

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

佳作

030404

點心中垂三角形性質之研究

學校名稱：花蓮縣立自強國民中學

作者： 國二 林駒任	指導老師： 陳禹翔 呂柏辰
-------------------	-----------------------------

關鍵詞：點心中垂三角形、面積比、共點共線

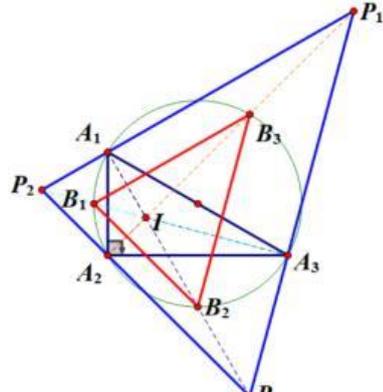
摘要

本研究由一題三角形內心與其旁心三角形頂點連線交外接圓所構成三角形面積問題出發，藉由相似形的觀察發現可透過連接頂點與內心作中垂線作圖而成，以此為靈感開始定義點心中垂三角形，創新探究其他形心所構造的點心中垂三角形性質以及與原三角形的面積比，過程中發現三角形五心之間心與心互換的關係，讓我們聯想到如果繼續疊作中垂線，三角形有外、內、垂心共點與共線性質，接著我們延伸至四邊形與多邊形，發現層層之間的圖形有彼此相似與對應邊平行…等共點、共線性質存在。

壹、前言

一、動機

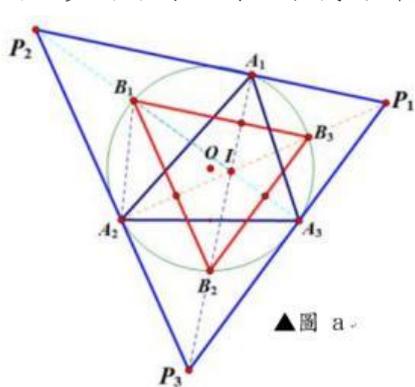
某次上專題課，老師講到了三角形的五心，利用了內、外角平分線找到三角形的內心、旁心，並提出了以下一道題目：



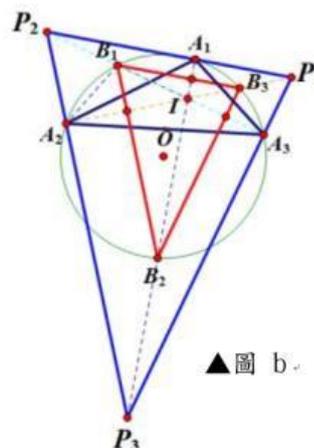
如圖，給定直角 $\Delta A_1A_2A_3$ 及其外接圓 O ，其中 $\angle A_1 = 60^\circ$ ， $\Delta P_1P_2P_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的旁心三角形，連接 $\overline{P_2A_3}$ 、 $\overline{P_3A_1}$ 、 $\overline{P_1A_2}$ 分別交圓 O 於 B_1 、 B_2 、 B_3 三點，連接 B_1 、 B_2 、 B_3 ，

求 $\frac{\Delta B_1B_2B_3}{\Delta A_1A_2A_3}$ 面積比值。

因此就利用GSP畫畫看，發現 $\Delta B_1B_2B_3$ 三邊會分別垂直 $\overline{IA_1}$ 、 $\overline{IA_2}$ 、 $\overline{IA_3}$ 並通過中點，此外 $\overline{P_2A_3}$ 、 $\overline{P_3A_1}$ 、 $\overline{P_1A_2}$ 三線交於 $\Delta A_1A_2A_3$ 的內心，接著若拉動 $\Delta A_1A_2A_3$ 成銳角或鈍角三角形時，如下圖，仍存在這些特性，引發我好奇如果對三角形其他心也連接頂點作中垂線所圍的三角形是否也存在一些有趣的結果，於是便定義 $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點心中垂三角形，觀察兩三角形間有何關係，做進一步的探討，開始了我的研究。



1



二、文獻探討

1. 在第59屆全國科展「換心手術-從三角形出發探討N邊形多心性質之研究」中，提到**頂心三角形**是指作一三角形 ABC 在其三角形內部取任一點 X ，分別以三頂點 A 、 B 、 C 為圓心， \overline{AX} 、 \overline{BX} 、 \overline{CX} 為半徑做圓，取三圓之交點 D 、 E 、 F ，連線 D 、 E 、 F 形成 $\triangle DEF$ ，則 $\triangle DEF$ 為 $\triangle ABC$ 之頂心三角形，與本研究不同。
2. 在2022年台灣國際科展「頂心三角形誕生的奇蹟」中，是探討了原三角形與上述頂心三角形面積比及發現了頂新線相關性質，與本作品不同
3. 在第60屆全國科展「數學畢卡索—多邊形疊作之性質探討」中，提到**頂外三角形**是指以 $\triangle ABC$ 三頂點當圓心，以頂點到外心的距離當半徑畫圓，三圓的交點(不包含 $\triangle ABC$ 外心) 連線即為頂外三角形，所定義方式與研究方向與本作品不同。

三、圖片來源

本研究報告書內所有圖片為作者自繪。

貳、研究目的

- 一、探討 $\Delta A_1A_2A_3$ 與點(內、旁、重、外、垂)心中垂三角形之相關性質。
- 二、探討原三角形與點心中垂三角形邊長與面積比的幾何性質。
- 三、尋找四邊形的內心與外心與點心中垂四邊形是否有心心互換性質。

參、研究器材

紙、筆、GSP 數學繪圖軟體，利用繪圖軟體計算輔助自己的研究。

肆、研究過程

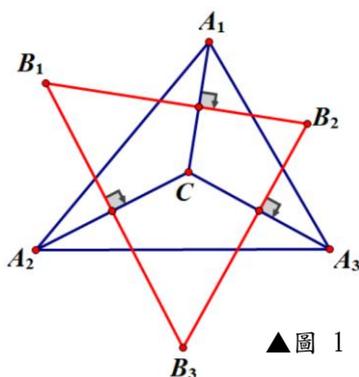
- 一、名詞定義與點(內)心三角形的幾何性質

(一)名詞定義

【定義】點心中垂三角形

如圖1，平面上給定 $\Delta A_1A_2A_3$ 及 C 點(內、旁、重、外、垂心)，分別連接 C 點與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三個

頂點後所得 $\overline{CA_1}$ 、 $\overline{CA_2}$ 、 $\overline{CA_3}$ 線段作中垂線，若三條中垂線相交於 B_1 、 B_2 、 B_3 三點，連接 B_1 、 B_2 、 B_3 三點所得 $\Delta B_1B_2B_3$ 稱為 $\Delta A_1A_2A_3$ 在 C 點的點心中垂三角形。



▲圖 1

(二) 點(內)心中垂三角形的幾何性質

引理1. 銳角三角形垂心是三邊上垂足連線三角形的內心。

已知： ΔABC 中， H 為垂心， $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{CA}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

求證： H 為 ΔDEF 的內心

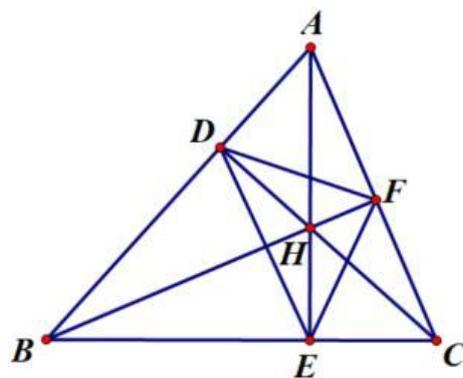
證明：如右圖： $\angle BDC = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow B、D、F、C$ 共圓

$\therefore \angle FDC = \angle FBC$ ，又： $\angle BDH + \angle BEH = 180^\circ$

$\Rightarrow B、D、H、E$ 共圓 $\Rightarrow \angle FBC = \angle HDE$

故 $\angle FDC = \angle FBC = \angle HDE$ ，即 \overline{DH} 平分 $\angle FDE$ ，

同理可得 \overline{EH} 平分 $\angle DEF$ ，故 H 是 ΔDEF 的內心



引理2. 任意三角形的旁心三角形必為銳角三角形，其外接圓即為旁心三角形的九點圓。

已知： ΔDEF 為 ΔABC 的旁心三角形， I 為 ΔABC 的內心

求證： ΔDEF 為銳角三角形

證明：令 $\angle A = 2\alpha$ 、 $\angle B = 2\beta$ 、 $\angle C = 2\gamma$ ，

連接 \overline{IE} 、 \overline{ID} 、 \overline{IF} ， $\because \angle IAE + \angle IBE = 180^\circ$ ，

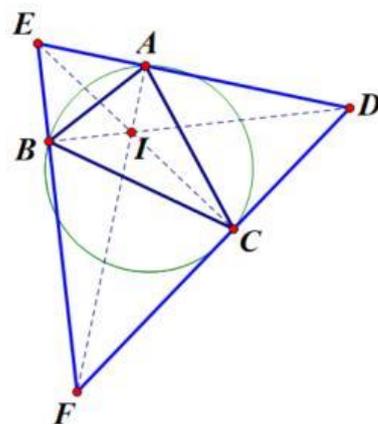
$\Rightarrow I、A、E、B$ 共圓 $\Rightarrow \angle IEB = \angle IAB = \alpha$ ， $\angle IBA = \angle IEA = \beta$

則 $\angle E = \alpha + \beta$ ，同理 $\angle D = \alpha + \gamma$ 、 $\angle F = \beta + \gamma$ ，

$\because \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ，可得 ΔDEF 為銳角三角形。

由引理1與引理2可知 I 同時為 ΔABC 的內心與 ΔDEF 的垂心，

且 ΔABC 的外接圓即為 ΔDEF 的九點圓。



討論一

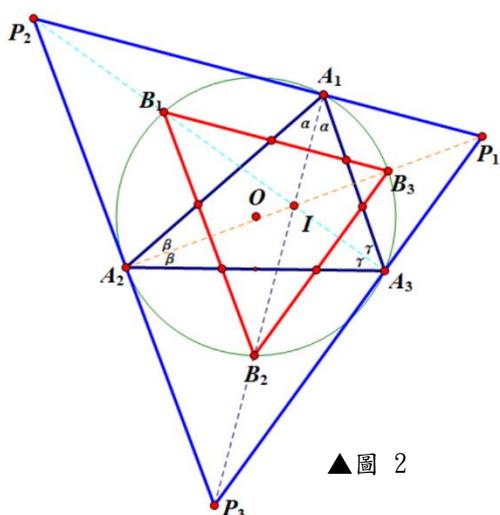
1. 有了以上引理，可得原題中 $\Delta B_1B_2B_3$ 會是旁心三角形 $\Delta P_1P_2P_3$ 以 I 為縮放中心縮小 $\frac{1}{2}$ 之圖形

說明：如圖2，在 ΔIP_1P_2 中，

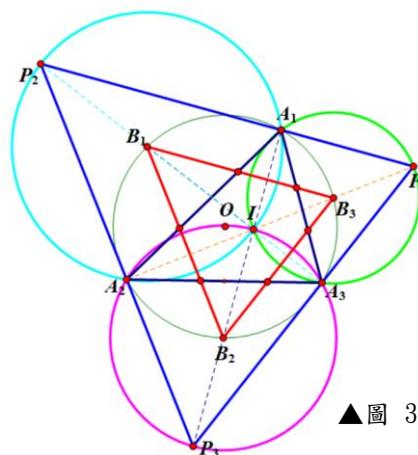
$$\because \overline{P_2B_1} = \overline{B_1I}, \overline{P_1B_3} = \overline{B_3I} \text{ (九點圓性質)}, \therefore \overline{B_1B_3} \parallel \overline{P_1P_2} \text{ 且 } \overline{B_1B_3} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_2}$$

同理可得 $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{P_2P_3}$ 且 $\overline{B_1B_2} = \frac{1}{2}\overline{P_2P_3}$ ， $\overline{B_2B_3} \parallel \overline{P_1P_3}$ 且 $\overline{B_2B_3} = \frac{1}{2}\overline{P_1P_3}$ ，故 $\Delta B_1B_2B_3 \sim \Delta P_1P_2P_3$

，同時 $\Delta B_1B_2B_3$ 的三邊分別通過 $\Delta A_1A_2A_3$ 頂點與內心的連線中點，並互相垂直，即 $\overline{B_1B_3}$ 為 $\overline{A_1I}$ 之中垂線， $\overline{B_1B_2}$ 為 $\overline{A_2I}$ 之中垂線， $\overline{B_2B_3}$ 為 $\overline{A_3I}$ 之中垂線，之後研究我們將 $\Delta B_1B_2B_3$ 稱為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(內)心中垂三角形。



▲圖 2



▲圖 3

2. 如圖3，從以上探討發現，四邊形 $IA_1P_1A_3$ 、 $IA_1P_2A_2$ 、 $IA_2P_3A_3$ 分別共圓，且圓心剛好在

B_1 、 B_2 、 B_3 ，造成旁心三角形與 $\Delta B_1B_2B_3$ 相似，而圓 B_1 、圓 B_2 、圓 B_3 三圓中任兩圓又分別相交於 A_1 、 I 、 A_2 、 I 、 A_3 、 I ，造成四邊形 $IB_1A_1B_3$ 、 $IB_3A_2B_2$ 、 $IB_2A_2B_1$ 皆為等形。

3. 如下圖4，除上述可推論四邊形 $IH_1B_1H_2$ 、 $IH_1B_3H_3$ 、 $IH_3B_2H_2$ 三個四邊形共圓之外，還有三個四邊形會共圓。

性質1-1 點(內)心中垂三角形 $\Delta B_1B_2B_3$ 和原三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 兩三角形的三邊交點分別為 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 、 C_5 、 C_6 ，則四邊形 $B_1B_3C_5C_4$ 、 $B_3B_2C_3C_2$ 、 $B_2B_1C_1C_6$ 會有外接圓。

證明：

如圖4，四邊形 $B_1B_3C_5C_4$ 中

$$\because \angle B_1 = \angle IB_1B_3 + \angle IB_1B_2 = \beta + \alpha$$

$$\begin{aligned} \angle B_3C_5C_4 &= 180^\circ - \angle B_3C_5A_3 = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{B_3A_3} + \widehat{B_2A_2}) \\ &= 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ + \gamma \\ \therefore \angle B_1 + \angle B_3C_5C_4 &= \beta + \alpha + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \end{aligned}$$

因此 B_1 、 B_3 、 C_5 、 C_4 四點共圓，

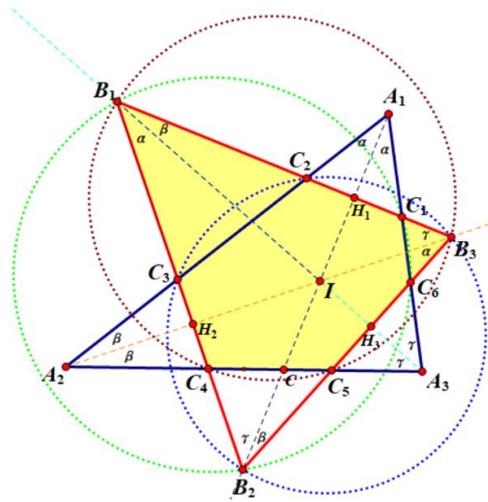
同理可證 $B_3B_2C_3C_2$ 、 $B_2B_1C_1C_6$ 皆有外接圓。

討論二

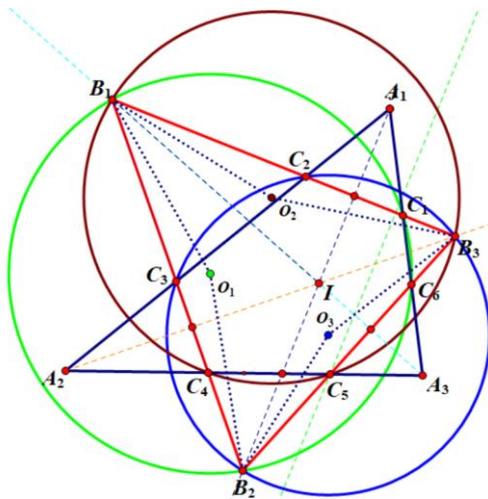
藉由性質1-1，也讓我們發現等角共軛點。

說明：

如圖5，若四邊形 $B_1B_3C_5C_4$ 外接圓為圓 O_2 ，四邊形 $B_3B_2C_3C_2$ 外接圓為圓 O_3 ，四邊形 $B_2B_1C_1C_6$ 外接圓為圓 O_1 ，則 $\angle O_1B_1B_2 = \angle O_1B_2B_1 = \angle O_2B_1B_3 = \angle O_2B_3B_1 = \angle O_3B_2B_3 = \angle O_3B_3B_2$ 。



▲圖 4



▲圖 5

(三) 點(內)心中垂三角形和原三角形的面積關係

從以上發現的性質，利用共圓的想法，便可不需透過三個旁心圓探討出旁心三角形的面積，並可利用角度與內切圓半徑，計算出 $\Delta B_1B_2B_3$ 和 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積，藉此觀察並探討 $\Delta B_1B_2B_3$ 和 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積間關係。

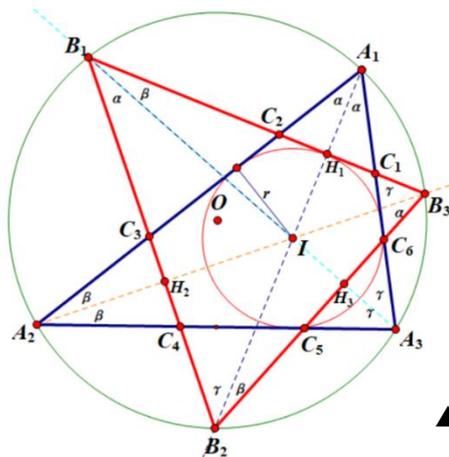
性質1-2 點(內)心中垂三角形 $\Delta B_1B_2B_3$ 的面積 = $\frac{1}{8}r^2 \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2}$

證明：

(1) 如右圖，令 $\Delta A_1A_2A_3$ 內切圓半徑為 r

$$\begin{aligned} \overline{A_1I} &= \frac{r}{\sin \alpha}, \text{ 由性質1-3} \Rightarrow \overline{H_1I} = \frac{r}{2 \sin \alpha} \\ \Rightarrow \overline{B_1H_1} &= \frac{\overline{H_1I}}{\tan \beta} = \frac{r}{2} \cdot \frac{\cot \beta}{\sin \alpha}, \quad \overline{B_3H_1} = \frac{\overline{H_1I}}{\tan \gamma} = \frac{r}{2} \cdot \frac{\cot \gamma}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

可得 $\Delta B_1B_3I = \frac{\overline{B_1B_3} \times \overline{H_1I}}{2}$



▲圖 6

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{2} \cdot \frac{(\cot \beta + \cot \gamma)}{\sin \alpha} \cdot \frac{r}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \beta + \cot \gamma}{\sin^2 \alpha} \\
\text{同理 } \Delta B_1 B_2 I &= \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\sin^2 \beta}, \Delta B_2 B_3 I = \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\sin^2 \gamma} \\
\therefore \Delta B_1 B_2 B_3 &= \frac{r^2}{8} \cdot \left(\frac{\cot \beta + \cot \gamma}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\sin^2 \beta} + \frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\sin^2 \gamma} \right) \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{(\cot \beta + \cot \gamma) \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma + (\cot \alpha + \cot \gamma) \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \gamma + (\cot \beta + \cot \alpha) \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\sin(\beta + r)}{\sin \beta \sin \gamma} \right) \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma + \left(\frac{\sin(\alpha + r)}{\sin \alpha \sin \gamma} \right) \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \gamma + \left(\frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta \sin \alpha} \right) \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\sin \gamma \sin(\alpha + \beta) + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\cos \gamma (\sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2} \right] \\
&= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\cos \gamma [\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta]}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2} \right] = \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2}
\end{aligned}$$

(2) 接著利用角度推導 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的面積，求得面積比：

如圖6， $\overline{A_1 A_2} = r(\cot \alpha + \cot \beta)$ ， $\overline{A_1 A_3} = r(\cot \alpha + \cot \gamma)$ ， $\overline{A_2 A_3} = r(\cot \beta + \cot \gamma)$

$$\begin{aligned}
\therefore \Delta A_1 A_2 A_3 &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\overline{A_1 A_2} + \overline{A_1 A_3} + \overline{A_2 A_3}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) \cdot 2 = r^2 \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = r^2 \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \right)
\end{aligned}$$

最後根據性質1-2與 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 面積公式可得性質1-3：

性質1-3 原三角形 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 與點(內)心三角形 $\Delta B_1 B_2 B_3$ 的面積比值

$$= 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2r}{R}$$

其中 r 為 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 內切圓半徑， R 為 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 與 $\Delta B_1 B_2 B_3$ 共外接圓半徑。

$$\text{證明：} \frac{\Delta A_1 A_2 A_3}{\Delta B_1 B_2 B_3} = r^2 \cdot \left(\frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \right) / \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2} = 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

接著證明 $8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2r}{R}$ ，在 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 中，由三角形內切圓與外接圓面積公式

$$\Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{(2R \sin A_1 + 2R \sin A_2 + 2R \sin A_3)r}{2} = \frac{(2R \sin A_1)(2R \sin A_2)(2R \sin A_3)}{4R}$$

$$\text{可得 } \frac{r}{R} = \frac{2(\sin A_1)(\sin A_2)(\sin A_3)}{\sin A_1 + \sin A_2 + \sin A_3} = \frac{2(2 \sin \alpha \cos \alpha)(2 \sin \beta \cos \beta)(2 \sin \gamma \cos \gamma)}{4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\text{故 } 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2r}{R}.$$

以內心I與三角形頂點連線的中點作中垂線所圍成的圖形為點(內)心中垂三角形為靈感，如果用三角形的三個旁心 P_1 、 P_2 、 P_3 連接三頂點一樣作中垂線，所圍出的三角形會不會也在 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的外接圓圓O上呢？接下來是我們的研究

(四)點(旁)心中垂三角形的相關性質

性質1-4 如圖7，以旁心 P_1 連接 A_1 、 A_3 兩點，分別作 $\overline{P_1 A_1}$ 、 $\overline{P_1 A_3}$ 的中垂線，分別交圓O於 B_5 、 B_3 及 B_4 、 B_3 ，連接 B_4 、 B_5 兩點，則 $\overline{B_4 B_5} \parallel \overline{B_1 B_2}$ 且 $\overline{B_4 B_5} = \overline{B_1 B_2}$ 。

證明：

(1) 首先先說明兩中垂線 $\overline{M_1 B_5}$ 、 $\overline{M_2 B_4}$ 為何會交於 B_3

在 $\Delta I A_1 P_1$ 中， $\because \angle I A_1 P_1 = 90^\circ$

$\therefore \Delta I A_1 P_1$ 為直角三角形，

$\overline{I A_1}$ 與 $\overline{A_1 P_1}$ 兩邊的中垂線必交於斜邊中點 B_3

同理 $\because \Delta I A_3 P_1$ 為直角三角形

$\overline{I A_3}$ 與 $\overline{A_3 P_1}$ 兩邊的中垂線必交於斜邊中點 B_3

(2) $\because \angle A_1 P_1 B_3 = \gamma$

$\Rightarrow \angle M_1 B_3 P_1 = 90^\circ - \gamma = \beta + \alpha = \angle A_2 B_3 B_5$ ，又 $\angle A_2 B_3 B_2 = \alpha$

$\Rightarrow \angle B_2 B_3 B_5 = (\beta + \alpha) - \alpha = \beta$ 同理可證 $\angle B_4 B_3 B_1 = (\beta + \gamma) - \gamma = \beta$

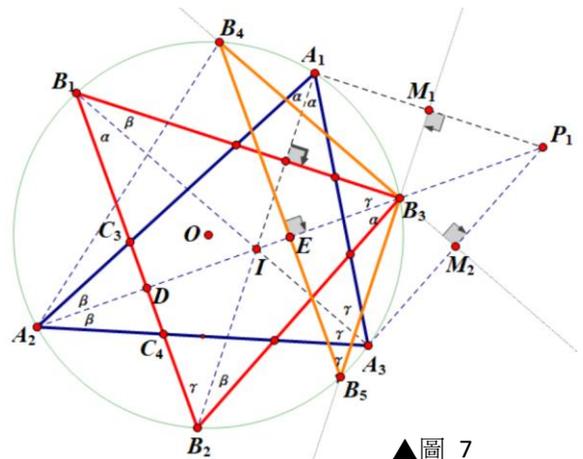
\therefore 由等弧對等弦可知， $\overline{B_4 B_5} \parallel \overline{B_1 B_2}$ 且 $\overline{B_4 B_5} = \overline{B_1 B_2}$ 。

接著我們證明 $\overline{B_4 B_5} \perp \overline{A_2 P_1}$

性質1-5 如圖7，以旁心 P_1 連接 A_1 、 A_3 兩點，分別作 $\overline{P_1 A_1}$ 、 $\overline{P_1 A_3}$ 的中垂線，分別交圓O於 B_5 、 B_3 及 B_4 、 B_3 ，連接 B_4 、 B_5 兩點，則 $\overline{B_4 B_5} \perp \overline{A_2 P_1}$ 且四邊形 $B_1 B_2 B_4 B_5$ 必為矩形。

證明：

(1) 由性質1-4可知 $\overline{B_4 B_5} \parallel \overline{B_1 B_2}$ ，因此只要證明 $\overline{B_1 B_2} \perp \overline{A_2 P_1}$ ，便可證矩形



▲圖 7

在 $\Delta A_2 C_3 C_4$ 中

$$\because \angle B_1 D A_2 = \frac{1}{2}(\widehat{B_1 A_2} + \widehat{B_2 B_3}) = \frac{1}{2}(2\gamma + 2\alpha + 2\beta) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{B_1 B_2} \perp \overline{A_2 P_1} \Rightarrow \overline{B_4 B_5} \perp \overline{A_2 P_1}$$

$$(2) \because \angle B_5 B_4 B_1 = \frac{1}{2}(\widehat{B_1 B_2} + \widehat{B_2 B_5}) = \frac{1}{2}(2\gamma + 2\alpha + 2\beta) = 90^\circ$$

再由性質1-4，一組對邊平行且相等為平行四邊形，

若其中一角為直角則為矩形，即四邊形 $B_1 B_2 B_4 B_5$ 必為矩形。

最後證明 $\overline{C_1 C_2}$ 會平分 $\overline{A_2 P_1}$ 。

性質1-6 如圖8，以旁心 P_1 連接 A_1 、 A_3 兩點，分別作 $\overline{P_1 A_1}$ 、 $\overline{P_1 A_3}$ 的中垂線，分別交圓 O 於 B_5 、 B_3 及 B_4 、 B_3 ，連接 B_4 、 B_5 兩點，若 $\overline{B_4 B_5}$ 交 $\overline{A_2 P_1}$ 於 E 點，則 $\overline{EA_2} = \overline{EP_1}$ 。

證明：

如右圖，令 $\overline{A_1 I} = 2t$ ，

$$\text{則 } \overline{IB_3} = t \csc \gamma = \overline{B_3 P_1}$$

$$\because \overline{B_4 E} = \overline{B_1 D} = (t \csc \beta) \cos \alpha$$

$$\therefore \overline{EB_3} = \overline{B_4 E} \tan \alpha = (t \csc \beta) \cos \alpha \tan \alpha$$

$$\text{可得 } \overline{EP_1} = \overline{EB_3} + \overline{B_3 P_1} = t[\csc \gamma + \csc \beta \sin \alpha]$$

$$= t \left[\frac{1}{\sin \gamma} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right] = t \frac{\sin \beta + \sin \gamma \sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta}$$

$$= t \frac{\cos(\alpha + \gamma) + \sin \gamma \sin \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} = t \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \gamma \sin \beta}$$

$$= t \cot \gamma \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$$

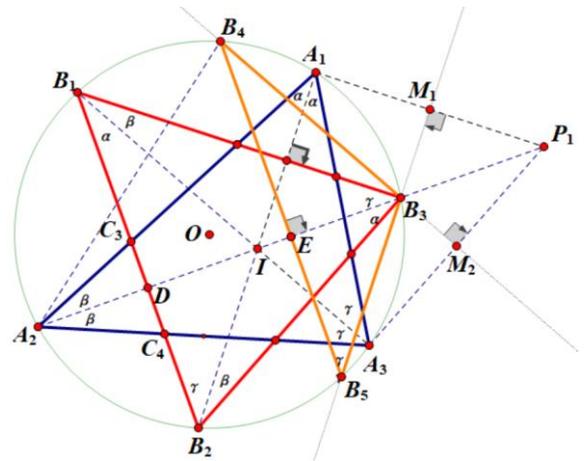
$$\text{又 } \overline{EA_2} = \overline{B_4 E} \tan(\alpha + \beta)$$

$$= (t \csc \beta) \cos \alpha \tan(\alpha + \beta) = t \frac{\cos \alpha \tan(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = t \frac{\cos \alpha \cot \gamma}{\sin \beta}$$

因此 $\overline{EP_1} = \overline{EA_2}$ ，即 $\overline{B_4 B_5}$ 也會通過 $\overline{A_2 P_1}$ 的中點。

根據性質1-5與性質1-6可得 $\overline{B_4 B_5}$ 也是 $\overline{A_2 P_1}$ 的中垂線，於是有了以下性質：

性質1-7 以旁心 P_1 連接 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的三頂點後分別作中垂線，則三條中垂線所圍出的 $\Delta B_3 B_4 B_5$ 必在 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的外接圓上。



▲圖 8

有了性質1-7，接著算出點(旁)心三角形 $\Delta B_3B_4B_5$ 的面積，藉此觀察並探討和原三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積間關係。

性質1-8 若 $\Delta B_3B_4B_5$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(旁)心三角形，則 $\Delta B_3B_4B_5$ 面積 = $\frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \beta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$ 。

證明：

如圖8，由性質1-2

$$\text{令 } \overline{A_1I} = \frac{r}{\sin \alpha} = 2t \Rightarrow t = \frac{r}{2 \sin \alpha}$$

$$\because \overline{IB_3} = t \csc \gamma, \overline{B_4E} = (t \csc \beta) \cos \alpha \Rightarrow \overline{EB_3} = (t \csc \beta) \cos \alpha \tan \alpha$$

$$\text{又 } \overline{B_4B_5} = \overline{B_4E} + \overline{B_5E} = \overline{B_4E} + \overline{B_3E} \cot \gamma = (t \csc \beta) \cos \alpha + (t \csc \beta) \sin \alpha \cot \gamma$$

$$= (t \csc \beta)(\cos \alpha + \sin \alpha \cot \gamma) \quad \text{將 } t = \frac{r}{2 \sin \alpha} \text{ 代入}$$

$$= r \frac{\cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

$$\therefore \Delta B_3B_4B_5 \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times \overline{B_4B_5} \times \overline{EB_3} = \frac{1}{2} \times \frac{r \cos \beta}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \times \frac{r \cos \alpha \tan \alpha}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \beta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

可得與 $\Delta A_1A_2A_3$ 面積比值為 $8 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$ 。

如下圖9從旁心 P_2 、 P_3 所得點(旁)心中垂三角形 $\Delta B_2B_5B_6$ 、 $\Delta B_1B_4B_6$ 也會在 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓

上，同理 $\Delta B_2B_5B_6$ 面積 = $\frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$ ， $\Delta B_1B_4B_6$ 面積 = $\frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$ ，可得性質1-9

性質1-9

(1)原三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 與點(旁)心三角形 $\Delta B_3B_4B_5$ 的面積比值 = $8 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$ 。

(2)原三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 與點(旁)心三角形 $\Delta B_2B_5B_6$ 的面積比值 = $8 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$ 。

(3)原三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 與點(旁)心三角形 $\Delta B_1B_4B_6$ 的面積比值 = $8 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$ 。

有了以上面積比的研究，讓我們進一步發現以下面積恆等式：

定理. $\Delta A_1A_2A_3$ 三個旁心所構成點(旁)心三角形 $\Delta B_3B_4B_5$ 、 $\Delta B_2B_5B_6$ 、 $\Delta B_1B_4B_6$ 的面積和會與其點(內)心三角形 $\Delta B_1B_2B_3$ 面積相等，即 $\Delta B_3B_4B_5 + \Delta B_2B_5B_6 + \Delta B_1B_4B_6 = \Delta B_1B_2B_3$ 。

證明：如圖9，根據性質1-9

$$\Delta B_3B_4B_5 + \Delta B_2B_5B_6 + \Delta B_1B_4B_6$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta A_1 A_2 A_3}{8} \left(\frac{1}{\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma} + \frac{1}{\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma} \right) \\
&= \frac{\Delta A_1 A_2 A_3}{8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} (\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) \\
&= \frac{\Delta A_1 A_2 A_3}{8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} (\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha) \quad (\because \alpha + \beta + \gamma = 90^\circ) \\
&= \frac{\Delta A_1 A_2 A_3}{8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \Delta B_1 B_2 B_3 \quad (\text{根據性質1-3})
\end{aligned}$$

此外，和點(內)心三角形相同，仍會有共圓的有趣性質存在：

性質1-10 如圖9，以 P_1 、 P_2 、 P_3 連接三頂點作中垂線，所圍出的三角形 $\Delta B_3 B_4 B_5$ 、 $\Delta B_1 B_4 B_6$ 與原三角形 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 交點所構成四邊形 $D_2 D_3 B_4 B_6$ 和 $D_1 D_8 B_4 B_5$ 皆四點共圓。

證明：

(1) 在四邊形 $D_2 D_3 B_4 B_6$ 中

$$\begin{aligned}
\because \angle B_6 B_4 D_2 &= \frac{1}{2} (\widehat{B_6 A_2} + \widehat{A_2 B_2} + \widehat{B_2 B_5}) \\
&= \frac{1}{2} (\widehat{B_6 B_2} - \widehat{A_2 B_2} + \widehat{A_2 B_2} + \widehat{B_2 B_5}) \\
&= \frac{1}{2} (2\gamma - 2\alpha + 2\alpha + 2\beta) = \gamma + \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\because \angle B_6 D_3 D_2 &= \frac{1}{2} (\widehat{B_6 A_1} + \widehat{A_2 B_5}) \\
&= \frac{1}{2} [(\widehat{B_6 B_1} + \widehat{B_1 B_4} + \widehat{B_4 A_1}) + (\widehat{A_2 B_2} + \widehat{B_2 B_5})] \\
&= \frac{1}{2} [(2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\beta) + (2\alpha + 2\beta)] \\
&= 2\alpha + \gamma + \beta
\end{aligned}$$

$\therefore \angle B_6 B_4 D_2 + \angle B_6 D_3 D_2 = (\gamma + \beta) + (2\alpha + \gamma + \beta) = 180^\circ$ 即四邊形 $D_2 D_3 B_4 B_6$ 有外接圓。

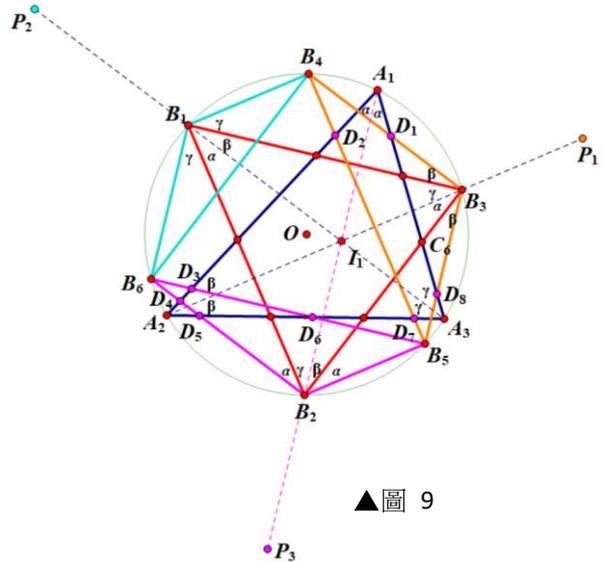
(2) 在四邊形 $D_1 D_8 B_4 B_5$ 中，

$$\because \angle D_1 B_4 B_5 = \frac{1}{2} (\widehat{B_3 A_3} + \widehat{A_3 B_5}) = \frac{1}{2} (2\beta + 2\alpha - 2\beta) = \alpha$$

$$\text{又 } \because \angle D_1 D_8 B_5 = \frac{1}{2} (\widehat{A_3 B_3} + \widehat{B_5 A_1})$$

$$= \frac{1}{2} (\widehat{A_3 B_3} + \widehat{B_5 B_6} + \widehat{B_6 B_4} + \widehat{B_4 A_1})$$

$$= \frac{1}{2} [2\beta + (2\beta + 2\alpha + 2\gamma - 2\alpha) + (2\alpha + 2\beta) + 2\gamma - 2\beta] = 2\beta + 2\gamma + \alpha$$



▲圖 9

因此 $\angle D_1 B_4 B_5 + \angle D_1 D_8 B_5 = \alpha + (2\beta + 2\gamma + \alpha) = 180^\circ$ ，即 $D_1 D_8 B_4 B_5$ 有外接圓。

小結：

觀察 $\overline{B_4 B_5}$ 、 $\overline{B_5 B_6}$ 和 $\overline{B_6 B_4}$ 所圍成的 $\Delta B_4 B_5 B_6$ ，如圖9，根據性質1-4與1-5

，可得 $\Delta B_4 B_5 B_6 \cong \Delta B_1 B_2 B_3$ ，因為兩三角形共圓且對應邊互相平行，所以 $\Delta B_1 B_2 B_3$ 、

$\Delta B_4 B_5 B_6$ 可視為彼此以外接圓圓心 O 點為對稱中心的點對稱圖形。

接下來我們好奇，如果我們將內心與旁心換成重心、外心與垂心，所構成的點(重、外、內)

心中垂三角形又會有什麼樣的性質呢？

二、點(重、外、垂)心中垂三角形之探討

引理1-1 若 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 為任意三角形， C 點為三角形內任一點， C 點到 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 三頂點連線所構成線段 $\overline{CA_1} = a$ ， $\overline{CA_2} = b$ ， $\overline{CA_3} = c$ ， $\angle CA_1 A_2 = \theta_1$ ， $\angle CA_1 A_3 = \theta_2$ ， $\angle CA_2 A_1 = \theta_3$ ， $\angle CA_2 A_3 = \theta_4$ ， $\angle CA_3 A_1 = \theta_5$ ， $\angle CA_3 A_2 = \theta_6$ ， $\Delta B_1 B_2 B_3$ 為 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的點心中垂三角形，則 $\angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$ ， $\angle B_2 = \theta_2 + \theta_5$ ， $\angle B_3 = \theta_4 + \theta_6$ 且 $b = \frac{a \sin \theta_1}{\sin \theta_3}$ ， $c = \frac{a \sin \theta_2}{\sin \theta_5}$ 。

證明：

如圖10，過 B_1 作 $\overline{B_1 D_2} \perp \overline{C_1 C_2}$ ，

在 $\Delta C_1 B_1 C_2$ 和 $\Delta C_1 A_1 D_1$ 中，

$\because \angle B_1 C_1 D_2 = \angle A_1 C_1 D_1$ 且 $\angle B_1 D_2 C_1 = \angle A_1 D_1 C_1 = 90^\circ$

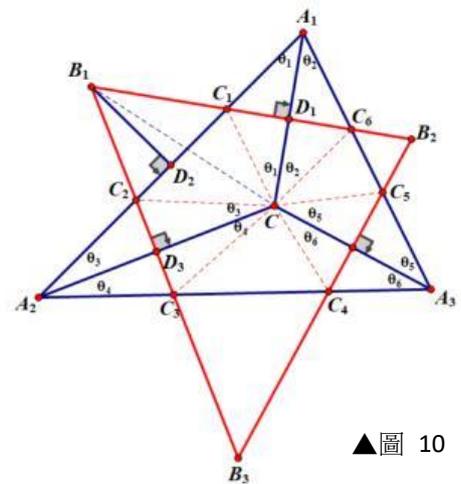
$\therefore \angle C_1 B_1 D_2 = \angle C_1 A_1 D_1 = \theta_1$ ，同理可得

$\angle D_2 B_1 C_2 = \angle D_3 A_2 C_2 = \theta_3 \Rightarrow \angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$ ，同理

$\angle B_2 = \theta_2 + \theta_5$ ， $\angle B_3 = \theta_4 + \theta_6$ 。

在 $\Delta C A_1 A_2$ 中由正弦定理可知 $\frac{b}{\sin \theta_1} = \frac{a}{\sin \theta_3} \Rightarrow b = \frac{a \sin \theta_1}{\sin \theta_3}$

在 $\Delta C A_1 A_3$ 中同理可得 $\frac{c}{\sin \theta_2} = \frac{a}{\sin \theta_5} \Rightarrow c = \frac{a \sin \theta_2}{\sin \theta_5}$



▲圖 10

引理1-2 若 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 為任意三角形， C 點為三角形內任一點， $\Delta B_1 B_2 B_3$ 為 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的點心中垂三角形，則 $\overline{B_1 C_1} = \frac{a \cos(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}$ 。

證明：

如圖11，

$\because B_1D_1CP$ 四點共圓 $\therefore \angle D_1CP = \pi - (\theta_1 + \theta_3)$

$$\text{又 } \frac{\overline{A_1A_2}}{\sin[\pi - (\theta_1 + \theta_3)]} = \frac{a}{\sin \theta_3}$$

$$\Rightarrow \overline{A_1A_2} = \frac{a \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_3}$$

$$\therefore \overline{C_1C_2} = \overline{A_1A_2} - \overline{C_1A_1} - \overline{C_2A_2}$$

$$= \frac{a \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_3} - \frac{a \sec \theta_1}{2} - \frac{a \sin \theta_1 \sec \theta_3}{2 \sin \theta_3}$$

$$= \frac{a}{2} \left[\frac{2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3} \right]$$

作 $\overline{B_1D_2} \perp \overline{C_1C_2}$ ，令 $\overline{B_1D_2} = h$

$$\therefore h(\tan \theta_1 + \tan \theta_3) = \overline{C_1C_2}$$

$$\therefore h = \frac{a}{2} \left[\frac{2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_3)} \right]$$

$$\text{由} h \text{ 可得 } \overline{B_1C_1} = \frac{a}{2} \left[\frac{2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1} \right] \dots \dots (1)$$

接著試著將分子作化簡：

$$2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

$$= 2[\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3] \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_1$$

$$= [\sin \theta_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3] + [\cos \theta_1 \sin \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3]$$

$$+ [\cos \theta_1 \sin \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_3 \cos \theta_3]$$

$$+ [\sin \theta_1 \cos \theta_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_1]$$

$$= \cos \theta_1 \sin \theta_1 \cos^2 \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_1 [\cos^2 \theta_3 - 1]$$

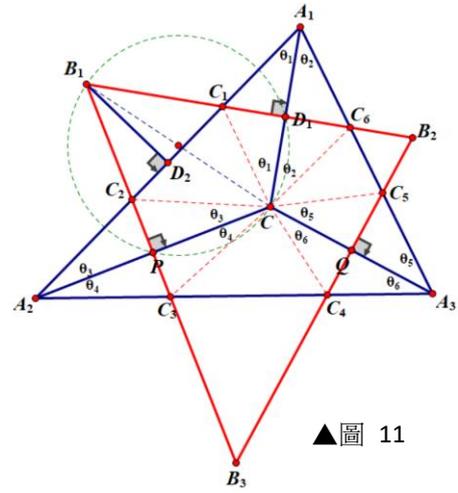
$$+ \sin \theta_3 \cos \theta_3 \cos^2 \theta_1 + \sin \theta_3 \cos \theta_3 [\cos^2 \theta_1 - 1]$$

$$= \sin \theta_1 \cos \theta_1 [\cos^2 \theta_3 - \sin^2 \theta_3] + \sin \theta_3 \cos \theta_3 [\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1]$$

$$= \frac{\sin(2\theta_1) \cos(2\theta_3) + \cos(2\theta_1) \sin(2\theta_3)}{2} = \frac{\sin(2\theta_1 + 2\theta_3)}{2}$$

將其代入(1)式得

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a \sin(2\theta_1 + 2\theta_3)}{4 \sin \theta_3 \sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1} = \frac{a \cos(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}$$



有了引理1-2，便能開始求 $\Delta B_1B_2B_3$ 的邊長

引理1-3 如圖11，若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為任意三角形， C 點為三角形內任一點， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點心中垂三角形，則 $\overline{B_1B_2} = \frac{a}{2}(\cot \theta_3 + \cot \theta_5)$ 。

證明：

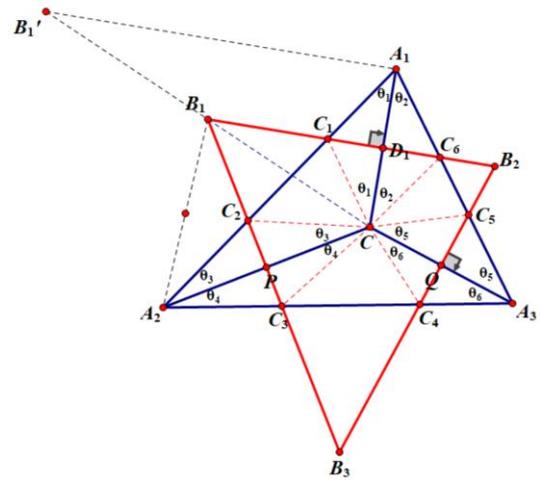
$$\begin{aligned} \because \overline{B_1B_2} &= \overline{B_1C_1} + \overline{C_1C_6} + \overline{B_2C_6} \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{\cos(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_3 \cos \theta_1} + \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} + \frac{\cos(\theta_2 + \theta_5)}{\sin \theta_5 \cos \theta_2} \right] \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3}{\sin \theta_3 \cos \theta_1} + \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} + \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_5 - \sin \theta_2 \sin \theta_5}{\sin \theta_5 \cos \theta_2} \right] \\ &= \frac{a}{2} [\cot \theta_5 - \tan \theta_2 + \tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \cot \theta_3 - \tan \theta_1] = \frac{a}{2} [\cot \theta_3 + \cot \theta_5] \end{aligned}$$

得到引理1-3後，讓我們驚覺原來四邊形 $B_1C_1CA_2$ 會共圓，底下是我們驗證

引理1-4 如圖12，若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為任意三角形， C 點為三角形內任一點， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點心中垂三角形，其中 $\overline{B_1B_2}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於 C_1 ，則 $B_1C_1CA_2$ 四點共圓。

證明：

$\because B_1$ 為 $\overline{B_1B_2}$ 及 $\overline{B_1B_3}$ 兩中垂線的交點，
故 B_1 為 ΔCA_1A_2 外心
在 $\overline{CB_1}$ 上取一點 B_1' ，使得 $\overline{CB_1'} = 2\overline{CB_1}$
 $\Rightarrow A_1B_1'A_2C$ 四點共圓，且 $\overline{CB_1'}$ 為直徑
 $\Rightarrow \angle B_1'A_1C = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle C_1B_1C = 90^\circ - \angle A_1CB_1' = \angle A_1B_1'C = \angle A_1A_2C$
 $\therefore B_1C_1CA_2$ 四點共圓，同理可證



▲圖 12

$B_1C_2CA_1$ 、 $B_2C_6CA_3$ 、 $B_2C_5CA_1$ 、 $B_3C_3CA_3$ 、 $B_3C_4CA_2$ 皆四點共圓。

根據引理1-4，便可進一步確定 $\Delta B_1B_2B_3$ 的內角關係：

引理1-5 如圖12，若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為任意三角形， C 點為三角形內任一點， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點心中垂三角形，則 $\angle CB_1B_3 = \angle A_2B_1B_3 = \theta_1$ ， $\angle CB_1B_2 = \angle A_1B_1B_3 = \theta_3$ ，
 $\angle CB_2B_1 = \angle A_1B_2B_1 = \theta_5$ ， $\angle CB_2B_3 = \angle A_3B_2B_3 = \theta_2$ ， $\angle CB_3B_2 = \angle A_3B_3B_2 = \theta_4$ ，
 $\angle CB_3B_1 = \angle A_2B_3B_1 = \theta_6$ 。

說明：

根據引理1-4， $B_1C_2CA_1$ 四點共圓

則 $\angle CB_1B_3 = \angle CA_1A_2 = \theta_1$

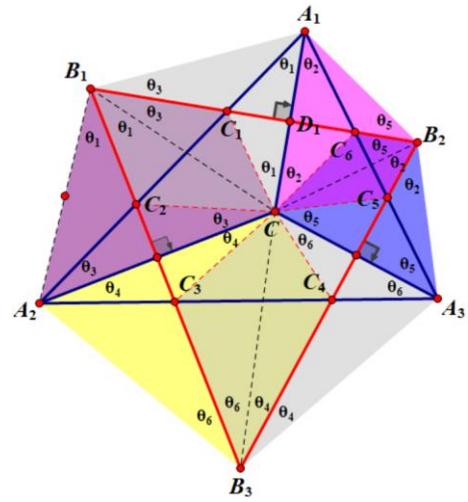
又 $\because \overline{B_1B_2}$ 及 $\overline{B_1B_3}$ 、 $\overline{B_2B_3}$ 為中垂線，

\therefore 四邊形 $CB_2A_1B_1$ 、 $CB_1A_2B_3$ 、 $CB_2A_3B_3$ 皆為箏形

$\Rightarrow \angle A_2B_1B_3 = \angle CB_1B_3 = \angle CA_1A_2 = \theta_1$

其餘角度關係同理可證

(一)點(重)心中垂三角形的相關性質



▲圖 13

性質2-1 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為任意三角形， G 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 重心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(重)心中垂三角形， $\overline{GA_1} = a$ ， $\overline{GA_2} = b$ ， $\overline{GA_3} = c$ ，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 的重心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點。

已知：若 E 為 $\overline{A_1A_2}$ 中點，連接 $\overline{B_1E}$ 交 $\overline{B_2B_3}$ 於 F 點。

求證： $\overline{B_1F}$ 必為 $\Delta A_1A_2A_3$ 之中垂線，且為 $\Delta B_1B_2B_3$ 之中線。

證明：

令 O 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心，連接 $\overline{B_1O}$ 交 $\overline{B_2B_3}$ 於 F 點

$\because B_1$ 為 $\overline{B_1B_2}$ 及 $\overline{B_1B_3}$ 兩中垂線的交點，

故 B_1 為 ΔGA_1A_2 外心， E 為 $\overline{A_1A_2}$ 中點

$\therefore \overline{B_1E} \perp \overline{A_1A_2}$ ，即 $\overline{B_1F}$ 必為 $\Delta A_1A_2A_3$ 之中垂線

$\because \overline{B_1E} \perp \overline{A_1A_2} \Rightarrow \Delta B_1EC_2 \sim \Delta B_1HK \sim \Delta A_2EK$

$\Rightarrow \angle FB_1B_3 = \angle EA_2K = \theta_3$ 由引理1-1 $\angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$

$\therefore \angle FB_1B_2 = (\theta_1 + \theta_3) - \theta_3 = \theta_1$ ，因此，若要證明 $\overline{B_1F}$ 為中線

僅須證明 $\overline{B_1B_2} : \overline{B_1B_3} = \sin \theta_3 : \sin \theta_1$

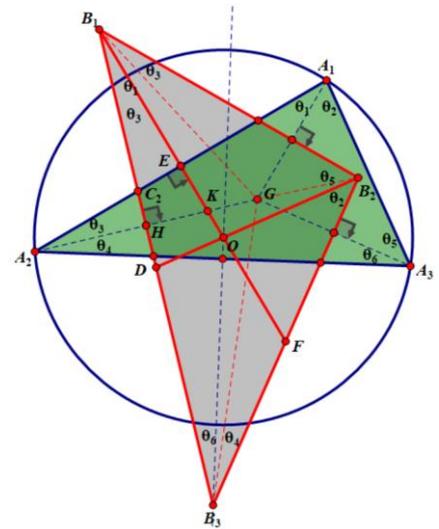
由正弦定理， $\overline{B_1B_2} = 2R \sin(\theta_4 + \theta_6)$ ， $\overline{B_1B_3} = 2R \sin(\theta_2 + \theta_5)$ ， R 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 外接圓半徑

又 $\because G$ 為重心， $\Delta GA_1A_2 = \Delta GA_2A_3 = \Delta GA_1A_3$

故 $ab \sin(\theta_1 + \theta_3) = bc \sin(\theta_4 + \theta_6) = ca \sin(\theta_2 + \theta_5)$

$\Rightarrow \overline{B_1B_2} : \overline{B_1B_3} = \sin(\theta_4 + \theta_6) : \sin(\theta_2 + \theta_5) = ca : bc = a : b$

由正弦定理， $\frac{a}{\sin \theta_3} = \frac{b}{\sin \theta_1} \Rightarrow \overline{B_1B_2} : \overline{B_1B_3} = \sin \theta_3 : \sin \theta_1$



▲圖 14

故 $\overline{B_1F}$ 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 之中線，同理 $\overline{B_2D}$ 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 之中線，故可得 $\Delta B_1B_2B_3$ 的重心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點。

性質2-2 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為任意三角形， G 為三角形重心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(重)心中垂三角形， $\overline{GA_1} = a$ ， $\overline{GA_2} = b$ ， $\overline{GA_3} = c$ ，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 $= \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} R$ ，其中 R 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 外接圓半徑。

證明：

如圖， $\because G$ 為重心，

$$\text{則 } \Delta GA_1A_2 = \Delta GA_2A_3 = \Delta GA_1A_3$$

$$\text{故 } ab \sin(\theta_1 + \theta_3) = bc \sin(\theta_4 + \theta_6) = ca \sin(\theta_2 + \theta_5)$$

$$\therefore \Delta A_1A_2A_3 = \frac{ab}{2} \sin(\theta_1 + \theta_3) \cdot 3 = \frac{3}{2} ab \sin(\theta_1 + \theta_3)$$

$$\text{且 } \overline{B_1B_2} = 2R \sin(\theta_4 + \theta_6), \overline{B_1B_3} = 2R \sin(\theta_2 + \theta_5)$$

$$, \overline{B_2B_3} = 2R \sin(\theta_1 + \theta_3)$$

$$\Rightarrow \Delta B_1B_2B_3 = \Delta B_1B_2G + \Delta GB_2B_3 + \Delta GB_1B_3$$

$$= \frac{a}{4} \cdot \overline{B_1B_2} + \frac{b}{4} \cdot \overline{B_1B_3} + \frac{c}{4} \cdot \overline{B_2B_3}$$

$$= \frac{a}{4} \cdot (2R \sin(\theta_4 + \theta_6)) + \frac{b}{4} \cdot (2R \sin(\theta_2 + \theta_5)) + \frac{c}{4} \cdot (2R \sin(\theta_1 + \theta_3))$$

$$= \frac{aR}{2} \times \frac{a}{c} \sin(\theta_1 + \theta_3) + \frac{bR}{2} \times \frac{b}{c} \sin(\theta_1 + \theta_3) + \frac{cR}{2} \sin(\theta_1 + \theta_3)$$

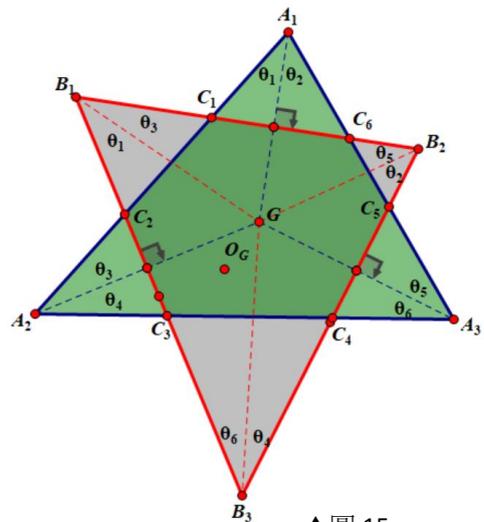
$$= \frac{R}{2} \sin(\theta_1 + \theta_3) \left[\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + c \right] = \frac{R \sin(\theta_1 + \theta_3) (a^2 + b^2 + c^2)}{2c}$$

$\therefore \Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 $= \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc} R$ ，由引理1-3，其中 $\Delta B_1B_2B_3$ 外接圓半徑

$$R = \frac{a(\cot \theta_3 + \cot \theta_5)}{4 \sin(\theta_4 + \theta_6)} = \frac{b(\cot \theta_1 + \cot \theta_6)}{4 \sin(\theta_2 + \theta_5)} = \frac{c(\cot \theta_2 + \cot \theta_4)}{4 \sin(\theta_1 + \theta_3)}$$

(二)點(外)心中垂三角形的相關性質

性質2-3 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為銳角三角形， O 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(外)心中垂三角形， $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3}$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外接圓半徑，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 的內心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點。



▲圖 15

證明：

$\because O$ 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外心，

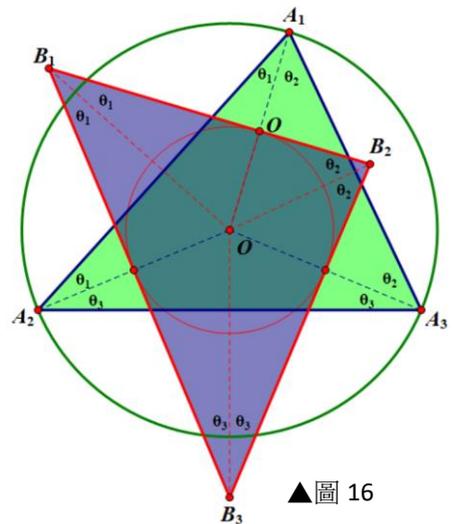
令 $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \theta_1$ ， $\angle OA_1A_3 = \angle OA_3A_1 = \theta_2$

$\angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 = \theta_3$ ，根據引理1-5可得

$\angle OB_1B_2 = \angle OA_2A_1 = \theta_1$ ， $\angle OB_1B_3 = \angle OA_1A_2 = \theta_1$

$\therefore \overline{OB_1}$ 為角平分線，同理可得 $\overline{OB_2}$ 平分 $\angle B_2$ ，

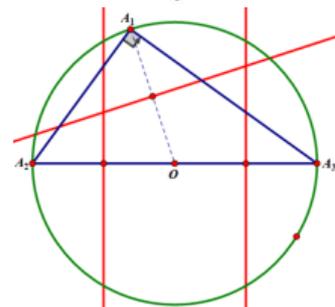
$\overline{OB_3}$ 平分 $\angle B_3$ ，故 O 點為 $\Delta B_1B_2B_3$ 的內心。



當 $\Delta A_1A_2A_3$ 為直角三角形時，連接外心作三條中垂線，

此時因為其中兩條為平行線，原本三個交點會退化成兩點，

因此無法圍成 $\Delta B_1B_2B_3$ ，如右圖。



性質2-4 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為鈍角三角形， $\angle A_1 > 90^\circ$ ， O 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(外)心中垂三角形， $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3}$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外接圓半徑，
 $\angle A_1 = \theta_1 + \theta_2$ ， $\angle A_2 = \theta_3$ ， $\angle A_3 = \theta_4$ ，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 的旁心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點且
 $\angle B_1 = 180^\circ - 2\theta_1$ ， $\angle B_2 = 180^\circ - 2\theta_2$ ， $\angle B_3 = 2(\theta_1 + \theta_2) - 180^\circ$ 。

證明：

(1) 如圖17， $\because \overline{OA_1} = \overline{OA_2}$ ， $\overline{CB_3}$ 、 $\overline{EB_1}$ 分別為其中垂線，

$\Rightarrow \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{OA_1} = \frac{1}{2}\overline{OA_2} = \overline{OE}$ ，且 $\angle B_1CO = \angle B_1EO = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta B_1CO \cong \Delta B_1EO$ (RHS) $\Rightarrow \overline{B_1O}$ 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 中 $\angle B_1$ 之外角平分線

同理 $\overline{B_2O}$ 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 中 $\angle B_2$ 之外角平分線，故 O 點為 $\Delta B_1B_2B_3$ 之旁心

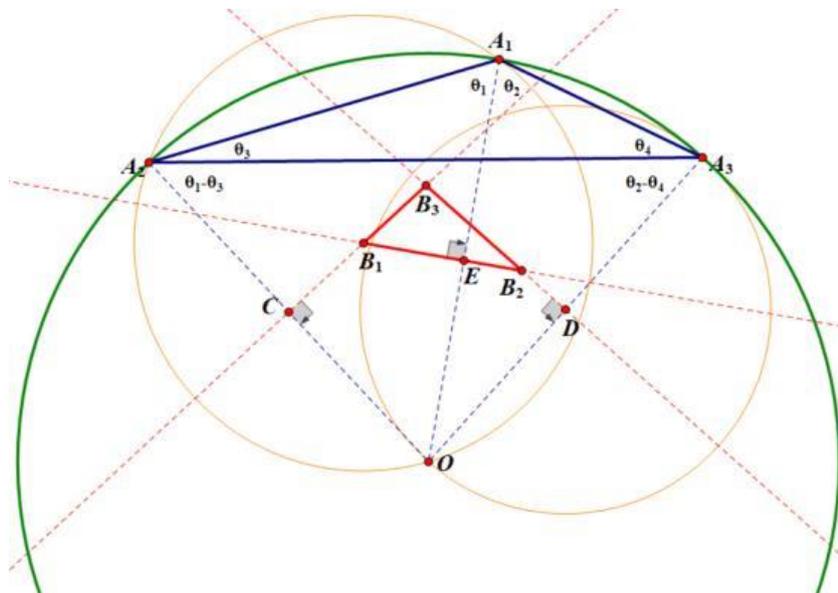
(2) $\because B_3COD$ 四點共圓， $\angle B_3 = 180^\circ - (360^\circ - 2\angle A) = 2\angle A - 180^\circ = 2(\theta_1 + \theta_2) - 180^\circ$

又 $\because B_1COE$ 四點共圓 $\Rightarrow \angle CB_1E = 180^\circ - \angle A_1OA_2 = 180^\circ - (180^\circ - 2\theta_1) = 2\theta_1$

$\Rightarrow \angle B_1 = 180^\circ - \angle CB_1E = 180^\circ - 2\theta_1$

同理 B_2DOE 四點共圓 $\Rightarrow \angle DB_2E = 180^\circ - \angle A_1OA_3 = 180^\circ - (180^\circ - 2\theta_2) = 2\theta_2$

$\Rightarrow \angle B_2 = 180^\circ - \angle DB_2E = 180^\circ - 2\theta_2$



▲圖 17

接下來我們探討面積比問題

性質2-5 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為銳角三角形， O 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(外)心中垂三角形，則 $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 $= \frac{1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$ 。

證明：

由性質2-3，若 $\Delta A_1A_2A_3$ 外接圓半徑 R ， $\Delta B_1B_2B_3$ 內切圓

半徑為 r ，則 $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3} = 2r = R$

$$\Delta A_1A_2A_3 = \frac{R^2}{2} \sin(\pi - 2\theta_1) + \frac{R^2}{2} \sin(\pi - 2\theta_2) + \frac{R^2}{2} \sin(\pi - 2\theta_3)$$

$$= \frac{4r^2}{2} [\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_3]$$

$$= 2r^2 [4\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3] = 8r^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3$$

$$\Delta B_1B_2B_3 = \frac{\overline{B_1B_2}r}{2} + \frac{\overline{B_2B_3}r}{2} + \frac{\overline{B_1B_3}r}{2}$$

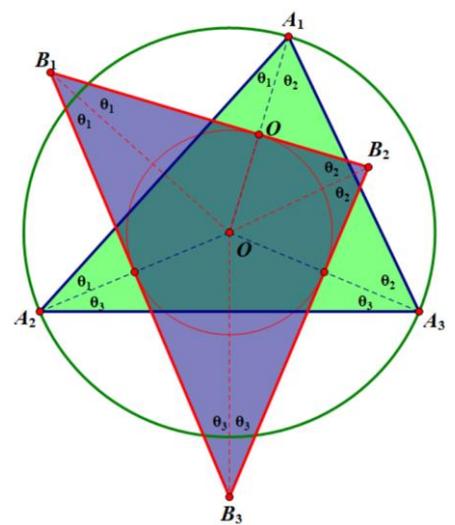
$$= \frac{r}{2} (\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \overline{B_3B_2}) \text{ 由引理1-3}$$

$$= \frac{r^2}{2} [(\cot \theta_1 + \cot \theta_2) + (\cot \theta_2 + \cot \theta_3) + (\cot \theta_1 + \cot \theta_3)]$$

$$= r^2 [\cot \theta_1 + \cot \theta_2 + \cot \theta_3]$$

$$= r^2 \left[\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3} \right]$$

$$\text{故 } \Delta B_1B_2B_3 \text{ 與 } \Delta A_1A_2A_3 \text{ 面積比值} = \frac{r^2 \left[\frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3} \right]}{8r^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3} = \frac{1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$$



▲圖 18

性質2-6 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為鈍角三角形($\angle A_1$ 為鈍角), $\angle A_1 = \theta_1 + \theta_2$, $\angle A_2 = \theta_3$, $\angle A_3 = \theta_4$, O 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 外心, $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(外)心中垂三角形, 則 $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 = $\frac{-1}{8 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2}$ 。

證明：

如圖19, 由性質2-4, 令 $\Delta B_1B_2B_3$ 旁心圓半徑 $\overline{OE} = r$, 則 $\Delta A_1A_2A_3$ 外接圓半徑 $R = 2r$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta A_1A_2A_3 &= \frac{1}{2} \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= (4r \cos \theta_1)(4r \cos \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= 8r^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdots \cdots (1) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \overline{B_1B_2} = r(\cot \theta_1 + \cot \theta_2) = r \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}$$

由正弦定理與性質3-4可得

$$\begin{aligned} \overline{B_2B_3} &= \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_2) 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 [-\sin(2\theta_1 + 2\theta_2)]} \\ &= \frac{r \cos \theta_1}{\sin \theta_2 [-\cos(\theta_1 + \theta_2)]} \end{aligned}$$

$$\text{代入 } \Delta B_1B_2B_3 = \frac{1}{2} \overline{B_1B_2} \cdot \overline{B_2B_3} \cdot \sin 2\theta_2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[\frac{r \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \right] \cdot \left[\frac{r \cos \theta_1}{\sin \theta_2 [-\cos(\theta_1 + \theta_2)]} \right] \cdot \sin 2\theta_2 \\ &= -r^2 \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2} = -r^2 \tan(\theta_1 + \theta_2) \cot \theta_1 \cot \theta_2 \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

$$\text{由(1)式與(2)式得 } \Delta B_1B_2B_3 \text{ 與 } \Delta A_1A_2A_3 \text{ 的面積比值} = \frac{-1}{8 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2}$$

(三)點(垂)心中垂三角形的相關性質

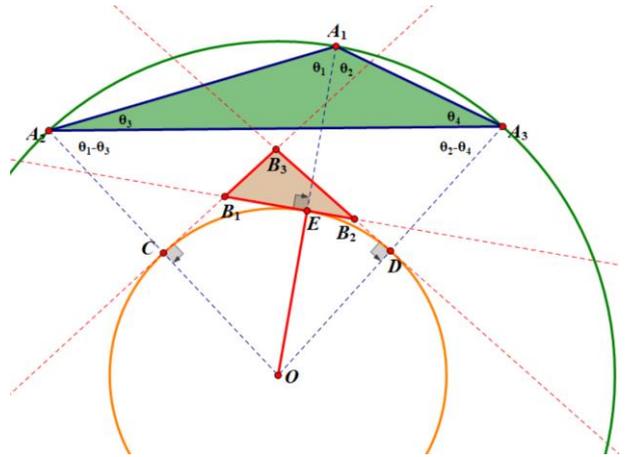
性質2-7 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為銳角三角形, D 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 垂心, $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(垂)心中垂三角形, 則 $\Delta B_1B_2B_3$ 的外心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的垂心共點。

證明：

如圖20, $\because D$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 之垂心,

若 $\overline{A_1D} \perp \overline{A_2A_3}$ 於 E , $\overline{A_2D} \perp \overline{A_1A_3}$ 於 F , $\overline{A_3D} \perp \overline{A_1A_2}$ 於 G

則 GFA_3A_2 四點共圓, 可得 $\theta_3 = \theta_5$, $\Rightarrow \Delta DB_1B_2$ 為等腰三角形, 又 $\overline{A_1D} \perp \overline{B_1B_2}$



▲圖 19

$\Rightarrow \overline{A_1D}$ 為 $\overline{B_1B_2}$ 之中垂線，同理

$\because GEA_3A_1$ 四點共圓，可得 $\theta_1 = \theta_6$ ，

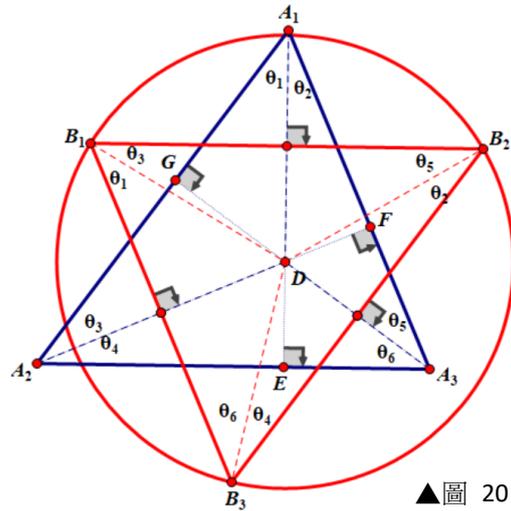
$\Rightarrow \Delta DB_1B_3$ 為等腰三角形，又 $\overline{A_2D} \perp \overline{B_1B_3}$

$\Rightarrow \overline{A_2D}$ 為 $\overline{B_1B_3}$ 之中垂線

故可得 D 點為 $\Delta B_1B_2B_3$ 之外心。

令 R 為外接圓半徑，由外接圓半徑三角面積公式

$$\Rightarrow \Delta B_1B_2B_3 = 2R^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3$$



▲圖 20

性質 2-8 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為銳角三角形，D 點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 垂心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(垂)心中垂三角形，則 $\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$ 。

證明：

由性質 2-7 與引理 1-5 可得角度對應關係如圖 21-1，

$$\text{可得 } \angle A_1 = \angle B_3 = \theta_1 + \theta_2$$

$$\angle A_2 = \angle B_2 = \theta_2 + \theta_3, \angle A_3 = \angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$$

$$\text{令 } \overline{DA_1} = a, \overline{DA_2} = b, \overline{DA_3} = c$$

$$\text{由引理 1-1 可得 } b = \frac{a \sin \theta_1}{\sin \theta_3}, c = \frac{a \sin \theta_2}{\sin \theta_3}$$

$$\because \overline{A_1A_2} = \overline{A_1G} + \overline{GA_2} = a \cos \theta_1 + b \cos \theta_3$$

$$= a \left(\cos \theta_1 + \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_3}{\sin \theta_3} \right) = a \frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_3}$$

$$\overline{B_2B_3} = 2\overline{B_2M_3} = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \cot \theta_2 = \frac{a \sin \theta_2}{\sin \theta_3} \cdot \cot \theta_2 = a \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_3}$$

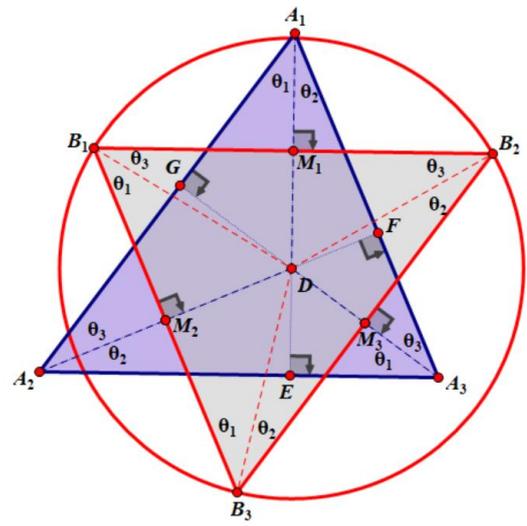
$$\text{因 } \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overline{A_1A_2} = \overline{B_2B_3}, \text{ 同理可證 } \overline{A_2A_3} = \overline{B_1B_2}, \overline{A_3A_1} = \overline{B_1B_3}$$

故 $\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$ ，所以 $\Delta B_3B_2B_1$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 面積比值為 1。

小結：

1. 如圖 21-2，由性質 2-7， D_A 同時為 $\Delta A_1A_2A_3$ 垂心也是 $\Delta B_1B_2B_3$ 外心，因此若 D_B 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 垂心則也會是 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外心，此外若取 $\overline{D_A D_B}$ 中點 N，

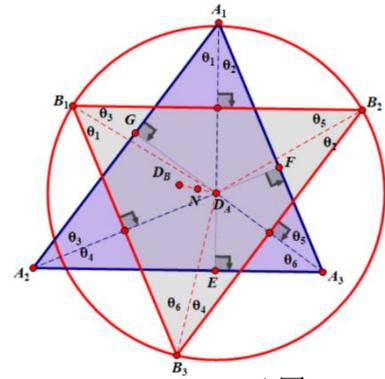
由九點圓性質可知，N 必同時為 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta B_1B_2B_3$ 的九點圓圓心。



▲圖 21-1

2. 由性質2-8可發現，因為 $\Delta A_1A_2A_3 \cong \Delta B_1B_2B_3$ ，
且對應邊分別平行，故 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta B_1B_2B_3$ 會是以
N點為點對稱中心旋轉 180° 的對稱圖形。

當 $\Delta A_1A_2A_3$ 為直角三角形且 $\angle A_1$ 為直角時，
此時垂心會與 A_1 兩點重合，無法建構出點(垂)心三角形，
接著我們討論鈍角的情況。



▲圖 21-2

性質2-9 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為鈍角三角形， $\angle A_3 > 90^\circ$ ，D點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 垂心， $\angle A_1 = \theta_1$ ， $\angle A_2 = \theta_2$ ， $\angle A_3 = \theta_3$ ， $\Delta B_1B_2B_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(垂)心中垂三角形，則 $\angle B_1 = \angle A_3 = \theta_3$ ， $\angle B_2 = \angle A_2 = \theta_2$ ， $\angle B_3 = \angle A_1 = \theta_1$ 。

證明：

$$\because \overline{GD} \perp \overline{A_1A_2} \text{ 且 } \overline{GD} \perp \overline{B_2B_3},$$

$$\Rightarrow \overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_2B_3}, \text{ 同理}$$

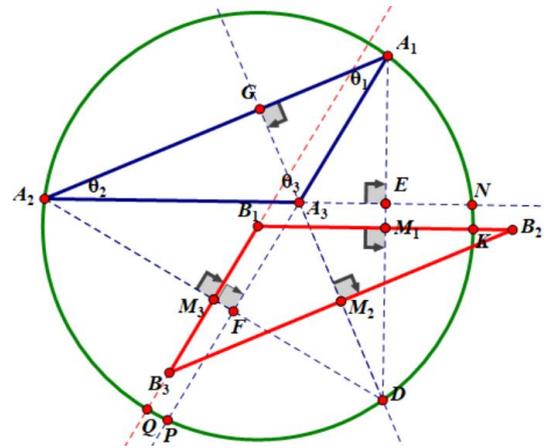
$$\overline{A_1D} \perp \overline{A_2A_3} \text{ 且 } \overline{A_1D} \perp \overline{B_1B_2}, \Rightarrow \overline{A_2A_3} \parallel \overline{B_1B_2},$$

$$\overline{A_2D} \perp \overline{A_1A_3} \text{ 且 } \overline{A_2D} \perp \overline{B_1B_3}, \Rightarrow \overline{A_1A_3} \parallel \overline{B_1B_3}$$

因此可得 $\angle B_1 = \angle PA_3N = \angle A_3$ 且

$$\angle B_2 = 90^\circ - \angle M_2A_3N = 90^\circ - \angle GA_3A_2 = \angle A_2$$

$$\angle B_3 = \angle M_2DF = 90^\circ - \angle FA_3D = 90^\circ - \angle GA_3A_1 = \angle A_1$$



▲圖 22

性質2-10 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為鈍角三角形， $\angle A_3 > 90^\circ$ ，D點為 $\Delta A_1A_2A_3$ 垂心， $\Delta B_1B_2B_3$ 為
 $\Delta A_1A_2A_3$ 的點(垂)心中垂三角形，則 $\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$ 且 $\Delta A_1A_2A_3$ 的垂心D為 $\Delta B_1B_2B_3$ 的
外心。

證明：

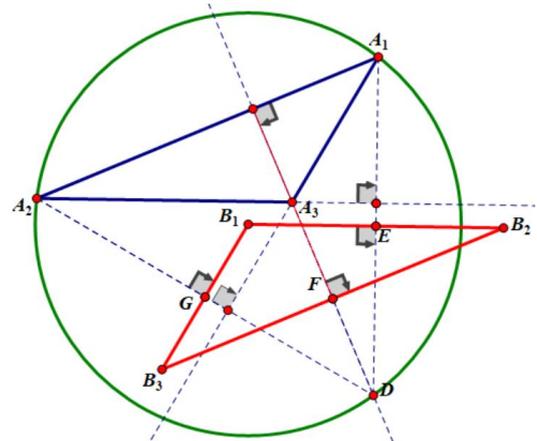
如圖23 $\because \overline{B_1B_3}$ 為 $\overline{A_2D}$ 中垂線， $\overline{B_2B_3}$ 為 $\overline{A_3D}$ 中垂線，

$\Rightarrow B_3$ 為 ΔA_3A_2D 之外心

$$\Rightarrow \overline{B_3A_3} = \frac{\overline{A_2D}}{2\sin\angle A_2A_3D} \text{ (正弦定理)}$$

又 $\overline{B_1B_3}$ 為 $\overline{A_2D}$ 中垂線， $\overline{B_2B_1}$ 為 $\overline{A_1D}$ 中垂線，

$\Rightarrow B_1$ 為 ΔA_1A_2D 之外心



▲圖 23

$$\Rightarrow \overline{B_1D} = \frac{\overline{A_2D}}{2\sin\angle A_2A_1D}, \text{ 因 } \angle A_2A_3D = \pi - \angle A_2A_1D$$

$$\text{得 } \overline{B_3A_3} = \overline{B_1D}, \text{ 又 } \overline{B_3A_3} = \overline{B_3D}$$

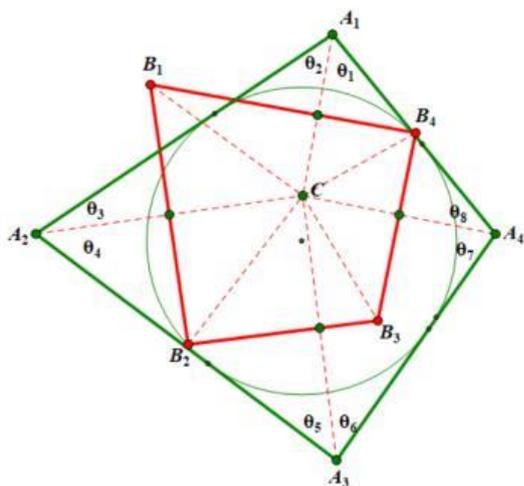
$$\Rightarrow \overline{B_3A_3} = \overline{B_1D} = \overline{B_3D},$$

$\therefore \triangle B_1DG \cong \triangle B_3DG$ (RHS) 得 $\overline{B_1G} = \overline{B_3G}$, 此時根據性質2-9

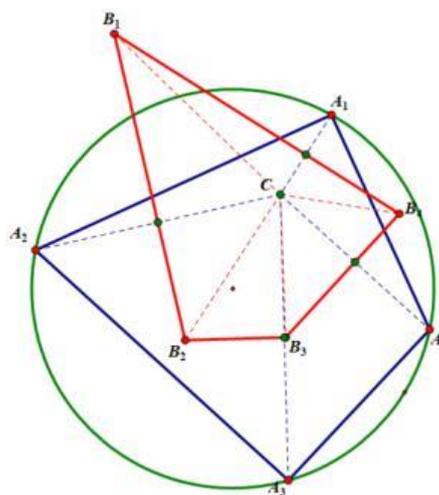
並由尤拉線性質可給出 $\overline{A_1A_3} = 2\overline{B_1G} \Rightarrow \overline{B_1B_3} = \overline{A_1A_3} \Rightarrow \triangle B_3B_2B_1 \cong \triangle A_1A_2A_3$ (ASA)

三、圓外切與圓內接四邊形之點心中垂四邊形的相關性質

分別將圓外切與圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的四個頂點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 ，與內部任一點 C 點作連線所得 $\overline{A_1C}$ 、 $\overline{A_2C}$ 、 $\overline{A_3C}$ 、 $\overline{A_4C}$ 分別作中垂線，若四條中垂線的交點分別交於 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 四點，連接四點所得四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ (如下圖) 會不會也有性質存在呢？



▲ 圓外切四邊形所得 $B_1B_2B_3B_4$



▲ 圓內接四邊形所得 $B_1B_2B_3B_4$

我們先研究以下引理

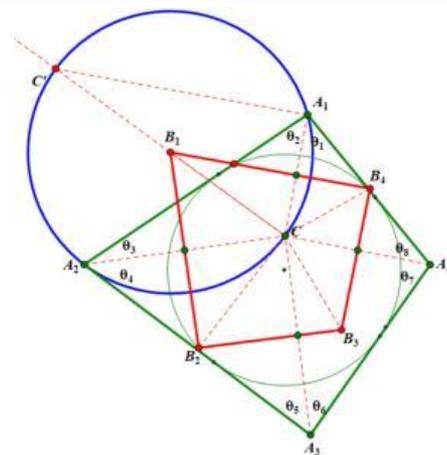
引理2-1 在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中， C 點為內部任一點， C 點到四頂點連線所構成八個角分別為 $\theta_1 \sim \theta_8$ (如上圖)，則所得中垂四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 中， $\angle CB_1B_4 = \theta_3$ ， $\angle CB_1B_2 = \theta_2$ ， $\angle CB_2B_1 = \theta_5$ ， $\angle CB_2B_3 = \theta_4$ ， $\angle CB_3B_2 = \theta_7$ ， $\angle CB_3B_4 = \theta_6$ ， $\angle CB_4B_1 = \theta_8$ ， $\angle CB_4B_3 = \theta_1$ 。

證明：

如右圖， $\because B_1$ 為 $\overline{B_1B_2}$ 及 $\overline{B_1B_4}$ 兩中垂線的交點，

故 B_1 為 $\triangle CA_1A_2$ 外心，

在 $\overline{CB_1}$ 上取一點 C' ，使得 $\overline{CC'} = 2\overline{CB_1}$ ，



$\Rightarrow A_1C'A_2C$ 四點共圓，連接 C' 、 A_1 ，因為 $\overline{CC'}$ 為直徑，

$\Rightarrow \angle C'A_1C = 90^\circ \Rightarrow \overline{B_1B_4} \parallel \overline{C'A_1}$

$\Rightarrow \angle CB_1B_4 = \angle CC'A_1 = \angle A_1A_2C = \theta_3$

故 $\angle CB_1B_4 = \theta_3$ ，同理可證其餘七個角會分別對應，

有了角度關係，便可開始研究點(內)心中垂四邊形。

(一)圓外切四邊形與其點(內)心中垂四邊形的相關性質

性質3-1 圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中， I 為其內心，四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為其點(內)心四邊形，則 B_1 、 I 、 B_3 與 B_2 、 I 、 B_4 分別共線，即 I 為四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 對角線之交點。

證明：

如圖25，由引理2-1，

ΔB_2B_1I 中， $\angle B_2IB_1 = 180^\circ - (\theta_1 + \theta_3)$ ，

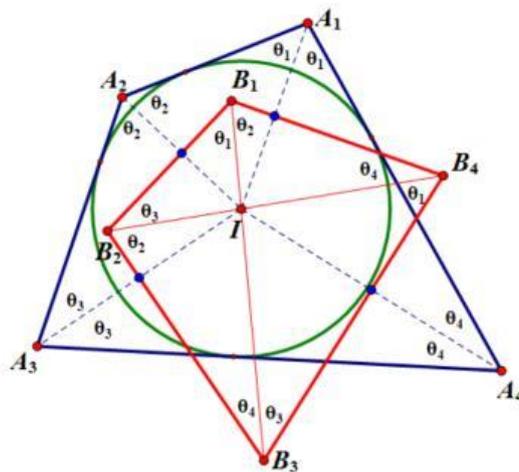
ΔB_4B_1I 中， $\angle B_4IB_1 = 180^\circ - (\theta_2 + \theta_4)$ ，

$\therefore \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle B_2IB_4 = \angle B_2IB_1 + \angle B_4IB_1 = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$

同理， $\angle B_1IB_3 = \angle B_2IB_1 + \angle B_2IB_3 = 180^\circ$

故 I 為四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 對角線之交點



▲圖 25

性質3-2 若 $A_1A_2A_3A_4$ 為圓外切四邊形， r 為其內切圓半徑， $\angle A_1 = 2\theta_1$ ， $\angle A_2 = 2\theta_2$ ， $\angle A_3 = 2\theta_3$ ， $\angle A_4 = 2\theta_4$ ， r 為內切圓半徑，則其點(內)心四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 四邊長分別為

$$\overline{B_1B_2} = \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}, \overline{B_2B_3} = \frac{r \sin(\theta_2 + \theta_4)}{2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}, \overline{B_3B_4} = \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_4}, \overline{B_4B_1} = \frac{r \sin(\theta_2 + \theta_4)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_4}.$$

證明：

如圖25， $\therefore \overline{IA_1} = \frac{r}{\sin \theta_1}$ ， $\overline{IA_2} = \frac{r}{\sin \theta_2}$ ， $\overline{IA_3} = \frac{r}{\sin \theta_3}$ ， $\overline{IA_4} = \frac{r}{\sin \theta_4}$

$$\Rightarrow \overline{B_1B_2} = \frac{\overline{IA_2}}{2} (\cot \theta_1 + \cot \theta_3) = \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3},$$

$$\overline{B_2B_3} = \frac{\overline{IA_3}}{2} (\cot \theta_2 + \cot \theta_4) = \frac{r \sin(\theta_2 + \theta_4)}{2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4},$$

$$\overline{B_3B_4} = \frac{\overline{IA_4}}{2} (\cot \theta_1 + \cot \theta_3) = \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_4},$$

$$\overline{B_1B_4} = \frac{\overline{IA_1}}{2} (\cot\theta_2 + \cot\theta_4) = \frac{r \sin(\theta_2 + \theta_4)}{2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4}$$

接著便可得點(內)心四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 的面積

性質3-3 若四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的點(內)心四邊形，則四邊形

$$B_1B_2B_3B_4 \text{ 的面積} = \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \right]^2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_1 + \theta_4)。$$

證明：

如圖26，由性質3-1，圓外切四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 面積

$$\begin{aligned} &= \Delta B_1B_2B_3 + \Delta B_1B_4B_3 \\ &= \frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_4) \sin(\theta_2 + \theta_3)}{(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3)(\sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4)} + \frac{\sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_2 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_4)}{(\sin\theta_1 \sin\theta_3 \sin\theta_4)(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4)} \right] \\ &= \frac{r^2}{8} \cdot \left(\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \right)^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot [\sin\theta_1 \sin\theta_4 + \sin\theta_2 \sin\theta_3] \\ &= \frac{r^2}{8} \cdot \left(\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \right)^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \left[\frac{\cos(\theta_1 - \theta_4) + \cos(\theta_2 - \theta_3)}{2} \right] \\ &= \frac{r^2}{8} \cdot \left(\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \right)^2 \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_2 + \theta_4) \\ &= \frac{r^2}{8} \cdot \left(\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} \right)^2 \sin(\theta_1 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_3) \end{aligned}$$

接著求原四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積：

$$\text{如圖26} \because \overline{A_1A_2} = r(\cot\theta_1 + \cot\theta_2),$$

$$\overline{A_2A_3} = r(\cot\theta_2 + \cot\theta_3),$$

$$\overline{A_3A_4} = r(\cot\theta_3 + \cot\theta_4), \quad \overline{A_4A_1} = r(\cot\theta_4 + \cot\theta_1),$$

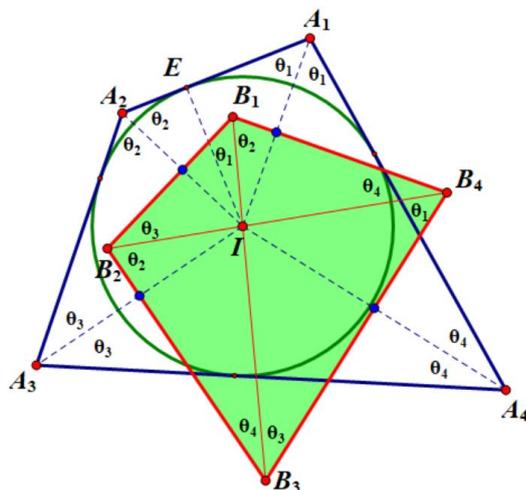
$$\text{四邊形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積} = \frac{r}{2} (\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_1})$$

$$= r^2 (\cot\theta_1 + \cot\theta_2 + \cot\theta_3 + \cot\theta_4)$$

$$= r^2 \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 + \cos\theta_2 \sin\theta_1 \sin\theta_3 \sin\theta_4 + \cos\theta_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_4 + \cos\theta_4 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4}$$

$$= r^2 \frac{\sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin(\theta_3 + \theta_4)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4} = r^2 \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4}$$

根據性質3-3可得面積比值：



▲ 圖 26

性質3-4 若四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的點(內)心四邊形，則四邊形

$$B_1B_2B_3B_4 \text{ 與原四邊形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積比值} = \frac{[\sin(\theta_1 + \theta_3)]^2}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$$

(二) 圓內接四邊形與其點(外)心中垂四邊形的相關性質

性質3-5 圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中， O 為其外心，四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為其點(外)心四邊形，則 O 點為四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 對之內心。此時 $R=2r$ ， R ： $A_1A_2A_3A_4$ 外接圓半徑， r ： $B_1B_2B_3B_4$ 內切圓半徑。

說明：

因為 O 為外心 $\Rightarrow \overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3} = \overline{OA_4}$

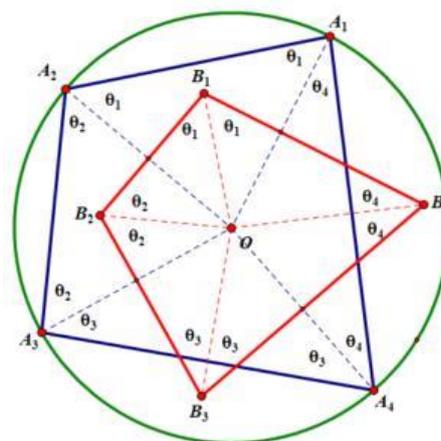
令 $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \theta_1$ ， $\angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_2 = \theta_2$

$\angle OA_3A_4 = \angle OA_4A_3 = \theta_3$ ， $\angle OA_4A_1 = \angle OA_1A_4 = \theta_4$

根據引理2-1可得 $\overline{OB_1}$ 為 $\angle B_1$ 分角線，同理

$\overline{OB_2}$ 為 $\angle B_2$ 分角線， $\overline{OB_3}$ 為 $\angle B_3$ 分角線，

故 O 點為四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 對之內心，



▲ 圖 27

又此時角度設定與圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 相同，因此面積公式也會相同：

性質3-6 若四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的點(外)心四邊形，則四邊形

$$B_1B_2B_3B_4 \text{ 的面積} = r^2 \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}。$$

最後計算圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面積，如圖27

$$\text{四邊形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積} = \frac{R^2}{2} [\sin(\pi - 2\theta_1) + \sin(\pi - 2\theta_2) + \sin(\pi - 2\theta_3) + \sin(\pi - 2\theta_4)]$$

$$= 4r^2 [2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2 \sin(\theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_3 - \theta_4)]$$

$$= 4r^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_3 - \theta_4)]$$

$$= 8r^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_4) \sin(\theta_2 + \theta_3) = 8r^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_1 + \theta_4)$$

因此可得 $B_1B_2B_3B_4$ 為圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積比值：

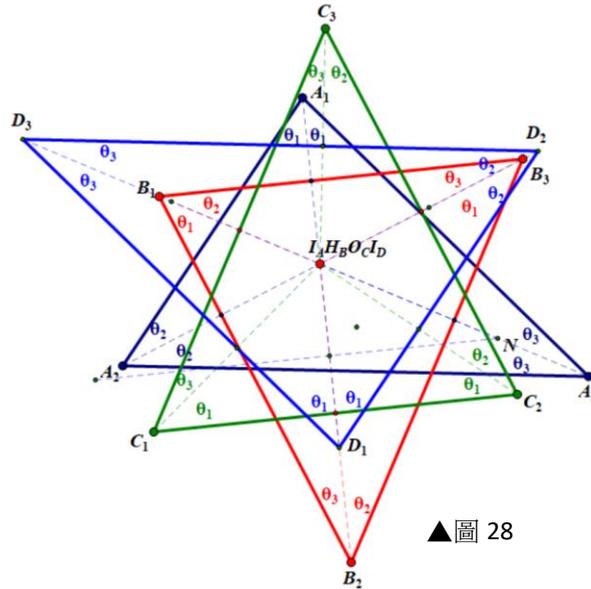
性質3-7 若四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 為圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的點(外)心四邊形，則四邊形

$$B_1B_2B_3B_4 \text{ 與原四邊形 } A_1A_2A_3A_4 \text{ 面積比值} = \frac{1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}。$$

陸、討論

一、重複操作點(內)心中垂三角形關係之探討

從以上研究過程中，我們發現原三角形內心與點(內)心三角形垂心共點，而原三角形垂心與點(垂)心三角形外心共點，原三角形外心與點(外)心三角形內心共點，也就是最後會回到內心，為什麼會有這麼有趣的現象，於是探討其發生原因。



▲圖 28

如圖28，從 $\Delta A_1A_2A_3$ 的內心開始，操作第一次點心中垂可得 $\Delta B_1B_2B_3$ ，第二次可得 $\Delta C_1C_2C_3$ ，第三次可得 $\Delta D_1D_2D_3$ ，由研究過程可知 $\Delta A_1A_2A_3$ 內心與 $\Delta B_1B_2B_3$ 垂心與 $\Delta C_1C_2C_3$ 外心與 $\Delta D_1D_2D_3$ 內心共點，即 I_A 與 H_B 與 O_C 與 I_D 四點共點。接著觀察四個三角形角度間變化關係：

$\Delta A_1A_2A_3$ (內心)	$\angle A_1 = 2\theta_1$	$\angle A_2 = 2\theta_2$	$\angle A_3 = 2\theta_3$
$\Delta B_1B_2B_3$ (垂心)	$\angle B_1 = \theta_1 + \theta_2$	$\angle B_2 = \theta_2 + \theta_3$	$\angle B_3 = \theta_1 + \theta_3$
$\Delta C_1C_2C_3$ (外心)	$\angle C_1 = \theta_1 + \theta_3$	$\angle C_2 = \theta_1 + \theta_2$	$\angle C_3 = \theta_2 + \theta_3$
$\Delta D_1D_2D_3$ (內心)	$\angle D_1 = 2\theta_1$	$\angle D_2 = 2\theta_2$	$\angle D_3 = 2\theta_3$

1. 由上表可知連續疊作三次，角度轉換後角會對應相等，因此第 n 次會和第 $n+3$ 次操作三角形相似，在 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta B_1B_2B_3$ 中，因 $\angle A_1IB_2 = \sum_{i=1}^3(90 - \theta_i) = 180^\circ$ ，可得 $\overline{A_1IB_2}$ 共線，同理 $\overline{A_2IB_3}$ 、 $\overline{A_3IB_1}$ 共線；在 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta D_1D_2D_3$ 中，因 $\angle A_1ID_1 = \angle A_2ID_2 = \angle A_3ID_3 = \sum_{i=1}^3(90 - \theta_i) = 180^\circ$ ，可得 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta D_1D_2D_3$ 相似之外，對應邊平行。
2. 根據性質2-8，第一次疊作與第二次疊作所得 $\Delta B_1B_2B_3 \cong \Delta C_1C_2C_3$ 。
3. 因 $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta D_1D_2D_3$ ，計算其面積比：

已知： $\Delta A_1A_2A_3$ 內心為 I ，疊作三次所得為 $\Delta D_1D_2D_3$

求證： $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta D_1D_2D_3$ 面積比為 $(8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 : 1$

證明：如圖 28，令 $\overline{IA_1} = 2a_1$ ， $\overline{H_B B_1} = 2a_2$ ， $\overline{O_C C_1} = 2a_3$ ， $\overline{I_D D_1} = 2a_4$ ，

$$\because 2a_2 = \frac{a_1}{\sin \theta_2} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \sin \theta_2}, \quad 2a_3 = \frac{a_2}{\sin \theta_3} \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{2 \sin \theta_3} = \frac{a_1}{4 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$$

$$2a_4 = \frac{a_3}{\sin \theta_1} \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{2 \sin \theta_1} = \frac{a_1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$$

故 $a_1 : a_4 = (8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3) : 1$ ，又因 $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta D_1D_2D_3$

可得面積比為 $(8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 : 1$ 。

由以上結果，也讓我們更深刻了解點(內)、點(垂)、點(外)之面積比為何會如此簡潔：

$$\because \frac{\Delta A_1A_2A_3(\text{內})}{\Delta B_1B_2B_3(\text{垂})} = 8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \quad \frac{\Delta B_1B_2B_3(\text{垂})}{\Delta C_1C_2C_3(\text{外})} = 1, \quad \frac{\Delta C_1C_2C_3(\text{外})}{\Delta D_1D_2D_3(\text{內})} = 8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$\therefore \frac{\Delta A_1A_2A_3}{\Delta D_1D_2D_3} = (8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2$$

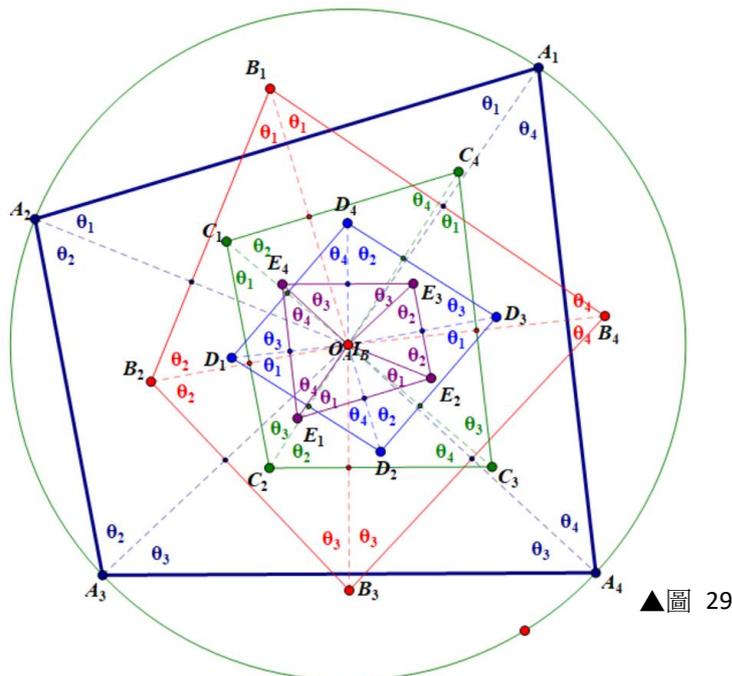
有了三角形疊作給了我們靈感，繼續延伸四邊形

二、重複操作點(外)心中垂四邊形關係之探討

由性質 3-5 我們知道了圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 之外心 O 點為點(外)心四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 之內心，

再由性質 3-1 得知圓外切四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 之內心 I 點為點(內)心四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 之對角線交

點，若以對角線交點為心繼續疊作，有沒有可能會回到外心呢？



如圖29，從四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O 開始，操作四次可得四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 、 $C_1C_2C_3C_4$ 、 $D_1D_2D_3D_4$ 、 $E_1E_2E_3E_4$ ，根據引理2-1我們先觀察角度間變化關係：

$A_1A_2A_3A_4$ (外)	$\angle A_1 = \theta_4 + \theta_1$	$\angle A_2 = \theta_1 + \theta_2$	$\angle A_3 = \theta_2 + \theta_3$	$\angle A_4 = \theta_3 + \theta_4$
$B_1B_2B_3B_4$ (內)	$\angle B_1 = 2\theta_1$	$\angle B_2 = 2\theta_2$	$\angle B_3 = 2\theta_3$	$\angle B_4 = 2\theta_4$
$C_1C_2C_3C_4$ (交)	$\angle C_1 = \theta_2 + \theta_1$	$\angle C_2 = \theta_3 + \theta_2$	$\angle C_3 = \theta_4 + \theta_3$	$\angle C_4 = \theta_1 + \theta_4$
$D_1D_2D_3D_4$ (\parallel)	$\angle D_1 = \theta_3 + \theta_1$	$\angle D_2 = \theta_4 + \theta_2$	$\angle D_3 = \theta_1 + \theta_3$	$\angle D_4 = \theta_2 + \theta_4$
$E_1E_2E_3E_4$ (外)	$\angle E_1 = \theta_4 + \theta_1$	$\angle E_2 = \theta_1 + \theta_2$	$\angle E_3 = \theta_2 + \theta_3$	$\angle E_4 = \theta_3 + \theta_4$

1. 由上表可知經由四次操作角度轉換後 $\angle A_i = \angle E_i$ 且此時角度組成順序相同，故會有外心，因皆有外接圓且角度順序相同故 $A_1A_2A_3A_4 \sim E_1E_2E_3E_4$ 。
2. 操作第三次所得 $D_1D_2D_3D_4$ 為**平行四邊形**，第二次所得 $C_1C_2C_3C_4$ 雖然四個角角度雖與原四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 相同，但因組成順序不同，因此不相似。
3. 接著計算 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $E_1E_2E_3E_4$ 面積比

已知：四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 外心為 O ，疊作四次所得為四邊形 $E_1E_2E_3E_4$

求證： $A_1A_2A_3A_4$ 與 $E_1E_2E_3E_4$ 面積比為 $(16 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 : 1$

證明：如圖29，令 $\overline{OA_1} = 2a_1$ ， $\overline{OB_1} = 2a_2$ ， $\overline{OC_1} = 2a_3$ ， $\overline{OD_1} = 2a_4$ ， $\overline{OE_1} = 2a_5$ ，

$$\because 2a_2 = \frac{a_1}{\sin \theta_1} \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2 \sin \theta_1}$$

$$2a_3 = \frac{a_2}{\sin \theta_2} \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{2 \sin \theta_2} = \frac{a_1}{4 \sin \theta_1 \sin \theta_2}$$

$$2a_4 = \frac{a_3}{\sin \theta_3} \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{2 \sin \theta_3} = \frac{a_1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$$

$$2a_5 = \frac{a_4}{\sin \theta_4} \Rightarrow a_4 = \frac{a_4}{2 \sin \theta_4} = \frac{a_1}{16 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$$

故可得 $a_1 : a_5 = (16 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3) : 1$ ，同理

$$\overline{OE_2} = \frac{\overline{OD_2}}{2 \sin \theta_1} = \frac{\overline{OC_2}}{4 \sin \theta_1 \sin \theta_4} = \frac{\overline{OB_2}}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_3} = \frac{\overline{OA_2}}{16 \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_3 \sin \theta_2}$$

$$\overline{OE_3} = \frac{\overline{OA_3}}{16 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \theta_4 \sin \theta_3}，\overline{OE_4} = \frac{\overline{OA_4}}{16 \sin \theta_3 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \sin \theta_4}，又因 $A_1A_2A_3A_4 \sim E_1E_2E_3E_4$$$

可得面積比為 $(16 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 : 1$ 。

小結：

1. 四邊形若有外心(或內心)，重複操作 $4n$ 次可得相似四邊形且外心(或內心)共點。

2. 四邊形中 $B_1B_2B_3B_4$ (第1層)與 $D_1D_2D_3D_4$ (第3層)之頂點與外心 O 共線 $\Rightarrow \overline{B_1OD_2}$ 、 $\overline{B_2OD_3}$ 、 $\overline{B_3OD_4}$ 、 $\overline{B_4OD_1}$ ；四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ (第0層)與 $E_1E_2E_3E_4$ (第4層)之頂點與外心 O 共線 $\Rightarrow \overline{A_1OE_1}$ 、 $\overline{A_2OE_2}$ 、 $\overline{A_3OE_3}$ 、 $\overline{A_4OE_4}$ ，又 $\because \angle OE_1E_4 = \angle OA_1A_4$ ， $\angle OE_4E_3 = \angle OA_4A_3$ ， $\angle OE_3E_2 = \angle OA_3A_2$ ， $\angle OE_2E_1 = \angle OA_2A_1$ 內錯角相等，因此四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 與 $E_1E_2E_3E_4$ 相似之外，對應邊也平行。

三、重複操作點(外)心中垂 n 邊形關係之探討

(一)角度變化

將一開始的圓內接 n 邊形定義第0層，角度分別為 $\angle A_1^0 = \theta_n + \theta_1$ 、 $\angle A_2^0 = \theta_1 + \theta_2$ 、 \dots 、 $\angle A_n^0 = \theta_{n-1} + \theta_n$ ，將頂點與外心連線作中垂所圍之 n 邊形為第一層 $A_1^1A_2^1 \dots A_n^1$ ，重複操作第二次得第二層 $A_1^2A_2^2 \dots A_n^2$ ，依此類推到第 n 層 $A_1^nA_2^n \dots A_n^n$ ，經觀察可得角度變化關係如下：

	$\angle A_1^i$	$\angle A_2^i$	$\angle A_3^i$	$\angle A_4^i$	$\angle A_5^i$	$\angle A_n^i$
$i = 0$	$\theta_n + \theta_1$	$\theta_1 + \theta_2$	$\theta_2 + \theta_3$	$\theta_3 + \theta_4$	$\theta_4 + \theta_5$		$\theta_{n-1} + \theta_n$
$i = 1$	$2\theta_1$	$2\theta_2$	$2\theta_3$	$2\theta_4$	$2\theta_5$		$2\theta_n$
$i = 2$	$\theta_2 + \theta_1$	$\theta_3 + \theta_2$	$\theta_4 + \theta_3$	$\theta_5 + \theta_4$	$\theta_6 + \theta_5$		$\theta_1 + \theta_n$
$i = 3$	$\theta_3 + \theta_1$	$\theta_4 + \theta_2$	$\theta_5 + \theta_3$	$\theta_6 + \theta_4$	$\theta_7 + \theta_5$		$\theta_2 + \theta_n$
$i = 4$	$\theta_4 + \theta_1$	$\theta_5 + \theta_2$	$\theta_6 + \theta_3$	$\theta_7 + \theta_4$	$\theta_1 + \theta_5$		$\theta_3 + \theta_n$
$i = 5$	$\theta_5 + \theta_1$	$\theta_6 + \theta_2$	$\theta_7 + \theta_3$	$\theta_1 + \theta_4$	$\theta_2 + \theta_5$		$\theta_4 + \theta_n$

$i = n$	$\theta_n + \theta_1$	$\theta_1 + \theta_2$	$\theta_2 + \theta_3$	$\theta_3 + \theta_4$	$\theta_4 + \theta_5$		$\theta_{n-1} + \theta_n$

由上表可知 n 次操作後外心共點，且角度順序相同，故 $A_1^0A_2^0 \dots A_n^0 \sim A_1^nA_2^n \dots A_n^n$ 。

(二)邊長關係

已知： n 邊形 $A_1^0A_2^0 \dots A_n^0$ 外心為 O ，重複操作 n 次所得 n 邊形 $A_1^nA_2^n \dots A_n^n$

求證：兩多邊形邊長比為 $(2^n \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot \dots \cdot \sin\theta_n) : 1$

證明：令 $\overline{OA_1^1} = 2a_1$ ， $\overline{OA_1^2} = 2a_2$ ， \dots ， $\overline{OA_1^n} = 2a_n$ ，

$$\because a_2 = \frac{a_1}{2 \sin \theta_1}, a_3 = \frac{a_2}{2 \sin \theta_2} = \frac{a_1}{4 \sin \theta_1 \sin \theta_2}, \dots, \text{可得 } a_n = \frac{a_1}{2^n \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_n}$$

故 $a_1 : a_n = (2^n \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot \dots \cdot \sin\theta_n) : 1$ ，又 $A_1^1A_2^1 \dots A_n^1 \sim A_1^nA_2^n \dots A_n^n$

可得邊長比為 $(2^n \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdot \dots \cdot \sin\theta_n) : 1$

(三)共線關係

從圓內接 n 邊形為第0層開始，

已知： n 邊形 $A_1^0A_2^0 \dots A_n^0$ 外心為 O ，重複操作 i 次所得 n 邊形 $A_1^iA_2^i \dots A_n^i$ ， j 次所得 n 邊形 $A_1^jA_2^j \dots A_n^j$

求證：當 $i + j \equiv 0 \pmod{n}$ ，兩多邊形頂點與外心 O 共線

$$\begin{aligned} \text{證明：} & \because \angle A_k^0 O A_k^n = \angle A_k^0 O A_{k+1}^0 + \angle A_{k+1}^0 O A_{k+1}^1 + \angle A_{k+1}^1 O A_{k+1}^2 + \cdots + \angle A_{k+1}^{n-2} O A_{k+1}^{n-1} - \angle A_{k+1}^{n-1} O A_k^n \\ & = (180^\circ - 2\theta_k) + (90^\circ - \theta_{k+1}) + (90^\circ - \theta_{k+2}) + \cdots + (90^\circ - \theta_{k-1}) - (90^\circ - \theta_k) \\ & = 180^\circ + 90^\circ(n-2) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) = 180^\circ + 90^\circ(n-2) - 90(n-2) = 180^\circ, \end{aligned}$$

可得層數 $\text{mod } n$ 同餘時，頂點皆與外心 O 共線，同理

$$\begin{aligned} \angle A_k^t O A_{k+t}^{n-t} & = \angle A_k^t O A_{k+1}^t + \angle A_{k+1}^t O A_{k+1}^{t+1} + \cdots + \angle A_{k+1}^{n-t-1} O A_{k+1}^{n-t} + \angle A_{k+1}^{n-t} O A_{k+2}^{n-t} + \angle A_{k+2}^{n-t} O A_{k+3}^{n-t} + \cdots + \angle A_{k+(t-1)}^{n-t} O A_{k+t}^{n-t} \\ & = 180^\circ + 90^\circ(n-2) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) = 180^\circ \end{aligned}$$

可得 $i + j = 0 \pmod{n}$ 時，兩層頂點與外心 O 共線，故當 $i + j \equiv 0 \pmod{n}$ ，兩多邊形頂點與外心 O 共線。

柒、結論

研究結果如下：

一、點心中垂三角形

點心中垂三角形	相關性質	$\frac{\Delta A_1 A_2 A_3}{\Delta B_1 B_2 B_3}$
點(內)心	<ol style="list-style-type: none"> 旁心三角形縮小 $\frac{1}{2}$ 之圖形 原三角形內心與其垂心共點 三組底角與原三角形三組底角共圓 [性質1-1] 	$8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2r}{R}$
點(旁)心	<ol style="list-style-type: none"> 底邊與點(內)中垂三角形其中一邊平行且等長 與原三角形共圓 頂點與點(內)心三角形之頂點產生兩組共圓 [性質1-10] 原三角形旁心與其垂心共點 	$8 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$ $8 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$ $8 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$
點(重)心	原三角形外心與其重心共點	$\frac{3abc}{R(a^2 + b^2 + c^2)}$
點(外)心	原三角形為 銳角 三角形時： 原三角形外心與其內心共點	$8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$
	原三角形為 鈍角 三角形時： 原三角形外心與其旁心共點	$-8 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2$
點(垂)心	<ol style="list-style-type: none"> 原三角形垂心與其外心共點 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 與 $\Delta B_1 B_2 B_3$ 的九點圓圓心共點 	比值為1

定理. 點(旁)心中垂三角形面積和=點(內)心中垂三角形面積 [參照p. 9]

二、點心中垂四邊形

點心中垂四邊形	相關性質	四邊形 $B_1B_2B_3B_4$	$\frac{A_1A_2A_3A_4}{B_1B_2B_3B_4}$
點(內)心	原四邊形內心為 $B_1B_2B_3B_4$ 對角線交點	$\frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4} \right]^2$ $\times \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_1 + \theta_4)$	$\frac{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}{[\sin(\theta_1 + \theta_3)]^2}$
點(外)心	原四邊形外心為 $B_1B_2B_3B_4$ 的內心	$\frac{r^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$	$8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4$

三、重複疊作後之共點與共線性質

(一)從 $\Delta A_1A_2A_3$ 的內心 I 開始疊作，將 $\Delta A_1A_2A_3$ 視為第0層，則：

1. 第 m 層與第 $m+3$ 層皆相似且對應邊平行，面積比值 $(8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2$ 。
2. 在第 i 層中， $i \equiv 0(\text{mod}3)$ 之內心與 $i \equiv 1(\text{mod}3)$ 之垂心與 $i \equiv 2(\text{mod}3)$ 之外心皆共點。
3. $i \equiv 0(\text{mod}3)$ 之頂點與 $i \equiv 1(\text{mod}3)$ 之頂點與 I 三點共線。

(二)從四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心 O 開始疊作視為第0層，則：

1. 第 m 層與第 $m+4$ 層皆相似且對應邊平行，面積比值 $(16 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2$ 。
2. 第 i 層中， $i \equiv 0(\text{mod}4)$ 之外心與 $i \equiv 1(\text{mod}4)$ 之內心與 $i \equiv 2(\text{mod}4)$ 之對角線交點皆共點。
3. $i \equiv 0(\text{mod}4)$ 之對應頂點與 O 共線， $i \equiv 1(\text{mod}4)$ 與 $i \equiv 3(\text{mod}4)$ 之對應頂點與 O 共線。

(三)從圓內接 n 邊形的外心 O 開始疊作，則：

1. 第 m 層與第 $m+n$ 層皆相似且對應邊平行，面積比值 $(2^n \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_n)^2$ 。
2. 當 $i + j \equiv 0(\text{mod}n)$ ，兩多邊形頂點與外心 O 共線。

捌、參考資料及其他

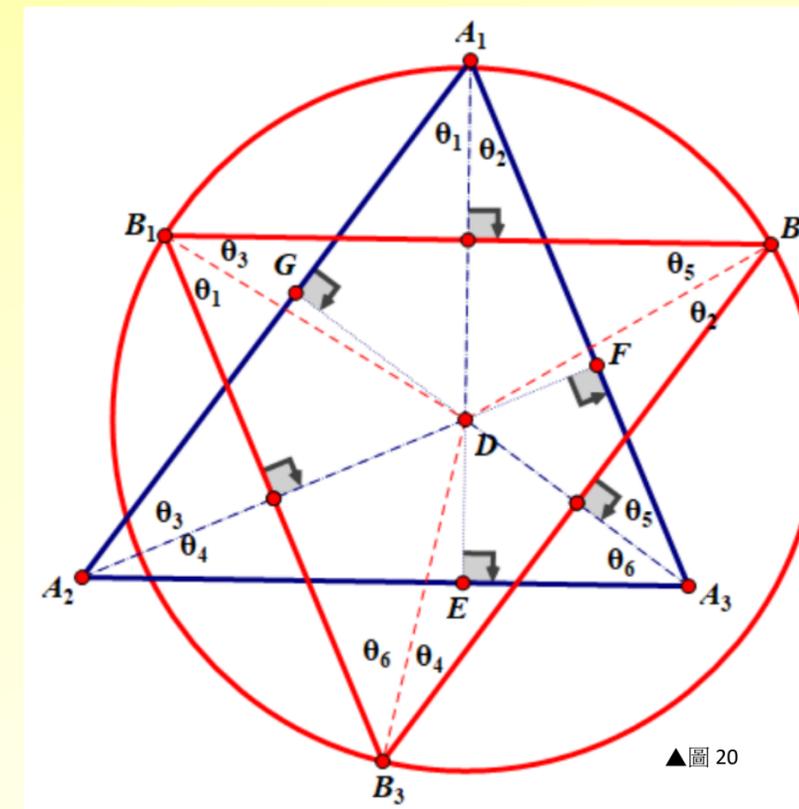
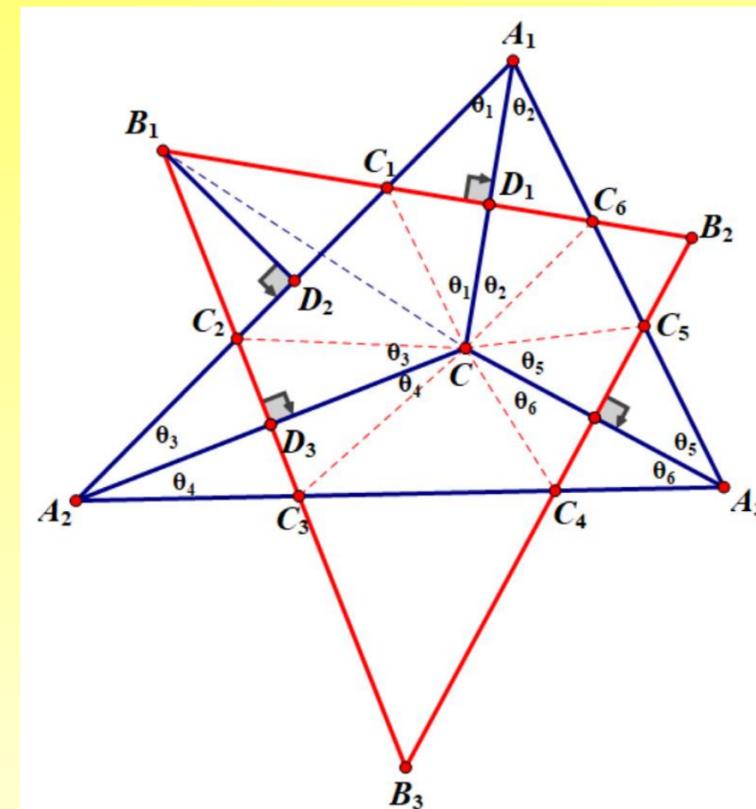
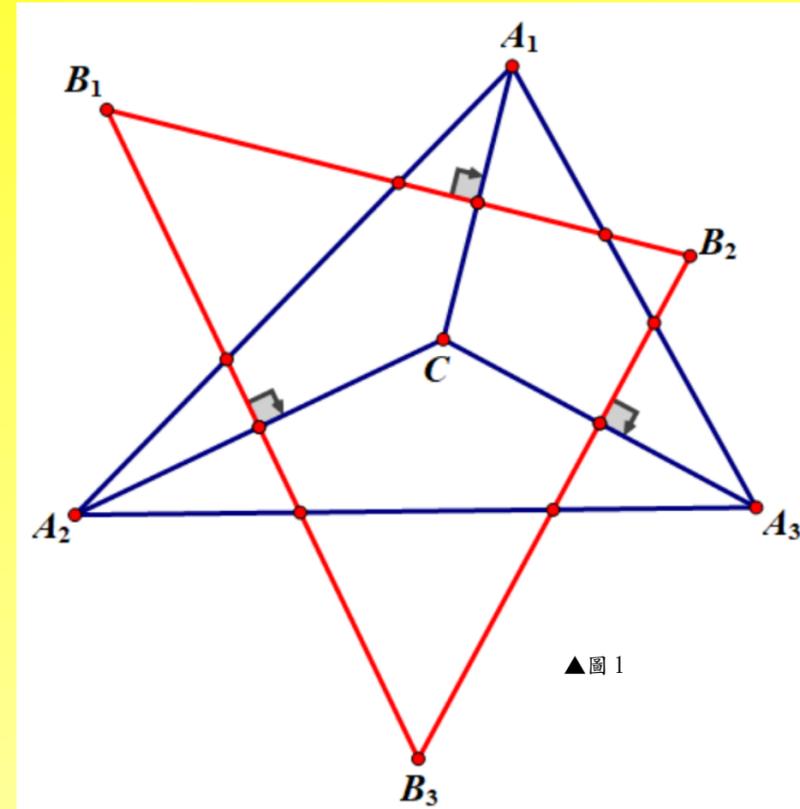
- 一、張幼賢(2022)。國中數學課本第四冊。翰林出版社。
- 二、張幼賢(2022)。國中數學課本第五冊。翰林出版社。
- 三、陳平、郭晨馨、簡靖承(2022)。頂心三角形誕生的奇蹟。中華民國第61屆中小學科學展覽會作品，取自<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-050404.pdf>

【評語】 030404

點心中垂線三角形"對於三角形各心的性質做探討，同時也對四邊形的內(外)心做類似的討論，得到一些不錯的性質；推導到 n 層時也得到很不錯的結果。整體而言，推導的過程及想法值得嘉許。本作品有相當多的計算量，作者以三角函數的方式呈現長度與面積的計算，可以看出作者對三角形的五心之掌握度與觀察之敏銳度。對於三角形推展到 n 層時，可再討論其他心(除內心)的情形，則作品可再增其價值性。

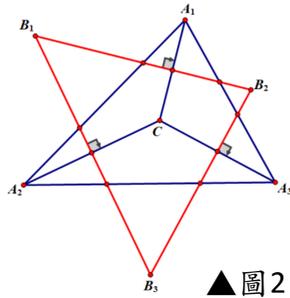
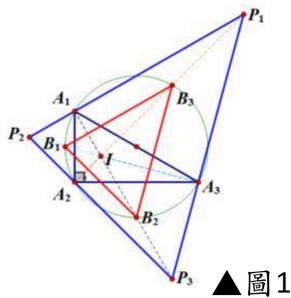
作品簡報

點心中垂三角形性質之研究



壹、前言

給定直角 $\Delta A_1A_2A_3$ 及其外接圓 O ，其中 $\angle A_1 = 60^\circ$ ， $\Delta P_1P_2P_3$ 為 $\Delta A_1A_2A_3$ 的旁心三角形，連接 P_2A_3 、 P_3A_1 、 P_1A_2 分別交圓 O 於 B_1 、 B_2 、 B_3 三點，連接 B_1 、 B_2 、 B_3 ，求 $\frac{\Delta B_1B_2B_3}{\Delta A_1A_2A_3}$ 面積比值。〔圖1〕



定義名詞

平面上給定 $\Delta A_1A_2A_3$ 及 C 點，分別連接 $\overline{CA_1}$ 、 $\overline{CA_2}$ 、 $\overline{CA_3}$ 線段並做中垂線，若三條中垂線相交於 B_1 、 B_2 、 B_3 三點，連接 B_1 、 B_2 、 B_3 三點所得 $\Delta B_1B_2B_3$ 稱為 $\Delta A_1A_2A_3$ 在 C 點的點心中垂三角形。〔圖2〕

研究目的

- 一、探討 $\Delta A_1A_2A_3$ 與點(內、旁、重、外、垂)心中垂三角形之相關性質
- 二、探討原三角形與點心中垂三角形邊長與面積比的幾何性質
- 三、尋找四邊形的內心與外心與點心中垂四邊形是否有心心互換性質

貳、研究過程

一、點(內)心中垂三角形的幾何性質

引理1. 銳角三角形垂心是三邊上垂足連線三角形的內心〔圖3〕

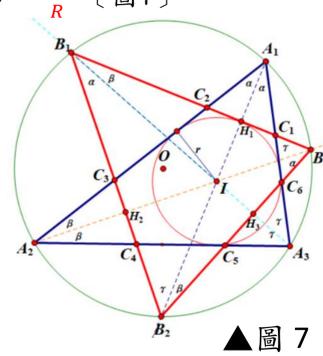
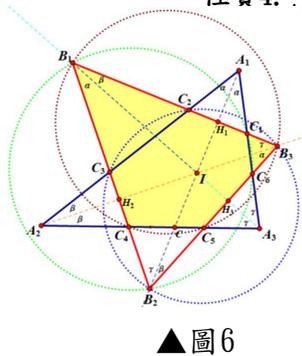
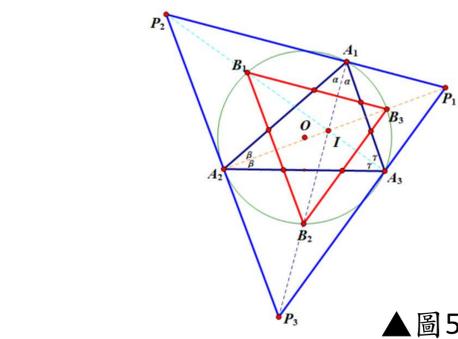
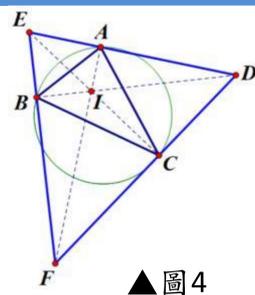
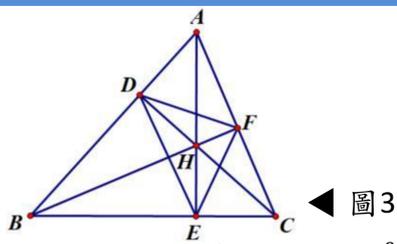
引理2. 任意三角形的旁心三角形必為銳角三角形，其外接圓即為旁心三角形的九點圓〔圖4〕

性質1. $\Delta B_1B_2B_3$ 的垂心為原 $\Delta A_1A_2A_3$ 的內心〔圖5〕

性質2. 四邊形 $B_1B_3C_5C_4$ 、 $B_3B_2C_3C_2$ 、 $B_2B_1C_1C_6$ 會有外接圓〔圖6〕

性質3. $\Delta B_1B_2B_3 = \frac{1}{8} r^2 \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)^2}$ 〔圖7〕

性質4. $\frac{\Delta A_1A_2A_3}{\Delta B_1B_2B_3} = 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2r}{R}$ 〔圖7〕



二、點(旁)心中垂三角形的幾何性質

性質5. $\overline{B_4B_5} \parallel \overline{B_1B_2}$ 且 $\overline{B_4B_5} = \overline{B_1B_2}$ 〔圖8〕

性質6. $\overline{B_4B_5} \perp \overline{A_2P_1}$ 且四邊形 $B_1B_2B_5B_4$ 必為矩形〔圖8〕

性質7. $\overline{EA_2} = \overline{EP_1}$ 〔圖9〕

性質8. $\Delta B_3B_4B_5$ 必在 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外接圓上〔圖9〕

性質9. $\Delta B_3B_4B_5 = \frac{r^2}{8} \cdot \frac{\cot \beta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$ 〔圖9〕

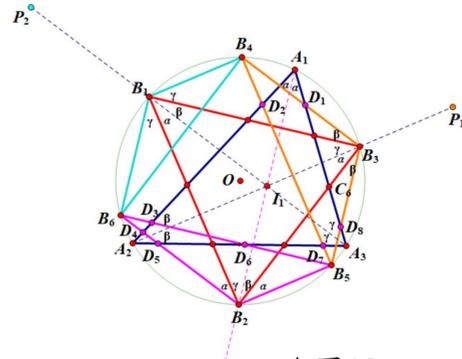
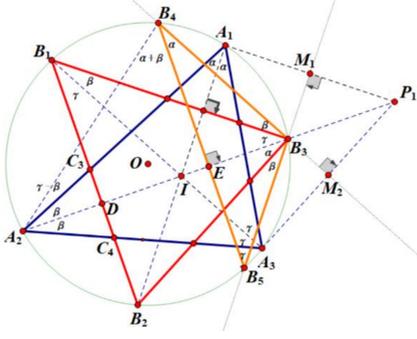
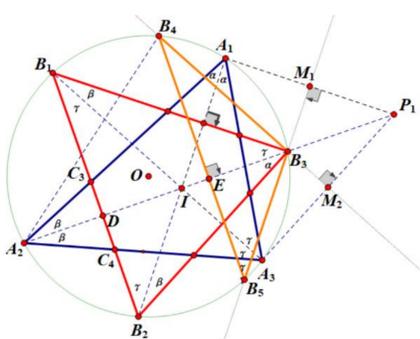
性質10.

$$\Delta A_1A_2A_3 : \Delta B_3B_4B_5 = 8 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma : 1$$

$$\Delta A_1A_2A_3 : \Delta B_2B_5B_6 = 8 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma : 1$$

$$\Delta A_1A_2A_3 : \Delta B_1B_4B_6 = 8 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma : 1$$
〔圖10〕

性質11. 四邊形 $D_2D_3B_6B_4$ 和 $D_1D_8B_5B_4$ 皆四點共圓〔圖10〕



小結. 觀察 $\overline{B_4B_5}$ 、 $\overline{B_5B_6}$ 和 $\overline{B_6B_4}$ 所圍成的 $\Delta B_4B_5B_6$ ，如圖10，根據性質5與性質6，可得 $\Delta B_4B_5B_6 \cong \Delta B_1B_2B_3$ ，因為兩三角形共圓且對應邊互相平行，所以 $\Delta B_1B_2B_3$ 、 $\Delta B_4B_5B_6$ 可視為彼此以外接圓圓心 O 點為對稱中心的點對稱圖形。

三、點(重)心中垂三角形的幾何性質

引理3. $\angle B_1 = \theta_1 + \theta_3$ ， $\angle B_2 = \theta_2 + \theta_5$ ， $\angle B_3 = \theta_4 + \theta_6$
且 $b = \frac{a \sin \theta_1}{\sin \theta_3}$ ， $c = \frac{a \sin \theta_2}{\sin \theta_5}$ 〔圖11〕

引理4. $\overline{B_1C_1} = \frac{a \cos(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_3 \cos \theta_1}$ 〔圖11〕

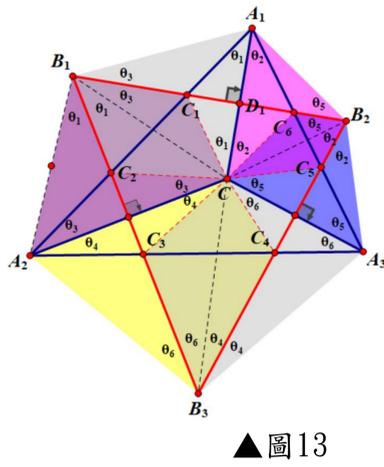
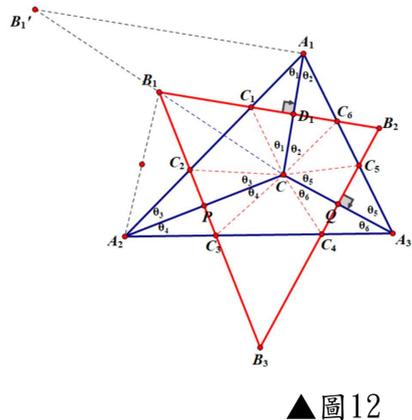
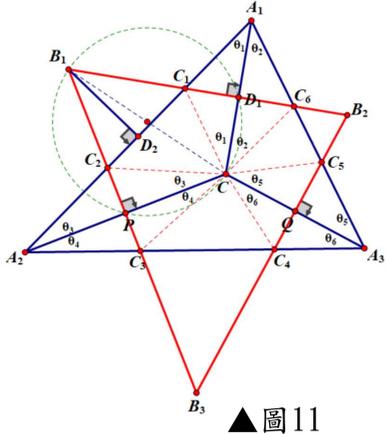
引理5. $\overline{B_1B_2} = \frac{a}{2} (\cot \theta_3 + \cot \theta_5)$ 〔圖11〕

引理6. $B_1C_1CA_2$ 四點共圓〔圖12〕

引理7. $\angle CB_1B_3 = \angle A_2B_1B_3 = \theta_1$ ， $\angle CB_1B_2 = \angle A_1B_1B_3 = \theta_3$

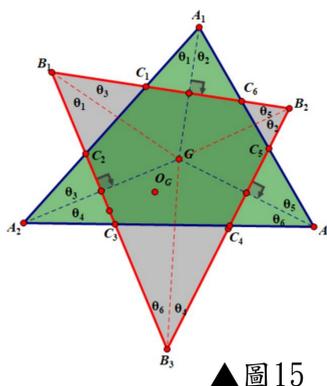
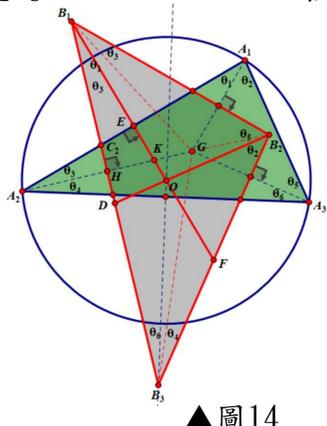
$\angle CB_2B_1 = \angle A_1B_2B_1 = \theta_5$ ， $\angle CB_2B_3 = \angle A_3B_2B_3 = \theta_2$

$\angle CB_3B_2 = \angle A_3B_3B_2 = \theta_4$ ， $\angle CB_3B_1 = \angle A_2B_3B_1 = \theta_6$ 〔圖13〕



性質12. $\Delta B_1B_2B_3$ 的重心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點〔圖14〕

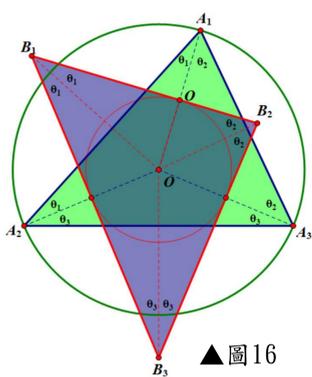
性質13. $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 = $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3abc} R$ ，其中 R 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 外接圓半徑〔圖15〕



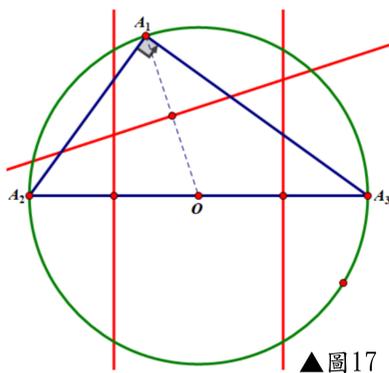
四、點(外)心中垂三角形的幾何性質

性質14. 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為銳角三角形, $\Delta B_1B_2B_3$ 的內心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點 [圖16]
 性質15. 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為鈍角三角形, $\Delta B_1B_2B_3$ 的旁心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的外心共點且
 $\angle B_1 = 180^\circ - 2\theta_1, \angle B_2 = 180^\circ - 2\theta_2, \angle B_3 = 2(\theta_1 + \theta_2) - 180^\circ$ [圖18]

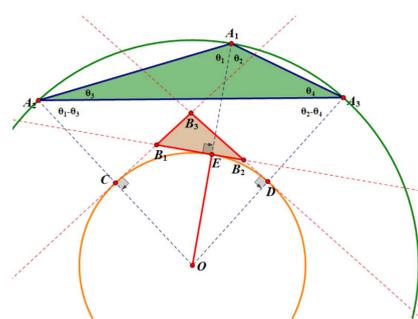
性質16. 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為銳角三角形, $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 = $\frac{1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$
 性質17. 若 $\Delta A_1A_2A_3$ 為鈍角三角形, $\Delta B_1B_2B_3$ 與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的面積比值 = $\frac{-1}{8 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2}$



▲圖16



▲圖17

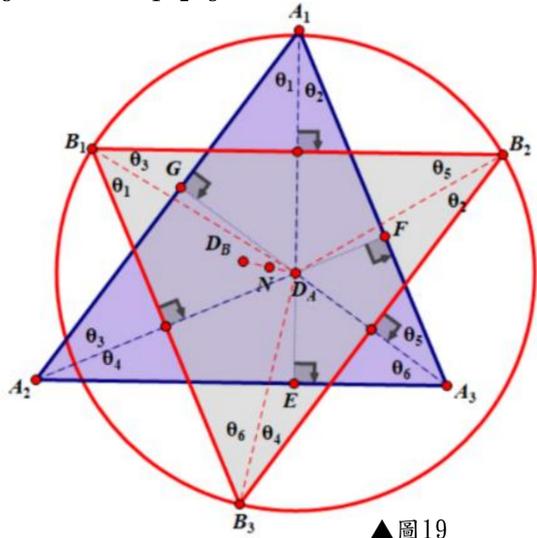


▲圖18

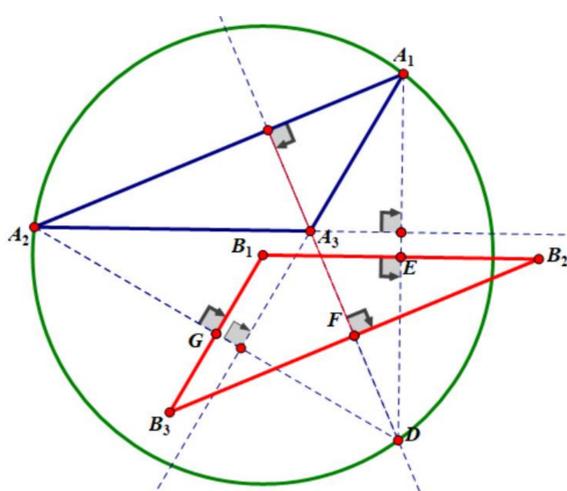
五、點(垂)心中垂三角形的幾何性質

性質18. $\Delta B_1B_2B_3$ 的外心與 $\Delta A_1A_2A_3$ 的垂心共點 [圖19]

性質19. $\Delta B_3B_2B_1 \cong \Delta A_1A_2A_3$ [圖20]



▲圖19

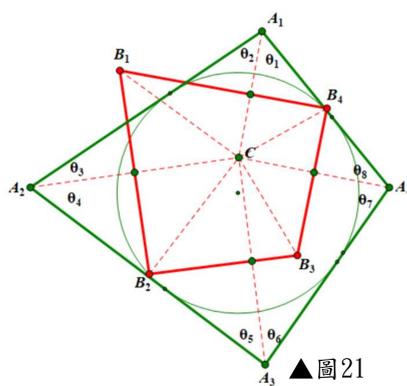


▲圖20

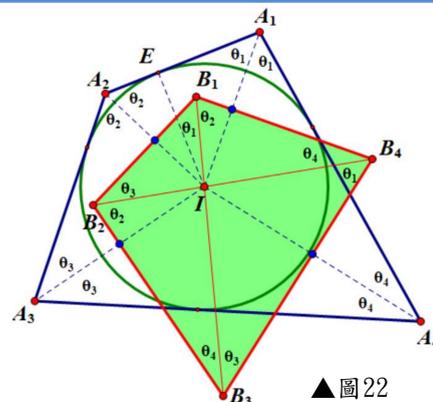
小結. D_A 同時為 $\Delta A_1A_2A_3$ 垂心也是 $\Delta B_1B_2B_3$ 外心, 因此若 D_B 為 $\Delta B_1B_2B_3$ 垂心則也會是 $\Delta A_1A_2A_3$ 之外心, 此外若取 $\overline{D_A D_B}$ 中點N, 由九點圓性質可知, N必同時為 $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta B_1B_2B_3$ 的九點圓圓心。

六、點(內)心中垂四邊形

分別將圓外切與圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中的四個頂點 A_1, A_2, A_3, A_4 , 與內部一點C點作連線所得 $\overline{A_1C}, \overline{A_2C}, \overline{A_3C}, \overline{A_4C}$ 分別作中垂線, 若四條中垂線的交點分別交於 B_1, B_2, B_3, B_4 四點, 連接四點所得四邊形 $B_1B_2B_3B_4$ (圖21)會不會也有性質存在呢?



▲圖21



▲圖22

引理8. $\angle CB_1B_4 = \theta_3, \angle CB_1B_2 = \theta_2, \angle CB_2B_1 = \theta_5, \angle CB_2B_3 = \theta_4,$
 $\angle CB_3B_2 = \theta_7, \angle CB_3B_4 = \theta_6, \angle CB_4B_1 = \theta_8, \angle CB_4B_3 = \theta_1$ [圖21]

性質20. $A_1A_2A_3A_4$ 的內心與 $B_1B_2B_3B_4$ 對角線之交點共點 [圖22]

性質22. $B_1B_2B_3B_4$ 的面積 = $\frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4} \right]^2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_1 + \theta_4)$ [圖22]

性質21. $\frac{\overline{B_1B_2}}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3} = \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}$, $\frac{\overline{B_2B_3}}{2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4} = \frac{r \sin(\theta_2 + \theta_4)}{2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$,
 $\frac{\overline{B_3B_4}}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_4} = \frac{r \sin(\theta_1 + \theta_3)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$, $\frac{\overline{B_4B_1}}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_4} = \frac{r \sin(\theta_2 + \theta_4)}{2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_4}$ [圖22]

性質23. $B_1B_2B_3B_4$ 與原四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積比值 = $\frac{[\sin(\theta_1 + \theta_3)]^2}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$ [圖22]

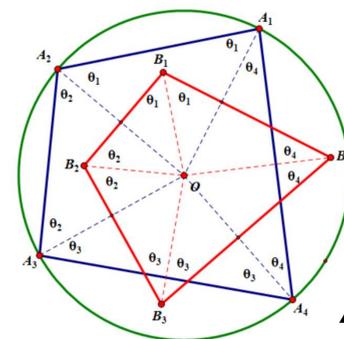
七、點(外)心中垂四邊形

性質24. 若O為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 外心, 且 $B_1B_2B_3B_4$ 為其點(外)心中垂四邊形, 則O為 $B_1B_2B_3B_4$ 之內心 [圖23]

此時 $R = 2r$, R : $A_1A_2A_3A_4$ 外接圓半徑, r : $B_1B_2B_3B_4$ 內切圓半徑。

性質25. $B_1B_2B_3B_4$ 的面積 = $r^2 \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$ [圖23]

性質26. $B_1B_2B_3B_4$ 與原四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 面積比值 = $\frac{1}{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$



▲圖23

參、討論

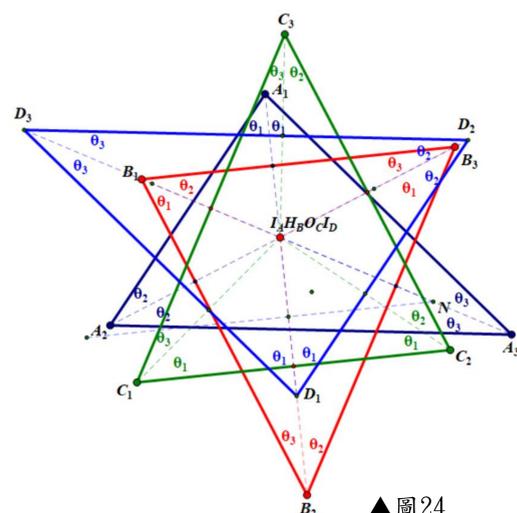
一、重複操作點(內)心中垂三角形

性質27. $\Delta A_1A_2A_3 \sim \Delta D_1D_2D_3$, 對應邊平行, 面積比為 $(8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 : 1$ [圖24]

性質28. $\Delta B_1B_2B_3 \cong \Delta C_1C_2C_3$ [表1]

$\Delta A_1A_2A_3$ (內心) \circ	$\angle A_1 = 2\theta_1\circ$	$\angle A_2 = 2\theta_2\circ$	$\angle A_3 = 2\theta_3\circ$
$\Delta B_1B_2B_3$ (垂心) \circ	$\angle B_1 = \theta_1 + \theta_2\circ$	$\angle B_2 = \theta_2 + \theta_3\circ$	$\angle B_3 = \theta_1 + \theta_3\circ$
$\Delta C_1C_2C_3$ (外心) \circ	$\angle C_1 = \theta_1 + \theta_3\circ$	$\angle C_2 = \theta_1 + \theta_2\circ$	$\angle C_3 = \theta_2 + \theta_3\circ$
$\Delta D_1D_2D_3$ (內心) \circ	$\angle D_1 = 2\theta_1\circ$	$\angle D_2 = 2\theta_2\circ$	$\angle D_3 = 2\theta_3\circ$

▲表1



▲圖24

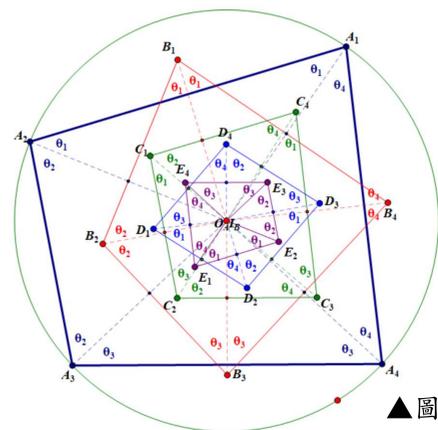
二、重複操作點(外)心中垂四邊形

性質29. $A_1A_2A_3A_4 \sim E_1E_2E_3E_4$ ，面積比為 $(16 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3)^2 : 1$ [圖25]

性質30. $D_1D_2D_3D_4$ 為平行四邊形 [表2]

$A_1A_2A_3A_4$ (外) $^\circ$	$\angle A_1 = \theta_4 + \theta_1^\circ$	$\angle A_2 = \theta_1 + \theta_2^\circ$	$\angle A_3 = \theta_2 + \theta_3^\circ$	$\angle A_4 = \theta_3 + \theta_4^\circ$
$B_1B_2B_3B_4$ (內) $^\circ$	$\angle B_1 = 2\theta_1^\circ$	$\angle B_2 = 2\theta_2^\circ$	$\angle B_3 = 2\theta_3^\circ$	$\angle B_4 = 2\theta_4^\circ$
$C_1C_2C_3C_4$ (交) $^\circ$	$\angle C_1 = \theta_2 + \theta_1^\circ$	$\angle C_2 = \theta_3 + \theta_2^\circ$	$\angle C_3 = \theta_4 + \theta_3^\circ$	$\angle C_4 = \theta_1 + \theta_4^\circ$
$D_1D_2D_3D_4$ (II) $^\circ$	$\angle D_1 = \theta_3 + \theta_1^\circ$	$\angle D_2 = \theta_4 + \theta_2^\circ$	$\angle D_3 = \theta_1 + \theta_3^\circ$	$\angle D_4 = \theta_2 + \theta_4^\circ$
$E_1E_2E_3E_4$ (外) $^\circ$	$\angle E_1 = \theta_4 + \theta_1^\circ$	$\angle E_2 = \theta_1 + \theta_2^\circ$	$\angle E_3 = \theta_2 + \theta_3^\circ$	$\angle E_4 = \theta_3 + \theta_4^\circ$

◀ 表2



▲圖25

三、重複操作點(外)心中垂n邊形

性質31. $A_1^0A_2^0 \dots A_n^0 \sim A_1^nA_2^n \dots A_n^n$ [表3]

性質32. 邊長比為 $(2^n \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_n) : 1$ [表3]

性質33. 當 $i + j \equiv 0 \pmod{n}$ ，兩多邊形頂點與外心O共線 [表3]

i	$\angle A_1^i$	$\angle A_2^i$	$\angle A_3^i$	$\angle A_4^i$	$\angle A_5^i$ $^\circ$	$\angle A_n^i$
$i = 0$	$\theta_n + \theta_1^\circ$	$\theta_1 + \theta_2^\circ$	$\theta_2 + \theta_3^\circ$	$\theta_3 + \theta_4^\circ$	$\theta_4 + \theta_5^\circ$		$\theta_{n-1} + \theta_n^\circ$
$i = 1$	$2\theta_1^\circ$	$2\theta_2^\circ$	$2\theta_3^\circ$	$2\theta_4^\circ$	$2\theta_5^\circ$		$2\theta_n^\circ$
$i = 2$	$\theta_2 + \theta_1^\circ$	$\theta_3 + \theta_2^\circ$	$\theta_4 + \theta_3^\circ$	$\theta_5 + \theta_4^\circ$	$\theta_6 + \theta_5^\circ$		$\theta_1 + \theta_n^\circ$
$i = 3$	$\theta_3 + \theta_1^\circ$	$\theta_4 + \theta_2^\circ$	$\theta_5 + \theta_3^\circ$	$\theta_6 + \theta_4^\circ$	$\theta_7 + \theta_5^\circ$		$\theta_2 + \theta_n^\circ$
$i = 4$	$\theta_4 + \theta_1^\circ$	$\theta_5 + \theta_2^\circ$	$\theta_6 + \theta_3^\circ$	$\theta_7 + \theta_4^\circ$	$\theta_1 + \theta_5^\circ$		$\theta_3 + \theta_n^\circ$
$i = 5$	$\theta_5 + \theta_1^\circ$	$\theta_6 + \theta_2^\circ$	$\theta_7 + \theta_3^\circ$	$\theta_1 + \theta_4^\circ$	$\theta_2 + \theta_5^\circ$		$\theta_4 + \theta_n^\circ$
		 $^\circ$			 $^\circ$
$i = n$	$\theta_n + \theta_1^\circ$	$\theta_1 + \theta_2^\circ$	$\theta_2 + \theta_3^\circ$	$\theta_3 + \theta_4^\circ$	$\theta_4 + \theta_5^\circ$		$\theta_{n-1} + \theta_n^\circ$

◀表3

肆、結論

點心中垂三角形	相關性質	$\frac{\Delta A_1A_2A_3}{\Delta B_1B_2B_3}$
點(內)心	1. 旁心三角形縮小 $\frac{1}{2}$ 之圖形 2. 原三角形內心與其垂心共點 3. 三組底角與原三角形三組底角共圓 [性質1-1]	$8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{2r}{R}$
點(旁)心	1. 底邊與點(內)中垂三角形其中一邊平行且等長 2. 與原三角形共圓 3. 頂點與點(內)心三角形之頂點產生兩組共圓 [性質1-10] 4. 原三角形旁心與其垂心共點	$8 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$ $8 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$ $8 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$
點(重)心	原三角形外心與其重心共點	$\frac{3abc}{R(a^2 + b^2 + c^2)}$
點(外)心	原三角形為銳角三角形時： 原三角形外心與其內心共點	$8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$
	原三角形為鈍角三角形時： 原三角形外心與其旁心共點	$-8 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2$
點(垂)心	1. 原三角形垂心與其外心共點 2. $\Delta A_1A_2A_3$ 與 $\Delta B_1B_2B_3$ 的九點圓圓心共點	比值為1

定理. 點(旁)心中垂三角形面積和 = 點(內)心中垂三角形面積

點心中垂四邊形	相關性質	四邊形 $B_1B_2B_3B_4$	$\frac{A_1A_2A_3A_4}{B_1B_2B_3B_4}$
點(內)心	原四邊形內心為 $B_1B_2B_3B_4$ 對角線交點	$\frac{r^2}{8} \cdot \left[\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4} \right]^2$ $\times \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_3) \sin(\theta_1 + \theta_4)$	$\frac{8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}{[\sin(\theta_1 + \theta_3)]^2}$
點(外)心	原四邊形外心為 $B_1B_2B_3B_4$ 的內心	$\frac{r^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_4) \sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}$	$8 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4$

1. 第 m 層與第 $m + n$ 層皆相似且對應邊平行，面積比值 $(2^n \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_n)^2$
2. 在第 i 層中， $i \equiv 0 \pmod{3}$ 之內心與 $i \equiv 1 \pmod{3}$ 之垂心與 $i \equiv 2 \pmod{3}$ 之外心皆共點
3. $i \equiv 0 \pmod{3}$ 之頂點與 $i \equiv 1 \pmod{3}$ 之頂點與I三點共線
4. 第 i 層中， $i \equiv 0 \pmod{4}$ 之外心與 $i \equiv 1 \pmod{4}$ 之內心與 $i \equiv 2 \pmod{4}$ 之對角線交點皆共點
5. $i \equiv 0 \pmod{4}$ 與 $i \equiv 1 \pmod{4}$ 之頂點與O共線， $i \equiv 1 \pmod{4}$ 與 $i \equiv 3 \pmod{4}$ 之頂點與O共線
6. 當 $i + j \equiv 0 \pmod{n}$ ，兩多邊形頂點與外心O共線

伍、參考資料

1. 張幼賢(2022)。國中數學課本第四冊。翰林出版社。
2. 張幼賢(2022)。國中數學課本第五冊。翰林出版社。
3. 陳平、郭晨馨、簡靖承(2022)。頂心三角形誕生的奇蹟。中華民國第61屆中小學科學展覽會作品，取自<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/61/pdf/NPHSF2021-050404.pdf>