\overline{A_{2x-1}A_{2x}}+\overline{C_3A_3}+\overline{A_3A_{3,2}}$

$\overline{A_{1,2}A_{4,3}}+\overline{A_{4,3}P_n}+\overline{P_nA_n}+\sum_{x=3}^{n/2}\overline{A_{2x-1}A_{2x}}+\overline{C_nA_1}+\overline{A_1A_{1,2}}=\overline{A_{3,2}A_{n,1}}+\overline{A_{n,1}P_n}+\overline{P_nA_4}+\sum_{x=3}^{n/2}\overline{A_{2x-2}A_{2x-1}}+\overline{C_3A_3}+\overline{A_3A_{3,2}}$

推論 2：**兩圓**邊延長線段長與特定邊長的關係式，如以下表格所示：

邊延長線交點與兩圓交點的位置	特定邊延長線段長與特定邊長關係式（$i=1,2,3,\cdots,n$，若下標值 $>n$，則取下標值 $\bmod n$ 為新下標值）
(F_2,V_1) 、(F_2,V_3) (F_2,V_4)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$
(F_4,V_1)、(F_4,V_2) (F_4,V_3)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}$
(F_3,V_1)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}$
(F_1,V_3)情況	$\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}A_{i+n-2}}+\overline{A_{i+n-2}A_{i+n-1}}+\overline{A_{i+n-1}A_{i+n-1,i,i}}+\overline{A_{i+n-1,i+n-2,i}A_{i+n-1,i+n-2,i+1}}$ $=\overline{A_{i,i+n-1,i+1}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+1,i+2,i+1}}+\overline{A_{i,i+1,i}A_{i,i+1,i+1}}$

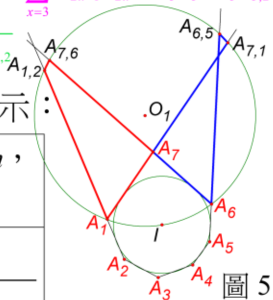


圖 5

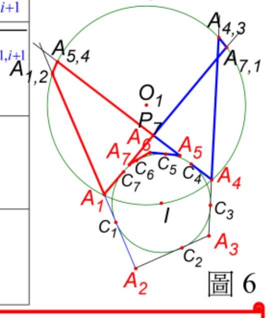


圖 6

二、第一代圓外切 *n* 邊形的共點性質及其第二代的凹凸判別性質(參考圖 2、5、6)

推論 3：第一代圓外切 n 邊形中，心頂點外接圓與特定邊延長線的交點重合時，特定邊長間的關係。

1.**包 1 點**：若 $\overline{A_1A_n}=\overline{A_nA_{n-1}}$，若且唯若 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_1A_{n-1}}$、$\overline{A_nA_1}$和 $\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$ 的延長線分別在心頂點外接圓上共點。

2. 包 $n-i$ **點**：若 $\overline{A_1P_n}=\overline{P_nA_i}$，若且唯若 $\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_{i+1}A_i}$、$\overline{A_nA_1}$和 $\overline{A_iA_{i-1}}$的延長線分別在心頂點外接圓上共點。

3. 包$n-3$**點**：若 $\overline{A_1P_n}=\overline{P_nA_3}$，若且唯若$\overline{A_1A_2}$ 和 $\overline{A_4A_3}$、$\overline{A_nA_1}$和 $\overline{A_3A_2}$ 的延長線分別在心頂點外接圓上共點。

以上 $4\le i\le n-2$，$i,n\in\mathbb{N}$，$n\ge 6$；n=4、5 時分別包 1 和 1、2 點。

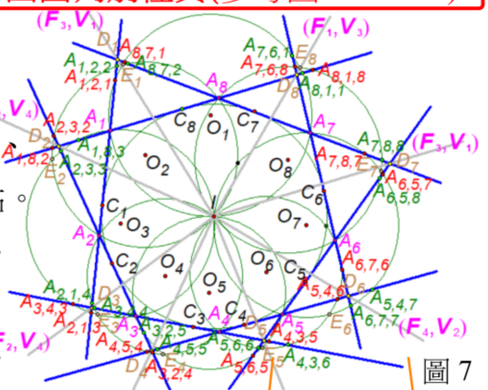


圖 7

推論 4：【第二代圓外切多邊形的共點性質】

1.第一代圓外切 n 邊形在包 1、2、…、$n-3$ 個頂點條件下，可作出 $n-3$ 種第二代圓外切多邊形，邊數分別為 $m=4,6,\cdots,2n-4$，$n\ge4$。

2. 第二代心頂點外接圓 $O_{1(2)}$中只有包 1 個頂點，且其特定兩組邊延長線會在圓 $O_{1(2)}$上分別共點且無法作出第三代圓外切多邊形。

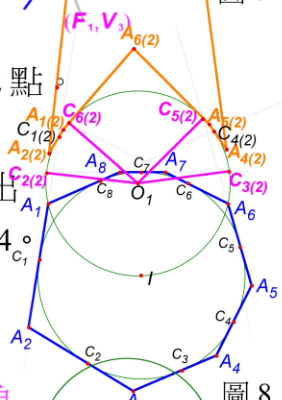


圖 8

推論 5：參考圖 8、9，若第一代心頂點外接圓 O_1 上的凹凸判別角(與內角有關)符合下列兩個條件之一時，則第二代圓外切 n 邊形為凹多邊形。其中，$m=1,2,\cdots,n-3$ 表示圓 O_1 所包的頂點數。

1. $\angle C_{m(2)}O_1C_{m+1(2)}\left(=\overset{\frown}{C_{m(2)}IC_{m+1(2)}}\right)>180°\Rightarrow$ 兩個凹凸判別角皆開口向上；

2. $\overset{\frown}{C_{2m+2(2)}C_{2m+1(2)}}>180°$(該弧為優弧)$\Rightarrow$ 兩個凹凸判別角皆開口向下。

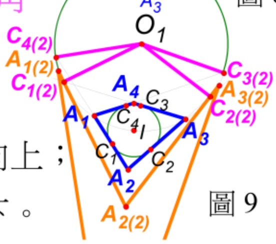


圖 9

三、圓外切 n 邊形之內切圓與心頂點外接圓的面積、周長關係

推論 6：圓外切 n 邊形中，心頂點外接圓 O_1 在包 k 點情形下，其與內切圓 I 面積(或周長)關係會和特定心交點、特定頂點和 I 的連線段有關。

$$\underbrace{\frac{\overline{A_{1,2}I}\times\overline{A_{n-k,n-k-1}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓面積}}}_{\text{以}A_{1,2}\text{為起始}}=\underbrace{\frac{\overline{A_{n,1}I}\times\overline{A_{n-k+1,n-k}I}}{\text{心頂點外接圓面積}}\times\frac{\overline{A_1I}\times\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓面積}}}_{\text{以}A_{n,1}\text{為起始}}=\frac{4}{\pi^2}\text{，}k=1,2,\cdots\text{，}n-3\text{。}$$

與點 A_1 有關，$\dfrac{\overline{A_{1,2}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\dfrac{\overline{A_1I}}{\text{內切圓周長}}=\dfrac{\overline{A_{n,1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\dfrac{\overline{A_1I}}{\text{內切圓周長}}=\dfrac{1}{2\pi^2}$

與點 A_{n-k} 有關，$\dfrac{\overline{A_{n-k,n-k-1}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\dfrac{\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓周長}}=\dfrac{\overline{A_{n-k+1,n-k}I}}{\text{心頂點外接圓周長}}\times\dfrac{\overline{A_{n-k}I}}{\text{內切圓周長}}=\dfrac{1}{2\pi^2}$

推論 7：圓外切 n 邊形中包 1 點情形下，n 個心頂點外接圓 $O_i\sim O_n$，

對於 O_i，$\dfrac{\overline{A_{i,i+1,i}I}\times\overline{A_{i+n-2,i+n-3,i}I}\times\overline{A_iI}\times\overline{A_{i+n-2}I}}{\text{心頂點外接圓}O_i\text{面積}}=\dfrac{4}{\pi^2}\times\text{內切圓}I\text{面積}$，$i=1,2,\cdots,n$。

任相鄰心頂點外接圓（圓 O_i 和 O_{i+1}）與特定邊（$\overline{A_iA_{i+1}}$）延長線相交後，

對於圓 O_i 和 O_{i+1}，$\dfrac{\overline{A_{i,i+1,i}I}\times\overline{A_iI}}{\text{心頂點外接圓}O_i\text{周長}}=\dfrac{\overline{A_{i,i+1,i+1}I}\times\overline{A_{i+1}I}}{\text{心頂點外接圓}O_{i+1}\text{周長}}=\dfrac{1}{2\pi^2}\times\text{內切圓}I\text{周長}$

四、旁心頂點外接圓與邊延長線的關係

推論 8：參考圖 10，**相鄰兩**旁心頂點外接圓與邊延長線的**封閉迴圈**關係一般式為

$$\overline{A_{i(i+n-1,i)}A_i}+\overline{A_iA_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i(i+1,i+2)}}+\overline{A_{i(i+1,i+2)}A_{i(i+n-1,i)}}=$$
$$\overline{A_{i+1(i,i+1)}A_{i+1}}+\overline{A_{i+1}A_{i+2}}+\overline{A_{i+2}A_{i+1(i+2,i+3)}}+\overline{A_{i+1(i+2,i+3)}A_{i+1(i,i+1)}}$$

在 $n=2k$ 或 $n=2k+1$ 時，若下標序從 $i=t$ 開始，則 $i=t,t+2,t+4,\cdots,t+2k-2$，$t=1,2,3,\cdots,n$。

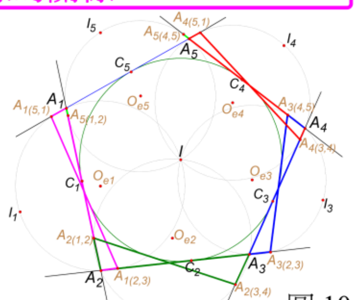


圖 10

推論 9：參考圖 11，**所有**旁心頂點外接圓與邊延長線的**封閉迴圈**關係一般式為

$$\underbrace{\overline{A_iA_{i(i+n-1,i)}}+\overline{A_{i(i+n-1,i)}I}+\sum_{x=i+1}^{i+n-1}\overline{IA_x}+\overline{A_xA_{x(x+n-1,x)}}+\overline{A_{x(x+n-1,x)}I}+\overline{IA_i}}_{\text{藍→咖→橘→橘→淡紫→綠→綠→黑→紅}}=\overline{A_iA_{i+n-1(i,i+1)}}$$
$$\underbrace{+\overline{A_{i+n-1(i,i+1)}I}+\sum_{x=i+1}^{i+n-1}\overline{IA_x}+\overline{A_xA_{x+n-1(x,x+1)}}+\overline{A_{x+n-1(x,x+1)}I}+\overline{IA_i}}_{\text{藍→粉紫→紅→橘→咖→藍→綠→淡紫→橘}}\text{。}$$

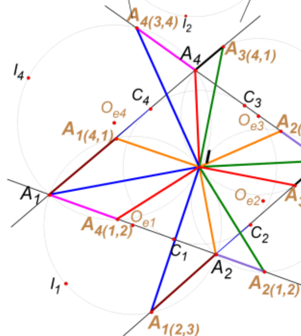


圖 11

推論 10：圓外切 n 邊形的旁心 n 邊形是旁心頂點圓 n 邊形的 2 倍放大圖，參考圖 12。

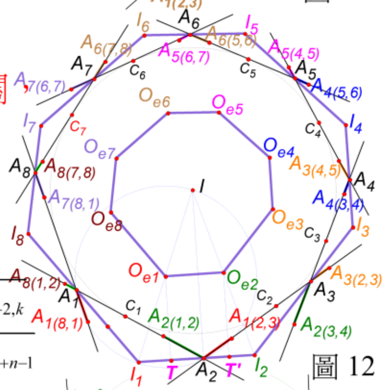


圖 12

推論 1(內心)包 1 點的關係式與推論 8(旁心)有關，統整得到對於圓 O_k，$k=1,2,\cdots,n$，參考圖 13，

$$\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-2,k+n-1,k}}+\overline{A_{k+n-2,k+n-1,k}A_{k,k+1,k}}+\overline{A_{k,k+1,k}A_{k+n-1(k,k+1)}}$$
$$+\overline{A_{k+n-1(k,k+1)}A_k}+\overline{A_kA_{k+n-1}}+\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-1(k+n-2,k+n-1)}}$$
$$+\overline{A_{k+n-1(k+n-2,k+n-1)}A_{k+n-1(k,k+1)}}=\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-1,k,k}}+\overline{A_{k+n-1,k,k}A_{k+n-3,k+n-2,k}}$$
$$+\overline{A_{k+n-3,k+n-2,k}A_{k+n-2(k+n-3,k+n-2)}}+\overline{A_{k+n-2(k+n-3,k+n-2)}A_{k+n-2}}+\overline{A_{k+n-2}A_{k+n-1}}$$
$$+\overline{A_{k+n-1}A_{k+n-2(k+n-1,k)}}+\overline{A_{k+n-2(k+n-1,k)}A_{k+n-2(k+n-3,k+n-2)}}\text{。}$$

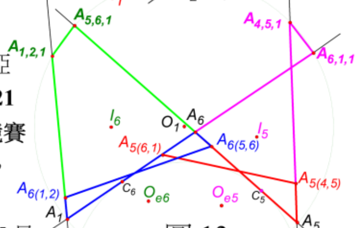


圖 13

肆、主要參考文獻：

1. 教育部國際數理學科奧林匹亞競賽諮詢會數學工作小組，2021 年第 62 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答，數學傳播期刊 45 卷 3 期，2021 年 9 月。2. 彭凱晟、鍾佑成，圓外切多邊形外的「環環相扣」—圓外切多邊形各邊延長線相交的性質探討，新竹縣第 62 屆中小學科學展覽會國中組數學科第二名，2022 年 5 月。