中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

佳作

030402

形心與多個外接圓建構的幾何性質

學校名稱： 新北市立文山國民中學

作者：	指導老師：
國二 李昀諺 國二 楊皓宇 國二 馬昇勳	蕭偉智

關鍵詞： 等腰、形心、等角結構

形心與多個外接圓建構的幾何性質

摘要

2023 年 9 月數學雜誌《Crux Mathematicorum》刊登有趣的三角形內心的幾何問題，我們先證明了原命題的長度性質，再創新刻劃出有趣的面積不變量。隨後將內心推廣到旁心、垂心與外心的建構，並且證明僅此四心的建構下才有長度與面積不變量。值得一提的是，除了前述的定量項目外，我們也發現四種建構下的三線共點之定性性質，同時刻劃四種建構的關聯性是漂亮的等角結構，這是本研究亮點。推廣到多邊形，我們發現本質的幾何結構為截線的角平分線性質（內心與旁心的結合），從而將此問題轉換成一般性問題，並給出了豐富的等長、等角、等面積之性質，以及連線多邊形恆為圓外切多邊形。

壹、 前言

一、 研究動機與文獻探討

Pericles Papadopoulos 在 2023 年 9 月的數學雜誌《Crux Mathematicorum》提出一個有趣的三角形幾何問題 [1]，如下所示（註：本研究所有圖片皆為作者用 GSP 繪製）。

Let I be the incenter of a triangle ABC and let D_A, D_B, and D_C be the points of contact of the incircle of the triangle with the side BC, AC and AB respectively.

The circle AIB meets the sides BC and AC at points A_1 and B_2 respectively; the circle AIC meets the sides BC and AB at points A_2 and C_1 respectively; the circle BIC meets the sides AC and AB at points B_1 and C_2, respectively. Prove the following:

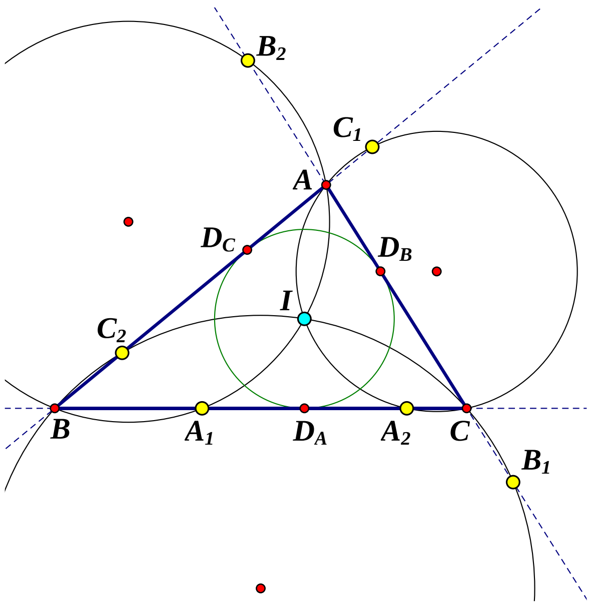


圖 1：原始問題

(a) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + AC$

(b) Points D_A, D_B and D_C are the midpoints of A_1A_2, B_1B_2 and C_1C_2 respectively.

原題於 2024 年 2 月公告徵答結果 [2]，他們先用全等三角形證明了第 2 小題的中點，再利用此結果證明第 1 小題，這樣的方式無法看出此題的等腰性質，也無法推廣。

事實上，解答公布的前三個月，我們已用更好的方法完成了原題的證明，並且給出幾何結構本質以及給出更多發現。此外，我們不僅發現原始建構除了以上兩個性質外，還有存在三角形面積不變量。我們將內心換成其他形心，例如換成垂心構圖，也發現有趣的長度性質。這引發我們的研究興趣，這些構圖中還有其他有趣的性質嗎？除了內心與垂心，還有其他的形心與三個外接圓所建構的圖形有類似的性質嗎？

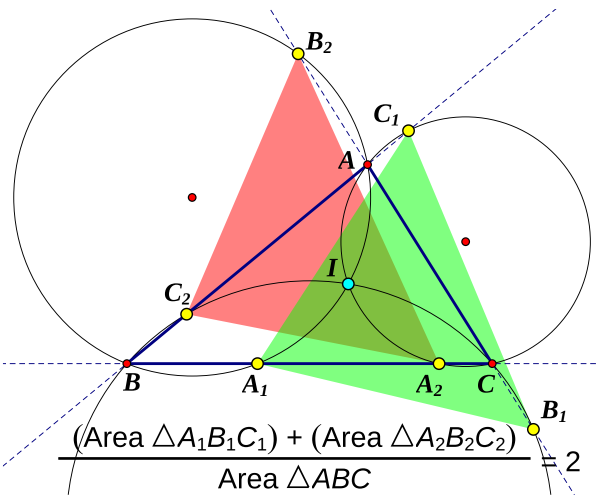


圖 2：內心建構的兩三角形面積不變量

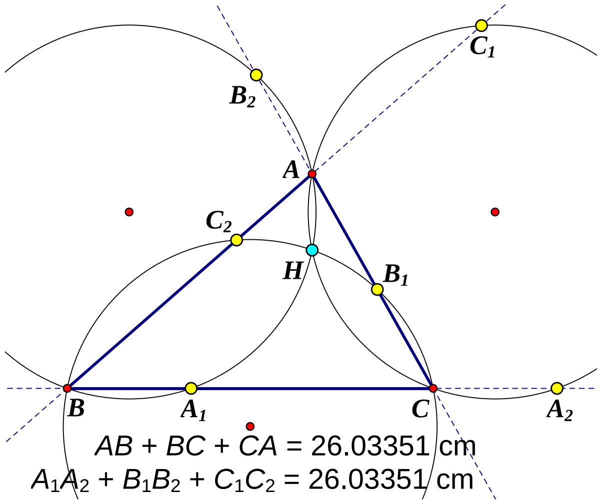


圖 3：垂心建構的長度性質

更有趣的是，由 $\triangle ABC$ 形心與頂點 A、B、C 構造的三角形的三個外接圓心 O_A、O_B、O_C，我們發現無論是內心或垂心建構下的 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點。

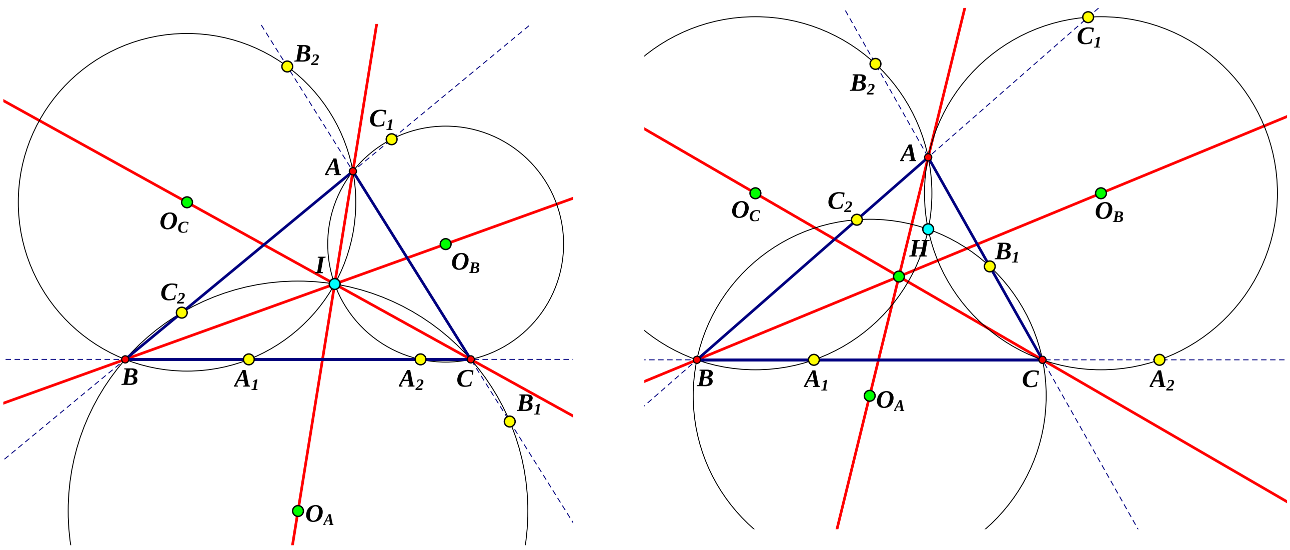


圖 4：三線共點性質

本研究除了將三角形進行完整探討外，嘗試推廣到「內有心的任意多邊形」，我們同樣鎖定線段的長度、多邊形的面積的定量性質，以及共線的定性性質進行深入研究。

二、 研究目的

（一） 對於任意三角形，探討由給定形心與三個外接圓所建構的幾何性質。

1. 第一種建構：刻劃內心 I 點條件建構下的幾何性質。
2. 第二種建構：刻劃旁心 J_A、J_B、J_C 點條件建構下的幾何性質。
3. 第三種建構：刻劃垂心 H 點條件建構下的幾何性質。
4. 第四種建構：刻劃外心 O 點條件建構下的幾何性質。
5. 探討前述四種建構的幾何關連性。

（二） 對於任意圓外切四邊形，探討由給定內心與四個外接圓所建構的幾何性質。

（三） 對於任意圓外切 n 邊形，探討由給定內心與 n 個外接圓所建構的幾何性質。

貳、 研究設備與器材

幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0、Wolfram Mathematica 12.3

參、 預備知識

本文約定 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=a$、$\overline{AC}=b$、$\overline{AB}=c$、$s=\frac{a+b+c}{2}$。

預備性質 1. (內心與旁心常見性質) $\triangle ABC$ 的內切圓 I 分別切 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 於 D_A、D_B 與 D_C 點。$\overline{AC}$ 的外側旁心為 J_B，則

(1) $\overline{AD_B}=\overline{AD_C}=s-a$，$\overline{BD_C}=\overline{BD_A}=s-b$，$\overline{CD_A}=\overline{CD_B}=s-c$。

(2) $\angle BIC=90°+\frac{\angle A}{2}$，$\angle CIA=90°+\frac{\angle B}{2}$，$\angle AIB=90°+\frac{\angle C}{2}$。

(3) I、A、C、J_B 四點共圓，其餘兩個旁心 J_A 與 J_C 同理。

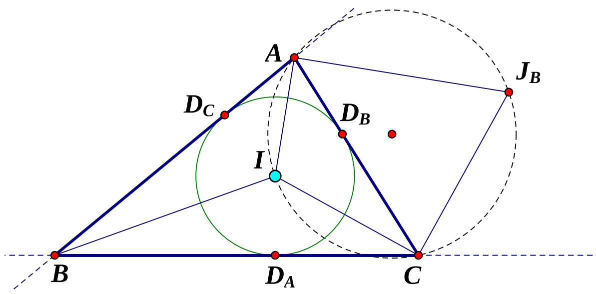


圖 5：內心常見性質

預備性質 2. (垂心常見性質) $\triangle ABC$ 的垂心為 H 點，則

(1) $\angle BHC = 180° - \angle A$，$\angle CHA = 180° - \angle B$，$\angle AHB = 180° - \angle C$。

(2) A、B、C、H 點組成一個垂心組，每個點都是另外三點組成的三角形的垂心。

(3) H_A 點是 H 點關於 $\overline{BC}$ 的對稱點，則 H_A 點落在 $\triangle ABC$ 的外接圓上，其餘兩點 H_B 與 H_C 同理。

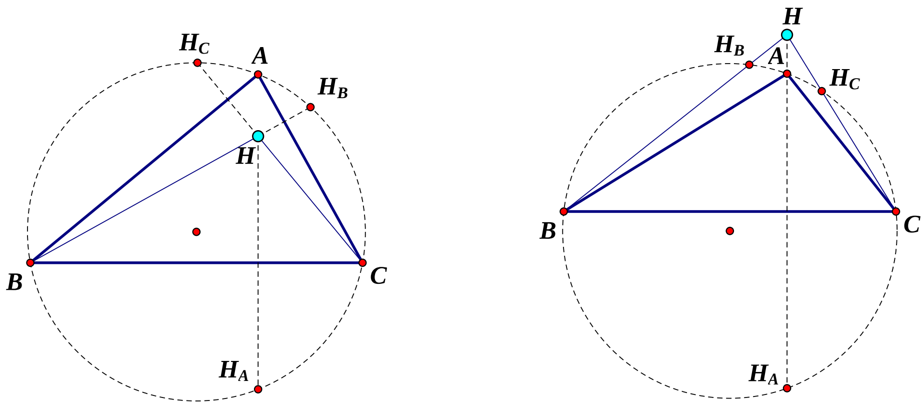


圖 6：垂心常見性質

預備性質 3. (測量師公式) 平面上封閉多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$ 的頂點坐標為 $P_k(x_k, y_k)$ 且頂點 P_1、P_2、P_3、…、P_n 為逆時鐘，以 $[P_1P_2P_3 \dots P_n]$ 表示其有向面積，有向面積公式為

$$[P_1P_2P_3 \dots P_n] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix}$$，其中 $x_{n+k} = x_k$、$y_{n+k} = y_k$。

預備性質 4. (行列式基本運算性質)

(1) $\begin{vmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & g \\ f & h \end{vmatrix}$。

(2) 行列式的級數和 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \begin{vmatrix} x_k & x_{k+m} \\ y_k & y_{k+m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_{k+h}\begin{vmatrix} x_{k+h} & x_{k+m+h} \\ y_{k+h} & y_{k+m+h} \end{vmatrix}$。

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$、$h = 1, 2, 3, \dots, n$。

預備性質 5. (西瓦定理與逆定理)

$\triangle ABC$ 所在平面上有一點 P，若 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 於 D、E、F 點，若且唯若 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$ 或角度形式 $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} \times \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \times \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = 1$。

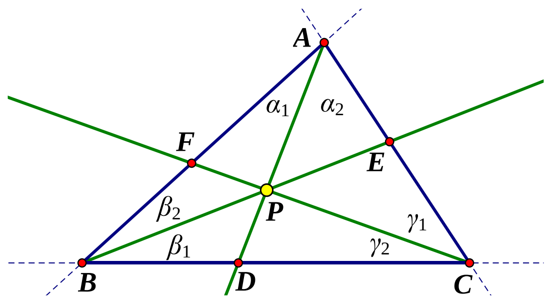


圖 7：西瓦定理與逆定理

肆、　研究過程與結果

一、 對於任意三角形，由給定形心與三個外接圓所建構的幾何性質

不失一般性，我們約定本研究 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} > \overline{AB} > \overline{AC}$。

（一） 三角形的第一種建構：內心 I 點

性質 1：在內心建構下，長度 $\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$。

證明：

1. 如圖，因為 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$，再考慮 B、I、C、B_1 四點共圓，可得 $\angle CB_1B = 180° - \angle BIC = 90° - \frac{\angle A}{2}$。在 $\triangle ABB_1$ 中，$\angle ABB_1 = 180° - \angle A - \angle AB_1B = 180° - \angle A - \left(90° - \frac{\angle A}{2}\right) = 90° - \frac{\angle A}{2}$，所以 $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$。

2. 因為 $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$，所以 $\frac{\widehat{C_2IB_1}}{2} = \frac{\widehat{CIB}}{2}$，再得 $\widehat{BC_2} = \widehat{CB_1}$，因此 $\overline{BC_2} = \overline{CB_1}$，同理我們可以得出 $\overline{AC_1} = \overline{CA_2}$ 以及 $\overline{AB_2} = \overline{BA_1}$。

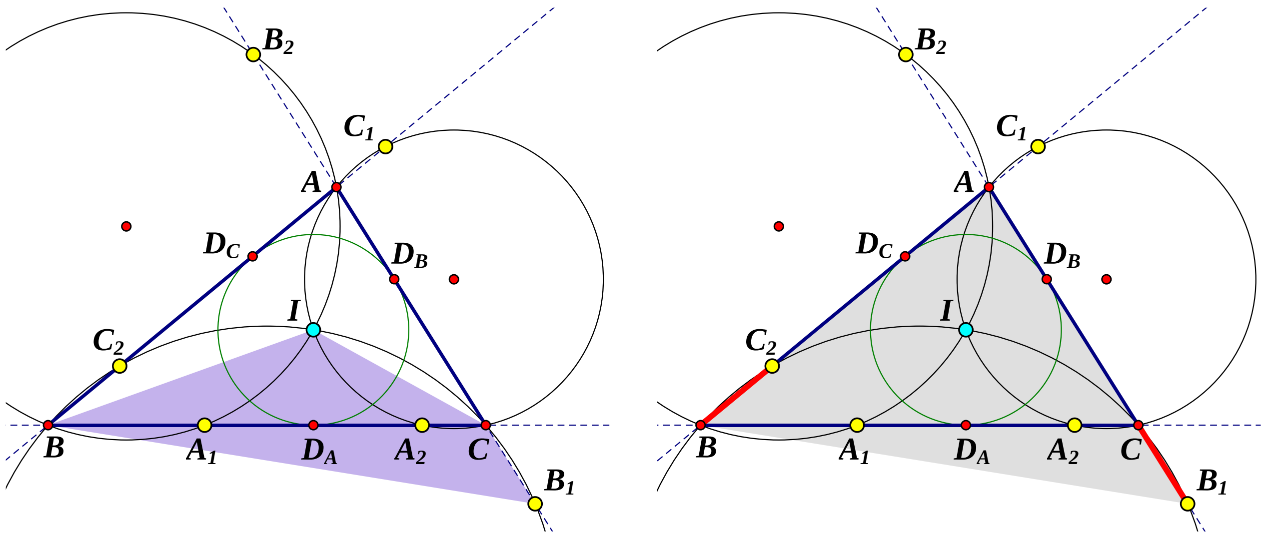


圖 8：等腰三角形

3. $$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} &= (\overline{BC} - \overline{BA_1} - \overline{CA_2}) + (\overline{AC} + \overline{CB_1} + \overline{AB_2}) + (\overline{AB} - \overline{BC_2} + \overline{AC_1}) \\ &= (\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}) + (\overline{AB_2} - \overline{BA_1}) + (\overline{AC_1} - \overline{CA_2}) + (\overline{CB_1} - \overline{BC_2}) \\ &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\end{aligned}$$

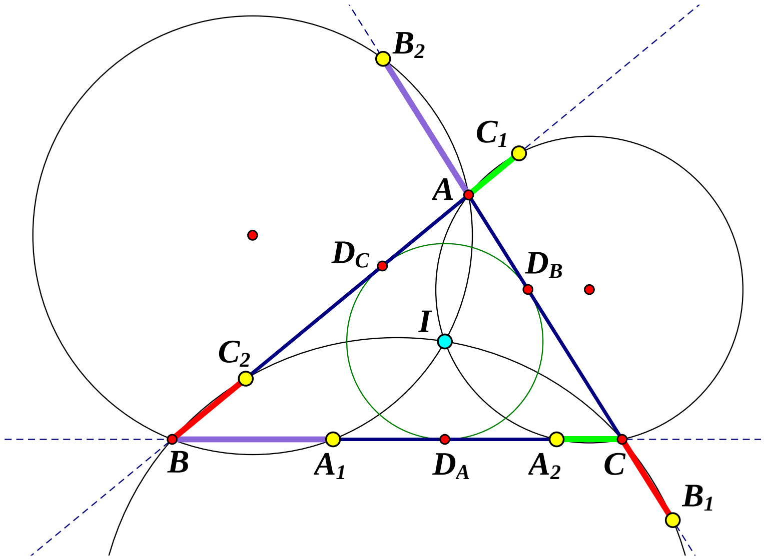


圖 9：長度不變量（內心）

■

在內心條件建構下的中點性質很漂亮，其長度恰好為內切圓與三邊的切線段長度。

性質 2：在內心建構下，D_A、D_B 與 D_C 分別是 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{C_1C_2}$ 的中點。

證明：

由性質 1 可知，$\overline{CB}=\overline{CB_2}$ 且 $\overline{BA_1}=\overline{AB_2}$，所以 $\overline{BA_1}=\overline{AB_2}=\overline{CB}-\overline{CA}=a-b$。$\overline{BC}=\overline{BC_1}$ 且 $\overline{CA_2}=\overline{AC_1}$，所以 $\overline{CA_2}=\overline{AC_1}=\overline{BC}-\overline{BA}=a-c$。因為 D_A 點為 $\triangle ABC$ 的內切圓與 $\overline{BC}$ 的切點，根據切線段等長性質可得 $\overline{BD_A}=s-b$ 且 $\overline{CD_A}=s-c$，$\overline{A_1D_A}=s-b-(a-b)=s-a$ 且 $\overline{A_2D_A}=s-c-(a-c)=s-a$，故 D_A 是 $\overline{A_1A_2}$ 的中點，其餘兩點 D_B 與 D_C 同理可證 $\overline{B_1D_B}=\overline{B_2D_B}=s-b$ 與 $\overline{C_1D_C}=\overline{C_2D_C}=s-c$。

■

繼續觀察圖中是否還有其他長度性質？我們發現 $\overline{IA}=\overline{IA_1}=\overline{IA_2}$、$\overline{IB}=\overline{IB_1}=\overline{IB_2}$、$\overline{IC}=\overline{IC_1}=\overline{IC_2}$。換句話說，內心 I 點是 $\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 的外心。

性質 3：內心 I 點是 $\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 的外心。

證明：

根據性質 2 可得 $\overline{A_1D_A}=\overline{A_2D_A}=\overline{AD_B}=\overline{AD_C}=s-a$，又 $\overline{ID_A}=\overline{ID_B}$（內切圓半徑），因此 $\triangle IA_1D_A\cong\triangle IAD_B$（SAS 全等），可得 $\overline{IA}=\overline{IA_1}$。又 $\overline{ID_A}$ 垂直平分 $\overline{A_1A_2}$，可得 $\overline{IA_1}=\overline{IA_2}$，故 I 點是 $\triangle AA_1A_2$ 的外心。同理，I 點也是 $\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 的外心。

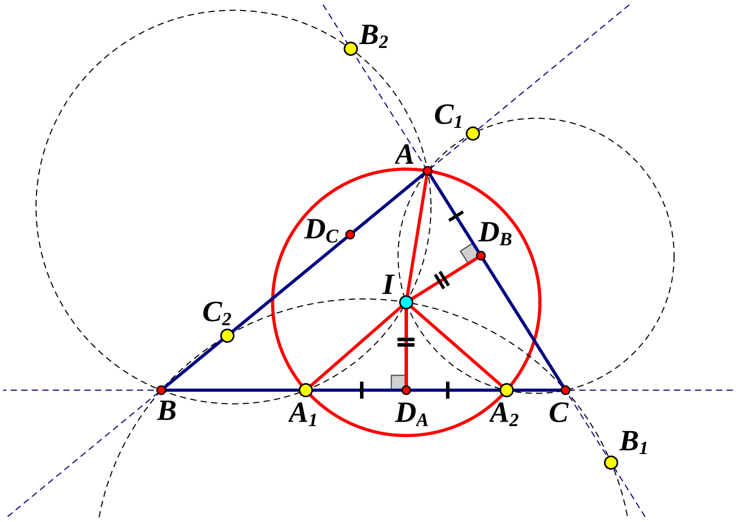
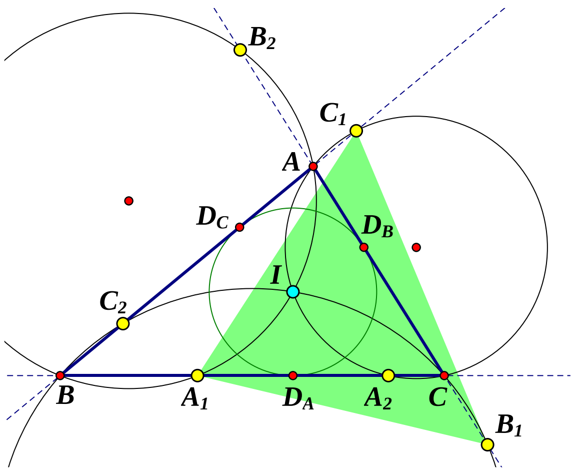


圖 10：I 點是 $\triangle AA_1A_2$ 的外心

證明完原本問題後，我們還發現了另外一個較不直觀，但是令人驚喜的面積不變量。因為構造出六個點 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2，我們再分別將三個點連線形成 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$。這兩個 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 雖然沒有全等，也沒有相似，但是我們發現了 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面積加上 $\triangle A_2B_2C_2$ 恆為 $\triangle ABC$ 的面積之兩倍，也就是 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle ABC$、$\triangle A_2B_2C_2$ 的面積「成等差」。以下為了方便表示面積，因為符號 $[P_1P_2 \ldots P_n]$ 表示平面上封閉的 n 邊形 $P_1P_2 \ldots P_n$ 的有向面積，於是約定符號 $S_{P_1P_2 \ldots P_n}$ 表示平面上封閉的 n 邊形 $P_1P_2 \ldots P_n$ 的面積。



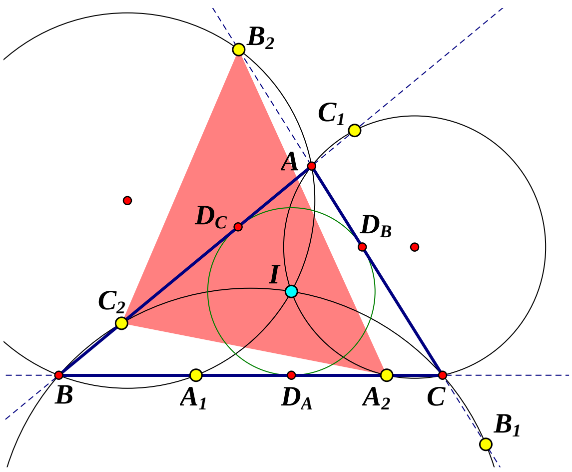


圖 11：構造兩個新的三角形

我們先證明以下重要的面積比值引理，在 $\triangle ABC$ 三邊與其延長線上分別取分割點 D、E、F，滿足 $\overrightarrow{AD} = \lambda_1\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE} = \lambda_2\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF} = \lambda_3\overrightarrow{CA}$，其中 λ_1、λ_2、λ_3 為實數。

引理 4：有向面積比值 $\frac{[DEF]}{[ABC]}=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+1$。

證明：

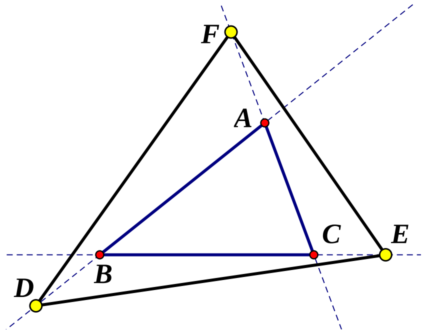


圖 12：分點三角形

1. 令 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，有 D、E、F 點滿足 $\overrightarrow{AD}=\lambda_1\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}=\lambda_2\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CF}=\lambda_3\overrightarrow{CA}$，其中 λ_1、λ_2、λ_3 為實數，則可得出坐標 $D\big(x_1+\lambda_1(x_2-x_1),y_1+\lambda_1(y_2-y_1)\big)$、$E\big(x_2+\lambda_2(x_3-x_2),y_2+\lambda_2(y_3-y_2)\big)$、$F\big(x_3+\lambda_3(x_1-x_3),y_3+\lambda_3(y_1-y_3)\big)$。

2. 約定 $x_{k+3}=x_k$、$y_{k+3}=y_k$、$\lambda_{k+3}=\lambda_k$，計算有向面積

$$2[DEF]=\sum_{k=1}^{3}\begin{vmatrix}x_k+\lambda_k(x_{k+1}-x_k) & x_{k+1}+\lambda_{k+1}(x_{k+2}-x_{k+1})\\ y_k+\lambda_k(y_{k+1}-y_k) & y_{k+1}+\lambda_{k+1}(y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}$$

$$=\textstyle\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_k & \lambda_{k+1}(x_{k+2}-x_{k+1})\\ y_k & \lambda_{k+1}(y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_k(x_{k+1}-x_k) & x_{k+1}\\ \lambda_k(y_{k+1}-y_k) & y_{k+1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_k(x_{k+1}-x_k) & \lambda_{k+1}(x_{k+2}-x_{k+1})\\ \lambda_k(y_{k+1}-y_k) & \lambda_{k+1}(y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}\right).$$

$$=\textstyle\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}+\lambda_{k+1}\begin{vmatrix}x_k & (x_{k+2}-x_{k+1})\\ y_k & (y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}+\lambda_k\begin{vmatrix}(x_{k+1}-x_k) & x_{k+1}\\ (y_{k+1}-y_k) & y_{k+1}\end{vmatrix}+\lambda_k\lambda_{k+1}\begin{vmatrix}(x_{k+1}-x_k) & (x_{k+2}-x_{k+1})\\ (y_{k+1}-y_k) & (y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}\right).$$

$$=\textstyle\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}+\lambda_k\begin{vmatrix}x_{k+2} & (x_{k+1}-x_k)\\ y_{k+2} & (y_{k+1}-y_k)\end{vmatrix}+\lambda_k\begin{vmatrix}(x_{k+1}-x_k) & x_{k+1}\\ (y_{k+1}-y_k) & y_{k+1}\end{vmatrix}+\lambda_k\lambda_{k+1}\begin{vmatrix}(x_{k+1}-x_k) & (x_{k+2}-x_{k+1})\\ (y_{k+1}-y_k) & (y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}\right).$$

$$=\textstyle\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}+\lambda_k\begin{vmatrix}(x_{k+2}-x_{k+1}) & (x_{k+1}-x_k)\\ (y_{k+2}-y_{k+1}) & (y_{k+1}-y_k)\end{vmatrix}+\lambda_k\lambda_{k+1}\begin{vmatrix}(x_{k+1}-x_k) & (x_{k+2}-x_{k+1})\\ (y_{k+1}-y_k) & (y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}\right).$$

3. 注意到 $\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}(x_{k+1}-x_k) & (x_{k+2}-x_{k+1})\\ (y_{k+1}-y_k) & (y_{k+2}-y_{k+1})\end{vmatrix}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}x_{k+1} & x_{k+2}\\ y_{k+1} & y_{k+2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-x_k & x_{k+2}\\ -y_k & y_{k+2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{k+1} & x_{k+2}\\ y_{k+1} & y_{k+2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_{k+2} & x_k\\ y_{k+2} & y_k\end{vmatrix}\right)=2[ABC]$，代入前式得 $2[DEF]=2[ABC]+2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)[ABC]-2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)[ABC]$，故有向面積比值 $\frac{[DEF]}{[ABC]}=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+1$ ■

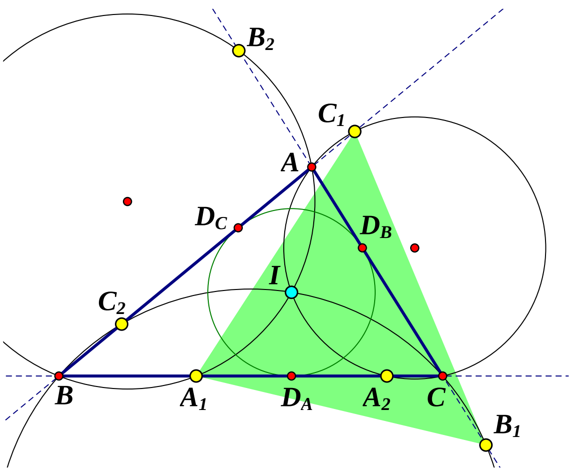
性質 5：在內心建構下，面積不變量

（1）$S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} = 2 \times S_{ABC}$

（2）$S_{A_1B_1C_1} - S_{A_2B_2C_2} = \frac{2(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \times S_{ABC}$

證明：

根據性質 2 得知 $\overrightarrow{AC_1} = \frac{c-a}{c} \times \overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA_1} = \frac{a-b}{a} \times \overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB_1} = \frac{b-c}{b} \times \overrightarrow{CA}$，代入引理 4 得出有向面積 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{(c-a)(a-b)}{ca} + \frac{(a-b)(b-c)}{ab} + \frac{(b-c)(c-a)}{bc} - \left(\frac{c-a}{c} + \frac{a-b}{a} + \frac{b-c}{b}\right) + 1 = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} + 1$。再考慮 $\overrightarrow{AC_2} = \frac{b}{c} \times \overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA_2} = \frac{c}{a} \times \overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB_2} = \frac{a}{b} \times \overrightarrow{CA}$，同理可得 $\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} + 1$，又三組頂點 A、B、C 與 A_1、B_1、C_1 與 A_2、B_2、C_2 排列為逆時鐘，所以 $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} + \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \left(\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} + 1\right) + \left(-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} + 1\right) = 2$，因此面積 $S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} = 2 \times S_{ABC}$。相減則可得出面積 $S_{A_1B_1C_1} - S_{A_2B_2C_2} = \frac{2(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \times S_{ABC}$。



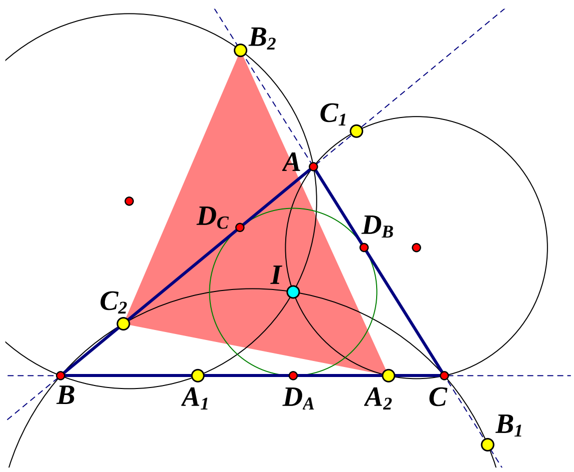


圖 13：三角形面積成等差數列（內心）

■

（二） 三角形的第二種建構：旁心 J_A、J_B、J_C 點

我們在內心的證明過程中，發現形心建構的角是一種「可輪換的角度」，這是本研究圖形的根本結構，例如：$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$。因此我們將內心換成同樣具有定角性質的旁心、垂心與外心。

將起始點的 $\triangle ABC$ 的內心換成三個旁心 J_A、J_B 與 J_C，根據預備性質 1，我們知道內心 I 與 B、C 的外接圓和旁心 J_A 與 B、C 的外接圓是相同的，其餘兩邊同理。因此由旁心與三個外接圓建構的幾何性質與前面的內心第一種建構相同，我們就省略此部分的證明，旁心與三個外接圓建構的線段必滿足 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$。

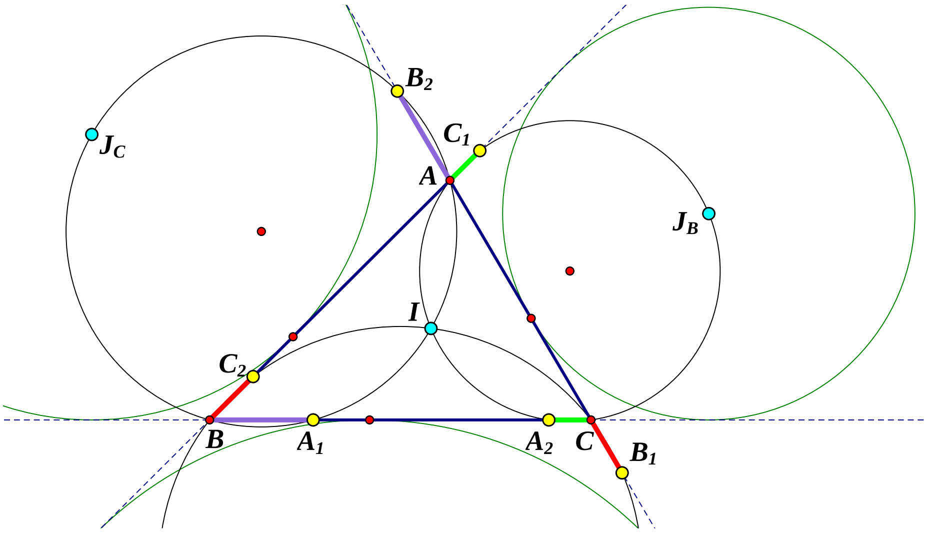


圖 14：旁心與三個外接圓

（三） 三角形的第三種建構：垂心 H 點

引理 6：一個垂心組的四點構成四個三角形的外接圓之半徑等長。

證明：

根據預備性質 2，A、B、C、H 點組成一個垂心組，每個點都是另外三點組成的三角形的垂心。考慮 $\triangle ABH$，其垂心為 C 點，再作 C 點關於 $\overline{AB}$ 的對稱點 C'，因為 $\angle AHB=180°-\angle C$ 且 $\angle C'=\angle C$，因此點 C' 會落在 $\triangle ABH$ 的外接圓上，又 $\triangle ABC'\cong\triangle ABC$，所以 $\triangle ABC'$ 的外接圓與 $\triangle ABC$ 的外接圓之半徑等長，即 $\triangle ABH$ 的外接圓與 $\triangle ABC$ 的外接圓之半徑等長。同理可得 $\triangle BCH$ 的外接圓與 $\triangle CAH$ 的外接圓之情形。

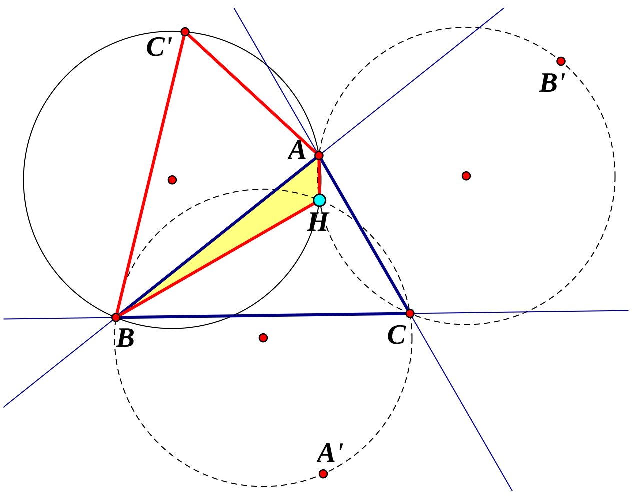


圖 15：垂心組的外接圓

■

性質 7：在垂心條件的建構下，長度 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$。

證明：

如圖，H 點為 $\triangle ABC$ 的垂心，根據預備性質 2 可得 $\angle AHC=180^\circ-\angle B$，考慮 A、H、C、A_2 四點共圓，$\angle AHC=180^\circ-\angle AA_2C$，再得 $\angle AA_2C=\angle B$，因此 $\triangle AA_2B$ 為等腰三角形。根據前面引理 $\triangle ABH$ 的外接圓與 $\triangle ACH$ 的外接圓為等圓，又 $\angle B=\angle AA_2C$，所以等弧的兩條弦 $\overline{AA_1}=\overline{AC}$，得出 $\triangle AA_1C$ 為等腰三角形。在 $\triangle ABA_1$ 與 $\triangle AA_2C$ 中，$\angle AA_1B=\angle ACA_2$、$\overline{AA_1}=\overline{AC}$、$\overline{AB}=\overline{AA_2}$，可得 $\triangle ABA_1\cong\triangle AA_2C$，因此 $\overline{BA_1}=\overline{CA_2}$，同理可得 $\overline{CB_1}=\overline{AB_2}$ 以及 $\overline{AC_1}=\overline{BC_2}$，故 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$。

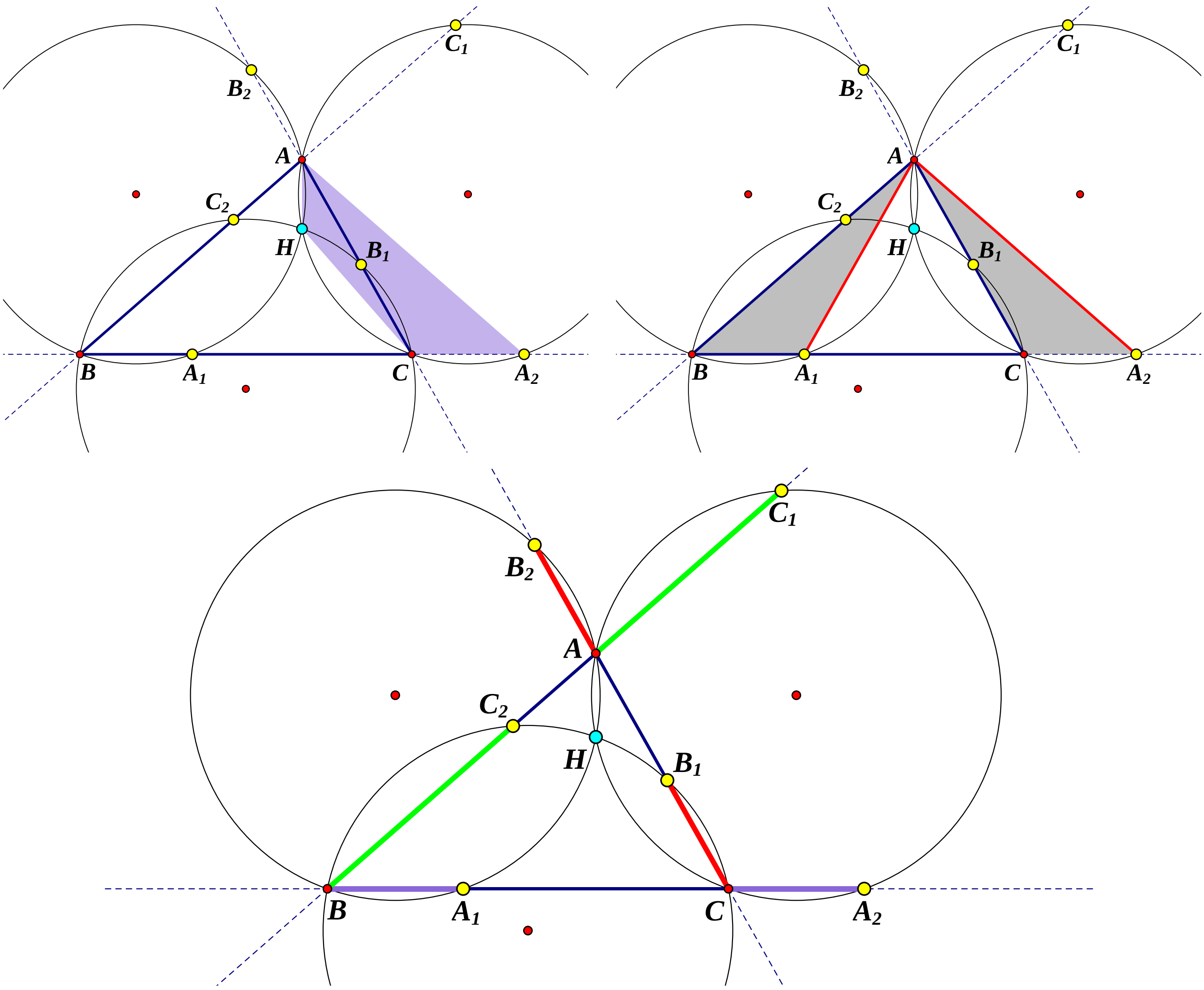


圖 16：長度不變量（垂心）

■

我們接下來關注在垂心條件的建構下的 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面積不變量，結果很漂亮，其面積被 $\triangle ABC$ 三邊邊長所決定。

性質 8：對於銳角 $\triangle ABC$，在垂心條件的建構下，面積不變量

（1）$S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=\dfrac{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}\times S_{ABC}$。

（2）$S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=\dfrac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\times S_{ABC}$

證明：

1. 根據性質 7 我們可得 $\overline{BA_1}=\overline{CA_2}$、$\overline{CB_1}=\overline{AB_2}$、$\overline{AC_1}=\overline{BC_2}$，以及 $\triangle ABA_2$、$\triangle BCB_2$、$\triangle CAC_2$ 為等腰三角形。在等腰 $\triangle ABA_2$ 中，根據正弦定理 $\frac{\overline{AA_2}}{\sin\angle B}=\frac{\overline{BA_2}}{\sin\angle BAA_2}$，再得 $\frac{c}{\sin\angle B}=\frac{a+\overline{CA_2}}{\sin(180°-2\angle B)}=\frac{a+\overline{CA_2}}{\sin 2\angle B}$，利用二倍角公式化簡可得 $\overline{CA_2}=2c\cos\angle B-a$。同理可得 $\frac{a}{\sin\angle C}=\frac{b+\overline{AB_2}}{\sin(180°-2\angle C)}$，化簡後 $\overline{AB_2}=2a\cos\angle C-b$；以及 $\frac{b}{\sin\angle A}=\frac{c-\overline{BC_2}}{\sin(180°-2\angle A)}$，化簡後 $\overline{BC_2}=-2b\cos\angle A+c$。

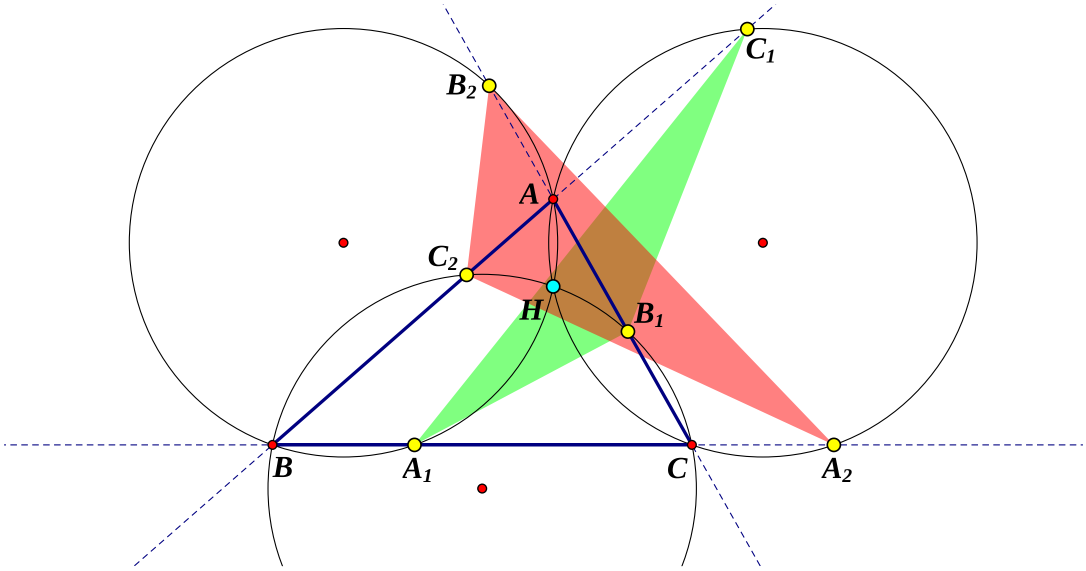


圖 17：三角形面積不變量（銳角垂心）

2. 考慮在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{AC_1}=\frac{2b\cos\angle A-c}{c}\times\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA_1}=\frac{2c\cos\angle B-a}{a}\times\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB_1}=\frac{2a\cos\angle C-b}{b}\times\overrightarrow{CA}$。在 $\triangle A_2B_2C_2$ 中，$\overrightarrow{AC_2}=\frac{2b\cos\angle A}{c}\times\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA_2}=\frac{2c\cos\angle B}{a}\times\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB_2}=\frac{2a\cos\angle C}{b}\times\overrightarrow{CA}$，利用餘弦定理代換為邊長 $\frac{2b\cos\angle A}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{c^2}$、$\frac{2c\cos\angle B}{a}=\frac{c^2+a^2-b^2}{a^2}$、$\frac{2a\cos\angle C}{b}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2}$，再分別代入引理 4，並且，最後化簡得出有向面積：

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]}+\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]}=\frac{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}.$$

$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} - \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \frac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}$.

3. 因為三組頂點 A、B、C 與 A_1、B_1、C_1 與 A_2、B_2、C_2 排列為逆時鐘，所以我們得出面積和的不變量 $\mathrm{S}_{A_1B_1C_1} + \mathrm{S}_{A_2B_2C_2} = \frac{2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2} \times \mathrm{S}_{ABC}$，以及面積差的不變量 $\mathrm{S}_{A_1B_1C_1} - \mathrm{S}_{A_2B_2C_2} = \frac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2} \times \mathrm{S}_{ABC}$。

■

推論 9：對於鈍角 $\triangle ABC$，在垂心條件的建構下，面積不變量

（1）$\mathrm{S}_{A_1B_1C_1} + \mathrm{S}_{A_2B_2C_2} = \frac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2} \times \mathrm{S}_{ABC}$。

（2）$\mathrm{S}_{A_1B_1C_1} - \mathrm{S}_{A_2B_2C_2} = \frac{-2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2} \times \mathrm{S}_{ABC}$。

證明：我們利用性質 8 得出的有向面積，因為頂點 A、B、C 與 A_2、B_2、C_2 排列為逆時鐘，但是 A_1、B_1、C_1 為順時鐘，所以我們得出面積和的不變量 $\mathrm{S}_{A_1B_1C_1} + \mathrm{S}_{A_2B_2C_2} = -[A_1B_1C_1] + [A_2B_2C_2] = \frac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2} \times \mathrm{S}_{ABC}$，以及面積差的不變量 $\mathrm{S}_{A_1B_1C_1} - \mathrm{S}_{A_2B_2C_2} = -[A_1B_1C_1] - [A_2B_2C_2] = \frac{-2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2} \times \mathrm{S}_{ABC}$。

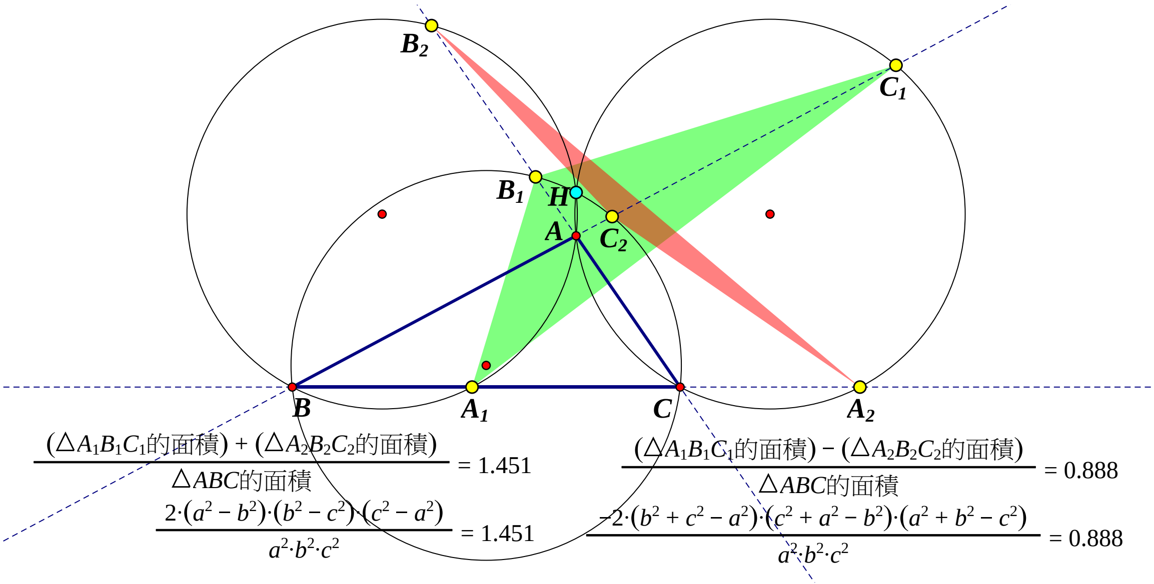


圖 18：三角形面積不變量（鈍角垂心）

■

（四） 三角形的第四種建構：外心 O 點

最後，我們探討第四種建構，在外心條件的建構下的 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面積不變量與 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}$ 長度不變量。

性質 10：對於銳角 $\triangle ABC$，在外心條件的建構下，面積不變量

（1）$S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$。

（2）$S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=\frac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$。

證明：

1. 如圖，因為 O 為外心，$\angle AC_1C=\angle AOC=2\angle B$，可得 $\angle C_1CB=2\angle B-\angle B=\angle B$，以及 $\triangle BCC_1$ 為等腰三角形（$\overline{C_1B}=\overline{C_1C}$），同理 $\triangle ABB_1$、$\triangle CAA_1$ 為等腰三角形。在等腰 $\triangle BCC_1$ 中，根據正弦定理 $\frac{\overline{BC_1}}{\sin\angle BCC_1}=\frac{\overline{BC_1}}{\sin\angle B}=\frac{\overline{BC}}{\sin\angle BC_1C}$，再得 $\frac{c-\overline{AC_1}}{\sin\angle B}=\frac{a}{\sin(180°-2\angle B)}=\frac{a}{\sin 2\angle B}$，利用兩倍角公式化簡可得 $\overline{AC_1}=c-\frac{a}{2\cos\angle B}$。同理可得 $\frac{c}{\sin 2\angle A}=\frac{b+\overline{CB_1}}{\sin\angle A}$，化簡後 $\overline{CB_1}=-\left(b-\frac{c}{2\cos\angle A}\right)$；以及 $\frac{b}{\sin 2\angle C}=\frac{a-\overline{BA_1}}{\sin\angle C}$，化簡後 $\overline{BA_1}=a-\frac{b}{2\cos\angle C}$。同樣方式，因為 $\triangle BAA_2$、$\triangle ACC_2$、$\triangle CBB_2$ 為等腰三角形，所以 $\overline{AC_2}=\frac{b}{2\cos\angle A}$、$\overline{BA_2}=\frac{c}{2\cos\angle B}$、$\overline{CB_2}=\frac{a}{2\cos\angle C}$。

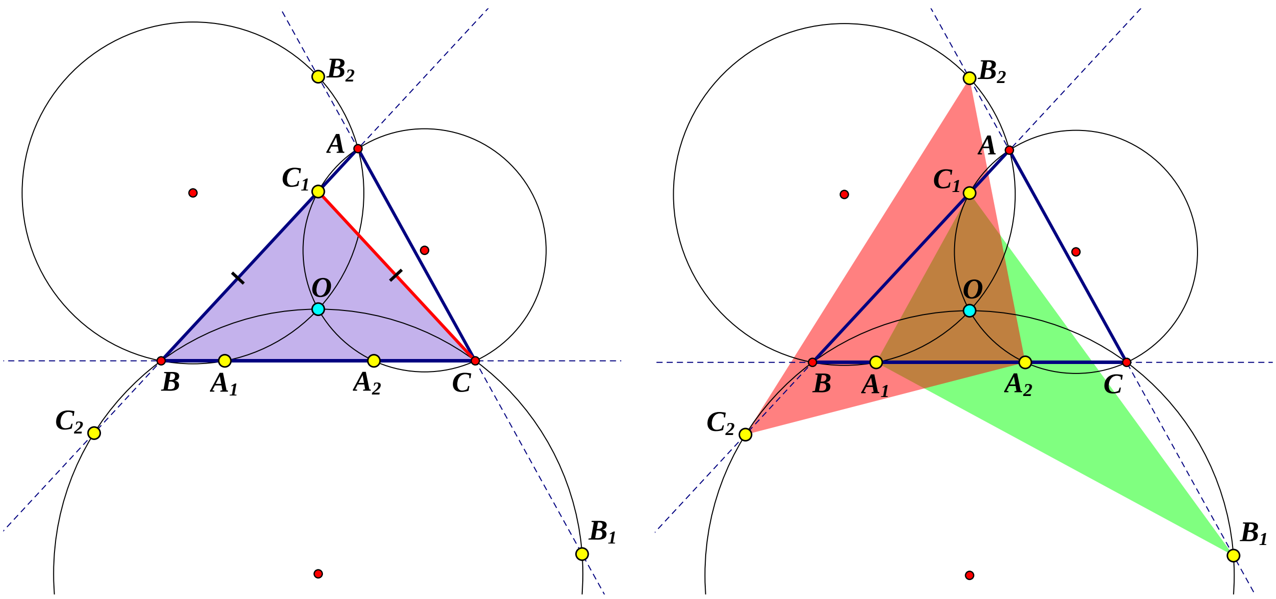


圖 19：三角形面積不變量（銳角外心）

2. 考慮在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\overrightarrow{AC_1}=\frac{c-\frac{a}{2\cos\angle B}}{c}\times\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA_1}=\frac{a-\frac{b}{2\cos\angle C}}{a}\times\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB_1}=\frac{b-\frac{c}{2\cos\angle A}}{b}\times\overrightarrow{CA}$。在 $\triangle A_2B_2C_2$ 中，$\overrightarrow{AC_2}=\frac{\frac{b}{2\cos\angle A}}{c}\times\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA_2}=\frac{\frac{c}{2\cos\angle B}}{a}\times\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB_2}=\frac{\frac{a}{2\cos\angle C}}{b}\times\overrightarrow{CA}$，利用餘弦定理代換為邊長，再分別代入引理 4，最後化簡得出有向面積：

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]}+\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]}=\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]}-\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]}=\frac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

3. 因為三組頂點 A、B、C 與 A_1、B_1、C_1 與 A_2、B_2、C_2 排列為逆時鐘，所以我們得出面積和的不變量 $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$，以及面積差的不變量$S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=\frac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$。

■

推論 11：對於鈍角 $\triangle ABC$，在外心條件的建構下，面積不變量

（1）$S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=\frac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$。

（2）$S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=\frac{-2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$。

證明：利用性質 10 得出有向面積，因為頂點 A、B、C 與 A_2、B_2、C_2 排列為逆時鐘，但是 A_1、B_1、C_1 為順時鐘，所以我們得出面積和的不變量 $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=-[A_1B_1C_1]+[A_2B_2C_2]=\frac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$，以及面積差的不變量 $S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=-[A_1B_1C_1]-[A_2B_2C_2]=\frac{-2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times S_{ABC}$。

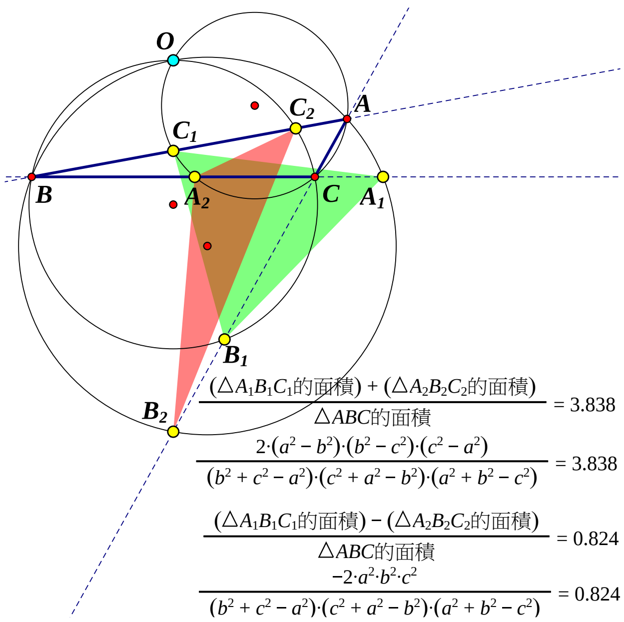


圖 20：三角形面積不變量（鈍角外心）

■

性質 12：（1）在外心條件的建構下，對於銳角 $\triangle ABC$，長度

$$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\frac{-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)+4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

（2）在外心條件的建構下，對於鈍角 $\triangle ABC$，長度

$$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)-4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

證明：

1. 透過性質 10 可得知對於銳角 $\triangle ABC$ 的外心條件建構下，$\overline{AC_1}=c-\frac{a}{2\cos\angle B}$、$\overline{AC_2}=\frac{b}{2\cos\angle A}$、$\overline{BA_1}=a-\frac{b}{2\cos\angle C}$、$\overline{BA_2}=\frac{c}{2\cos\angle B}$、$\overline{CB_1}=-\left(b-\frac{c}{2\cos\angle A}\right)$、$\overline{CB_2}=\frac{a}{2\cos\angle C}$，所以 $\overline{A_1A_2}=\frac{c}{2\cos\angle B}+\frac{b}{2\cos\angle C}-a=\frac{ac^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2}-a=\frac{a^3(b^2+c^2-a^2)}{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$，同理可得 $\overline{B_1B_2}=\frac{b^3\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}$、$\overline{C_1C_2}=\frac{b^3\left(c^2+a^2-b^2\right)^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$，$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\frac{a^3\left(b^2+c^2-a^2\right)^2+b^3\left(c^2+a^2-b^2\right)^2+c^3\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$。

2. 化簡 $(b^2+c^2-a^2)^2=((b+c)^2-a^2-2bc)^2.$

$$=((b+c)^2-a^2)\big(((b+c)^2-a^2)-4bc\big)+4b^2c^2.$$

$$=((b+c)^2-a^2)((b-c)^2-a^2)+4b^2c^2.$$

$$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)+4b^2c^2.$$

利用輪換性，可得 $(c^2+a^2-b^2)^2$、$(a^2+b^2-c^2)^2$ 的化簡情形

$$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\frac{-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)+4a^3b^2c^2+4a^2b^3c^2+4a^2b^2c^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

$$=\frac{-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)+4a^2b^2c^2(a+b+c)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

$$=\frac{-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)+4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times(a+b+c).$$

$$=\frac{-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)+4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}).$$

3. 用同樣方式討論對於鈍角 $\triangle ABC$ 的外心條件建構下的 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\left(a^3+b^3+c^3\right)-4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$。

■

（五） 三角形的四種建構下的「定性」性質：三線共點

我們分別討論了四種形心建構下的定量性質，包括長度 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}$、面積 $S_{A_1B_1C_1}\pm S_{A_2B_2C_2}$。接下來，把焦點放在這些構圖中的定性性質。在平面上，任取一點 P，作 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 的外接圓之圓心，分別為 O_C、O_A、O_B，我們觀察 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線不一定會共點。

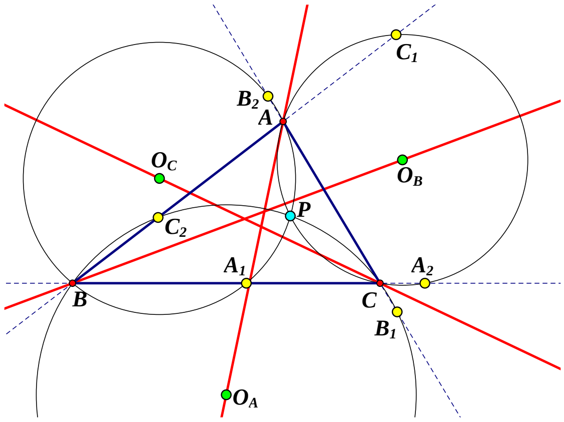


圖 21：任意 P 點構圖

然而，考慮形心 X 為條件建構，$\triangle XAB$、$\triangle XBC$、$\triangle XCA$ 的外接圓之圓心，分別為 O_C、O_A、O_B，我們卻發現美麗的結果，即 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點，其中 X 為內心 I、垂心 H 或外心 O。

我們先需要一個引理，$\triangle ABC$ 外部有一點 K 使得 $\triangle BKC$ 為等腰三角形，連接 $\overleftrightarrow{AK}$，令 $\angle BAK=\alpha_1$、$\angle CAK=\alpha_2$、$\angle BKC=\theta$。

引理 13：$\sin\alpha_1:\sin\alpha_2=\sin\left(B+90^\circ-\frac{\theta}{2}\right):\sin\left(C+90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$。

證明：在 $\triangle ABK$ 中，根據正弦定理有 $\sin\alpha_1:\sin\angle ABK=\overline{BK}:\overline{AK}$；同理，$\sin\alpha_2:\sin\angle ACK=\overline{CK}:\overline{AK}$。又 $\overline{BK}=\overline{CK}$，所以 $\sin\alpha_1:\sin\alpha_2=\sin\angle ABK:\sin\angle ACK=\sin\left(B+90^\circ-\frac{\theta}{2}\right):\sin\left(C+90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$。

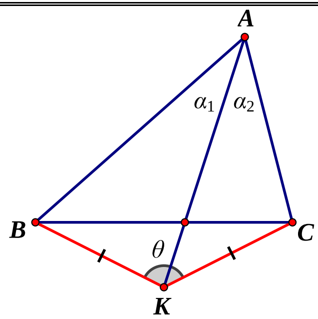


圖 22：正弦比例

■

性質 14：在形心 X 條件的建構下，$\triangle XAB$、$\triangle XBC$、$\triangle XCA$ 的圓心分別為 O_C、O_A、O_B，則 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點，其中形心 X 為內心 I、垂心 H 或外心 O。

證明：

1. 當 X 為內心 I 時，$\angle BIC=90^\circ+\frac{\angle A}{2}$，推得 $\angle BO_AC=360^\circ-2\angle BIC=180^\circ-\angle A$，同理 $\angle CO_BA=180^\circ-\angle B$、$\angle AO_CB=180^\circ-\angle C$。根據引理 13，考慮以下式子：

$$\frac{\sin\angle BAO_A}{\sin\angle O_AAC}\times\frac{\sin\angle CBO_B}{\sin\angle O_BBA}\times\frac{\sin\angle ACO_C}{\sin\angle O_CCB}$$

$$=\frac{\sin\left(\angle B+90^\circ-\frac{180^\circ-\angle A}{2}\right)}{\sin\left(\angle C+90^\circ-\frac{180^\circ-\angle A}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\angle C+90^\circ-\frac{180^\circ-\angle B}{2}\right)}{\sin\left(\angle A+90^\circ-\frac{180^\circ-\angle B}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\angle A+90^\circ-\frac{180^\circ-\angle C}{2}\right)}{\sin\left(\angle B+90^\circ-\frac{180^\circ-\angle C}{2}\right)}$$

$=\frac{\sin\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)}{\sin\left(\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\angle C+\frac{\angle B}{2}\right)}{\sin\left(\angle A+\frac{\angle B}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\angle A+\frac{\angle C}{2}\right)}{\sin\left(\angle B+\frac{\angle C}{2}\right)}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{1}=1$ （因為 $\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)+\left(\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)=180^\circ$，所以 $\frac{\sin\left(\angle B+\frac{\angle A}{2}\right)}{\sin\left(\angle C+\frac{\angle A}{2}\right)}=1$，其餘同理）

2. 當 X 為垂心 H 時，$\angle BHC=180^\circ-\angle A$，推得 $\angle BO_AC=360^\circ-2\angle BHC=2\angle A$，同理 $\angle CO_BA=2\angle B$、$\angle AO_CB=2\angle C$。根據引理 13，考慮以下式子：

$$\frac{\sin\angle BAO_A}{\sin\angle O_AAC}\times\frac{\sin\angle CBO_B}{\sin\angle O_BBA}\times\frac{\sin\angle ACO_C}{\sin\angle O_CCB}=\frac{\sin(\angle B+90^\circ-\angle A)}{\sin(\angle C+90^\circ-\angle A)}\times\frac{\sin(\angle C+90^\circ-\angle B)}{\sin(\angle A+90^\circ-\angle B)}\times\frac{\sin(\angle A+90^\circ-\angle C)}{\sin(\angle B+90^\circ-\angle C)}$$

$$=\frac{\sin(\angle A+90^\circ-\angle C)}{\sin(\angle C+90^\circ-\angle A)}\times\frac{\sin(\angle B+90^\circ-\angle A)}{\sin(\angle A+90^\circ-\angle B)}\times\frac{\sin(\angle C+90^\circ-\angle B)}{\sin(\angle B+90^\circ-\angle C)}=1$$

3. 當 X 為外心 O 時，$\angle BOC=2\angle A$，推得 $\angle BO_AC=360^\circ-2\angle BOC=360^\circ-4\angle A$，同理 $\angle CO_BA=360^\circ-4\angle B$、$\angle AO_CB=360^\circ-4\angle C$。根據引理 13，考慮以下式子：

$$\frac{\sin\angle BAO_A}{\sin\angle O_AAC}\times\frac{\sin\angle CBO_B}{\sin\angle O_BBA}\times\frac{\sin\angle ACO_C}{\sin\angle O_CCB}=\frac{\sin(\angle B-90^\circ+2\angle A)}{\sin(\angle C-90^\circ+2\angle A)}\times\frac{\sin(\angle C-90^\circ+2\angle B)}{\sin(\angle A-90^\circ+2\angle B)}\times\frac{\sin(\angle A-90^\circ+2\angle C)}{\sin(\angle B-90^\circ+2\angle C)}$$

$$=\frac{\sin(90^\circ+\angle A-\angle C)}{\sin(90^\circ+\angle A-\angle B)}\times\frac{\sin(90^\circ+\angle B-\angle A)}{\sin(90^\circ+\angle B-\angle C)}\times\frac{\sin(90^\circ+\angle C-\angle B)}{\sin(90^\circ+\angle C-\angle A)}$$

$$=\frac{\sin(90^\circ+\angle B-\angle A)}{\sin(90^\circ+\angle A-\angle B)}\times\frac{\sin(90^\circ+\angle C-\angle B)}{\sin(90^\circ+\angle B-\angle C)}\times\frac{\sin(90^\circ+\angle A-\angle C)}{\sin(90^\circ+\angle C-\angle A)}=1$$

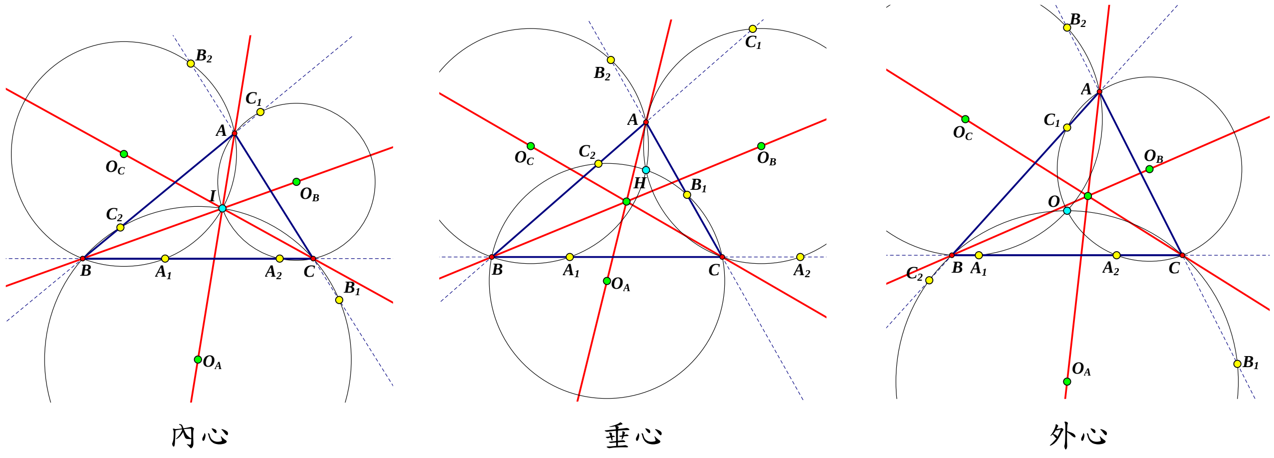


圖 23：$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點

4. 在內心 I、垂心 H 或外心 O 的建構下，根據西瓦逆定理，$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點。當垂心或外心在 $\triangle ABC$ 的外部時，證明方式相同。

■

二、 對於圓外切四邊形，由給定內心與四個外接圓所建構的幾何性質

本節開始我們將三角形推廣到多邊形，為了方便表示，約定多邊形的頂點逆時鐘依序為 P_1、P_2、P_3、P_4，其內心為 I，我們將外接圓與各邊直線交點重新命名，依序作圖為：

作 $\triangle P_1P_2I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_nP_1}$、$\overleftrightarrow{P_3P_2}$ 於點 A_1、B_1；

作 $\triangle P_2P_3I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_4P_3}$ 於點 A_2、B_2；

作 $\triangle P_3P_4I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$、$\overleftrightarrow{P_1P_4}$ 於點 A_3、B_3；

作 $\triangle P_4P_1I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_3P_4}$、$\overleftrightarrow{P_2P_1}$ 於點 A_4、B_4。

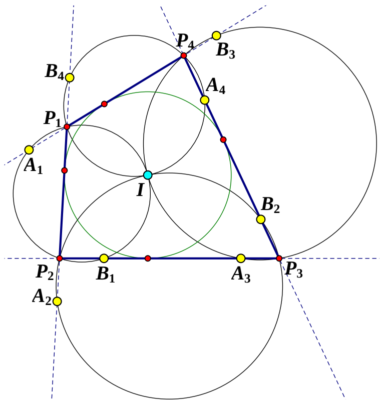


圖 24：四邊形構圖

引理 15：兩相異一直線 L_1、L_2 被直線 M 截於 A、B 兩點，對於四個內錯截角作角平分線，各交於 C、D 兩點，則 (1) A、B、C、D 四點共圓；(2) 若前圓分別與 L_1、L_2 交於 E、F 兩點，則 $\overline{AE}=\overline{BF}$ 且 $\overline{AF}\parallel\overline{BE}$。

證明：

1. 因為對於四個內錯截角作角平分線，可得 $\angle CAD=\angle CBD=\frac{180°}{2}=90°$，所以 A、B、C、D 四點共圓。
2. 分兩種情形討論。第一，當直線 L_1、L_2 不平行且交於 X 點，則 C、D 分別為 $\triangle AXB$ 的內心、旁心，可得 $\angle ACB=90°+\frac{\angle X}{2}$ 且 $\angle ADB=90°-\frac{\angle X}{2}$，又因為共圓，$\angle AFB=\angle ACB=90°+\frac{\angle X}{2}$，推得 $\angle AFX=90°-\frac{\angle X}{2}=\angle FAX$，即 $\overline{XA}=\overline{XF}$，同理可得 $\overline{XE}=\overline{XB}$，相減可得 $\overline{AE}=\overline{BF}$。第二，當直線 L_1、L_2 平行時，$\angle C=\angle D=90°$（$\overline{AB}$ 為直徑）且 $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$，又 $\angle EAB=\angle FBA$，可得 $\widehat{EB}=\widehat{FA}$，故 $\widehat{AE}=\widehat{ADB}-\widehat{EB}=\widehat{ACB}-\widehat{FA}=\widehat{BF}$，故 $\overline{AE}=\overline{BF}$。

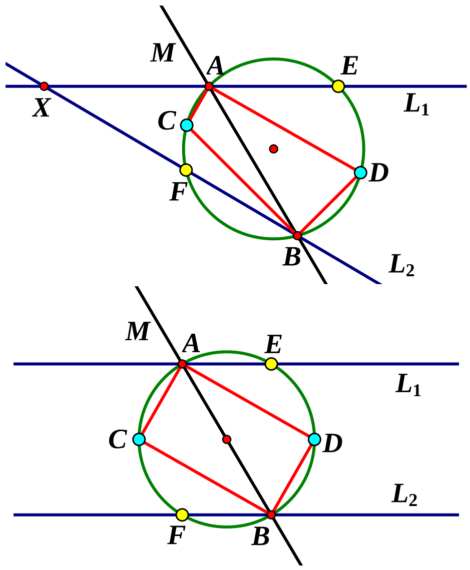


圖 25：等線段

3. 在同圓中，$\overline{AE}=\overline{BF}$，可得 $\widehat{AE}=\widehat{BF}$，故 $\overline{AF}\parallel\overline{BE}$，即四邊形 $AFBE$ 為等腰梯形。

■

性質 16：在內心建構下，$\overline{A_1B_3}+\overline{A_2B_4}+\overline{A_3B_1}+\overline{A_4B_2}=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_4P_1}$。

證明：如圖，$\overleftrightarrow{P_1P_4}$、$\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 被 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 所截，$\angle P_4P_1P_2$ 和 $\angle P_1P_2P_3$ 的角平分線交於 I 點，根據引理 15，$\overline{P_1A_1}=\overline{P_2B_2}$，同理 $\overleftrightarrow{P_3P_4}$ 為截線時，$\overline{P_3A_2}=\overline{P_4B_3}$。再考慮兩直線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_3P_4}$ 分別被 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$、$\overleftrightarrow{P_1P_4}$ 所截，可得 $\overline{P_2A_2}=\overline{P_3A_2}$、$\overline{P_4A_4}=\overline{P_1B_4}$。故我們可得出 $\overline{A_1B_3}+\overline{A_2B_4}+\overline{A_3B_1}+\overline{A_4B_2}=(\overline{P_1A_1}+\overline{P_1P_4}+\overline{P_4B_3})+(\overline{P_1A_2}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_1B_4})+(\overline{P_2P_3}-\overline{P_2B_1}-\overline{P_3B_2})++(\overline{P_3P_4}-\overline{P_3B_2}-\overline{P_4A_4})=\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_4P_1}+\overline{P_1P_2}$。

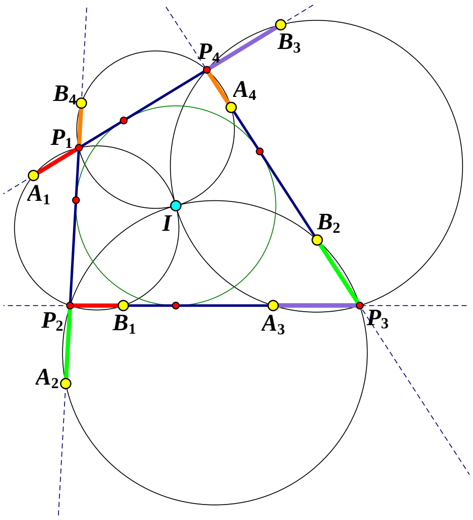


圖 26：四邊形長度不變量

■

事實上，針對性質 16，還可以給出一個更強的結論：$\overline{P_1P_2}=\overline{A_4B_2}$、$\overline{P_2P_3}=\overline{A_1B_3}$、$\overline{P_3P_4}=\overline{A_2B_4}$、$\overline{P_4P_1}=\overline{A_3B_1}$。

如圖，利用四邊形內角和 360 度與角平分線可得 $\angle P_1IP_4+\angle P_2IP_3=180°$，又 $\angle P_1IP_4=\angle P_1A_4P_4$ 且 $\angle P_2IP_3=\angle P_2B_2P_3$，所以 $\angle P_1A_4P_4+\angle P_2B_2P_3=180°$，可得 $\overline{P_1A_4}\parallel\overline{P_2B_2}$，又根據引理 15 可得 $\overline{P_1A_4}\parallel\overline{B_4P_4}$ 且 $\overline{P_1B_4}=\overline{P_4A_4}$，再利用平行線截比例線段 $\overline{B_4P_1}:\overline{P_1P_2}=\overline{P_4A_4}:\overline{A_4B_2}$，故 $\overline{P_1P_2}=\overline{A_4B_2}$，其餘線段長度同理可證。

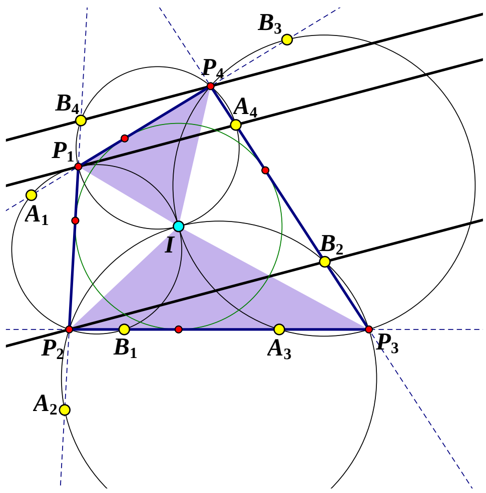


圖 27：一組平行線

性質 17：在內心建構下，四邊形 $P_1P_2P_3P_4\cong$ 四邊形 $B_1A_1B_3A_3\cong$ 四邊形 $A_4B_2A_2B_4$。

證明：先討論四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 與四邊形 $B_1A_1B_3A_3$，因為 A_1、P_1、B_1、P_2 共圓，可得 $\angle P_1A_1B_1=\angle P_1P_2B_1$，再利用外角定理可得 $\angle A_1B_1A_3=\angle P_4P_1P_2$。同理，$A_3$、$P_3$、$B_3$、$P_4$ 共圓，可得 $\angle P_3A_3B_3=\angle P_3P_4B_3$ 以及 $\angle A_3B_3A_1=\angle P_2P_3P_4$，故四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 與四邊形 $B_1A_1B_3A_3$ 的四個對應內角角度相等。又由前面證明可知 $\overline{P_1P_4}=\overline{B_1A_3}$、$\overline{P_2P_3}=\overline{A_1B_3}$，利用等腰梯形的對角線等長可得 $\overline{P_1P_2}=\overline{B_1A_1}$、$\overline{P_3P_4}=\overline{B_3A_3}$，故四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 與四邊形 $B_1A_1B_3A_3$ 的四個對應邊長度相等，即四邊形 $P_1P_2P_3P_4\cong$ 四邊形 $B_1A_1B_3A_3$。同樣方

式可以證明四邊形 $P_1P_2P_3P_4 \cong$ 四邊形 $A_4B_2A_2B_4$，我們就省略過程。

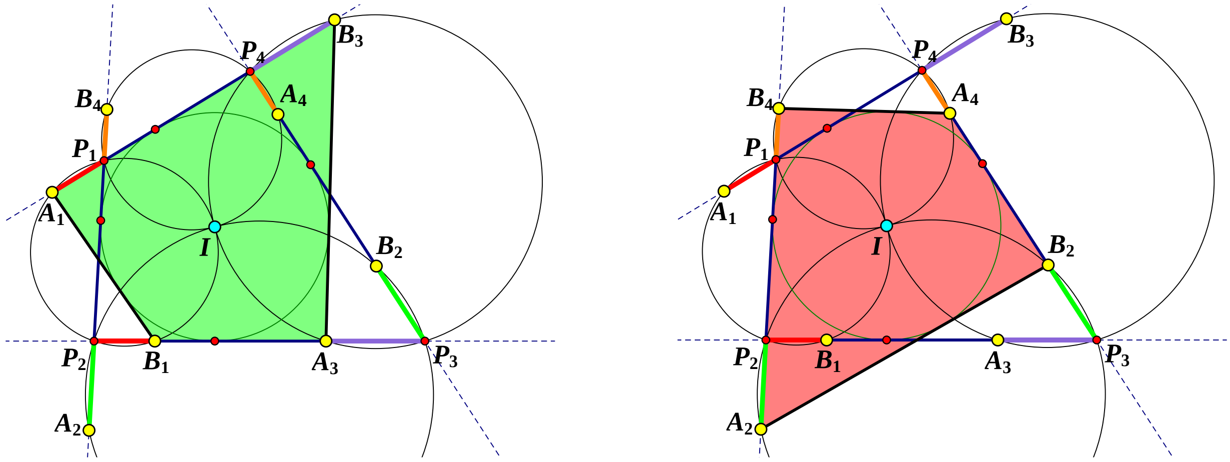


圖 28：四邊形全等

■

因為兩個四邊形全等，我們得出面積 $S_{P_1P_2P_3P_4} = S_{A_4B_2A_2B_4} = S_{B_1A_1B_3A_3}$。

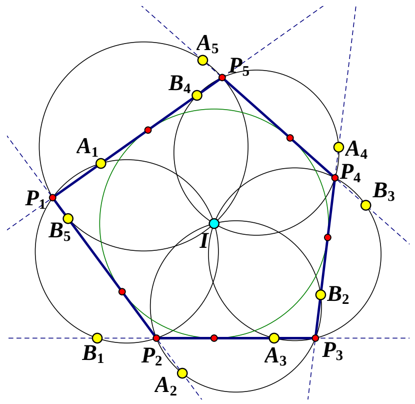
三、 對於圓外切 n 邊形，由給定內心與 n 個外接圓所建構的幾何性質

本節開始推廣到多邊形 $P_1P_2P_3 \dots P_n$，為了方便表示，我們約定多邊形的頂點逆時鐘依序為 P_1、P_2、P_3、P_4、…、P_n，其內心為 I，依序

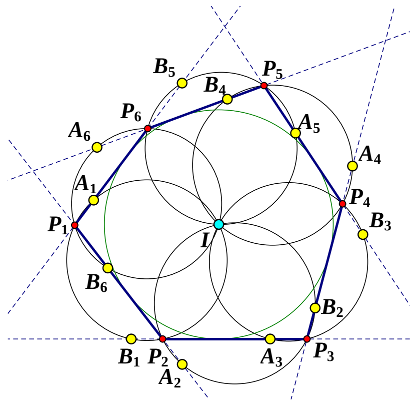
作 $\triangle P_1P_2I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_nP_1}$、$\overleftrightarrow{P_3P_2}$ 於點 A_1、B_1；

作 $\triangle P_2P_3I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$、$\overleftrightarrow{P_4P_3}$ 於點 A_2、B_2；……

作 $\triangle P_nP_1I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_{n-1}P_n}$、$\overleftrightarrow{P_2P_1}$ 於 A_n、B_n。



奇邊形構圖



偶邊形構圖

圖 30：內心與多個外接圓的構圖

定理 18：在內心建構下，$\overline{A_1B_{n-1}} + \overline{A_2B_n} + \cdots + \overline{A_nB_{n-2}} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$。

證明：

1. 因為 $\overleftrightarrow{P_{k-1}P_k}$ 與 $\overleftrightarrow{P_{k+2}P_{k+1}}$ 被 $\overline{P_kP_{k+1}}$ 所截且 $\overline{P_kI}$ 與 $\overline{P_{k+1}I}$ 為角平分線，根據引理 15 有 $\overline{P_kA_k} = \overline{P_{k+1}B_k}$，其中 $k = 1, 2, \dots, n$（$P_{n+h} = P_h$、$A_{n+h} = A_h$、$B_{n+h} = B_h$）。令線段長度 $\overline{P_kA_k} = \overline{P_{k+1}B_k} = \delta_k$，可得 $\overline{A_kP_{k+n-1}} = \overline{P_kP_{k+n-1}} \pm \delta_k$ 且 $\overline{B_kP_{k+n+2}} = \overline{P_{k+1}P_{k+n+2}} \mp \delta_k$，注意到 $\pm\delta_k$ 與 $\mp\delta_k$ 為加減對應。

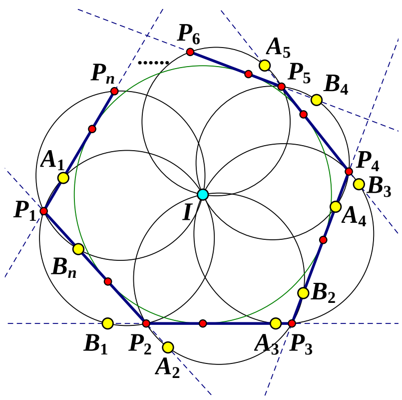


圖 31：n 邊形

2. 考慮 $\sum_{k=1}^{n}(\overline{A_kP_{k+n-1}} + \overline{B_kP_{k+n+2}}) = \sum_{k=1}^{n}(\overline{P_kP_{k+n-1}} + \overline{P_{k+1}P_{k+n+2}})$，又共線線段而有 $\overline{A_kP_{k+n-1}} + \overline{B_{k+n-2}P_k} = \overline{P_kP_{k+n-1}} + \overline{A_kB_{k+n-2}}$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}(\overline{P_kP_{k+n-1}} + \overline{P_{k+1}P_{k+n+2}}) = \sum_{k=1}^{n}(\overline{A_kP_{k+n-1}} + \overline{B_kP_{k+n+2}})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(\overline{A_kP_{k+n-1}} + \overline{B_{k+n-2}P_k}) = \sum_{k=1}^{n}(\overline{P_kP_{k+n-1}} + \overline{A_kB_{k+n-2}})$$

因此 $\sum_{k=1}^{n}\overline{P_kP_{k+n-1}} = \sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_{k+n-2}}$，即 $\overline{A_1B_{n-1}} + \overline{A_2B_n} + \overline{A_3B_1} + \cdots + \overline{A_nB_{n-2}} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$。 ■

我們接著關注回面積幾何量，仿照三角形的連線方式，在五邊形卻無法給出一致的結果，即面積 $S_{A_1A_2A_3\ldots A_5} + S_{B_1B_2B_3\ldots B_5}$ 不會恆為面積 $S_{P_1P_2P_3\ldots P_5}$的兩倍，如下圖。

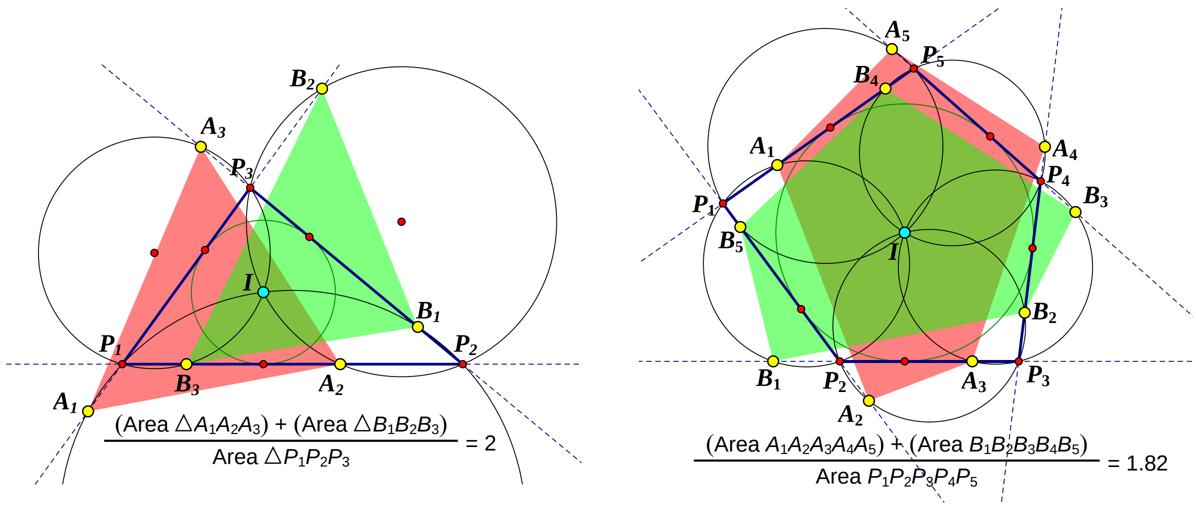


圖 32：奇邊形

仿照四邊形的連線方式，在六邊形給出一致的結果，即面積 $S_{A_1A_2A_3\ldots A_6} + S_{B_1B_2B_3\ldots B_6}$ 恆為面積 $S_{P_1P_2P_3\ldots P_6}$ 的兩倍。

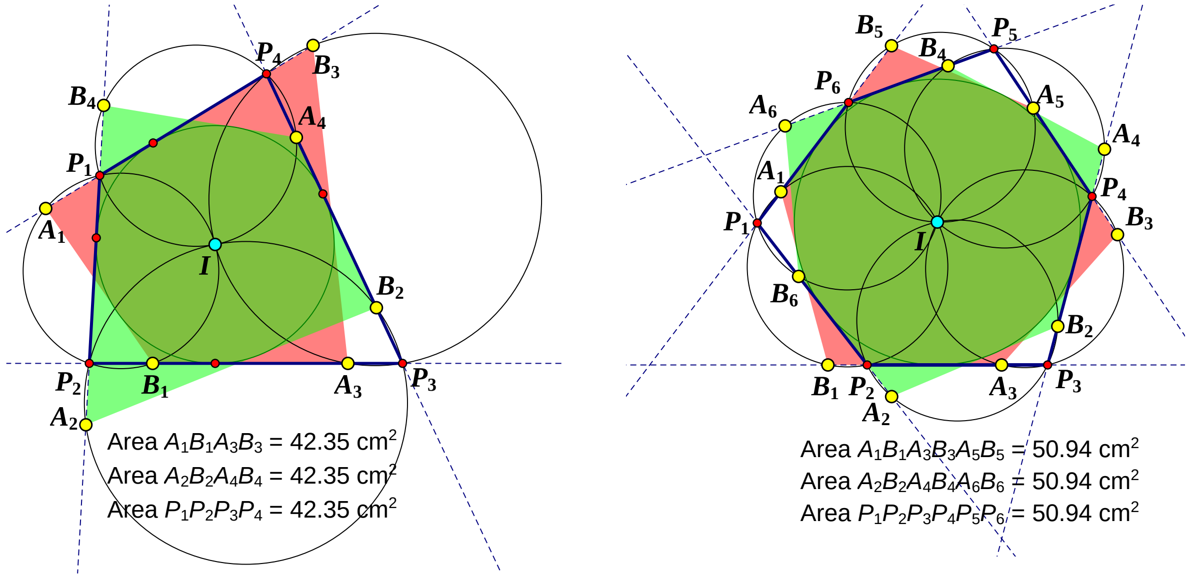
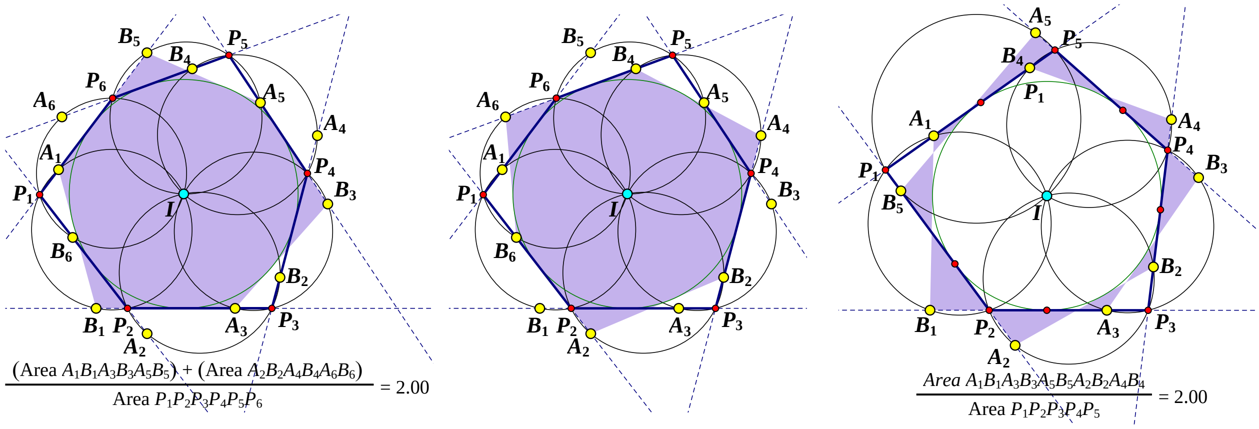


圖 33：偶邊形

為了刻劃一致的面積理論，針對奇邊形或偶邊形，我們考慮依序將各點 A_1、B_1、A_3、B_3、A_5、B_5、……、A_n、B_n 連線形成封閉圖形，如下圖。



$P_1P_2P_3 \dots P_n$ 為偶邊形　　$P_1P_2P_3 \dots P_n$ 為奇邊形

圖 34：一致的連線方式

當原多邊形是偶邊形時（$n = 2m$），會構成兩個偶邊形 $A_1B_1A_3B_3 \dots A_{2m-1}B_{2m-1}$ 與 $A_2B_2A_4B_4 \dots A_{2m}B_{2m}$。當原多邊形是奇邊形（$n = 2m+1$）時，構成芒星多邊形 $A_1B_1A_3B_3 \dots A_{2m-1}B_{2m-1}A_2B_2A_4B_4 \dots A_{2m}B_{2m}$。有趣的是，我們發現這樣的連線方式下，奇邊形與偶邊形的面積不變量有了一致的結果，皆為原多邊形面積的兩倍。

引理 19：$\overline{A_kP_k} = \overline{B_kP_{k+1}} = \frac{|\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)|}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}} \times \overline{P_kP_{k+1}}$。

證明：根據引理 15 可得四邊形 $A_kP_kB_kP_{k+1}$ 為等腰梯形，令兩對角線交於 C_k 點且 $\angle P_k = \theta_k \le \angle P_{k+1} = \theta_{k+1}$，於是有 $\triangle A_kP_kC_k \cong \triangle P_{k+1}B_kC_k$，再得 $\overline{C_kA_k} = \overline{C_kP_{k+1}}$。由共圓性質得出 $\angle P_kA_kC_{k+1} = \angle B_kP_{k+1}C_k = 180° - \theta_{k+1}$。在 $\triangle A_kP_kC_k$ 中，由正弦定理有

$\overline{P_kC_k}:\overline{C_kA_k}:\overline{A_kP_k}=\sin(180°-\theta_{k+1}):\sin\theta_k:\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)$，再令 $\overline{P_kP_{k+1}}=l_k$，化簡可得

$\overline{P_kC_k}=l_k\times\frac{\sin\theta_{k+1}}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}$、$\overline{C_kA_k}=l_k\times\frac{\sin\theta_k}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}$、$\overline{A_kP_k}=l_k\times\frac{\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}$。當 $\theta_k>\theta_{k+1}$ 時，$\overline{A_kP_k}=l_k\times\frac{\sin(\theta_k-\theta_{k+1})}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}$。

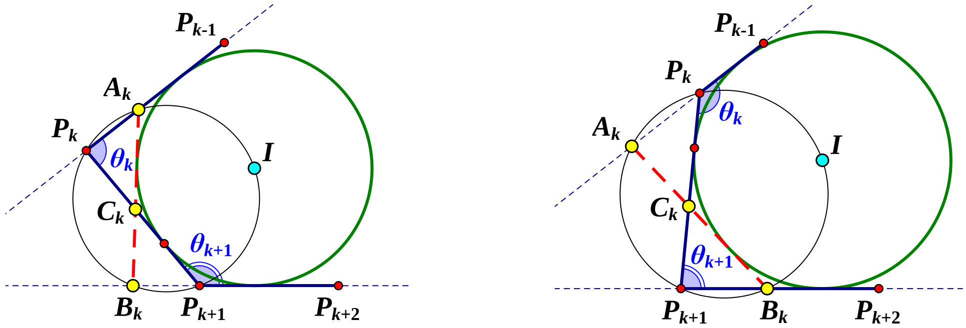


圖 35：坐標分析

■

根據前面引理，我們給出 A_k 點與 B_k 點的坐標，其中 $k=1,2,\dots,n$。

$$A_k\left(x_k+\frac{l_k}{l_{k-1}}\times\frac{\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}\times(x_{k-1}-x_k),y_k+\frac{l_k}{l_{k-1}}\times\frac{\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}\times(y_{k-1}-y_k)\right)$$

$$B_k\left(x_{k+1}+\frac{l_k}{l_{k+1}}\times\frac{\sin(\theta_k-\theta_{k+1})}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}\times(x_{k+2}-x_{k+1}),y_{k+1}+\frac{l_k}{l_{k+2}}\times\frac{\sin(\theta_k-\theta_{k+1})}{\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}}\times(y_{k+2}-y_{k+1})\right)$$

定理 20 (一般化面積不變量)

偶邊形 $n=2m$，$S_{A_1B_1A_3B_3\dots A_{2m-1}B_{2m-1}}+S_{A_2B_2A_4B_4\dots A_{2m}B_{2m}}=2S_{P_1P_2P_3\dots P_n}$。

奇邊形 $n=2m+1$，$S_{A_1B_1A_3B_3\dots A_{2m+1}B_{2m+1}A_2B_2A_4B_4\dots A_{2m}B_{2m}}=2S_{P_1P_2P_3\dots P_n}$。

證明：利用測量師公式計算有向面積，先分組化簡，再巧妙利用坐標平移、三角形與自交四邊形的三角函數面積公式等技巧進行分項對消。礙於版面有限，詳閱研究日誌的證明。

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\begin{vmatrix}x_{2i-1}+\frac{l_{2i-1}}{l_{2i-2}}\times\frac{\sin(\theta_{2i}-\theta_{2i-1})}{\sin\theta_{2i-1}+\sin\theta_{2i}}\times(x_{2i-2}-x_{2i-1}) & x_{2i}+\frac{l_{2i-1}}{l_{2i}}\times\frac{\sin(\theta_{2i-1}-\theta_{2i})}{\sin\theta_{2i-1}+\sin\theta_{2i}}\times(x_{2i+1}-x_{2i})\\ y_{2i-1}+\frac{l_{2i-1}}{l_{2i-2}}\times\frac{\sin(\theta_{2i}-\theta_{2i-1})}{\sin\theta_{2i-1}+\sin\theta_{2i}}\times(y_{2i-2}-y_{2i-1}) & y_{2i}+\frac{l_{2i-1}}{l_{2i}}\times\frac{\sin(\theta_{2i-1}-\theta_{2i})}{\sin\theta_{2i-1}+\sin\theta_{2i}}\times(y_{2i+1}-y_{2i})\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}x_{2i}+\frac{l_{2i-1}}{l_{2i}}\times\frac{\sin(\theta_{2i-1}-\theta_{2i})}{\sin\theta_{2i-1}+\sin\theta_{2i}}\times(x_{2i+1}-x_{2i}) & x_{2i+1}+\frac{l_{2i+1}}{l_{2i}}\times\frac{\sin(\theta_{2i+2}-\theta_{2i+1})}{\sin\theta_{2i+1}+\sin\theta_{2i+2}}\times(x_{2i}-x_{2i+1})\\ y_{2i}+\frac{l_{2i-1}}{l_{2i}}\times\frac{\sin(\theta_{2i-1}-\theta_{2i})}{\sin\theta_{2i-1}+\sin\theta_{2i}}\times(y_{2i+1}-y_{2i}) & y_{2i+1}+\frac{l_{2i+1}}{l_{2i}}\times\frac{\sin(\theta_{2i+2}-\theta_{2i+1})}{\sin\theta_{2i+1}+\sin\theta_{2i+2}}\times(y_{2i}-y_{2i+1})\end{vmatrix}\right)$$

$$=2[P_1P_2P_3\dots P_n]$$

■

伍、 討論

一、 對於任意三角形，還有其他形心具備相同的性質嗎？

對於三角形，我們除了將原題目的內心進行三線段的長度完整探討外，也延伸到兩個三角形的面積不變量，我們從中發現內心建構的角是一種「可輪換的角度」，於是繼續討論旁心、垂心、外心。我們好奇是否只有這四個形心具有以上性質？

換個角度作分析，考慮 $\triangle ABC$（$\overline{AB} > \overline{AC}$）的形心 X，作 $\triangle XBC$ 的外接圓交 $\overline{AB}$ 於 D 點，構造出 $\triangle ADC$，本研究問題的構造法等價討論 $\triangle ADC$ 是否為等腰三角形？可得出有三種情形：$\overline{AD} = \overline{AC}$、$\overline{CA} = \overline{CD}$ 與 $\overline{DA} = \overline{DC}$，分別對應到形心 X 為內心（旁心）I、垂心 H 與外心 O，即使垂心與外心在三角形外部也不影響等腰的結構。

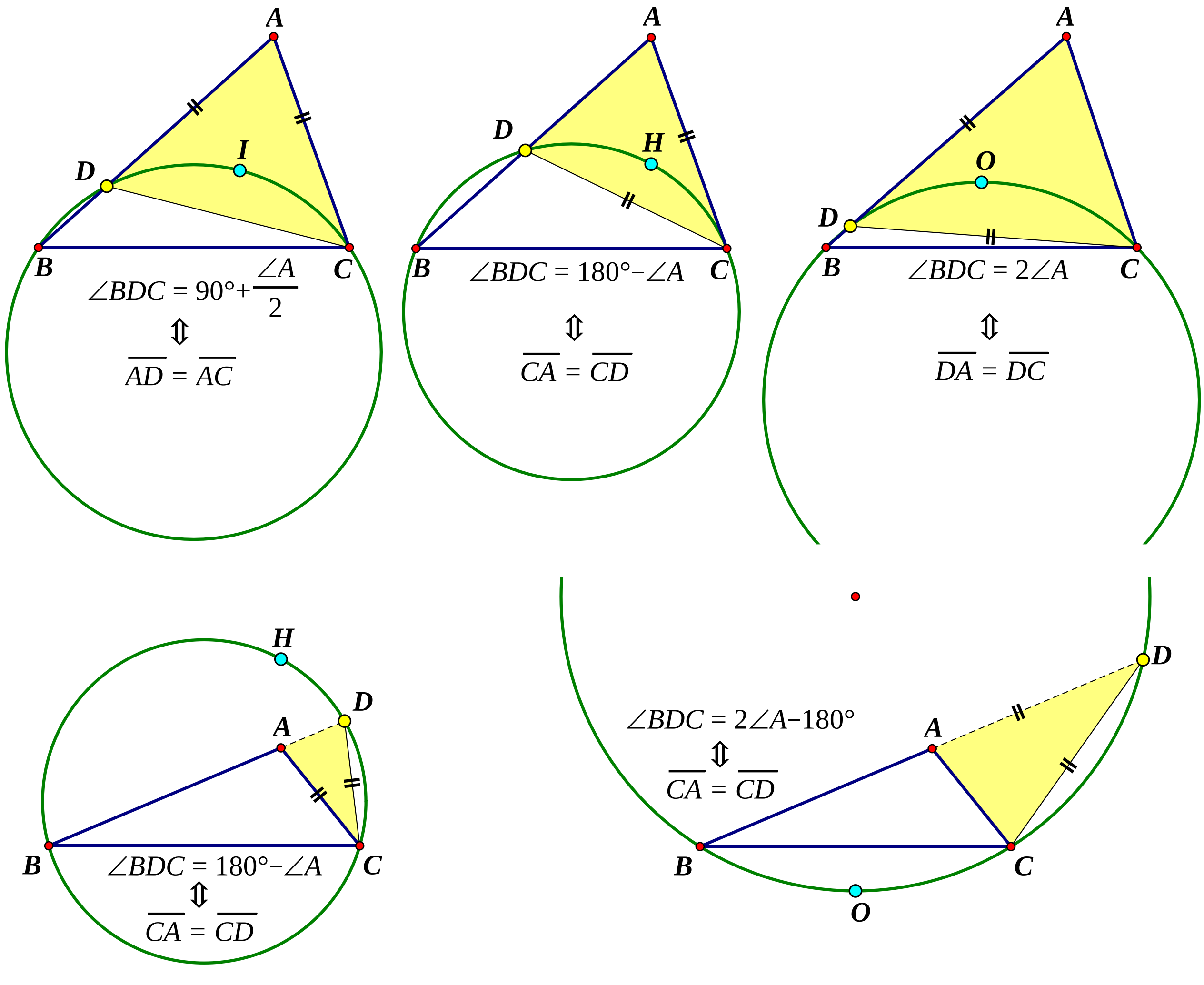
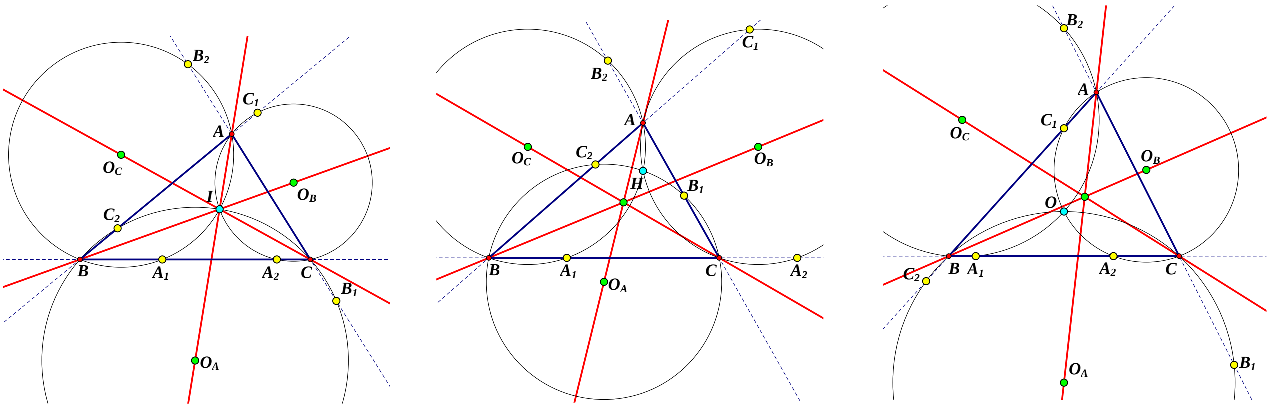


圖 36：形心與三個外接圓建構的所有圖形

二、 對於任意三角形，由內心、垂心與外心構造外接圓的圓心關聯性

由性質 14 得知，$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線共點於 Q 點，討論 Q 點是否為特殊點？



內心 垂心 外心

圖 37：$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點

我們先用尺規作圖檢驗常見的三角形五心，但發現這樣的方式比較沒有效率，與指導老師討論後，採取計算三角形有向面積比，以檢索查詢網站 Kimberling Center。

情形一，X 為內心時。因為 $\frac{\sin\angle BAO_A}{\sin\angle O_AAC}=\frac{\sin\angle CBO_B}{\sin\angle O_BBA}=\frac{\sin\angle ACO_C}{\sin\angle O_CCB}=1$，因此 $\angle BAO_A=\angle O_AAC$、$\angle CBO_B=\angle O_BBA$、$\angle ACO_C=\angle O_CCB$，此時三線交點 Q 即為 $\triangle ABC$ 的內心。

情形二，X 為垂心時。考慮三角形有向面積比 $[QBC]:[QCA]:[QAB]$，$[QBC]:[QCA]=a\times\sin\angle O_CCB:b\times\sin\angle ACO_C$、$[QCA]:[QAB]=b\times\sin\angle O_AAC:c\times\sin\angle BAO_A$。又由引理 13 可得 $\sin\angle O_CCB:\sin\angle ACO_C=\sin(\angle B+90°-\angle C):\sin(\angle A+90°-\angle C)=\cos(\angle B-\angle C):\cos(\angle C-\angle A)$，同理 $\sin\angle O_AAC:\sin\angle BAO_A=\sin(\angle C+90°-\angle A):\sin(\angle B+90°-\angle A)=\cos(\angle C-\angle A):\cos(\angle A-\angle B)$，所以我們有

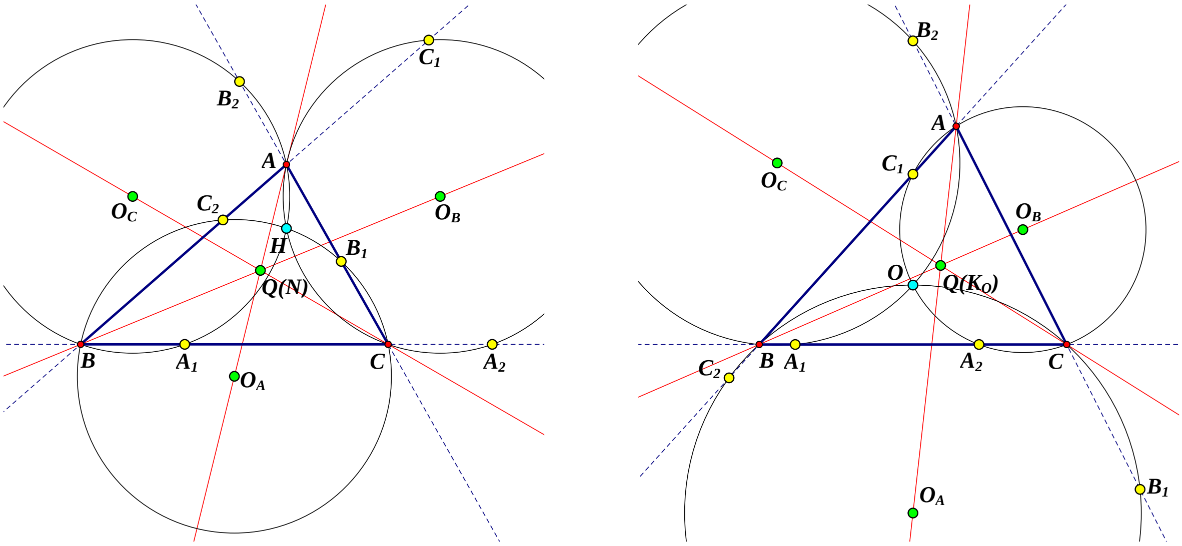
$$[QBC]:[QCA]:[QAB]=a\times\cos(\angle B-\angle C):b\times\cos(\angle C-\angle A):c\times\cos(\angle A-\angle B)$$

利用網站 Kimberling Center 查詢，此時三線交點 Q 即為 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心 N。

情形三，X 為外心時。考慮三角形有向面積比 $[QBC]:[QCA]=a\times\sin\angle O_CCB:b\times\sin\angle ACO_C$、$[QCA]:[QAB]=b\times\sin\angle O_AAC:c\times\sin\angle BAO_A$。由引理 13 可得 $\sin\angle O_CCB:\sin\angle ACO_C=\cos(\angle C-\angle A):\cos(\angle B-\angle C)$，以及 $\sin\angle O_AAC:\sin\angle BAO_A=\cos(\angle A-\angle B):\cos(\angle C-\angle A)$，所以我們有

$$[QBC]:[QCA]:[QAB]=a\times\sec(\angle B-\angle C):b\times\sec(\angle C-\angle A):c\times\sec(\angle A-\angle B)$$

利用網站 Kimberling Center 查詢，此時三線交點 Q 即為 $\triangle ABC$ 的 Kosnita Point（縮寫為 K_O 點，Kimberling Center 編號 54）[3]。



三線交於九點圓的圓心 N　　　　三線交於九點圓的圓心 K_O

圖 38：$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線共於特殊點

有趣的是，垂心 H 與外心 O 互為等角共軛點（isogonal conjugate points），它們建構出來的點分別為九點圓圓心 N 與 K_O 點也互為等角共軛點 [4]。

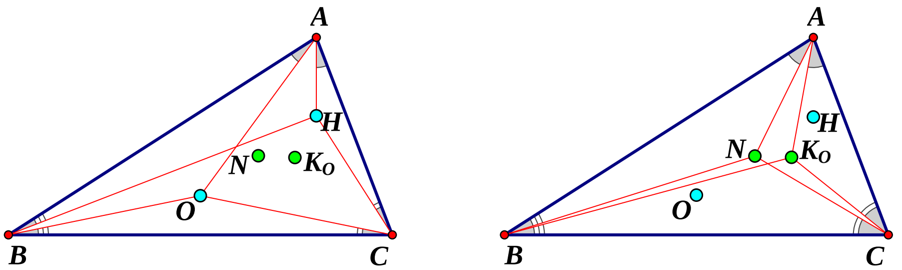


圖 39：兩組等角共軛點

由於內心 I 為等角自共軛點，我們將內心 I、垂心 H 與外心 O 所建構的外接圓之圓心 O_{A_I}、O_{B_I}、O_{C_I} 與 O_{A_H}、O_{B_H}、O_{C_H}，以及 O_{A_O}、O_{B_O}、O_{C_O} 分別畫出並觀察關聯性，發現 $\overline{AO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$，$\overline{BO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}BO_{A_O}$，$\overline{CO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}CO_{A_O}$（或其外角點）對於三個頂點 A、B、C 都有輪換的等角結構，對於 O_{B_O}、O_{B_I}、O_{B_H} 與 O_{C_O}、O_{C_I}、O_{C_H} 亦同理，這個將三種構圖連結起來的性質十分有趣且美麗！

性質 21（六點共圓）：圓心 O_{A_I}、O_{B_I}、O_{C_I} 與三頂點 A、B、C 共圓。

證明：$\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$，可得 $\angle BO_{A_I}C = 360° - 2 \times \left(90° + \frac{\angle A}{2}\right) = 180° - \angle A$，同理可得 $\angle CO_{B_I}A = 180° - \angle B$ 且 $\angle AO_{C_I}B = 180° - \angle C$，所以 O_{A_I} 與三頂點 A、B、C 共圓。同理 O_{B_I} 與 O_{C_I} 亦三頂點 A、B、C 共圓，故六點共圓。

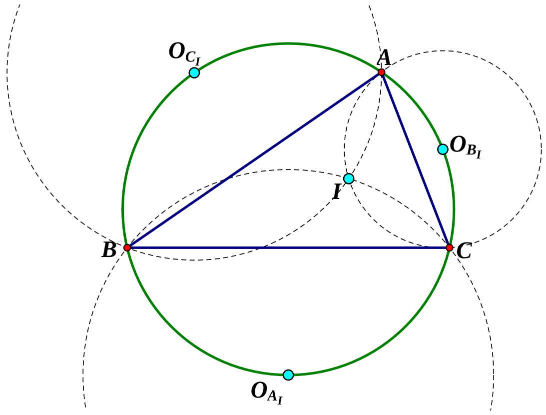


圖 40：六點共圓

■

定理 22（等角結構）：

(1) 若 $\angle A < 90°$，則 $\overline{AO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$，$\overline{BO_{A_I}}$ 與 $\overline{CO_{A_I}}$ 亦同。

(2) 若 $\angle A > 90°$，$\overline{AO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$ 的外角，$\overline{BO_{A_I}}$ 與 $\overline{CO_{A_I}}$ 亦同。

證明：

1. 先討論 $\angle A < 90°$，因為九點圓的圓心 N 在 $\overleftrightarrow{AO_{A_H}}$ 上，K_O 點在 $\overleftrightarrow{AO_{A_O}}$ 上，兩點又為等角共軛點，所以 $\overline{AO_{A_I}}$ 是 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$ 的平分線。考慮定點 O_{A_H} 與 O_{A_O}，定比值為 $\frac{\overline{O_{A_I}O_{A_H}}}{\overline{O_{A_I}O_{A_O}}}$，構造阿波羅尼奧斯圓（Apollonius circle），又 $\overline{AO_{A_I}}$ 也是 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$ 的平分線，可得 A 點也在阿波羅尼奧斯圓上，再由前性質可知點 O_{A_I}、A、B、C 共圓，因此 $\overline{BO_{A_I}}$ 是 $\angle O_{A_H}BO_{A_O}$ 的平分線、$\overline{CO_{A_I}}$ 是 $\angle O_{A_H}CO_{A_O}$ 的平分線。

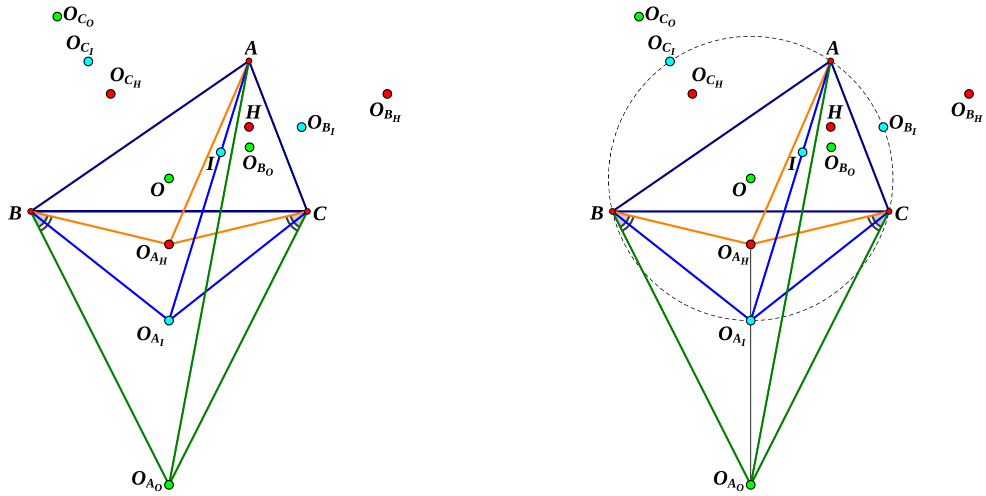


圖 41：等角結構與阿波羅尼奧斯圓（銳角）

2. 再討論 $\angle A > 90°$，此時 $\overline{AO_{A_I}}$ 是 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$ 的外角平分線。同樣考慮定點 O_{A_H} 與 O_{A_O}，定比值為 $\frac{\overline{O_{A_I}O_{A_H}}}{\overline{O_{A_I}O_{A_O}}}$，構造阿波羅尼奧斯圓（Apollonius circle）即可得證。

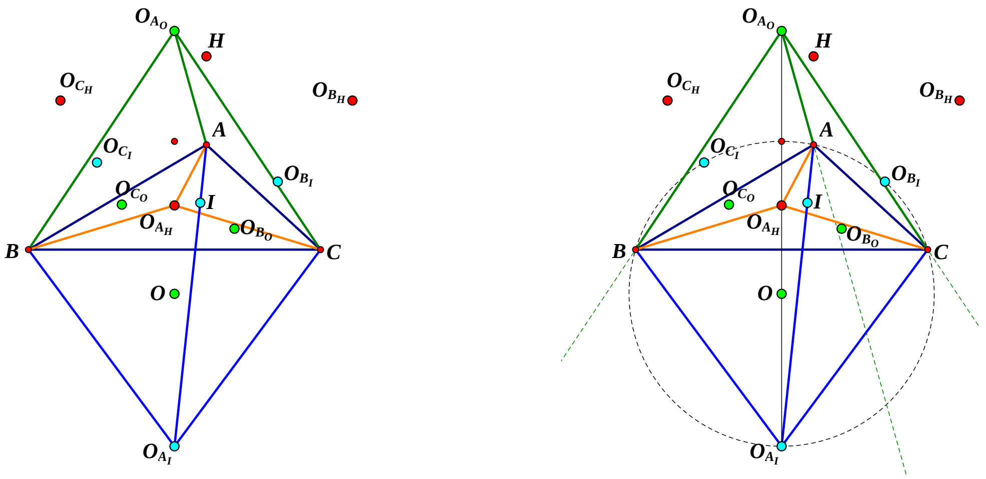


圖 42：等角結構與阿波羅尼奧斯圓（鈍角）

■

陸、 結論

一、 任意三角形，探討由給定形心與三個外接圓所建構的性質

對於任意 $\triangle ABC$ 與其內心，建構三個外接圓，我們先證明了原題目的有長度不變量。創新考慮將 $\triangle ABC$ 的邊及延長線的六個點構造出兩個 $\triangle A_1B_1C_1$ 與 $\triangle A_2B_2C_2$，發現其面積和恆等於 $\triangle ABC$ 的面積之兩倍。將內心進行推廣到旁心、垂心與外心等形心，刻劃出長度與面積的不變量性質，值得一提的是，我們剖析其幾何結構，構成等腰三角形的充要條件為內心、外心、垂心，因此我們完整討論了此問題的所有情形。

除此之外，將研究焦點放回定性性質，我們進一步好奇內心、垂心與外心條件建構下的幾何性質有沒有關聯性呢？有趣的是，利用等角共軛點、阿波羅尼奧斯圓為工具，刻畫出內心、垂心、外心所建構的三個同側外接圓之圓心 O_{A_I}、O_{A_H}、O_{A_O} 與三個頂點 A、B、C 的連線 $\overline{AO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$ 或它的外角，以此類推 $\overline{BO_{A_I}}$ 與 $\overline{CO_{A_I}}$。

二、 任意圓外切四邊形，探討由給定內心與四個外接圓所建構的性質

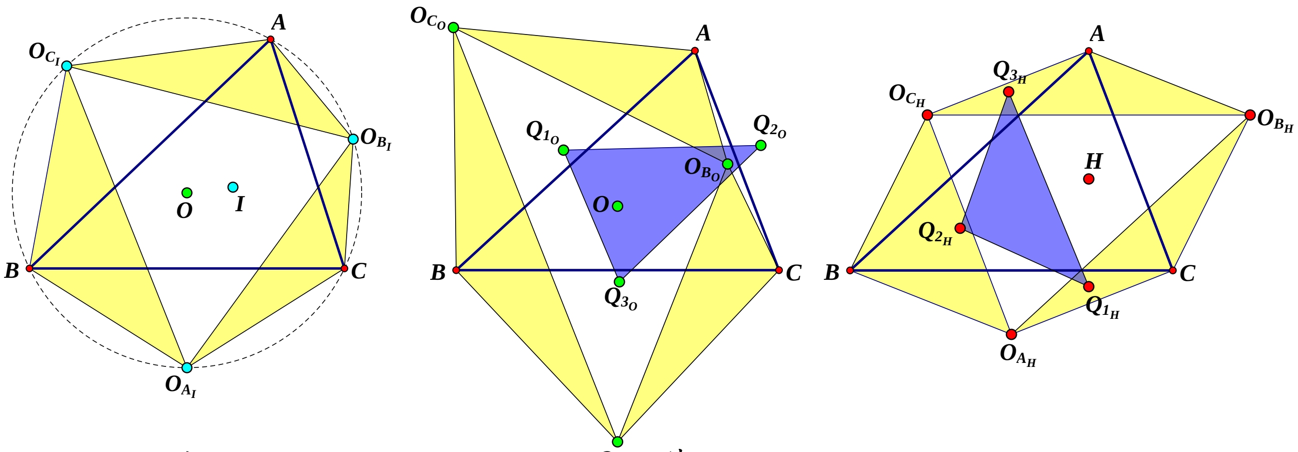
將任意三角形推廣到四邊形 $P_1P_2P_3P_4$，我們發現具有內心的四邊形（圓外切四邊形）的結構是「截線的角平分線構造的等腰梯形」，即內心與旁心的結合。利用這個性質非常重要，因為利用這個結構可以推廣到圓外切多邊形。在四邊形中，我們刻劃了長度不變量以及面積不變量，更進一步發現四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 全等於四邊形 $B_1A_1B_3A_3$ 全等於四邊形 $A_4B_2A_2B_4$。

三、 任意圓外切 n 邊形，探討由給定內心與 n 個外接圓所建構的性質

我們推廣到任意圓外切 n 邊形 $P_1P_2P_3\dots P_n$，給出一般化的長度不變量 $\overline{A_1B_{n-1}}+\overline{A_2B_n}+\cdots+\overline{A_nB_{n-2}}=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots+\overline{P_{n-1}P_n}$。我們分析奇邊形與偶邊形，成功刻劃出具有面積不變量的多邊形連線方式，其面積恆等於原多邊形 $P_1P_2P_3\dots P_n$ 的兩倍。

柒、 未來展望

由性質 21 可知內心建構下，點 A、B、C、O_{A_I}、O_{B_I} 與 O_{C_I} 六點共圓。換個觀點來看，$\triangle AO_{B_I}O_{C_I}$、$\triangle BO_{C_I}O_{A_I}$、$\triangle CO_{A_I}O_{B_I}$ 與 $\triangle ABC$ 的四個外心 O 重合。



內心　　　外心　　　垂心

圖 43：一個頂點與兩個外心構造三個三角形的外心

再考慮外心建構條件與垂心建構條件構圖。外心建構下，令 $\triangle AO_{B_O}O_{C_O}$ 的外心為 Q_{1_O}、$\triangle BO_{C_O}O_{A_O}$ 的外心為 Q_{2_O}、$\triangle CO_{A_O}O_{B_O}$ 的外心為 Q_{3_O}；垂心建構下，令 $\triangle AO_{B_H}O_{C_H}$ 的外心為 Q_{1_H}、$\triangle BO_{C_H}O_{A_H}$ 的外心為 Q_{2_H}、$\triangle CO_{A_H}O_{B_H}$ 的外心 Q_{3_H}。透過軟體實驗，我們提出有趣的關聯性猜想：「外心建構下的 $\triangle Q_{1_O}Q_{2_O}Q_{3_O}$ 相似於垂心建構下的 $\triangle O_{C_H}O_{B_H}O_{A_H}$；垂心建構下的 $\triangle Q_{1_H}Q_{2_H}Q_{3_H}$ 相似於外心建構下的 $\triangle O_{A_O}O_{B_O}O_{C_O}$」。

捌、 參考文獻

[1] Pericles Papadopoulos (2023). Problem 4861. *Crux Mathematicorum*, *49* (7), 375.

[2] Michal Adamaszek, Oliver Geupel, Antoine Mhanna and the UCLan Cyprus Problem Solving Group (2024). Solutions 4861. *Crux Mathematicorum*, *50* (2), 87-88.

[3] C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website, available at https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[4] Kosnita Point, available at https://mathworld.wolfram.com/KosnitaPoint.html

【評語】030402

此作品雖然一開始從下述國際雜誌所提出的問題出發：Pericles Papadopoulos (2023). Problem 4861. Crux Mathematicorum, 49 (7), 375；但將原問題的長度性質進一步發現面積不變量，並推廣至旁心、垂心與外心所對應的結果。

作者們對於長度及面積不變量延伸探討的一些思維值得肯定，內容中配合圖形的說明證明清晰。此作品所發展出的研究內容與研究成果，相較原上述國際雜誌所提出的問題與所附的參考解答更具完整性與廣度。但令人眼睛一亮的部分較少，是比較可惜的部分。

作品簡報

形心與多個外接圓建構的幾何性質

壹、前言

數學雜誌《Crux Mathematicorum》刊登了有趣的幾何問題。如右圖 1，
證明 (1) $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$。
(2) 點 D_A、D_B 與 D_C 分別是 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{C_1C_2}$ 的中點。

我們有系統地推廣原問題，探討將內心推廣到其他形心條件下，刻劃由 $\triangle ABC$ 所建構的長度、面積不變量及三線共點性質。最後一般化到圓外切多邊形，可畫出定量的長度、面積不變量，以及定性性質。

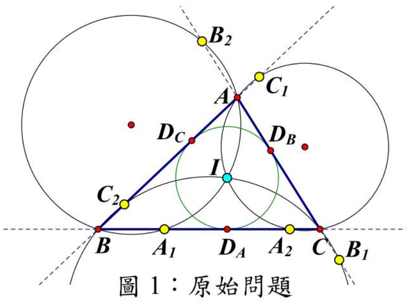


圖 1：原始問題

貳、預備知識

一、三角形的內心、旁心、外心與垂心之基本角度與對稱性質。
二、測量師公式：平面上封閉多邊形 $P_1P_2P_3\ldots P_n$ ，$P_k(x_k,y_k)$，則有向面積

$$[P_1P_2P_3\ldots P_n]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}x_k & x_{k+1}\\ y_k & y_{k+1}\end{vmatrix}，其中\ x_{n+k}=x_k、y_{n+k}=y_k\ 。$$

三、西瓦定理與逆定理：$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\times\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$ 或其角度形式 $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\times\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\times\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=1$。

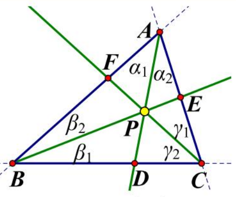


圖 2：三線共點

參、研究過程與結果

一、對於任意三角形，由給定形心與三個外接圓所建構的幾何性質

(一) 三角形的第一種建構：內心 I 點

性質 1. 在內心建構下，$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$。
性質 2. 在內心建構下，D_A、D_B 與 D_C 分別是 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{B_1B_2}$ 與 $\overline{C_1C_2}$ 的中點。
性質 3. 內心 I 點是 $\triangle AA_1A_2$、$\triangle BB_1B_2$、$\triangle CC_1C_2$ 的外心。

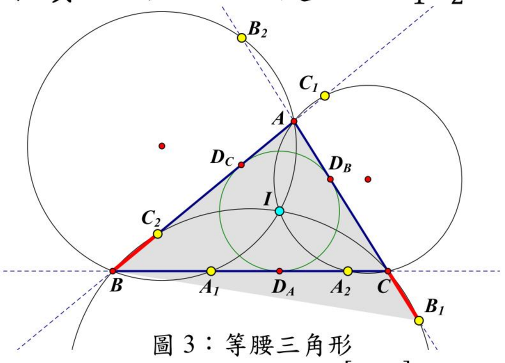


圖 3：等腰三角形

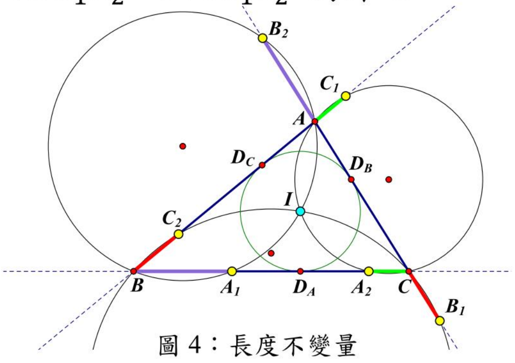


圖 4：長度不變量

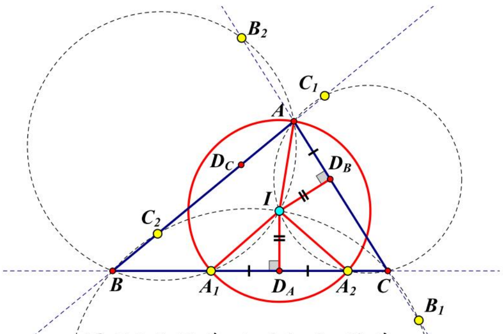


圖 5：I 點為 $\triangle AA_1A_2$ 的外心

引理 4. 有向面積比值 $\frac{[DEF]}{[ABC]}=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+1$。
性質 5. 在內心建構下，有面積不變量
(1) $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=2\times S_{ABC}$ 。
(2) $S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=\frac{2(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\times S_{ABC}$。

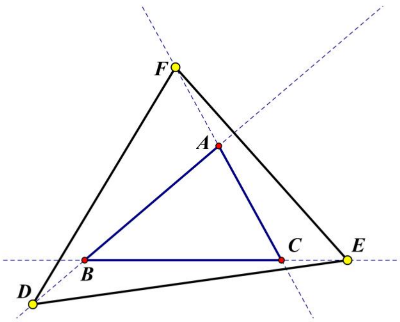


圖 6：分點三角形

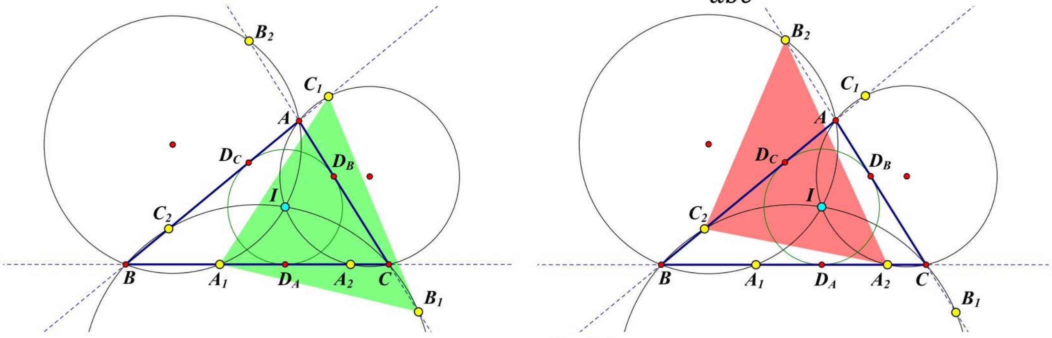


圖 7：面積成等差數列

(二) 三角形的第二種建構：旁心 J_A、J_B、J_C 點

我們發現形心建構的角是一種「可輪換的角度」，這是本研究圖形的根本結構，於是將 $\triangle ABC$ 的內心 I 換成三個旁心 J_A、J_B 與 J_C，結果發現旁心與三個外接圓建構的線段滿足 $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$。

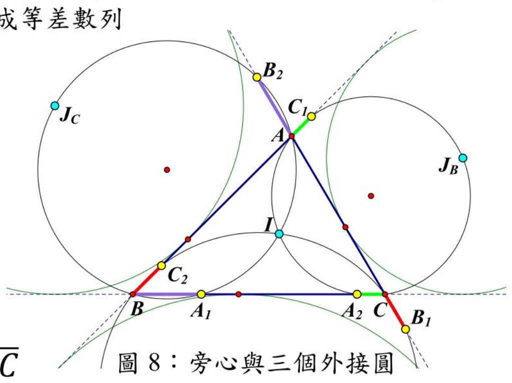


圖 8：旁心與三個外接圓

(三) 三角形的第三種建構：垂心 H 點

性質 7. 在垂心條件的建構下，$\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$
性質 8. 對於銳角 $\triangle ABC$，在垂心條件的建構下，有面積不變量
(1) $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=16\cos A\cos B\cos C\times S_{ABC}$。
(2) $S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=\frac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\times S_{ABC}$。
推論 9. 對於鈍角 $\triangle ABC$，在垂心條件的建構下，面積不變量
(1) $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=\frac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2}\times S_{ABC}$。
(2) $S_{A_1B_1C_1}-S_{A_2B_2C_2}=-16\cos A\cos B\cos C\times S_{ABC}$。

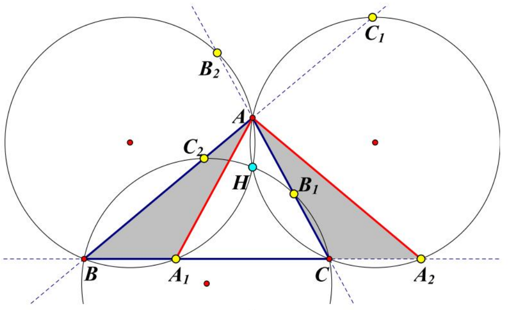


圖 9：等腰結構

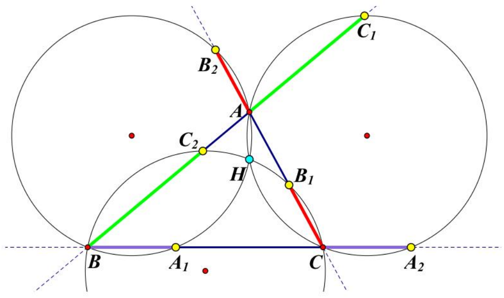


圖 10：長度不變量 (垂心)

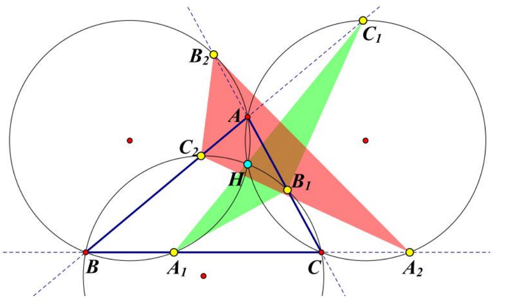


圖 11：三角形面積不變量 (銳角垂心)

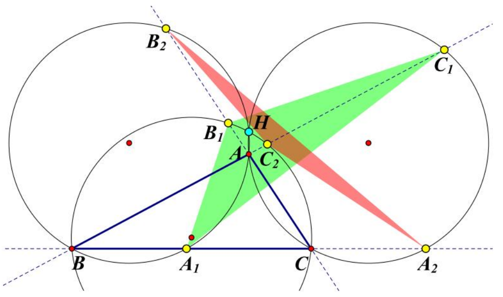


圖 12：三角形面積不變量 (鈍角垂心)

(四) 三角形的第四種建構：外心 O 點

性質 10. 對於銳角 $\triangle ABC$，在外心條件的建構下，面積不變量

(1) $S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{1}{4\cos A\cos B\cos C} \times S_{ABC}$。

(2) $S_{A_1B_1C_1} - S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{-2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \times S_{ABC}$。

推論 11. 對於鈍角 $\triangle ABC$，在外心條件的建構下，面積不變量

(1) $S_{A_1B_1C_1} + S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{2(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \times S_{ABC}$。

(2) $S_{A_1B_1C_1} - S_{A_2B_2C_2} = \dfrac{-1}{4\cos A\cos B\cos C} \times S_{ABC}$。

性質 12.

(1) 在外心條件的建構下，對於銳角 $\triangle ABC$

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \frac{-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^3+b^3+c^3)+4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \times (\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})。$$

(2) 在外心條件的建構下，對於鈍角 $\triangle ABC$

$$\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^3+b^3+c^3)-4a^2b^2c^2}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \times (\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})。$$

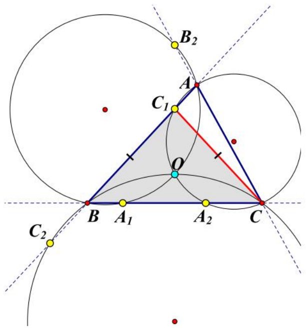


圖 13：等腰結構

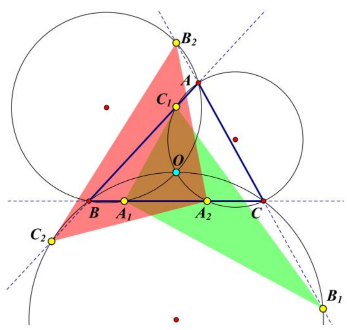


圖 14：三角形面積不變量 (外心)

(五) 三角形的四種建構下的「定性」性質：三線共點

性質 14. 在內心 I、垂心 H 或外心 O 的建構下，$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點。

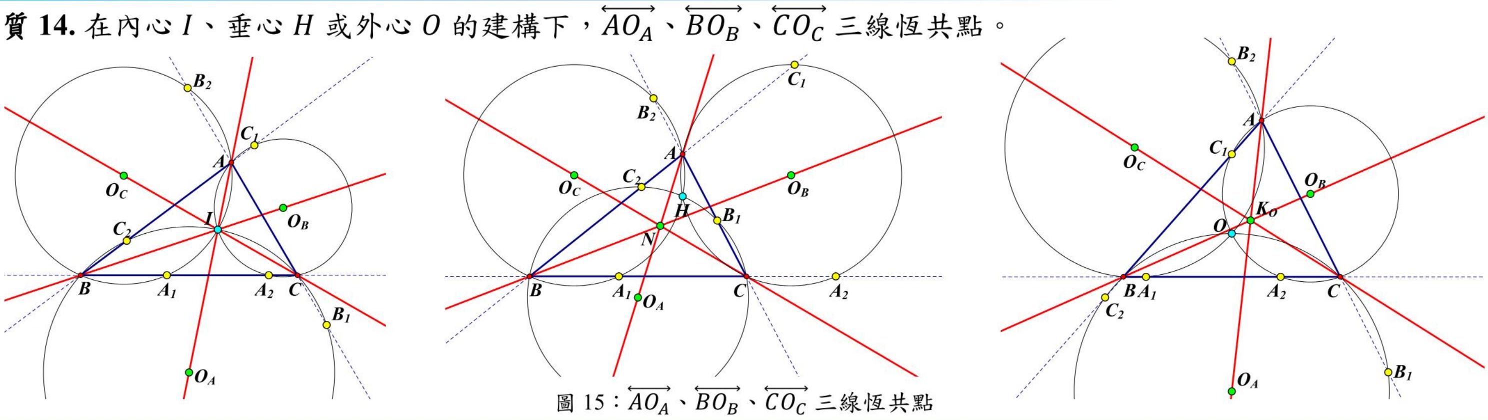


圖 15：$\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點

二、對於圓外切四邊形，由給定內心與四個外接圓所建構的幾何性質

引理 15. 兩相異直線 L_1、L_2 被直線 M 截於 A、B 兩點，對於四個內錯截角作角平分線，各交於 C、D 兩點，則 (1) A、B、C、D 四點共圓。(2) $\overline{AE} = \overline{BF}$ 且 $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$。

性質 16. 在內心建構下，$\overline{A_1B_3} + \overline{A_2B_4} + \overline{A_3B_1} + \overline{A_4B_2} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_4P_1}$。

性質 17. 在內心建構下，四邊形 $P_1P_2P_3P_4 \cong$ 四邊形 $B_1A_1B_3A_3 \cong$ 四邊形 $A_4B_2A_2B_4$。

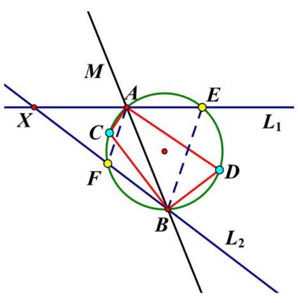


圖 16：等線段與平行

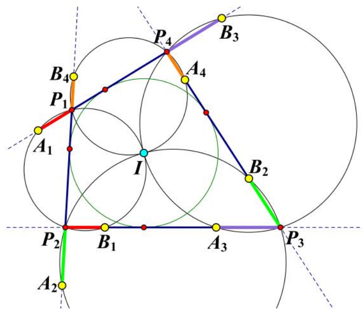


圖 17：四邊形長度不變量

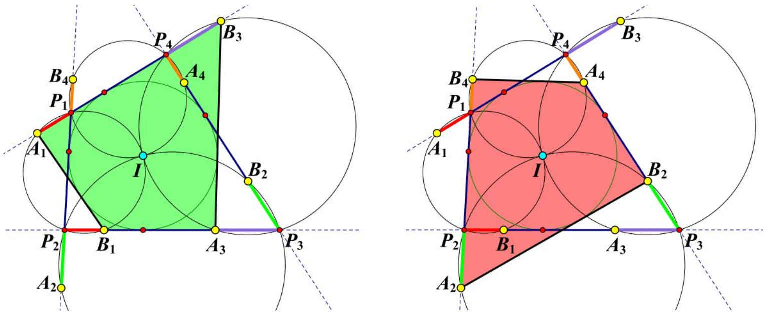


圖 18：四邊形全等與外切四邊形

三、對於圓外切 n 邊形，由給定內心與 n 個外接圓所建構的幾何性質

我們約定多邊形的頂點逆時鐘依序為點 P_1、P_2、P_3、...、P_n，其內心為 I。

依序作 $\triangle P_kP_{k+1}I$ 的外接圓分別交 $\overleftrightarrow{P_{k-1}P_k}$、$\overleftrightarrow{P_{k+1}P_{k+2}}$ 於點 A_k、B_k，$k = 1,2,\ldots n$。

定理 18. $\overline{A_1B_{n-1}} + \overline{A_2B_n} + \cdots + \overline{A_nB_{n-2}} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$

證明：令 $\overline{P_kA_k} = \overline{P_{k+1}B_k} = \delta_k$，

可得 $\overline{A_kP_{k+n-1}} = \overline{P_kP_{k+n-1}} \pm \delta_k$ 且 $\overline{B_kP_{k+n+2}} = \overline{P_{k+1}P_{k+n+2}} \mp \delta_k$

注意到 $\overline{A_kP_{k+n-1}} + \overline{B_{k+n-2}P_k} = \overline{P_kP_{k+n-1}} + \overline{A_kB_{k+n-2}}$

因此 $\sum_{k=1}^{n} \overline{P_kP_{k+n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{A_kB_{k+n-2}}$

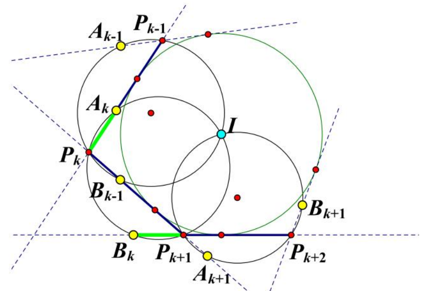


圖 19：一般化 n 邊形周長不變量

考慮將各點 A_1、B_1、A_3、B_3、A_5、B_5、……、A_n、B_n 連線形成封閉圖形，給出 A_k 與 B_k 點坐標，利用測量師公式計算面積，再巧妙分組對消化簡可得以下定理。

定理 20.

(1) 偶邊形 $n = 2m$，面積不變量 $S_{A_1B_1A_3B_3\ldots A_{2m-1}B_{2m-1}} + S_{A_2B_2A_4B_4\ldots A_{2m}B_{2m}} = 2S_{P_1P_2P_3\ldots P_n}$。

(2) 奇邊形 $n = 2m+1$，面積不變量 $S_{A_1B_1A_3B_3\ldots A_{2m+1}B_{2m+1}A_2B_2A_4B_4\ldots A_{2m}B_{2m}} = 2S_{P_1P_2P_3\ldots P_n}$。

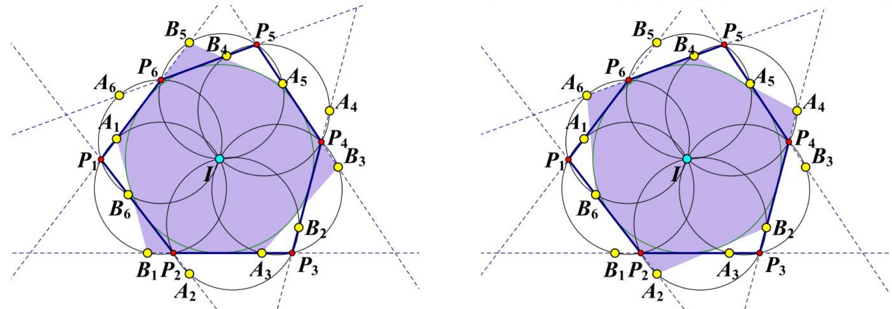


圖 20：偶邊形面積不變量 (六邊形為例)

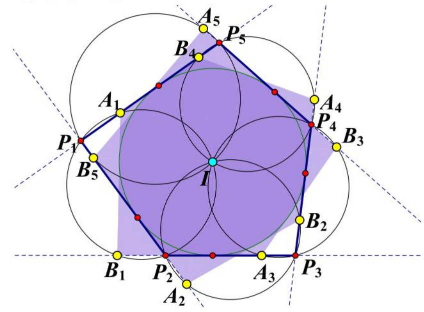


圖 21：奇邊形面積不變量 (五邊形為例)

肆、討論

一、對於任意三角形，還有其他形心具備相同的性質嗎？

考慮 $\triangle ABC$ 的形心 X，作 $\triangle XBC$ 的外接圓交 $\overline{AB}$ 於 D 點，構造出 $\triangle ADC$。本研究問題的構造與性質等價討論 $\triangle ADC$ 是否為等腰三角形？可得出有三種情形 $\overline{AD}=\overline{AC}$、$\overline{CA}=\overline{CD}$ 與 $\overline{DA}=\overline{DC}$，分別可對應到內心（旁心）、垂心 與 外心。

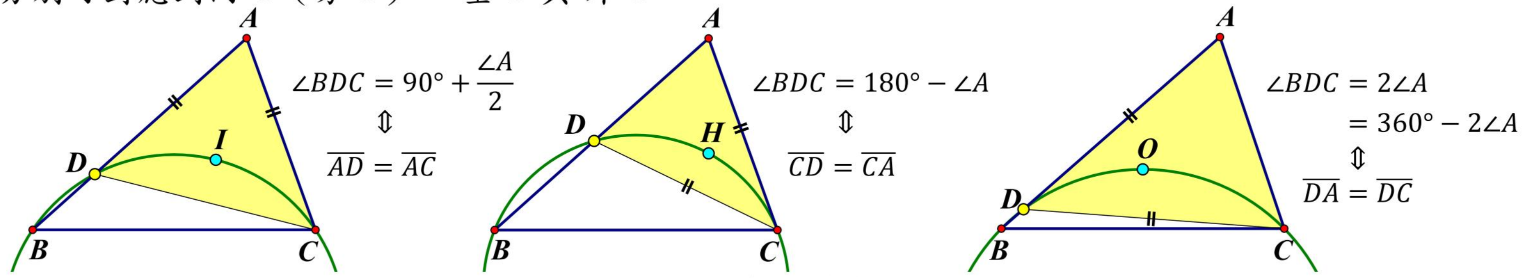


圖 22：形心與三個外接圓建構的所有圖形

二、對於任意三角形，由內心、垂心與外心建構外接圓的圓心關聯性

內心建構下 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 共點於 I。
垂心建構下 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 共點於九點圓圓心 N。
外心建構下 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 共點於 Kosnita Point（K_O 點）。
垂心 H 與外心 O 為等角共軛點，九點圓圓心 N 與 K_O 點也為等角共軛點。

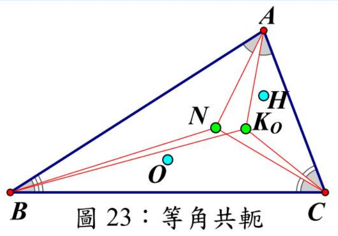


圖 23：等角共軛

定理 22. 等角結構
構造阿波羅尼奧斯圓進行刻劃
(1) 若 $\angle A < 90°$，則
$\overline{AO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$、
$\overline{BO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}BO_{A_O}$、
$\overline{CO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}CO_{A_O}$。
(2) 若 $\angle A > 90°$，則
$\overline{AO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}AO_{A_O}$ 的外角、
$\overline{BO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}BO_{A_O}$ 的外角、
$\overline{CO_{A_I}}$ 平分 $\angle O_{A_H}CO_{A_O}$ 的外角。

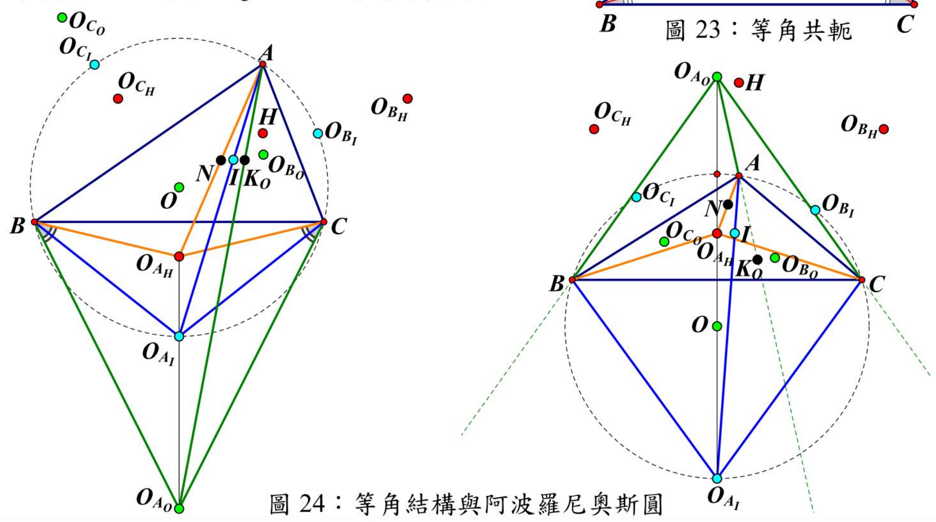


圖 24：等角結構與阿波羅尼奧斯圓

三、新成果：三種建構下，外心連線三角形之關聯性

內心建構，A、B、C、O_{A_I}、O_{B_I} 與 O_{C_I} 六點共圓
(1) $\triangle AO_{B_I}O_{C_I}$、$\triangle BO_{C_I}O_{A_I}$、$\triangle CO_{A_I}O_{B_I}$ 外心重合。
(2) $\triangle Q_{1_O}Q_{2_O}Q_{3_O} \sim \triangle J_AJ_BJ_C$。

定理23. 非直角 $\triangle ABC$ 中，
(1) $\triangle Q_{1_O}Q_{2_O}Q_{3_O} \sim \triangle O_{A_H}O_{B_H}O_{C_H} \sim \triangle ABC$。
(2) $\triangle Q_{1_H}Q_{2_H}Q_{3_H} \sim \triangle O_{A_O}O_{B_O}O_{C_O} \sim \triangle H_AH_BH_C$。

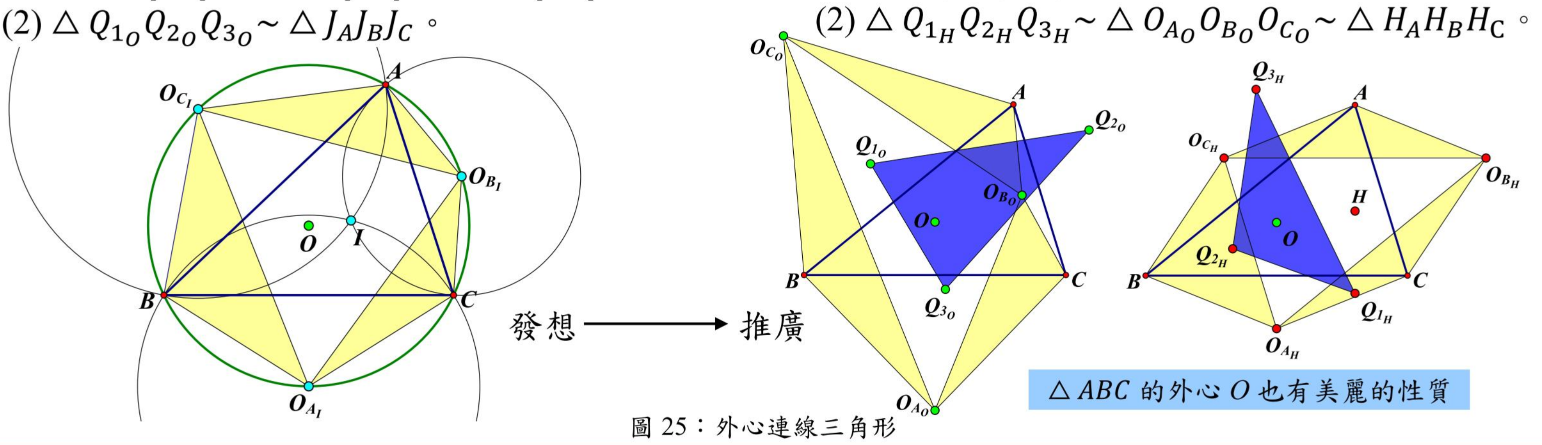


圖 25：外心連線三角形

伍、結論

一、任意三角形，探討由給定形心與三個外接圓所建構的性質

我們先證明原題目，接著考慮將 $\triangle ABC$ 的邊及延長線的六個點構造出兩個三角形，發現其面積不變量。再推廣到其它形心，刻劃長度與面積的不變量性質。最後剖析幾何結構，構成等腰三角形的充要條件為內心、外心、垂心。我們將焦點放回定性性質，給出 $\overleftrightarrow{AO_A}$、$\overleftrightarrow{BO_B}$、$\overleftrightarrow{CO_C}$ 三線恆共點，共點分別為內心、九點圓圓心、Kosnita 點，再利用阿波羅尼奧斯圓刻畫出有趣的等角結構。

二、任意圓外切四邊形，探討由給定內心與四個外接圓所建構的性質

將任意三角形推廣到任意圓外切四邊形，我們發現其本質幾何結構是截線的四條角平分線衍伸出的等長與平行性質，利用這些性質，我們發現圓外切四邊形與四個外接圓構造的長度不變量，以及面積不變量，即另外也刻畫出三個四邊形全等。

三、任意圓外切 n 邊形，探討由給定內心與 n 個外接圓所建構的性質

推廣到任意圓外切 n 邊形，給出一般化的長度不變量。隨後，我們分別分析奇邊形與偶邊形，發現兩個偶邊形 $A_1B_1A_3B_3 \ldots A_{2m-1}B_{2m-1}$ 與 $A_2B_2A_4B_4 \ldots A_{2m}B_{2m}$ 雖然沒有全等，然而其面積總和恆為原多邊形面積的 2 倍 。回到奇邊形，我們刻劃出芒星一筆畫圖形，也發現其面積恆為原多邊形面積的 2 倍，至此我們給出了奇偶多邊形面積不變量一致的結果。

陸、參考文獻

[1] Pericles Papadopoulos (2023). Problem 4861. Crux Mathematicorum, 49 (7), 375.
[2] Michal Adamaszek, Oliver Geupel, Antoine Mhanna and the UCLan Cyprus Problem Solving Group (2024). Solutions 4861. Crux Mathematicorum, 50 (2), 87-88.
[3] C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website, available at https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
[4] Kosnita Point, available at https://mathworld.wolfram.com/KosnitaPoint.html

圖片來源說明：
本研究作品說明書與海報的所有圖片皆為作者用 GSP 幾何軟體自行繪製。