中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

(鄉土)教材獎

030403

七巧板拼凹多邊形

學校名稱： 臺中市私立明道高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 林軒諒 國二 林宥慶	劉兆涵 陳鑫達

關鍵詞： 凹多邊形、拼法、正整數解

摘　要

本主題是研究七巧板拼凹多邊形的拼法。

我們得到下列結果：

一、證明七巧板拼成凹多邊形的最大邊數為 17。

二、七巧板拼凹四邊形的圖形，分析 1 種情形，拼法不存在。

三、七巧板拼凹五邊形的圖形，分析 3 種情形，計算 5 種情形的拼法。

四、七巧板拼凹六邊形的圖形，分析 7 種情形，計算 14 種情形的拼法。

五、用 Excel 驗證凹四至凹六邊形的情形。

六、用 Python 程式找出凹多邊形的拼法，

$n = 4$ 有 1 種；$n = 5$ 有 5 種；$n = 6$ 有 14 種；$n = 7$ 有 23 種；$n = 8$ 有 41 種；

$n = 9$ 有 58 種；$n = 10$ 有 89 種；$n = 11$ 有 118 種；$n = 12$ 有 166 種；$n = 13$ 有 212 種。

壹、前言

第一部分：研究動機

老師上課在教導多邊形和畢氏定理時，提到了等腰直角三角形，讓我們想起曾經玩過的七巧板。七巧板是一種有七塊圖板的遊戲，可以透過邊的拼合，形成各種圖案。七巧板可以培養想像力、邏輯思考和問題解決能力。

在尋找資料時，曾經有人研究過：用七巧板拼凸多邊形[1]。但目前並未有延伸探討：七巧板拼成凹多邊形的作品。這是一個具有挑戰性的數學問題，於是我們便決定要研究此主題。

第二部分：研究目的

一、證明七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界。

二、七巧板拼凹四邊形的圖形。

三、七巧板拼凹五邊形的圖形。

四、七巧板拼凹六邊形的圖形。

五、用 Excel 驗證凹四至凹六邊形可能解的情形。

六、用 Python 程式找出凹多邊形可能解的情形數。

第三部分：文獻回顧

在 Google 關鍵字輸入「七巧板 凹多邊形」，沒有相關作品。目前相關科展作品的結果都是「七巧板能拼出多少種凸多邊形？」摘要如下：

[1]主要結果：七巧板能拼出 13 種凸多邊形。

[2]主要結果：七巧板能拼出 13 種凸多邊形。

[3]主要結果：提到七巧板無法拼出 7 邊以上的凸多邊形，但未提到總共能拼出 13 種圖形。

[4]目前無法下載作品。

貳、研究設備及器材

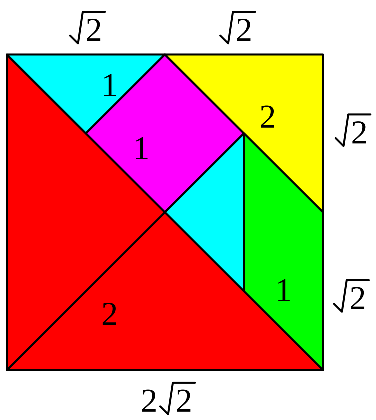
紙、筆及 Word、Microsoft Visio、小畫家、Excel、Python 軟體、geogebra 軟體、七巧板。

參、研究過程或方法

第一部分：定義

【定義 1】七巧板

七巧板的圖形(由第一作者和第二作者共同製作)如下，後面的討論都仿照[2]，假設最小的邊長 1，則七巧板排成的原始正方形邊長為 $2\sqrt{2}$。



【定義 2】簡單凹多邊形

若一個凹多邊形的任何邊都不會互相交會，則稱此凹多邊形為「簡單凹多邊形」。

【定義 3】七巧板拼法的規定

在任何一種拼法中，

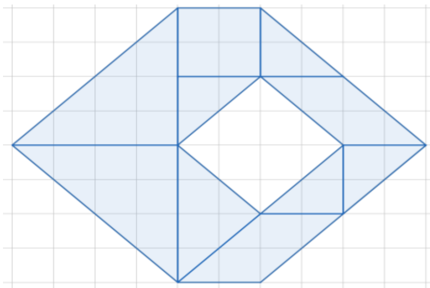
(1)必須用到全部七塊圖板，不可少或多任何一片 。

(2)任 2 塊圖板以邊拼合時，2 個拼合邊至少要有 1 個頂點重合，但邊可以不用完全重合。也就是說，若 2 個拼合邊是長邊拚短邊時，有 1 個頂點重合，另 1 個頂點不重合，且拼合後長邊會有未被短邊重合的部分。

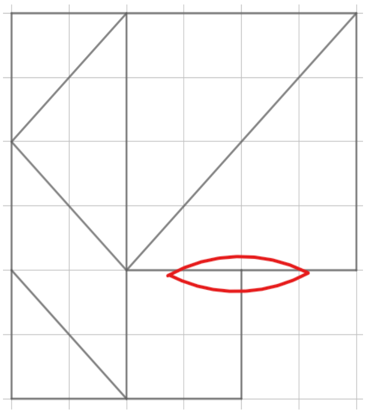
(3)若兩個拼法的圖形，旋轉後可以重合，則視為同一種。

下面是拼法的舉例。

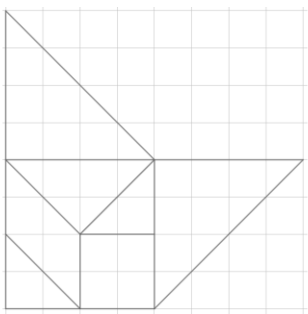
例 1：如下圖(由第一作者和第二作者共同製作)，總共用了 10 塊圖板，是一種「錯誤」的拼法。



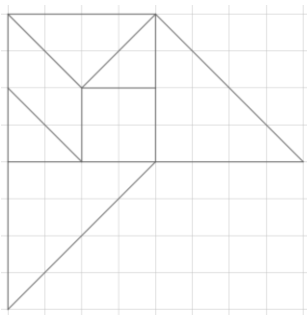
例 2：如下圖(由第一作者和第二作者共同製作)，是一種正確的拼法。



例 3：如下圖(由第一作者和第二作者共同製作)，左圖的拼法順時針旋轉 90 度後，可以和右圖的拼法重合，視為同一種。



(左圖)



(右圖)

第二部分：主要結果

一、證明七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界

【定理 1】

七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界是 17。

(證明)

因為七塊圖板中，三角形有五個、四邊形有兩個，總共邊數有 $15 + 8 = 23$。

依【定義 3】任 2 塊圖板以邊拼合時，會產生一個共用邊，全部七塊圖板至少有 6 個共用邊。

因此，凹多邊形的最大邊數上界是 $23 - 6 = 17$。

我們研究方法的步驟如下：

(步驟 1)仿照[2]的方法列式。

(步驟 2)按邊數 n 的值，給定未知數 d、e、f 的值，再找未知數 a、b、c 的解。解出凹 n 邊形圖形的各個內角。

因 d、e、f 至少有一個是正整數，先從只有 1 個是 1、另 2 個是 0 開始計算。

(步驟 3)依(步驟 2)解出凹 n 邊形的各內角，分析排列方式。

(步驟 4)依(步驟 3)各內角排列的凹 n 邊形，計算邊長及面積找出 7 塊圖板的所有拼法。

(步驟 1)

【假設 1】

假設七巧板拼出的凹 n 邊形是簡單凹多邊形。

因為七巧板中，7 塊圖板的任一內角都是 45° 的倍數，我們可以假設拼出的簡單凹 n 邊形中，內角 45°、90°、135°、225°、270°、315° 的個數分別有 a、b、c、d、e、f 個，其中 a、b、c 是非負整數且 d、e、f 至少有一個是正整數。順便說明：因 180° 和 360° 分別為平角和周角，我們不列入拼法的計算。

因凹 n 邊形有 n 個內角，可列出

$a + b + c + d + e + f = n$ (E1)

因凹 n 邊形內角和是 $(n-2)\times180^\circ$，可列出

$45a + 90b + 135c + 225d + 270e + 315f = (n-2)\times180$

可得 $a + 2b + 3c + 5d + 6e + 7f = (n-2)\times4$

$a + 2b + 3c + 5d + 6e + 7f = 4n-8$ (E2)

因 $n\geq3$，依 n 值由小到大討論如下：

當 $n = 3$ 時，不存在凹 n 邊形。因為三角形內角和是 180°，而凹 n 邊形中至少有 1 個內角 $>180^\circ$，因此無解。以下是由 $n = 4$ 開始討論的凹 n 邊形結果。

二、七巧板拼凹四邊形的圖形

(步驟 2)當 $n = 4$ 時，

1.若(d，e，f) = (1，0，0)，

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 1 + 0 + 0 = 4$，即 $a + b + c = 3$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 5 + 0 + 0 = 16-8$，即 $a + 2b + 3c = 3$ ②

②−①： $b + 2c = 0$，因 b、c 是非負整數，得 b、$c = 0$ ③

③代①： $a = 3$

則(a，b，c) = (3，0，0)。

由(a，b，c，d，e，f) = (3，0，0，1，0，0)，

可知拼出的圖形是凹四邊形，

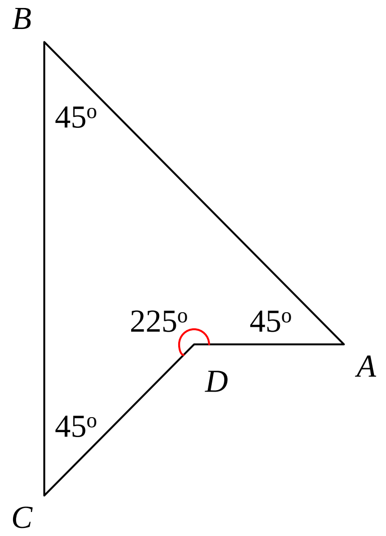
其中內角 45^o、90^o、135^o、225^o、270^o、315^o 的個數

分別有 3 、0 、0 、 1 、0 、0 個。

(步驟 3)因(步驟 2)解出的凹四邊形有 3 個內角是 45^o、1 個內角是 225^o。

考慮環狀排列有 $\frac{4!}{3!} = 4$ 種，

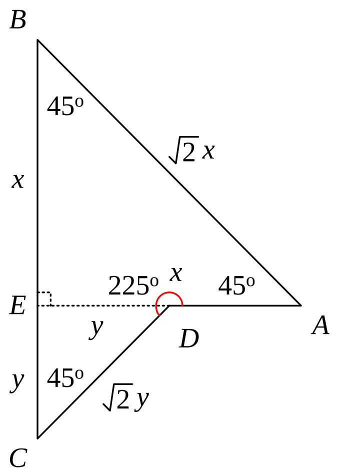
因為有 3 個內角相同，所以 4 個內角的環狀排列只有 $\frac{4}{4} = 1$ 種，如下圖(由第一作者和第二作者共同製作)。



(步驟 4)

上圖中，延長$\overline{AD}$，做$\overline{DE} \perp \overline{BC}$於 E，得出下圖(由第一作者和第二作者共同製作)。

設$\overline{AE} = \overline{BE} = x$，$\overline{CE} = \overline{DE} = y$，其中 x、y = 1、2、$\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$或這四個數相加或相減的值且 $x > y$。



由【定義 1】仿[2]的假設，可用面積列式得 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=(2\sqrt{2})^2$，即 $x^2+y^2=16$ ④。

因 $x>y$，得 $x^2>y^2$，推出 $2x^2>x^2+y^2$ ⑤

④代⑤： $2x^2>16$，即 $x^2>8$，得 $x>2\sqrt{2}\approx 2.828$。

因 $x^2<x^2+y^2$，由④得 $x^2<16$，即 $x<4$。

由上可知： $2\sqrt{2}<x<4$。

又 $x=1$、2、$\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$或這四個數相加或相減的值，得 $x=3$⑥。

⑥代④，可求出 $y=\sqrt{7}$。因為求出的 y 值都不是 1、2、$\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$或這四個數相加或相減的值，可知此情形無解。

三、七巧板拼凹五邊形的圖形

1.若$(d，e，f)=(1，0，0)$，可得

【假設 1】(E1)： $a+b+c+1+0+0=5$，即 $a+b+c=4$ ①

【假設 1】(E2)： $a+2b+3c+5+0+0=20-8$，即 $a+2b+3c=7$ ②

②−①： $b+2c=3$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c)=(3，0)$或$(1，1)$

(1)若$(b，c)=(3，0)$ ③

③代①： $a=1$

則$(a，b，c)=(1，3，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f)=(1，3，0，1，0，0)$，

可知拼出的圖形是凹五邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 1 、3 、0 、1 、0 、0 個。

(2)若$(b，c)=(1，1)$ ④

④代①：$a=2$

則$(a，b，c)=(2，1，1)$。

由$(a，b，c，d，e，f)=(2，1，1，1，0，0)$，

可知拼出的圖形是凹五邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 2 、1 、1 、1 、0 、0 個。

2.若(d，e，f) = (0，1，0)，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 0 + 1 + 0 = 5$，即 $a + b + c = 4$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 0 + 6 + 0 = 20 - 8$，即 $a + 2b + 3c = 6$ ②

②－①： $b + 2c = 2$，因 b、c 是非負整數，得(b，c) = (2，0)或(0，1)

(1)若(b，c) = (2，0) ③

③代①： $a = 2$

則(a，b，c) = (2，2，0)。

由(a，b，c，d，e，f) = (2，2，0，0，1，0)，

可知拼出的圖形是凹五邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 2 、2 、0 、0 、1 、0 個。

(2)若(b，c) = (0，1) ④

④代①：$a = 3$

則(a，b，c) = (3，0，1)。

由(a，b，c，d，e，f) = (3，0，1，0，1，0)，

可知拼出的圖形是凹五邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 3 、0 、1 、0 、1 、0 個。

3.若(d，e，f) = (0，0，1)，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 0 + 0 + 1 = 5$，即 $a + b + c = 4$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 0 + 0 + 7 = 20 - 8$，即 $a + 2b + 3c = 5$ ②

②－①： $b + 2c = 1$，因 b、c 是非負整數，得(b，c) = (1，0) ③代①： $a = 3$

則(a，b，c) = (3，1，0)。

由(a，b，c，d，e，f) = (3，1，0，0，0，1)，

可知拼出的圖形是凹五邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 3 、1 、0 、0 、0 、1 個。

四、七巧板拼凹六邊形的圖形

1.若(d，e，f) = (1，0，0)，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 1 + 0 + 0 = 6$，即 $a + b + c = 5$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 5 + 0 + 0 = 24 - 8$，即 $a + 2b + 3c = 11$ ②

②－①： $b + 2c = 6$，因 b、c 是非負整數，得(b，c) = (4，1)或(2，2)或(0，3)

(1)若(b，c) = (4，1) ③

③代①： $a = 0$

則(a，b，c) = (0，4，1)。

由(a，b，c，d，e，f) = (0，4，1，1，0，0)，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 0 、4 、1 、1 、0 、0 個。

(2)若$(b，c) = (2，2)$ ④

④代①：$a = 1$

則$(a，b，c) = (1，2，2)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (1，2，2，1，0，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 1 、2 、2 、1 、0 、0 個。

(3)若$(b，c) = (0，3)$ ⑤

⑤代①：$a = 2$

則$(a，b，c) = (2，0，3)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (2，0，3，1，0，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 2 、0 、3 、1 、0 、0 個。

2.若$(d，e，f) = (0，1，0)$，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 0 + 1 + 0 = 6$，即 $a + b + c = 5$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 0 + 6 + 0 = 24 - 8$，即 $a + 2b + 3c = 10$ ②

②−①： $b + 2c = 5$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c) = (5，0)$或$(3，1)$或$(1，2)$

(1)若$(b，c) = (5，0)$ ③

③代①： $a = 0$

則$(a，b，c) = (0，5，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (0，5，0，0，1，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 0 、5 、0 、0 、1 、0 個。

(2)若$(b，c) = (3，1)$ ④

④代①：$a = 1$

則$(a，b，c) = (1，3，1)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (1，3，1，0，1，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 1 、3 、1 、0 、1 、0 個。

(3)若$(b，c) = (1，2)$ ⑤

⑤代①：$a = 2$

則$(a，b，c) = (2，1，2)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (2，1，2，0，1，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 2 、1 、2 、0 、1 、0 個。

3.若$(d，e，f) = (0，0，1)$，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 0 + 0 + 1 = 6$，即 $a + b + c = 5$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 0 + 0 + 7 = 24-8$，即 $a + 2b + 3c = 9$ ②

②−①： $b + 2c = 4$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c) = (4，0)$或$(2，1)$或$(0，2)$

(1)若$(b，c) = (4，0)$ ③

③代①： $a = 1$

則$(a，b，c) = (1，4，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (，4，0，0，0，1)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 1 、4 、0 、0 、0 、1 個。

(2)若$(b，c) = (2，1)$ ④

④代①：$a = 2$

則$(a，b，c) = (2，2，1)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (2，2，1，0，0，1)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 2 、2 、1 、0 、0 、1 個。

(3)若$(b，c) = (0，2)$ ⑤

⑤代①：$a = 3$

則$(a，b，c) = (3，0，2)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (3，0，2，0，0，1)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 3 、0 、2 、0 、0 、1 個。

4.若$(d，e，f) = (2，0，0)$，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 2 + 0 + 0 = 6$，即 $a + b + c = 4$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 10 + 0 + 0 = 24-8$，即 $a + 2b + 3c = 6$ ②

②−①： $b + 2c = 2$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c) = (2，0)$或$(0，1)$

(1)若$(b，c) = (2，0)$ ③

③代①： $a = 2$

則$(a，b，c) = (2，2，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (2，2，0，2，0，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數

分別有 2 、2 、0 、2 、0 、0 個。

(2)若$(b，c) = (0，1)$ ④

④代①：$a = 3$

則$(a，b，c) = (3，0，1)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (3，0，1，2，0，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45^o、90^o、135^o、225^o、270^o、315^o 的個數

分別有 3 、0 、1 、2 、0 、0 個。

5.若$(d，e，f) = (0，2，0)$，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 0 + 2 + 0 = 6$，即 $a + b + c = 4$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 0 + 12 + 0 = 24-8$，即 $a + 2b + 3c = 4$ ②

②－①： $b + 2c = 0$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c) = (0，0)$ ③

③代①： $a = 4$

則$(a，b，c) = (4，0，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (4，0，0，0，2，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45^o、90^o、135^o、225^o、270^o、315^o 的個數

分別有 4 、0 、0 、0 、2 、0 個。

6.若$(d，e，f) = (1，1，0)$，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 1 + 1 + 0 = 6$，即 $a + b + c = 4$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 5 + 6 + 0 = 24-8$，即 $a + 2b + 3c = 5$ ②

②－①： $b + 2c = 1$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c) = (1，0)$ ③

③代①： $a = 3$

則$(a，b，c) = (3，1，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (3，1，0，1，1，0)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45^o、90^o、135^o、225^o、270^o、315^o 的個數

分別有 3 、1 、0 、1 、1 、0 個。

7.若$(d，e，f) = (1，0，1)$，可得

【假設 1】(E1)： $a + b + c + 1 + 0 + 1 = 6$，即 $a + b + c = 4$ ①

【假設 1】(E2)： $a + 2b + 3c + 5 + 0 + 7 = 24-8$，即 $a + 2b + 3c = 4$ ②

②－①： $b + 2c = 0$，因 b、c 是非負整數，得$(b，c) = (0，0)$ ③

③代①： $a = 4$

則$(a，b，c) = (4，0，0)$。

由$(a，b，c，d，e，f) = (4，0，0，1，0，1)$，

可知拼出的圖形是凹六邊形，

其中內角 45^o、90^o、135^o、225^o、270^o、315^o 的個數

分別有 4 、0 、0 、1 、0 、1 個。

五、用 Excel 驗證凹四至凹六邊形可能解的情形

我們想藉由 Excel 計算驗證前面得到的結果，將前述得到的兩個方程式化簡，

$a+b+c+d+e+f=n$ (E1)

$a+2b+3c+5d+6e+7f=4n-8$ (E2)

由(E2)－(E1)得 $b+2c+4d+5e+6f=3n-8$，

先給定 n 的值，因 d、e、f 至少有一個存在，判斷 $d+e+f$ 的值，再計算出 $b+2c$ 的值，最後藉由 a 的值判斷是否合理？計算出一種情況，判斷出無法拼成圖形。

1.當 $n=4$ 時，

	第一種
給定 n 的值	4
計算出 b+2c+4d+5e+6f=3n-8 的值	4
給定 d 的值	1
給定 e 的值	0
給定 f 的值	0
計算出 b+2c 的值	0
給定 c 的值	0
給定 b 的值	0
計算出 a 的值	3

重新排出順序	第一種
a	3
b	0
c	0
d	1
e	0
f	0
是否存在圖形	否

2.當 $n=5$ 時，

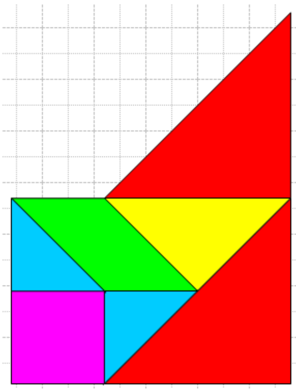
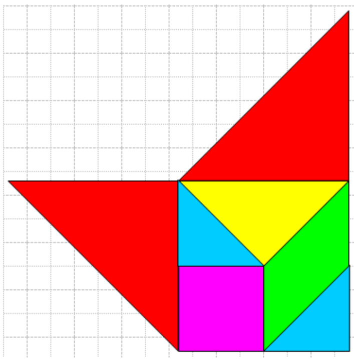
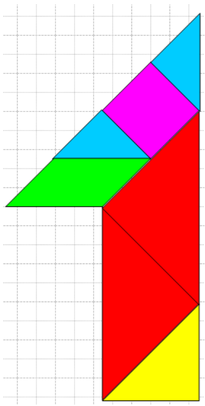
我們將圖形拼出來之後給予編號，例如：圖的編號用 5-1 來表示 $n=5$ 的第一個情況。分三種討論，計算 5 種情形的拼法。

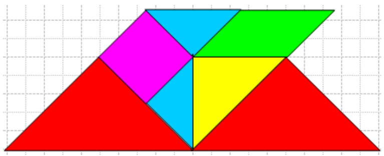
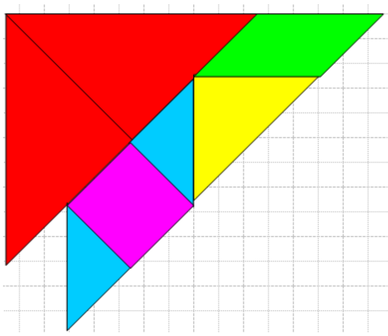
	第一種		第二種		第三種
給定 n 的值	5	5	5	5	5
計算出 b+2c+4d+5e+6f=3n-8 的值	7	7	7	7	7
給定 d 的值	1	1	0	0	0
給定 e 的值	0	0	1	1	0
給定 f 的值	0	0	0	0	1
計算出 b+2c 的值	3	3	2	2	1
給定 c 的值	0	1	0	1	0
給定 b 的值	3	1	2	0	1
計算出 a 的值	1	2	2	3	3

重新排出順序	第一種		第二種		第三種
a	1	2	2	3	3
b	3	1	2	0	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	0	0	0
e	0	0	1	1	0
f	0	0	0	0	1
是否存在圖形	圖 5-1	圖 5-2	圖 5-3	圖 5-4	圖 5-5

找出的拼法，列表如下：

表 1(圖 5-1~5-5 皆由第一作者和第二作者共同製作)

圖號	5-1	5-2	5-3
解	(a，b，c，d，e，f) ＝(1，3，0，1，0，0)	(2，1，1，1，0，0)	(2，2，0，0，1，0)
拼法			

圖號	5-4	5-5
解	(3，0，1，0，1，0)	(3，1，0，0，0，1)
拼法		

3.當 $n = 6$ 時，

計算 14 種情形的拼法。

	第一種				第二種			第三種		
給定 n 的值	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
計算出 $b+2c+4d+5e+6f=3n-8$ 的值	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
給定 d 的值	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
給定 e 的值	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
給定 f 的值	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
計算出 $b+2c$ 的值	6	6	6	6	5	5	5	4	4	4
給定 c 的值	0	1	2	3	0	1	2	0	1	2
給定 b 的值	6	4	2	0	5	3	1	4	2	0
計算出 a 的值	-1	0	1	2	0	1	2	1	2	3

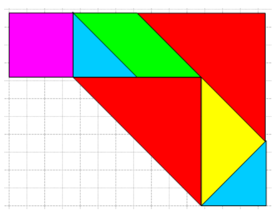
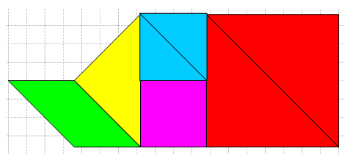
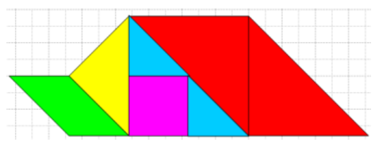
	第四種		第五種		第六種	第七種	
給定 n 的值	6	6	6	6	6	6	6
計算出 $b+2c+4d+5e+6f=3n-8$ 的值	10	10	10	10	10	10	10
給定 d 的值	2	2	0	0	1	1	0
給定 e 的值	0	0	2	0	1	0	1
給定 f 的值	0	0	0	2	0	1	1
計算出 $b+2c$ 的值	2	2	0	-2	1	0	-1
給定 c 的值	0	1	0	不合	0	0	不合
給定 b 的值	2	0	0		1	0	
計算出 a 的值	2	3	4		3	4	

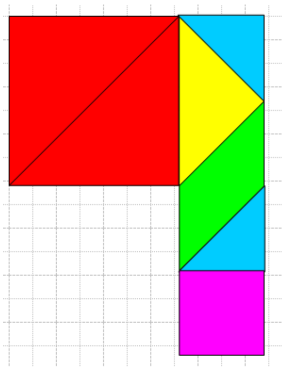
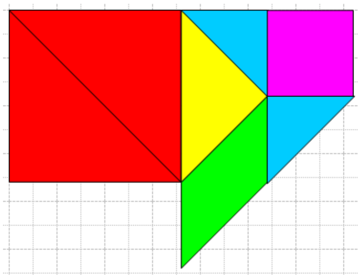
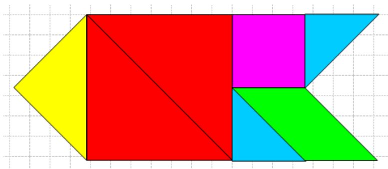
重新排出順序	第一種			第二種			第三種		
a	0	1	2	0	1	2	1	2	3
b	4	2	0	5	3	1	4	2	0
c	1	2	3	0	1	2	0	1	2
d	1	1	1	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	1	1	1	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1	1	1
是否存在圖形	圖 6-1	圖 6-2	圖 6-3	圖 6-4	圖 6-5	圖 6-6	圖 6-7	圖 6-8	圖 6-9

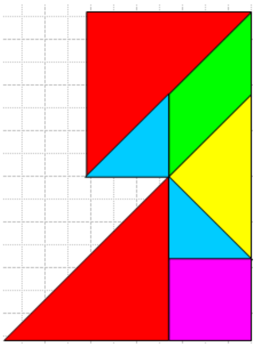
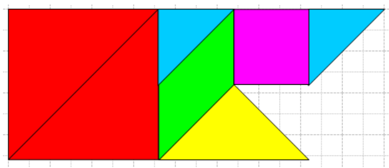
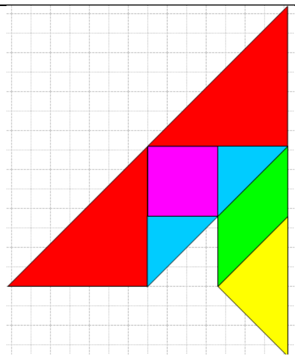
重新排出順序	第四種		第五種	第六種	第七種
a	2	3	4	3	4
b	2	0	0	1	0
c	0	1	0	0	0
d	2	2	0	1	1
e	0	0	2	1	0
f	0	0	0	0	1
是否存在圖形	圖 6-10	圖 6-11	圖 6-12	圖 6-13	圖 6-14

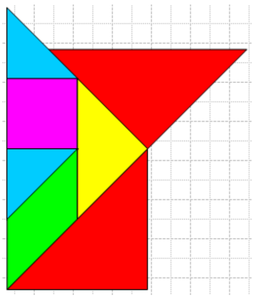
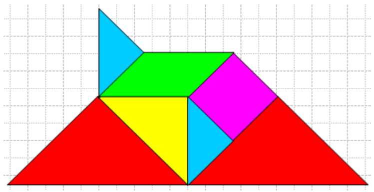
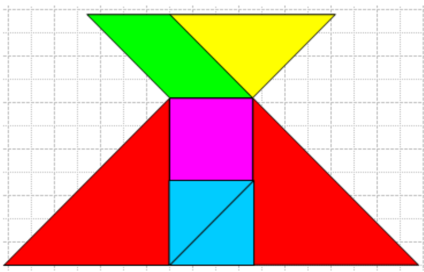
找出的拼法，列表如下：

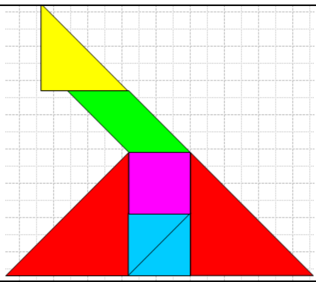
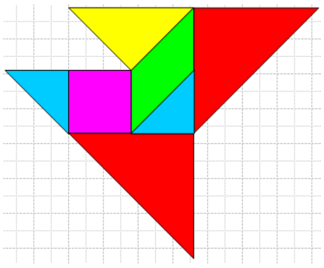
表 2(圖 6-1~6-14 皆由第一作者和第二作者共同製作)

圖號	6-1	6-2	6-3
解	(0，4，1，1，0，0)	(1，2，2，1，0，0)	(2，0，3，1，0，0)
拼法			

圖號	6-4	6-5	6-6
解	(0，5，0，0，1，0)	(1，3，1，0，1，0)	(2，1，2，0，1，0)
拼法			

圖號	6-7	6-8	6-9
解	(1，4，0，0，0，1)	(2，2，1，0，0，1)	(2，2，1，0，0，1)
拼法			

圖號	6-10	6-11	6-12
解	(2，2，0，2，0，0)	(3，0，1，2，0，0)	(4，0，0，0，2，0)
拼法			

圖號	6-13	6-14
解	(3，1，0，1，1，0)	(4，0，0，1，0，1)
拼法		

六、用 Python 程式找出凹多邊形可能解的情形數

為了更有效，我們使用附錄所列的 Python 程式，去找出凹多邊形可能解的情形數。

使用程式 python 得到 $n = 2$~6 時，結果和前面相同。下面列出 $n \geq 7$ 的情形：

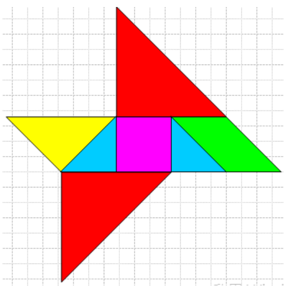
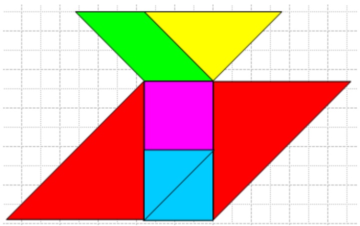
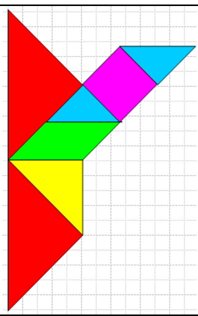
1.當 $n = 7$ 時，計算 23 種情形的拼法。

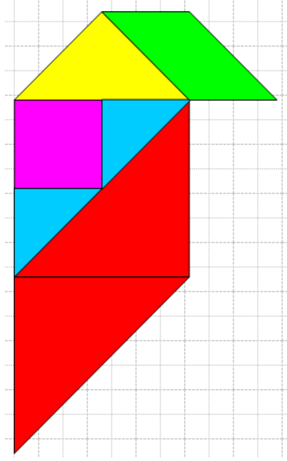
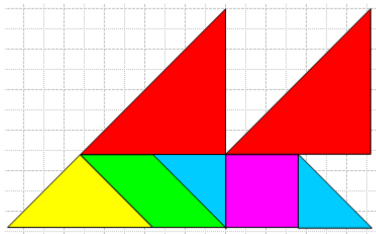
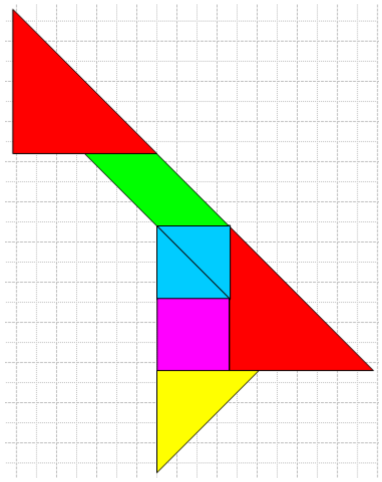
順序	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6	7-7	7-8	7-9	7-10	7-11	7-12
a	4	4	3	2	4	3	3	3	2	2	1	3
b	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2
c	0	1	2	4	0	0	1	1	2	3	4	0
d	2	0	1	0	0	3	0	1	2	0	1	0
e	1	1	1	1	0	0	2	0	0	0	0	1
f	0	1	0	0	2	0	0	1	0	1	0	1
是否存在圖形	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√

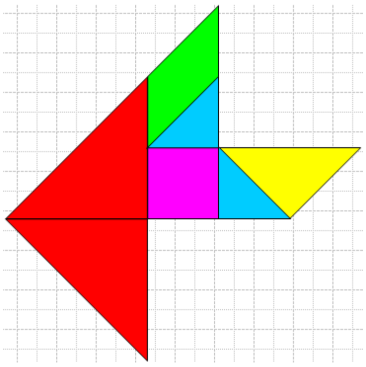
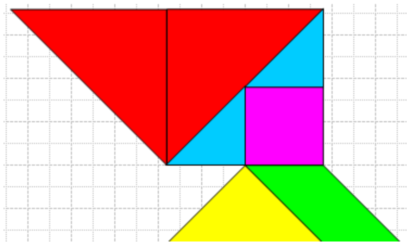
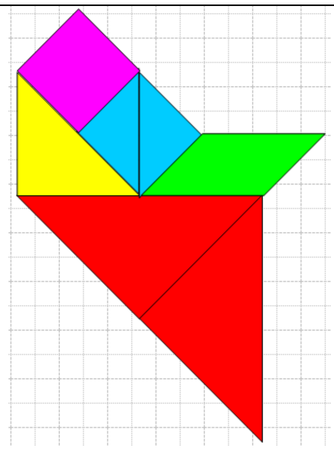
順序	7-13	7-14	7-15	7-16	7-17	7-18	7-19	7-20	7-21	7-22	7-23
a	2	1	2	2	1	1	0	1	0	0	0
b	2	2	3	3	3	3	3	4	4	5	5
c	1	3	0	0	1	2	3	0	2	0	1
d	1	0	0	1	2	0	1	1	0	2	0
e	1	1	2	0	0	0	0	1	1	0	0
f	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
是否存在圖形	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√

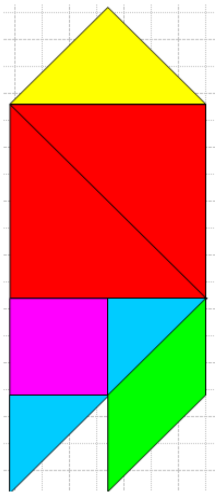
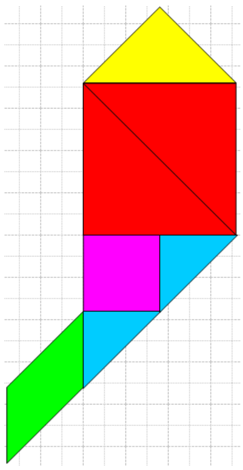
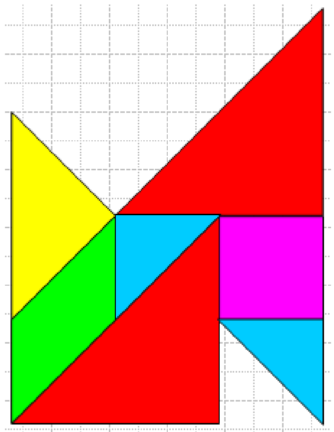
找出的拼法，列表如下：

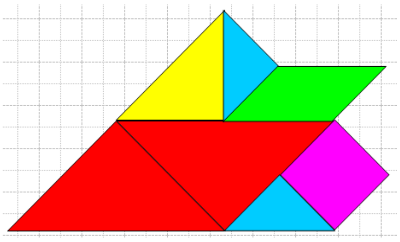
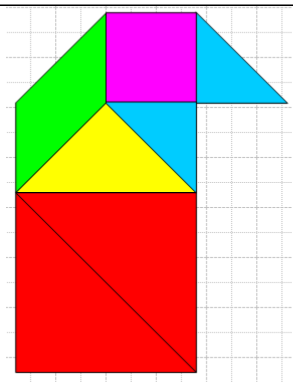
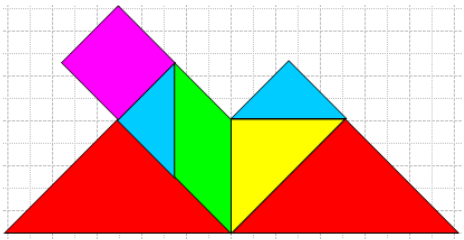
表 3(圖 7-1~7-23 皆由第一作者和第二作者共同製作)

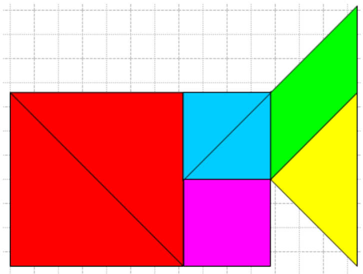
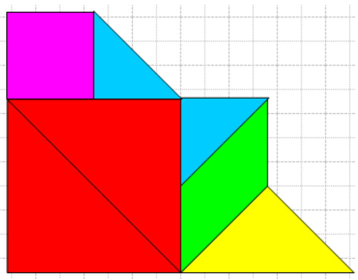
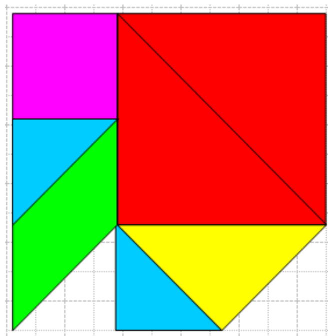
圖號	7-1	7-2	7-3
拼法			

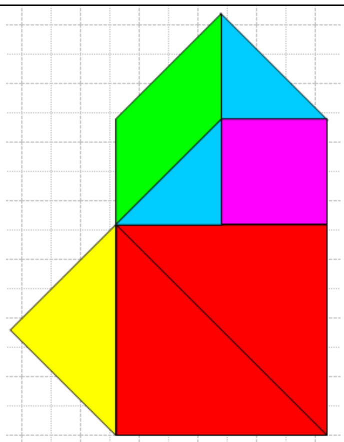
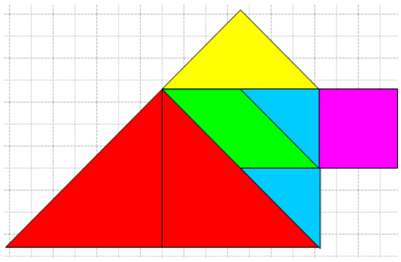
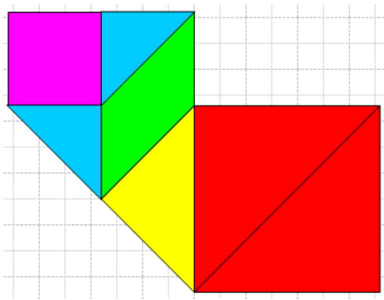
圖號	7-4	7-5	7-6
拼法			

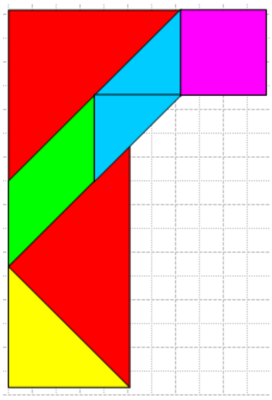
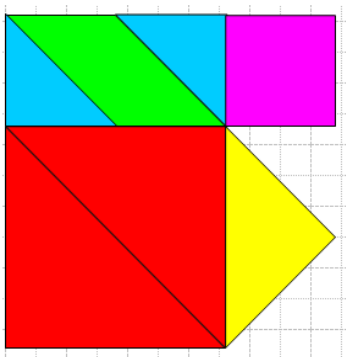
圖號	7-7	7-8	7-9
拼法			

圖號	7-10	7-11	7-12
拼法			

圖號	7-13	7-14	7-15
拼法			

圖號	7-16	7-17	7-18
拼法			

圖號	7-19	7-20	7-21
拼法			

圖號	7-22	7-23
拼法		

2.當 $n = 8$ 時，

計算 41 種情形的拼法。

順序	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6	8-7	8-8	8-9	8-10	8-11	8-12
a	5	5	4	4	4	4	3	3	3	2	2	1
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	6
d	0	1	4	1	2	0	3	0	1	2	0	1
e	2	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0
f	1	2	0	0	1	2	0	0	1	0	1	0
是否存在圖形	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√		√

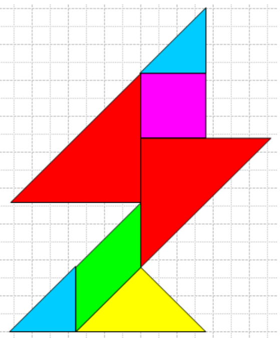
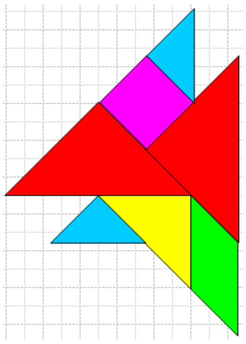
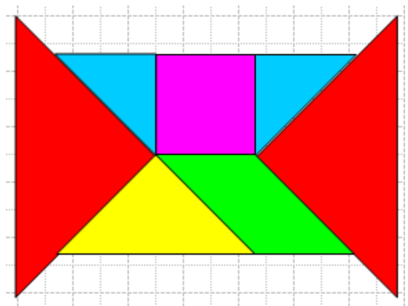
順序	8-13	8-14	8-15	8-16	8-17	8-18	8-19	8-20	8-21	8-22	8-23	8-24
a	4	4	3	3	2	1	3	3	3	2	2	2
b	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
c	0	0	1	2	3	5	0	0	1	1	2	2
d	0	1	2	0	1	0	1	2	0	3	0	1
e	3	1	1	1	1	1	2	0	0	0	2	0
f	0	1	0	1	0	0	0	1	2	0	0	1
是否存在圖形	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√

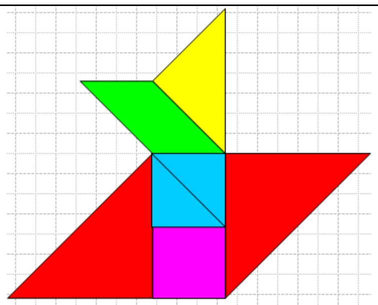
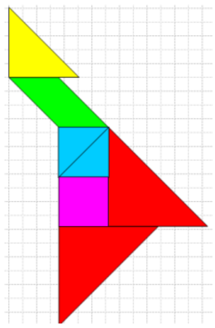
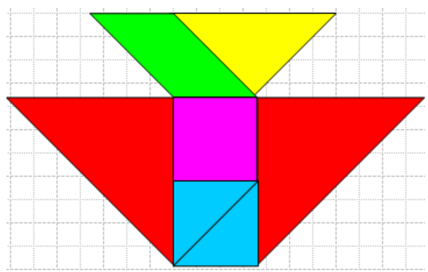
順序	8-25	8-26	8-27	8-28	8-29	8-30	8-31	8-32	8-33	8-34	8-35	8-36
a	1	1	0	2	2	1	0	2	1	1	1	0
b	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4
c	3	4	5	0	1	2	4	0	0	1	1	2
d	2	0	1	2	0	1	0	0	3	0	1	2
e	0	0	0	1	1	1	1	0	0	2	0	0
f	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	1	0
是否存在圖形	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√

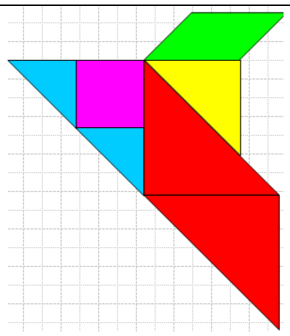
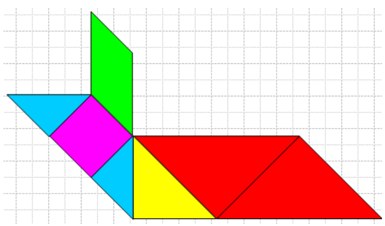
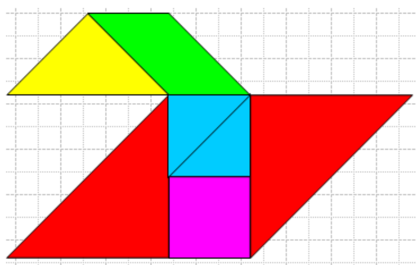
順序	8-37	8-38	8-39	8-40	8-41
a	0	1	0	0	0
b	4	5	5	6	6
c	3	0	1	0	0
d	0	0	1	0	1
e	0	1	1	2	0
f	1	1	0	0	1
是否存在圖形	√	√	√	√	√

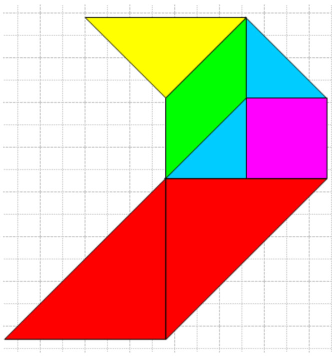
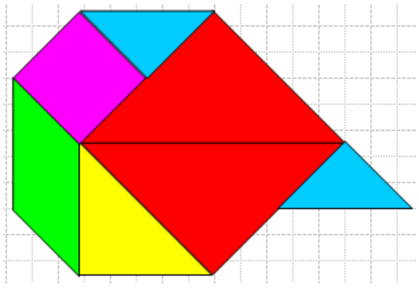
找出的拼法，列表如下：

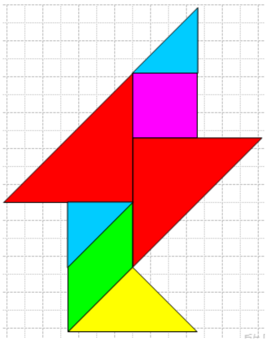
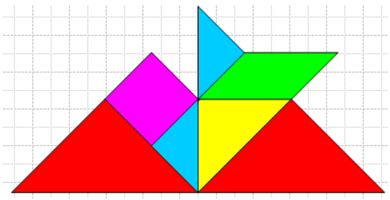
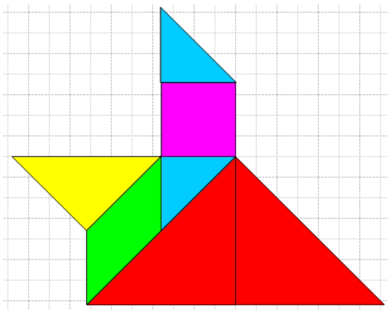
表 4(圖 8-1~8-41 皆由第一作者和第二作者共同製作)

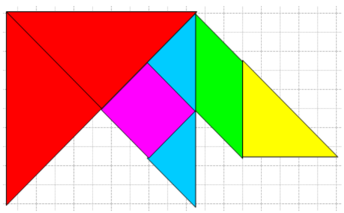
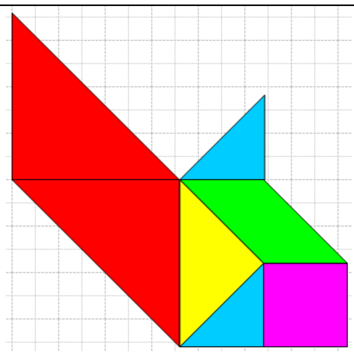
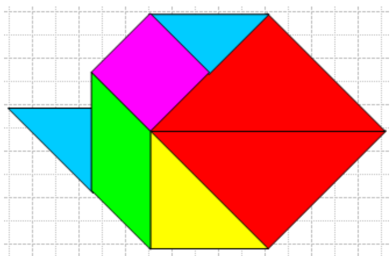
圖號	8-1	8-2	8-3
拼法			

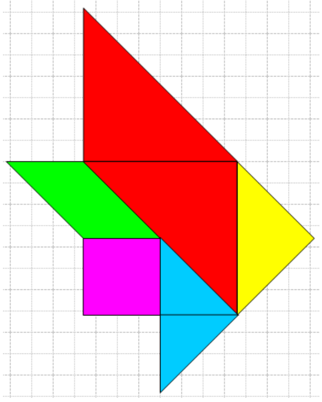
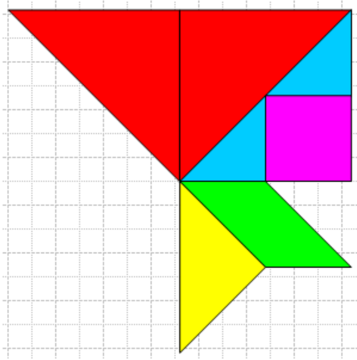
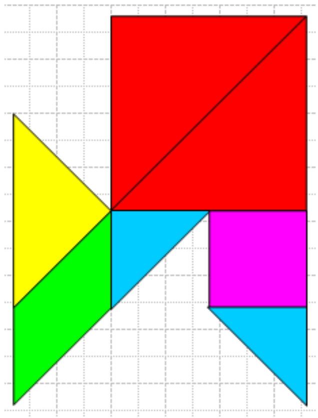
圖號	8-4	8-5	8-6
拼法			

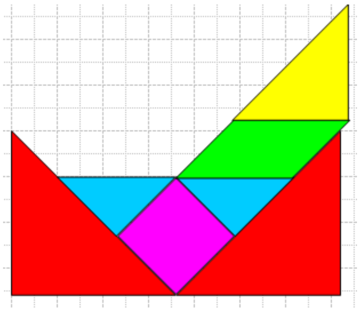
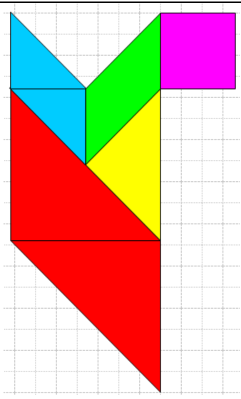
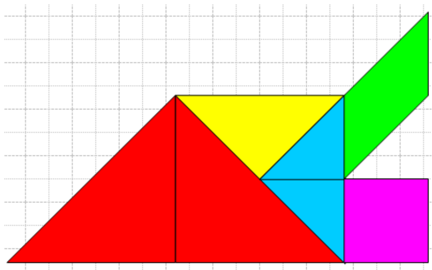
圖號	8-7	8-8	8-9
拼法			

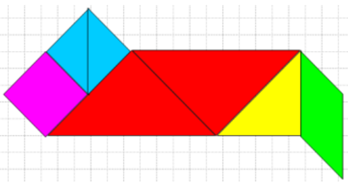
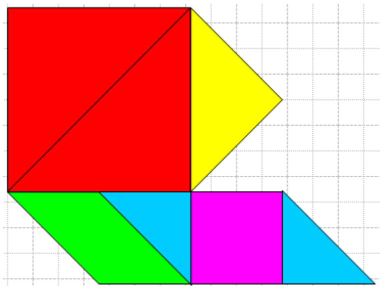
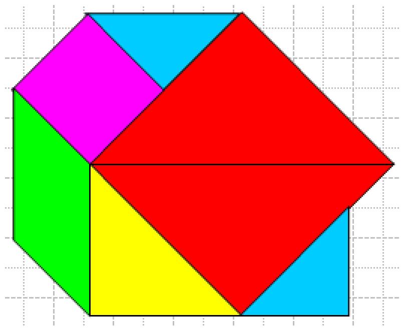
圖號	8-10	8-11	8-12
拼法		尚未找到	

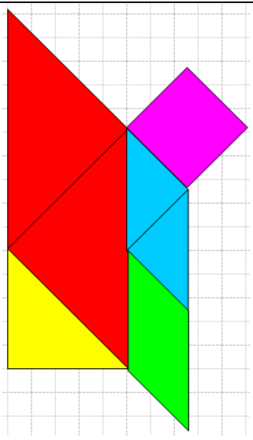
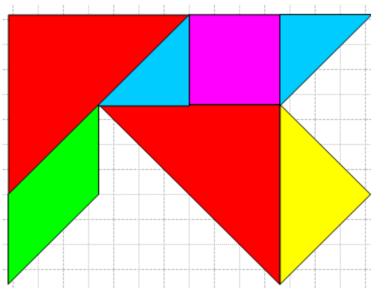
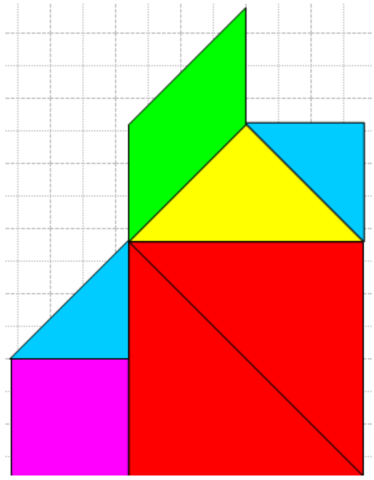
圖號	8-13	8-14	8-15
拼法			

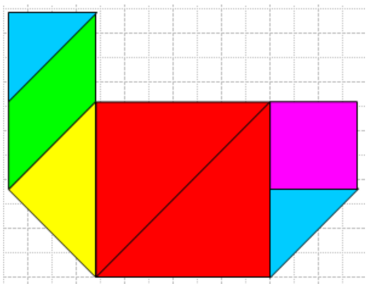
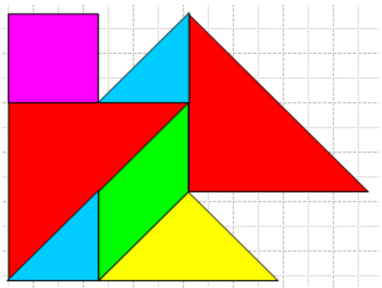
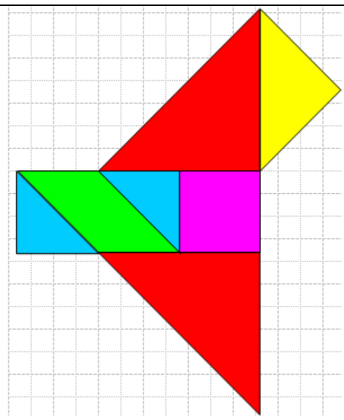
圖號	8-16	8-17	8-18
拼法			

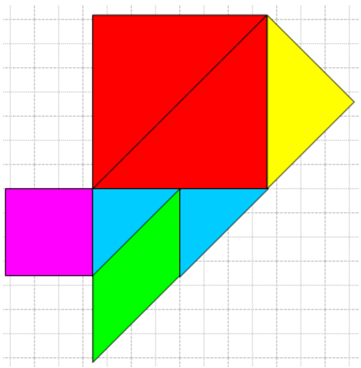
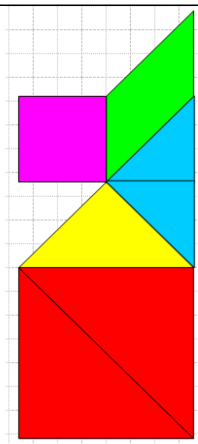
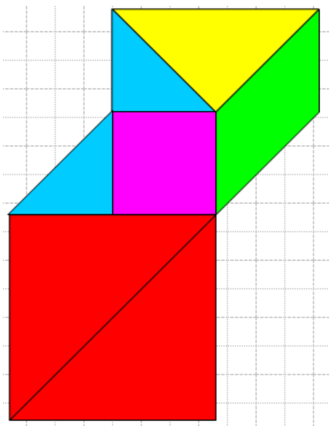
圖號	8-19	8-20	8-21
拼法			

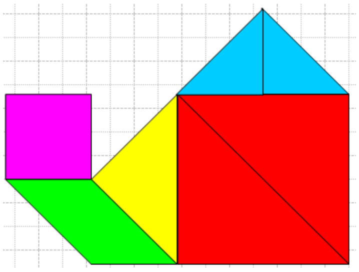
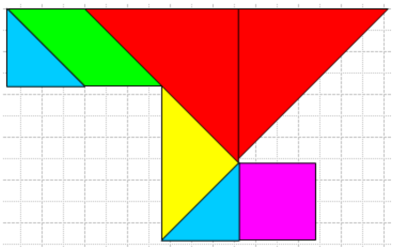
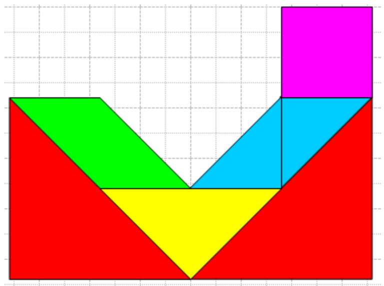
圖號	8-22	8-23	8-24
拼法			

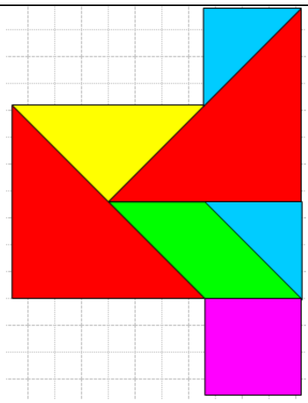
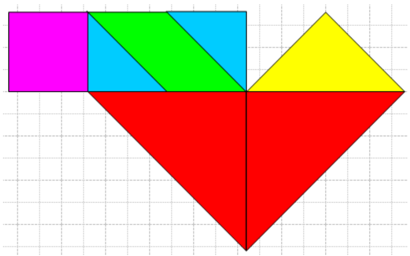
圖號	8-25	8-26	8-27
拼法			

圖號	8-28	8-29	8-30
拼法			

圖號	8-31	8-32	8-33
拼法			

圖號	8-34	8-35	8-36
拼法			

圖號	8-37	8-38	8-39
拼法			

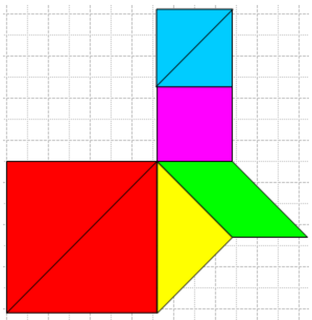
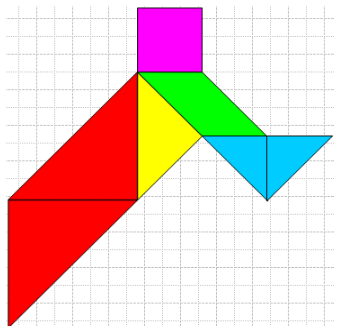
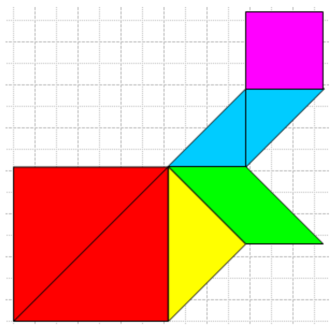
圖號	8-40	8-41
拼法		

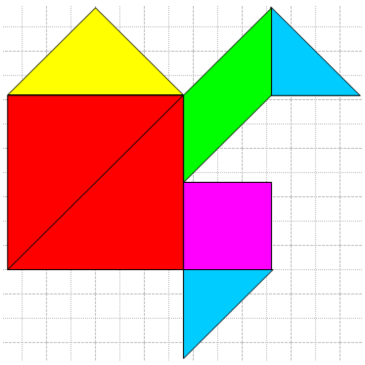
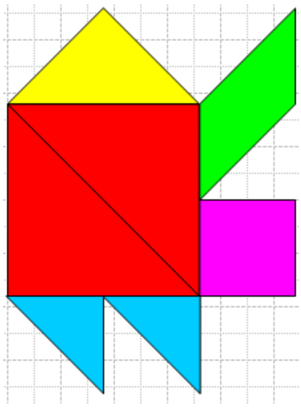
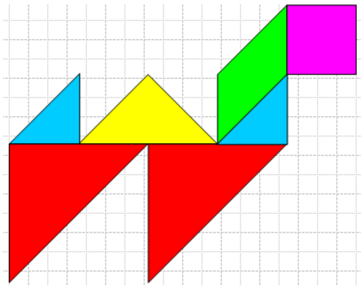
3.目前凹多邊形的拼法解數表

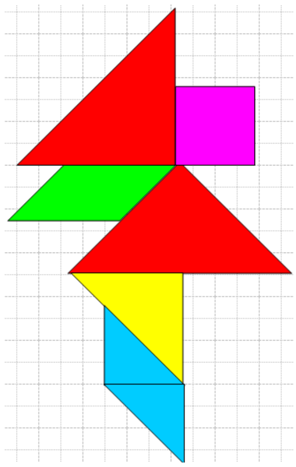
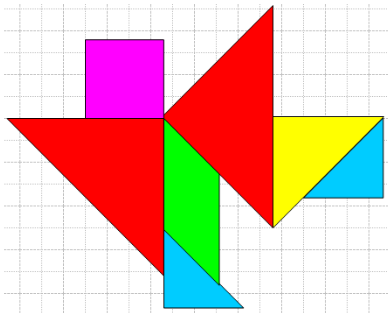
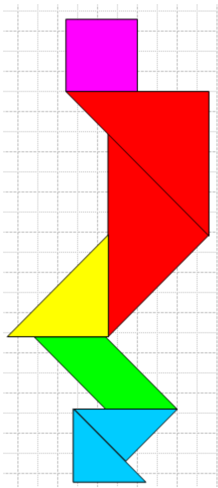
n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
拼法解數	1	5	14	23	41	58	89	118	166	212	284	≥1	≥1	≥1

以下列出 $n = 9$~17 的 1 種拼法：

表 5($n = 9$~17 的圖皆由第一作者和第二作者共同製作)

n	9	10	11
拼法			

n	12	13	14
拼法			

n	15	16	17
拼法			

肆、研究結果

一、證明七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界為 17。
二、七巧板拼凹四邊形的圖形，分析 1 種情形，拼法不存在。
三、七巧板拼凹五邊形的圖形，分析 3 種情形，計算 5 種情形的拼法。
四、七巧板拼凹六邊形的圖形，分析 7 種情形，計算 14 種情形的拼法。
五、用 Excel 驗證凹四至凹六邊形可能解的情形。
六、用 Python 程式找出凹多邊形可能解的情形數。

伍、討論

一、尚未找到拼法的情形，如圖 8-11。可以仿照 $n = 4$ 的方法，試著找出拼法。

陸、參考文獻資料

1. (1942) Wang, Fu-Traing(王福春) and Hsiung, Chuan-Chih(熊全治), A Theorem on the Tangram, The American Mathematical Monthly, Nov., 1942, Vol. 49, No. 9, pp. 596-599.
2. (1986)李明章、張榮貴，七巧板與多邊形，全國第 26 屆科展國中組數學 4304。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/26/pdf/26m/110.pdf
3. (2011)董孟雄，七巧板能拼出多少种凸多边形，中学教研(数学) 9, 32-34。
https://m.fx361.com/news/2011/1127/17565253.html
4. (2015)許紹禹、陳彥宇、蔡維哲，七巧板之巧趣，金門第 55 屆科展國中組數學。
https://science.km.edu.tw/exhibitions?name=4&grade=2&group=1&unit=

附錄

一、程式 python 的編碼

```
import math
# 定義方程
def find_solutions(n):
    # 計算右側的值，方程式右側的值為 3 * n - 8
    right_side = 3 * n - 8

    # 儲存所有的解
    solutions = []

    # 從 0 到(3 * n - 8)試驗所有的解
#math 取整數無條件進位
    for b in range(3 * n - 8):
        for c in range((3 * n - 8)):
            for d in range((3 * n - 8)):
                for e in range((3 * n - 8)):
                    for f in range((3 * n - 8)):
                        for a in range(3 * n - 8):
                            # 檢查是否滿足方程式的所有條件
                            if b + 2*c + 4*d + 5*e + 6*f == right_side and
a+b+c+d+e+f==n and d+e+f>0 and a+b+c+d+e+f<23:
                                solutions.append((a, b, c, d, e, f))
    return solutions

# 尋找 n=2 到 n=13 的所有解
for n in range(2,14):
    solutions = find_solutions(n)
    if solutions:
        print("當 n={}時，共有 {} 組解:".format(n, len(solutions)))
        for solution in solutions:
            print(solution)
    else:
        print("找不到 n={}時的解".format(n))
```

二、程式輸出結果

找不到 n=2 時的解

找不到 n=3 時的解

找不到 n=4 時的解

當 n=5 時，共有 5 組解:

(3, 0, 1, 0, 1, 0)、(3, 1, 0, 0, 0, 1)、(2, 1, 1, 1, 0, 0)、(2, 2, 0, 0, 1, 0)、(1, 3, 0, 1, 0, 0)

當 n=6 時，共有 14 組解:

(4, 4, 0, 0, 2, 0)、(4, 0, 0, 1, 0, 1)、(3, 0, 1, 2, 0, 0)、(3, 0, 2, 0, 0, 1)、(2, 0, 3, 1, 0, 0)、(3, 1, 0, 1, 1, 0)、(2, 1, 2, 0, 1, 0)、(2, 2, 0, 2, 0, 0)、(2, 2, 1, 0, 0, 1)、(1, 2, 2, 1, 0, 0)、(1, 3, 1, 0, 1, 0)(1, 4, 0, 0, 0, 1)、(0, 4, 1, 1, 0, 0)、(0, 5, 0, 0, 1, 0)

當 n=7 時，共有 23 組解:

(4, 0, 0, 2, 1, 0)、(4, 0, 1, 0, 1, 1)、(3, 0, 2, 1, 1, 0)、(2, 0, 4, 0, 1, 0)、(4, 1, 0, 0, 0, 2)、(3, 1, 0, 3, 0, 0)、(3, 1, 1, 0, 2, 0)、(3, 1, 1, 1, 0, 1)、(2, 1, 2, 2, 0, 0)、(2, 1, 3, 0, 0, 1)、(1, 1, 4, 1, 0, 0)、(3, 2, 0, 0, 1, 1)、(2, 2, 1, 1, 1, 0)、(1, 2, 3, 0, 1, 0)、(2, 3, 0, 0, 2, 0)、(2, 3, 0, 1, 0, 1)、(1, 3, 1, 2, 0, 0)、(1, 3, 2, 0, 0, 1)、(0, 3, 3, 1, 0, 0)、(1, 4, 0, 1, 1, 0)、(0, 4, 2, 0, 1, 0)、(0, 5, 0, 2, 0, 0)、(0, 5, 1, 0, 0, 1)

當 n=8 時，共有 41 組解:

(5, 0, 0, 0, 2, 1)、(5, 0, 0, 1, 0, 2)、(4, 0, 0, 4, 0, 0)、(4, 0, 1, 1, 2, 0)、(4, 0, 1, 2, 0, 1)、(4, 0, 2, 0, 0, 2)、(3, 0, 2, 3, 0, 0)、(3, 0, 3, 0, 2, 0)、(3, 0, 3, 1, 0, 1)、(2, 0, 4, 2, 0, 0)、(2, 0, 5, 0, 0, 1)、(1, 0, 6, 1, 0, 0)、(4, 1, 0, 0, 3, 0)、(4, 1, 0, 1, 1, 1)、(3, 1, 1, 2, 1, 0)、(3, 1, 2, 0, 1, 1)、(2, 1, 3, 1, 1, 0)、(1, 1, 5, 0, 1, 0)、(3, 2, 0, 1, 2, 0)、(3, 2, 0, 2, 0, 1)、(3, 2, 1, 0, 0, 2)、(2, 2, 1, 3, 0, 0)、(2, 2, 2, 0, 2, 0)、(2, 2, 2, 1, 0, 1)、(1, 2, 3, 2, 0, 0)、(1, 2, 4, 0, 0, 1)、(0, 2, 5, 1, 0, 0)、(2, 3, 0, 2, 1, 0)、(2, 3, 1, 0, 1, 1)、(1, 3, 2, 1, 1, 0)、(0, 3, 4, 0, 1, 0)、(2, 4, 0, 0, 0, 2)、(1, 4, 0, 3, 0, 0)、(1, 4, 1, 0, 2, 0)、(1, 4, 1, 1, 0, 1)、(0, 4, 2, 2, 0, 0)、(0, 4, 3, 0, 0, 1)、(1, 5, 0, 0, 1, 1)、(0, 5, 1, 1, 1, 0)、(0, 6, 0, 0, 2, 0)、(0, 6, 0, 1, 0, 1)

當 n=9 時，共有 58 組解:

(5, 0, 0, 1, 3, 0)、(5, 0, 0, 2, 1, 1)、(5, 0, 1, 0, 1, 2)、(4, 0, 1, 3, 1, 0)、(4, 0, 2, 0, 3, 0)、(4, 0, 2, 1, 1, 1)、(3, 0, 3, 2, 1, 0)、(3, 0, 4, 0, 1, 1)、(2, 0, 5, 1, 1, 0)、(1, 0, 7, 0, 1, 0)、(5, 1, 0, 0, 0, 3)、(4, 1, 0, 2, 2, 0)、(4, 1, 0, 3, 0, 1)、(4, 1, 1, 0, 2, 1)、(4, 1, 1, 1, 0, 2)、(3, 1, 1, 4, 0, 0)、(3, 1, 2, 1, 2, 0)、(3, 1, 2, 2, 0, 1)、(3, 1, 3, 0, 0, 2)、(2, 1, 3, 3, 0, 0)、(2, 1, 4, 0, 2, 0)、(2, 1, 4, 1, 0, 1)、(1, 1, 5, 2, 0, 0)、(1, 1, 6, 0, 0, 1)、(0, 1, 7, 1, 0, 0)、(4, 2, 0, 0, 1, 2)、(3, 2, 0, 3, 1, 0)、(3, 2, 1, 0, 3, 0)、(3, 2, 1, 1, 1, 1)、(2, 2, 2, 2, 1, 0)、(2, 2, 3, 0, 1, 1)、(1, 2, 4, 1, 1, 0)、(0, 2, 6, 0, 1, 0)、(3, 3, 0, 0, 2, 1)、(3, 3, 0, 1, 0, 2)、(2, 3, 0, 4, 0, 0)、(2, 3, 1, 1, 2, 0)、(2, 3, 1, 2, 0, 1)、(2, 3, 2, 0, 0, 2)、(1, 3, 2, 3, 0, 0)、(1, 3, 3, 0, 2, 0)、(1, 3, 3, 1, 0, 1)、(0, 3, 4, 2, 0, 0)、(0, 3, 5, 0, 0, 1)、(2, 4, 0, 0, 3, 0)、(2, 4, 0, 1, 1, 1)、(1, 4, 1, 2, 1, 0)、(1, 4, 2, 0, 1, 1)、(0, 4, 3, 1, 1, 0)、(1, 5, 0, 1, 2, 0)、(1, 5, 0, 2, 0, 1)、(1, 5, 1, 0, 0, 2)、(0, 5, 1, 3, 0, 0)、(0, 5, 2, 0, 2, 0)、(0, 5, 2, 1, 0, 1)、(0, 6, 0, 2, 1, 0)、(0, 6, 1, 0, 1, 1)、(0, 7, 0, 0, 0, 2)

當 n=10 時，共有 89 組解:
(6, 0, 0, 0, 2, 2)、(6, 0, 0, 1, 0, 3)、(5, 0, 0, 3, 2, 0)、(5, 0, 0, 4, 0, 1)、(5, 0, 1, 0, 4, 0)、
(5, 0, 1, 1, 2, 1)、(5, 0, 1, 2, 0, 2)、(4, 0, 1, 5, 0, 0)、(5, 0, 2, 0, 0, 3)、(4, 0, 2, 2, 2, 0)、
(4, 0, 2, 3, 0, 1)、(4, 0, 3, 0, 2, 1)、(4, 0, 3, 1, 0, 2)、(3, 0, 3, 4, 0, 0)、(3, 0, 4, 1, 2, 0)、
(3, 0, 4, 2, 0, 1)、(3, 0, 5, 0, 0, 2)、(2, 0, 5, 3, 0, 0)、(2, 0, 6, 0, 2, 0)、(2, 0, 6, 1, 0, 1)、
(1, 0, 7, 2, 0, 0)、(1, 0, 8, 0, 0, 1)、(0, 0, 9, 1, 0, 0)、(5, 1, 0, 0, 3, 1)、(5, 1, 0, 1, 1, 2)、
(4, 1, 0, 4, 1, 0)、(4, 1, 1, 1, 3, 0)、(4, 1, 1, 2, 1, 1)、(4, 1, 2, 0, 1, 2)、(3, 1, 2, 3, 1, 0)、
(3, 1, 3, 0, 3, 0)、(3, 1, 3, 1, 1, 1)、(2, 1, 4, 2, 1, 0)、(2, 1, 5, 0, 1, 1)、(1, 1, 6, 1, 1, 0)、
(0, 1, 8, 0, 1, 0)、(4, 2, 0, 0, 4, 0)、(4, 2, 0, 1, 2, 1)、(4, 2, 0, 2, 0, 2)、(3, 2, 0, 5, 0, 0)、
(4, 2, 1, 0, 0, 3)、(3, 2, 1, 2, 2, 0)、(3, 2, 1, 3, 0, 1)、(3, 2, 2, 0, 2, 1)、(3, 2, 2, 1, 0, 2)、
(2, 2, 2, 4, 0, 0)、(2, 2, 3, 1, 2, 0)、(2, 2, 3, 2, 0, 1)、(2, 2, 4, 0, 0, 2)、(1, 2, 4, 3, 0, 0)、
(1, 2, 5, 0, 2, 0)、(1, 2, 5, 1, 0, 1)、(0, 2, 6, 2, 0, 0)、(0, 2, 7, 0, 0, 1)、(3, 3, 0, 1, 3, 0)、
(3, 3, 0, 2, 1, 1)、(3, 3, 1, 0, 1, 2)、(2, 3, 1, 3, 1, 0)、(2, 3, 2, 0, 3, 0)、(2, 3, 2, 1, 1, 1)、
(1, 3, 3, 2, 1, 0)、(1, 3, 4, 0, 1, 1)、(0, 3, 5, 1, 1, 0)、(3, 4, 0, 0, 0, 3)、(2, 4, 0, 2, 2, 0)、
(2, 4, 0, 3, 0, 1)、(2, 4, 1, 0, 2, 1)、(2, 4, 1, 1, 0, 2)、(1, 4, 1, 4, 0, 0)、(1, 4, 2, 1, 2, 0)、
(1, 4, 2, 2, 0, 1)、(1, 4, 3, 0, 0, 2)、(0, 4, 3, 3, 0, 0)、(0, 4, 4, 0, 2, 0)、(0, 4, 4, 1, 0, 1)、
(2, 5, 0, 0, 1, 2)、(1, 5, 0, 3, 1, 0)、(1, 5, 1, 0, 3, 0)、(1, 5, 1, 1, 1, 1)、(0, 5, 2, 2, 1, 0)、
(0, 5, 3, 0, 1, 1)、(1, 6, 0, 0, 2, 1)、(1, 6, 0, 1, 0, 2)、(0, 6, 0, 4, 0, 0)、(0, 6, 1, 1, 2, 0)、
(0, 6, 1, 2, 0, 1)、(0, 6, 2, 0, 0, 2)、(0, 7, 0, 0, 3, 0)、(0, 7, 0, 1, 1, 1)
當 n=11 時，共有 118 組解:
(6, 0, 0, 0, 5, 0)、(6, 0, 0, 1, 3, 1)、(6, 0, 0, 2, 1, 2)、(5, 0, 0, 5, 1, 0)、(6, 0, 1, 0, 1, 3)、
(5, 0, 1, 2, 3, 0)、(5, 0, 1, 3, 1, 1)、(5, 0, 2, 0, 3, 1)、(5, 0, 2, 1, 1, 2)、(4, 0, 2, 4, 1, 0)、
(4, 0, 3, 1, 3, 0)、(4, 0, 3, 2, 1, 1)、(4, 0, 4, 0, 1, 2)、(3, 0, 4, 3, 1, 0)、(3, 0, 5, 0, 3, 0)、
(3, 0, 5, 1, 1, 1)、(2, 0, 6, 2, 1, 0)、(2, 0, 7, 0, 1, 1)、(1, 0, 8, 1, 1, 0)、(0, 0, 10, 0, 1, 0)、
(6, 1, 0, 0, 0, 4)、(5, 1, 0, 1, 4, 0)、(5, 1, 0, 2, 2, 1)、(5, 1, 0, 3, 0, 2)、(4, 1, 0, 6, 0, 0)、
(5, 1, 1, 0, 2, 2)、(5, 1, 1, 1, 0, 3)、(4, 1, 1, 3, 2, 0)、(4, 1, 1, 4, 0, 1)、(4, 1, 2, 0, 4, 0)、
(4, 1, 2, 1, 2, 1)、(4, 1, 2, 2, 0, 2)、(3, 1, 2, 5, 0, 0)、(4, 1, 3, 0, 0, 3)、(3, 1, 3, 2, 2, 0)、
(3, 1, 3, 3, 0, 1)、(3, 1, 4, 0, 2, 1)、(3, 1, 4, 1, 0, 2)、(2, 1, 4, 4, 0, 0)、(2, 1, 5, 1, 2, 0)、
(2, 1, 5, 2, 0, 1)、(2, 1, 6, 0, 0, 2)、(1, 1, 6, 3, 0, 0)、(1, 1, 7, 0, 2, 0)、(1, 1, 7, 1, 0, 1)、
(0, 1, 8, 2, 0, 0)、(0, 1, 9, 0, 0, 1)、(5, 2, 0, 0, 1, 3)、(4, 2, 0, 2, 3, 0)、(4, 2, 0, 3, 1, 1)、
(4, 2, 1, 0, 3, 1)、(4, 2, 1, 1, 1, 2)、(3, 2, 1, 4, 1, 0)、(3, 2, 2, 1, 3, 0)、(3, 2, 2, 2, 1, 1)、
(3, 2, 3, 0, 1, 2)、(2, 2, 3, 3, 1, 0)、(2, 2, 4, 0, 3, 0)、(2, 2, 4, 1, 1, 1)、(1, 2, 5, 2, 1, 0)、
(1, 2, 6, 0, 1, 1)、(0, 2, 7, 1, 1, 0)、(4, 3, 0, 0, 2, 2)、(4, 3, 0, 1, 0, 3)、(3, 3, 0, 3, 2, 0)、
(3, 3, 0, 4, 0, 1)、(3, 3, 1, 0, 4, 0)、(3, 3, 1, 1, 2, 1)、(3, 3, 1, 2, 0, 2)、(2, 3, 1, 5, 0, 0)、
(3, 3, 2, 0, 0, 3)、(2, 3, 2, 2, 2, 0)、(2, 3, 2, 3, 0, 1)、(2, 3, 3, 0, 2, 1)、(2, 3, 3, 1, 0, 2)、
(1, 3, 3, 4, 0, 0)、(1, 3, 4, 1, 2, 0)、(1, 3, 4, 2, 0, 1)、(1, 3, 5, 0, 0, 2)、(0, 3, 5, 3, 0, 0)、
(0, 3, 6, 0, 2, 0)、(0, 3, 6, 1, 0, 1)、(3, 4, 0, 0, 3, 1)、(3, 4, 0, 1, 1, 2)、(2, 4, 0, 4, 1, 0)、
(2, 4, 1, 1, 3, 0)、(2, 4, 1, 2, 1, 1)、(2, 4, 2, 0, 1, 2)、(1, 4, 2, 3, 1, 0)、(1, 4, 3, 0, 3, 0)、
(1, 4, 3, 1, 1, 1)、(0, 4, 4, 2, 1, 0)、(0, 4, 5, 0, 1, 1)、(2, 5, 0, 0, 4, 0)、(2, 5, 0, 1, 2, 1)、
(2, 5, 0, 2, 0, 2)、(1, 5, 0, 5, 0, 0)、(2, 5, 1, 0, 0, 3)、(1, 5, 1, 2, 2, 0)、(1, 5, 1, 3, 0, 1)、

(1, 5, 2, 0, 2, 1)、(1, 5, 2, 1, 0, 2)、(0, 5, 2, 4, 0, 0)、(0, 5, 3, 1, 2, 0)、(0, 5, 3, 2, 0, 1)、
(0, 5, 4, 0, 0, 2)、(1, 6, 0, 1, 3, 0)、(1, 6, 0, 2, 1, 1)、(1, 6, 1, 0, 1, 2)、(0, 6, 1, 3, 1, 0)、
(0, 6, 2, 0, 3, 0)、(0, 6, 2, 1, 1, 1)、(1, 7, 0, 0, 0, 3)、(0, 7, 0, 2, 2, 0)、(0, 7, 0, 3, 0, 1)、
(0, 7, 1, 0, 2, 1)、(0, 7, 1, 1, 0, 2)、(0, 8, 0, 0, 1, 2)

當 n=12 時，共有 166 組解:

(7, 0, 0, 0, 2, 3)、(7, 0, 0, 1, 0, 4)、(6, 0, 0, 2, 4, 0)、(6, 0, 0, 3, 2, 1)、(6, 0, 0, 4, 0, 2)、
(5, 0, 0, 7, 0, 0)、(6, 0, 1, 0, 4, 1)、(6, 0, 1, 1, 2, 2)、(6, 0, 1, 2, 0, 3)、(5, 0, 1, 4, 2, 0)、
(5, 0, 1, 5, 0, 1)、(6, 0, 2, 0, 0, 4)、(5, 0, 2, 1, 4, 0)、(5, 0, 2, 2, 2, 1)、(5, 0, 2, 3, 0, 2)、
(4, 0, 2, 6, 0, 0)、(5, 0, 3, 0, 2, 2)、(5, 0, 3, 1, 0, 3)、(4, 0, 3, 3, 2, 0)、(4, 0, 3, 4, 0, 1)、
(4, 0, 4, 0, 4, 0)、(4, 0, 4, 1, 2, 1)、(4, 0, 4, 2, 0, 2)、(3, 0, 4, 5, 0, 0)、(4, 0, 5, 0, 0, 3)、
(3, 0, 5, 2, 2, 0)、(3, 0, 5, 3, 0, 1)、(3, 0, 6, 0, 2, 1)、(3, 0, 6, 1, 0, 2)、(2, 0, 6, 4, 0, 0)、
(2, 0, 7, 1, 2, 0)、(2, 0, 7, 2, 0, 1)、(2, 0, 8, 0, 0, 2)、(1, 0, 8, 3, 0, 0)、(1, 0, 9, 0, 2, 0)、
(1, 0, 9, 1, 0, 1)、(0, 0, 10, 2, 0, 0)、(0, 0, 11, 0, 0, 1)、(6, 1, 0, 0, 3, 2)、(6, 1, 0, 1, 1, 3)、
(5, 1, 0, 3, 3, 0)、(5, 1, 0, 4, 1, 1)、(5, 1, 1, 0, 5, 0)、(5, 1, 1, 1, 3, 1)、(5, 1, 1, 2, 1, 2)、
(4, 1, 1, 5, 1, 0)、(5, 1, 2, 0, 1, 3)、(4, 1, 2, 2, 3, 0)、(4, 1, 2, 3, 1, 1)、(4, 1, 3, 0, 3, 1)、
(4, 1, 3, 1, 1, 2)、(3, 1, 3, 4, 1, 0)、(3, 1, 4, 1, 3, 0)、(3, 1, 4, 2, 1, 1)、(3, 1, 5, 0, 1, 2)、
(2, 1, 5, 3, 1, 0)、(2, 1, 6, 0, 3, 0)、(2, 1, 6, 1, 1, 1)、(1, 1, 7, 2, 1, 0)、(1, 1, 8, 0, 1, 1)、
(0, 1, 9, 1, 1, 0)、(5, 2, 0, 0, 4, 1)、(5, 2, 0, 1, 2, 2)、(5, 2, 0, 2, 0, 3)、(4, 2, 0, 4, 2, 0)、
(4, 2, 0, 5, 0, 1)、(5, 2, 1, 0, 0, 4)、(4, 2, 1, 1, 4, 0)、(4, 2, 1, 2, 2, 1)、(4, 2, 1, 3, 0, 2)、
(3, 2, 1, 6, 0, 0)、(4, 2, 2, 0, 2, 2)、(4, 2, 2, 1, 0, 3)、(3, 2, 2, 3, 2, 0)、(3, 2, 2, 4, 0, 1)、
(3, 2, 3, 0, 4, 0)、(3, 2, 3, 1, 2, 1)、(3, 2, 3, 2, 0, 2)、(2, 2, 3, 5, 0, 0)、(3, 2, 4, 0, 0, 3)、
(2, 2, 4, 2, 2, 0)、(2, 2, 4, 3, 0, 1)、(2, 2, 5, 0, 2, 1)、(2, 2, 5, 1, 0, 2)、(1, 2, 5, 4, 0, 0)、
(1, 2, 6, 1, 2, 0)、(1, 2, 6, 2, 0, 1)、(1, 2, 7, 0, 0, 2)、(0, 2, 7, 3, 0, 0)、(0, 2, 8, 0, 2, 0)、
(0, 2, 8, 1, 0, 1)、(4, 3, 0, 0, 5, 0)、(4, 3, 0, 1, 3, 1)、(4, 3, 0, 2, 1, 2)、(3, 3, 0, 5, 1, 0)、
(4, 3, 1, 0, 1, 3)、(3, 3, 1, 2, 3, 0)、(3, 3, 1, 3, 1, 1)、(3, 3, 2, 0, 3, 1)、(3, 3, 2, 1, 1, 2)、
(2, 3, 2, 4, 1, 0)、(2, 3, 3, 1, 3, 0)、(2, 3, 3, 2, 1, 1)、(2, 3, 4, 0, 1, 2)、(1, 3, 4, 3, 1, 0)、
(1, 3, 5, 0, 3, 0)、(1, 3, 5, 1, 1, 1)、(0, 3, 6, 2, 1, 0)、(0, 3, 7, 0, 1, 1)、(4, 4, 0, 0, 0, 4)、
(3, 4, 0, 1, 4, 0)、(3, 4, 0, 2, 2, 1)、(3, 4, 0, 3, 0, 2)、(2, 4, 0, 6, 0, 0)、(3, 4, 1, 0, 2, 2)、
(3, 4, 1, 1, 0, 3)、(2, 4, 1, 3, 2, 0)、(2, 4, 1, 4, 0, 1)、(2, 4, 2, 0, 4, 0)、(2, 4, 2, 1, 2, 1)、
(2, 4, 2, 2, 0, 2)、(1, 4, 2, 5, 0, 0)、(2, 4, 3, 0, 0, 3)、(1, 4, 3, 2, 2, 0)、(1, 4, 3, 3, 0, 1)、
(1, 4, 4, 0, 2, 1)、(1, 4, 4, 1, 0, 2)、(0, 4, 4, 4, 0, 0)、(0, 4, 5, 1, 2, 0)、(0, 4, 5, 2, 0, 1)、
(0, 4, 6, 0, 0, 2)、(3, 5, 0, 0, 1, 3)、(2, 5, 0, 2, 3, 0)、(2, 5, 0, 3, 1, 1)、(2, 5, 1, 0, 3, 1)、
(2, 5, 1, 1, 1, 2)、(1, 5, 1, 4, 1, 0)、(1, 5, 2, 1, 3, 0)、(1, 5, 2, 2, 1, 1)、(1, 5, 3, 0, 1, 2)、
(0, 5, 3, 3, 1, 0)、(0, 5, 4, 0, 3, 0)、(0, 5, 4, 1, 1, 1)、(2, 6, 0, 0, 2, 2)、(2, 6, 0, 1, 0, 3)、
(1, 6, 0, 3, 2, 0)、(1, 6, 0, 4, 0, 1)、(1, 6, 1, 0, 4, 0)、(1, 6, 1, 1, 2, 1)、(1, 6, 1, 2, 0, 2)、
(0, 6, 1, 5, 0, 0)、(1, 6, 2, 0, 0, 3)、(0, 6, 2, 2, 2, 0)、(0, 6, 2, 3, 0, 1)、(0, 6, 3, 0, 2, 1)、
(0, 6, 3, 1, 0, 2)、(1, 7, 0, 0, 3, 1)、(1, 7, 0, 1, 1, 2)、(0, 7, 0, 4, 1, 0)、(0, 7, 1, 1, 3, 0)、
(0, 7, 1, 2, 1, 1)、(0, 7, 2, 0, 1, 2)、(0, 8, 0, 0, 4, 0)、(0, 8, 0, 1, 2, 1)、(0, 8, 0, 2, 0, 2)、
(0, 8, 1, 0, 0, 3)、

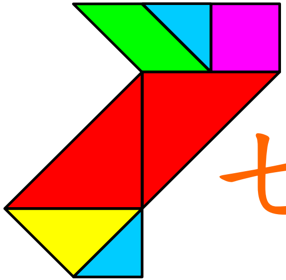
三、由於版面限制，$n = 13$ 不逐一呈現。

【評語】030403

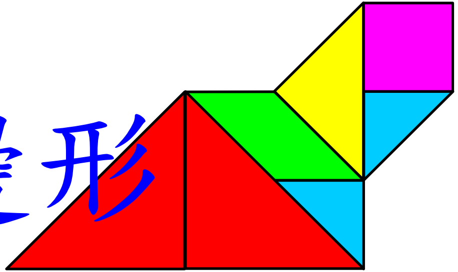
這是一個有趣的七巧板遊戲,作者們運用聯立方程式解找出存在存在的情形，並將相對應的排列方法列出(n=5~8，除了一個以外)。運用電腦解出聯立方程式的解外，是否有可能也可排出相對應的所有圖形，如此則可將結果更詳盡的呈現，並加以分析討論。

作者們耐心觀察所有凹多邊形組成規律是此作品的一個特點,然而所列出的 8-11 圖例並未進一步探究，文章中:伍、討論一節中的內容，非常缺乏。整體而言，此作品的研究主題與探討相較於凸研究課題較缺少結構性成果。

作品簡報



七巧板拼凹多邊形



壹、前言

第一部分：研究動機

老師上課在教導多邊形和畢氏定理時，提到了等腰直角三角形，讓我們想起曾經玩過的七巧板。七巧板是一種有七塊圖板的遊戲，可以透過邊的拼合，形成各種圖案。七巧板可以培養想像力、邏輯思考和問題解決能力。

在尋找資料時，曾經有人研究過：用七巧板拼凸多邊形[1]。但目前並未有延伸探討：七巧板拼成凹多邊形的作品。這是一個具有挑戰性的數學問題，於是我們便決定要研究此主題。

第二部分：研究目的

一、證明七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界。

二、七巧板拼凹四邊形的圖形。

三、七巧板拼凹五邊形的圖形。

四、七巧板拼凹六邊形的圖形。

五、用 Excel 驗證凹四至凹六邊形可能解的情形。

六、用 Python 程式找出凹多邊形可能解的情形數。

第三部分：文獻回顧

在 Google 關鍵字輸入「七巧板 凹多邊形」，沒有相關作品。目前相關科展作品的結果都是「七巧板能拼出多少種凸多邊形？」摘要如下：

[1]主要結果：七巧板能拼出 13 種凸多邊形。 [2]主要結果：七巧板能拼出 13 種凸多邊形。

[3]主要結果：提到七巧板無法拼出 7 邊以上的凸多邊形，但未提到總共能拼出 13 種圖形。

[4]目前無法下載作品。

貳、研究設備及器材

紙、筆及 Word、Microsoft Visio、小畫家、Excel、Python 軟體、geogebra 軟體、七巧板。

參、研究過程或方法

第一部分：定義

【定義 2】若一個凹多邊形的任何邊都不會互相交會，則稱此凹多邊形為「簡單凹多邊形」。

【定義 3】七巧板拼法的規定

在任何一種拼法中，

(1)必須用到全部七塊圖板，不可少或多任何一片。

(2)任 2 塊圖板以邊拼合時，2 個拼合邊至少要有 1 個頂點重合，但邊可以不用完全重合。也就是說，若 2 個拼合邊是長邊拚短邊時，有 1 個頂點重合，另 1 個頂點不重合，且拼合後長邊會有未被短邊重合的部分。

(3)若兩個拼法的圖形，旋轉後可以重合，則視為同一種。

第二部分：主要結果

一、證明七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界

【定理 1】七巧板拼成凹多邊形的最大邊數上界是 17。

我們研究方法的步驟如下：

(步驟 1)仿照[2]的方法列式。

(步驟 2)按邊數 n 的值，給定未知數 d、e、f 的值，再找未知數 a、b、c 的解。解出凹 n 邊形圖形的各個內角。

因 d、e、f 至少有一個是正整數，先從只有 1 個是 1、另 2 個是 0 開始計算。

(步驟 3)依(步驟 2)解出凹 n 邊形的各內角，分析排列方式。

(步驟 4)依(步驟 3)各內角排列的凹 n 邊形，計算邊長及面積找出 7 塊圖板的所有拼法。

【假設 1】

假設七巧板拼出的凹 n 邊形是簡單凹多邊形。

因為七巧板中，7 塊圖板的任一內角都是 45^o 的倍數，我們可以假設拼出的簡單凹 n 邊形中，內角 45^o、90^o、135^o、225^o、270^o、315^o 的個數分別有 a、b、c、d、e、f 個，其中 a、b、c 是非負整數且 d、e、f 至少有一個是正整數。順便說明：因 180^o 和 360^o 分別為平角和周角，我們不列入拼法的計算。

因凹 n 邊形有 n 個內角，可列出 $a+b+c+d+e+f=n$ (E1)

因凹 n 邊形內角和是 $(n-2)\times180^o$，可列出 $45a+90b+135c+225d+270e+315f=(n-2)\times180$，

可得 $a+2b+3c+5d+6e+7f=(n-2)\times4$，$a+2b+3c+5d+6e+7f=4n-8$ (E2)

二、七巧板拼凹四邊形的圖形

(步驟 2)當 $n=4$ 時，

1.若(d，e，f) = (1，0，0)，

【假設 1】(E1)： $a+b+c+1+0+0=4$，即 $a+b+c=3$ ①

【假設 1】(E2)： $a+2b+3c+5+0+0=16-8$，即 $a+2b+3c=3$ ②

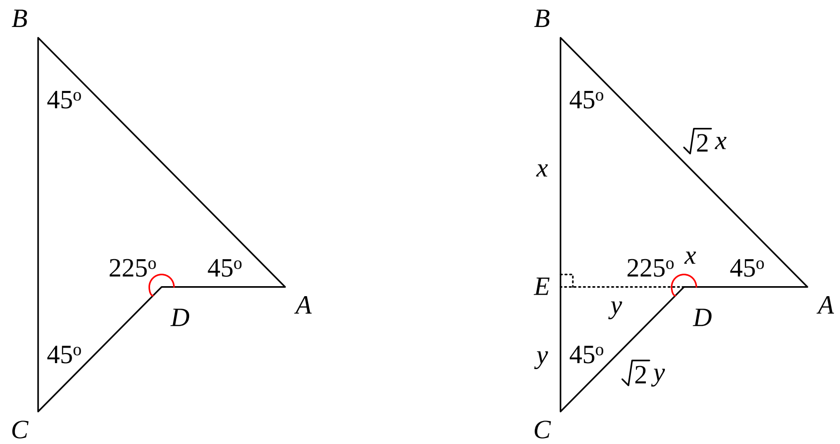
②−①： $b+2c=0$，因 b、c 是非負整數，得 b、$c=0$ ③

③代①： $a=3$，則(a，b，c) = (3，0，0)。由(n，a，b，c，d，e，f) = (4，3，0，0，1，0，0)，

可知拼出的圖形是凹四邊形，其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數分別有 3、0、0、1、0、0 個。

(步驟 3)因(步驟 2)解出的凹四邊形有 3 個內角是 45º、1 個內角是 225º。

考慮環狀排列有 $\frac{4!}{3!}=4$ 種，因為有 3 個內角相同，所以 4 個內角的環狀排列只有 $\frac{4}{4}=1$ 種，如下圖左。



(左圖和右圖皆由第一作者和第二作者共同製作)。

(步驟 4)上圖左中，延長$\overline{AD}$，做$\overline{DE}\perp\overline{BC}$於 E，得出上圖右。設$\overline{AE}=\overline{BE}=x$，$\overline{CE}=\overline{DE}=y$，其中 x、y = 1、2、$\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$或以上 4 個數相加或相減的值且 $x>y$。

由【定義 1】仿[2]的假設，可用面積列式得 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=(2\sqrt{2})^2$，即 $x^2+y^2=16$ ④。

因 $x>y$，得 $x^2>y^2$，推出 $2x^2>x^2+y^2$ ⑤

④代⑤： $2x^2>16$，即 $x^2>8$，得 $x>2\sqrt{2}\approx 2.828$。

因 $x^2<x^2+y^2$，由④得 $x^2<16$，即 $x<4$。

由上可知： $2\sqrt{2}<x<4$。

又 x = 1、2、$\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$或以上 4 個數相加或相減的值，得 $x=3$ ⑥。

⑥代④，可列出下表求出 $y=\sqrt{7}$。因為求出的 y 值都不是 1、2、$\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$或這四個數相加或相減的值，可知此情形無解。

三、七巧板拼凹五邊形的圖形 (節錄)

1.若(d，e，f) = (1，0，0)，可得

【假設 1】(E1)： $a+b+c+1+0+0=5$，即 $a+b+c=4$ ①

【假設 1】(E2)： $a+2b+3c+5+0+0=20-8$，即 $a+2b+3c=7$ ②

②−①： $b+2c=3$，因 b、c 是非負整數，得(b，c) = (3，0)或(1，1)

(1)若(b，c) = (3，0) ③

③代①： $a=1$，則(a，b，c) = (1，3，0)。

由(n，a，b，c，d，e，f) = (5，1，3，0，1，0，0)，

可知拼出的圖形是凹五邊形，

其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數分別有 1、3、0、1、0、0 個。

(2)若(b，c) = (1，1) ④

④代①：$a=2$，則(a，b，c) = (2，1，1)。

由(n，a，b，c，d，e，f) = (5，2，1，1，1，0，0)，

可知拼出圖形是凹五邊形，其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數分別有 2、1、1、1、0、0 個。

四、七巧板拼凹六邊形的圖形(節錄)

1.若(d，e，f) = (1，0，0)，可得

【假設 1】(E1)： $a+b+c+1+0+0=6$，即 $a+b+c=5$ ①

【假設 1】(E2)： $a+2b+3c+5+0+0=24-8$，即 $a+2b+3c=11$ ②

②−①： $b+2c=6$，因 b、c 是非負整數，得(b，c) = (4，1)或(2，2)或(0，3)

(1)若(b，c) = (4，1) ③

③代①： $a=0$

則(a，b，c) = (0，4，1)。

由(a，b，c，d，e，f) = (0，4，1，1，0，0)，

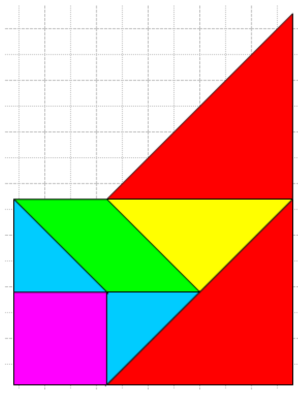
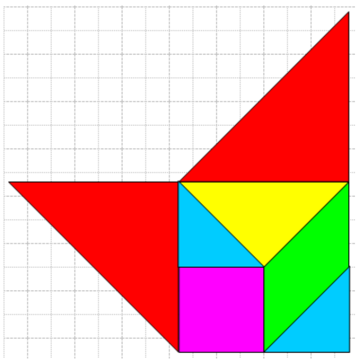
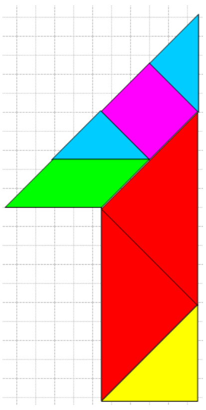
可知拼出的圖形是凹六邊形，其中內角 45º、90º、135º、225º、270º、315º 的個數分別有 0、4、1、1、0、0 個。

五、用 Excel 驗證凹四至凹六邊形可能解的情形

2.當 $n = 5$ 時，

我們將圖形拼出來之後給予編號，例如：圖的編號用 5-1 來表示 $n = 5$ 的第一個情況。分三種討論，計算 5 種情形的拼法。

表 1(圖 5-1~5-5 皆由第一作者和第二作者共同製作)

圖號	5-1	5-2	5-3
解	(a，b，c，d，e，f) = (1，3，0，1，0，0)	(2，1，1，1，0，0)	(2，2，0，0，1，0)
拼法			

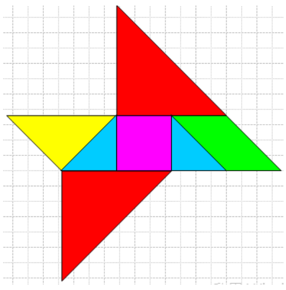
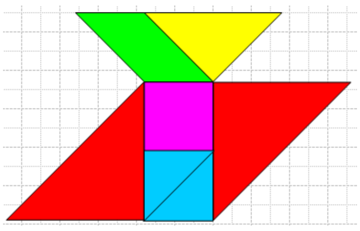
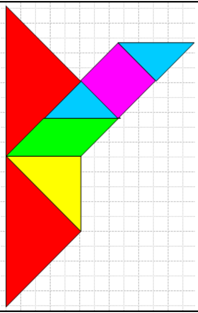
六、用 Python 程式找出凹多邊形可能解的情形數

為了更有效，我們使用附錄所列的 Python 程式，去找出凹多邊形可能解的情形數。

使用程式 python 得到 $n = 3$~6 時，結果和前面相同。下面列出 $n \geq 7$ 的情形：

1.當 $n = 7$ 時，計算 23 種情形的拼法。

表 3(圖 7-1~7-23 皆由第一作者和第二作者共同製作)

圖號	7-1	7-2	7-3
拼法			

3.目前凹多邊形的拼法解數表

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
拼法解數	1	5	14	23	41	58	89	118	166	212	284	≥1	≥1	≥1

肆、研究結果(參考報告內容)

伍、討論

一、尚未找到拼法的情形，如圖 8-11。可以仿照 $n = 4$ 的方法，試著找出拼法。

陸、參考文獻資料

1. (1942) Wang, Fu-Traing(王福春) and Hsiung, Chuan-Chih(熊全治), A Theorem on the Tangram, The American Mathematical Monthly, Nov., 1942, Vol. 49, No. 9, pp. 596-599.
2. (1986)李明章、張榮貴，七巧板與多邊形，全國第 26 屆科展國中組數學 4304。
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/26/pdf/26m/110.pdf
3. (2011)董孟雄，七巧板能拼出多少种凸多边形，中学教研(数学) 9, 32-34。
https://m.fx361.com/news/2011/1127/17565253.html
4. (2015)許紹禹、陳彥宇、蔡維哲，七巧板之巧趣，金門第 55 屆科展國中組數學。
https://science.km.edu.tw/exhibitions?name=4&grade=2&group=1&unit=