中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組　數學科

第三名

030401

彭羅斯瓷磚之強制匹配費氏拼法及元件數量計算

學校名稱：　桃園市立中興國民中學

作者：	指導老師：
國二 林忻霈	張怡雯
國二 簡渤融	李慧玲

關鍵詞：　非週期性鑲嵌、強制匹配規則、費氏數列

摘要

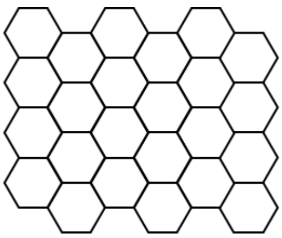
本研究從彭羅斯瓷磚出發，將飛鏢與風箏沿對稱軸切出角度分別為 108°、36°、36°及 36°、72°、72°的等腰三角形，將兩者的短邊設為 1 分別定義為 A、B 元件。拿數量不等的兩種元件拼成與原本元件相似的三角形，得出所有腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似 A 元件，以及所有腰邊長為 $x+y\varphi\ (x\neq y+1)$的相似 B 元件，都有辦法利用 A、B 元件拼貼出來，其中x、y為正整數。

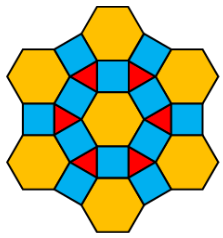
本研究訂定「強制匹配費氏拼法」來拼貼相似 A、B 元件，從而建構出非週期性鑲嵌彭羅斯瓷磚。使用的拼法為後一個圖形是前兩個圖形的組合，且過程中因需符合強制匹配弧線，在拼貼相似 B 元件時，需將前一個圖形翻轉後，再經旋轉將兩個圖形組合。本研究找出拼湊結合時，產生飛鏢與風箏數量的規律，推算出總數量的遞迴關係式。

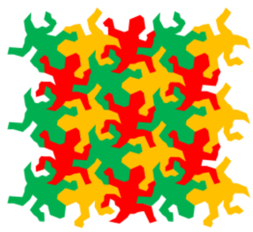
壹、前言

一、研究動機

在營隊的課程中，我們學到了與鑲嵌有關的主題，了解到不管是用單一正多邊形、多個正多邊形，或者是如艾雪作品中經由平移、旋轉、鏡射技巧的鑲嵌，都是週期性鑲嵌，


單一正多邊形


多個正多邊形


仿艾雪〈蜥蜴〉旋轉技巧

因此，非週期性鑲嵌一直以來都是一道難題。最近有四位數學家聯手提出了一個非週期性多邊形瓷磚，此瓷磚是由八個 60°-90°-120°-90° 箏形磚塊拼接成具有 13 個邊的「帽子」形狀，拿數個帽子與它的鏡像圖形就可以做出非週期性的密鋪[1]（下圖 1）。而在這之前，我們很喜歡的一位數學家彭羅斯也發現了由兩個瓷磚組成的非週期性鑲嵌，兩個瓷磚分別形如飛鏢和風箏[3]（下圖 2），於是我們便好奇飛鏢和風箏可以如何繪製？在拼貼的過程中有什麼樣的規律與特性？這些特性能否應用於建構彭羅斯瓷磚？便開始這次的科展研究。

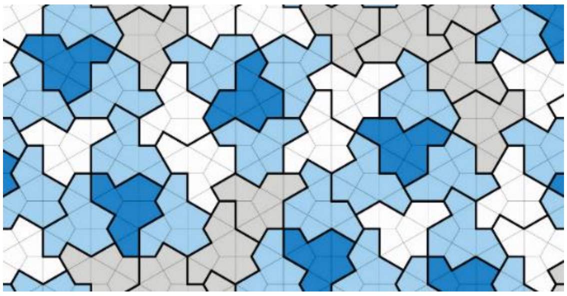


圖 1：非週期性地磚－13 個邊的帽子[2]

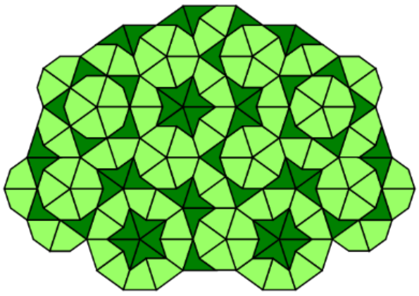


圖 2：非週期性瓷磚－飛鏢和風箏[3]

二、研究目的

(一) 解構彭羅斯瓷磚，將飛鏢和風箏兩種元件沿著對稱軸切一半，計算邊長大小，定義出本研究中使用的 A、B 元件。利用兩種元件拼貼相似三角形，運用一層層往下加等腰梯形的拼法繪製出樹狀圖，有系統地找出無法拼出何種邊長的相似三角形。

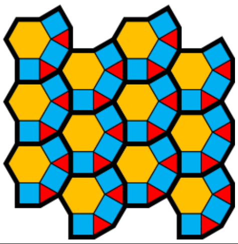
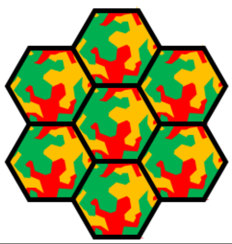
(二) 應用費氏數列拼法搭配強制匹配規則拼貼相似三角形，並將交界處的 A、B 元件轉換成飛鏢或風箏，本研究自訂一套規則將難以拼貼的非週期性鑲嵌彭羅斯瓷磚建構出來。

(三) 找出在強制匹配費氏拼法下，腰邊、底邊以及交界處在拼貼時的關係式，進一步推算出飛鏢與風箏數量的遞迴關係式，並利用幾何圖形加以解釋代數式子。

三、文獻探討

(一) 週期性鑲嵌與非週期性鑲嵌

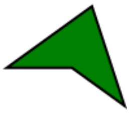
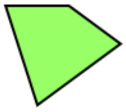
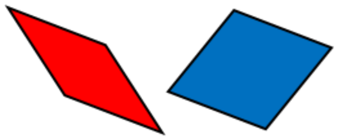
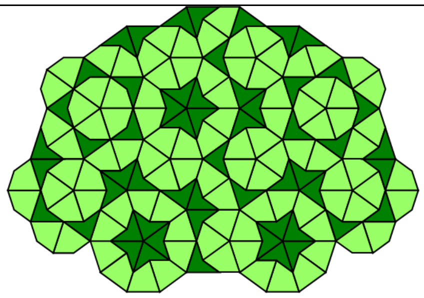
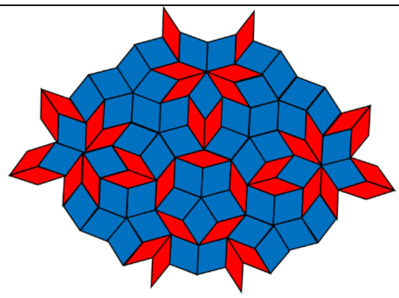
1. 週期性鑲嵌：利用一個單位結構，在不經旋轉、不經鏡射的情況下，透過平移排列密鋪整個平面。舉例：

舉例一：多個正多邊形		舉例二：仿艾雪〈蜥蜴〉旋轉技巧	
單位結構	週期性鑲嵌	單位結構	週期性鑲嵌
			

2. 非週期性鑲嵌：“無法”利用一個單位結構，在不經旋轉、不經鏡射的情況下，透過平移排列密鋪整個平面。

(二) 彭羅斯瓷磚

英國數學家<u>羅傑．彭羅斯</u>創造出符合非週期性鑲嵌的彭羅斯瓷磚，彭羅斯瓷磚有兩種不同的形式，分別是「飛鏢與風箏形式」與「菱形形式」[3]，如下方的圖 2 與圖 3。

	飛鏢與風箏形式	菱形形式
元件	飛鏢： 風箏：	兩種菱形：
非週期性鑲嵌	 圖 2：非週期性瓷磚－飛鏢和風箏[3]	 圖 3：非週期性瓷磚－兩種菱形[3]

(三) 與鑲嵌有關的歷屆科展作品

過去的科展作品多半圍繞在週期性鑲嵌，像是：

1. 中華民國第 45 屆科展．國中組數學科．平面與立體鑲嵌之研究[4]

   這件科展主要在研究平面圖形和立體的鑲嵌性質。

2. 中華民國第 62 屆科展．國中組數學科．解構奧運會徽探討平面鑲嵌[5]

   這件科展主要在分析奧運會徽的鑲嵌設計以及組成其它圖形。

3. 中華民國第 62 屆科展．高中組數學科．百密無一疏－特殊多邊形密閉區塊之研究[6]

   這件科展用無法密鋪的圖形，填補空隙後，形成單位結構，再繼續鑲嵌。

鮮少有人針對非週期性鑲嵌進行研究，目前有查到以下這件：

4. 新北市 111 學年科展．國中組數學科．潘洛斯多邊形性質與非週期性密鋪之研究[7]

   這件科展用正三角形遵循王氏磚的規則，找出使用六種圖形拼出的非週期性鋪磚。

非週期性鑲嵌的研究難度較高，但因過去相關科展件數少，具有較廣泛的探討空間。

貳、研究設備與器材

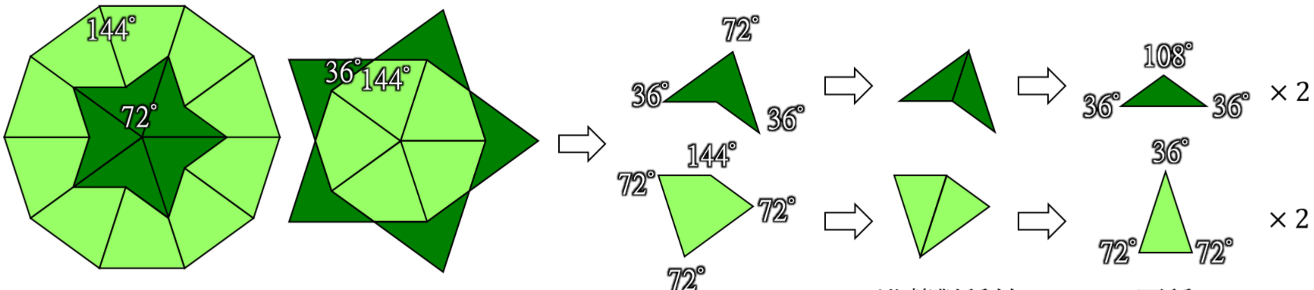
紙、筆、電腦文書軟體 PowerPoint（下載 AMA）、3D 列印拼圖元件

參、研究過程與方法

一、彭羅斯瓷磚切出 A、B 元件拼貼相似三角形

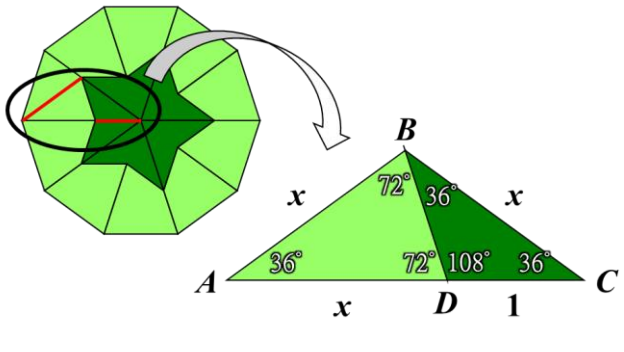
(一) 從飛鏢和風箏得到 A、B 元件

彭羅斯瓷磚其中一種形式是由飛鏢和風箏組成，如下圖，在瓷磚裡可以看到形如輪胎和太陽的拼法，這些拼法都會出現正十邊形，藉此可以推算出飛鏢和風箏這兩個四邊形的四個內角。飛鏢和風箏具有線對稱性，沿著對稱軸將圖形切一半（如下圖），都可以得到等腰三角形，將飛鏢切一半得出「角度為 108˚、36˚、36˚的等腰鈍角三角形」；將風箏切一半得出「角度為 36˚、72˚、72˚的等腰銳角三角形」。



輪胎　　太陽　　飛鏢與風箏　　沿著對稱軸切一半　　兩種等腰三角形

如下左圖，沿對稱軸切一半後，圈出來的三角形是由上述提到的兩種等腰三角形組成的，利用相似三角形的邊長成比例，可以得到



ΔABC ~ ΔCDB (AA 相似性質)

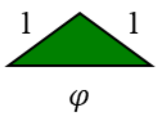
$$\Rightarrow \overline{AB} : \overline{CD} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

$$\Rightarrow x : 1 = (x+1) : x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (負不合)}$$

上式算出的 x 正好是黃金比例 $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，由此可得出兩種等腰三角形的邊長比，在「飛鏢與風箏形式」之下解構，等腰鈍角三角形的短邊會等於等腰銳角三角形的短邊，我們將兩種等腰三角形的短邊設為 1、長邊設為 φ，分別定義為 A、B 元件，詳見表 1。

A 元件：

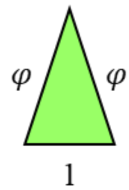
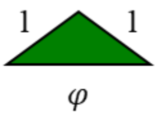
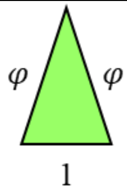
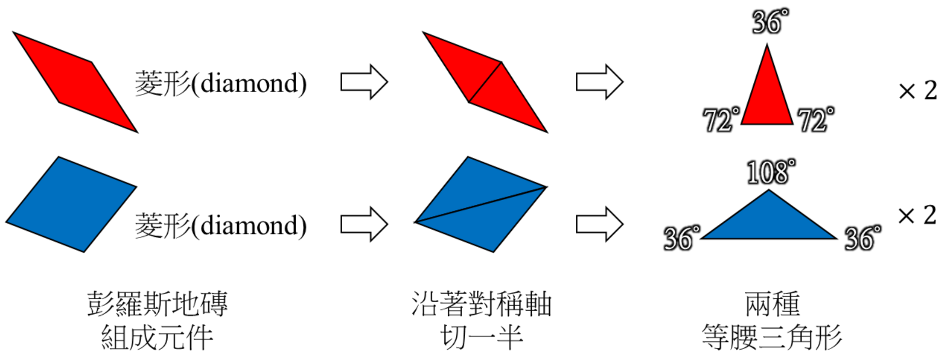
B 元件：

表 1：從彭羅斯瓷磚解構出的 A、B 元件

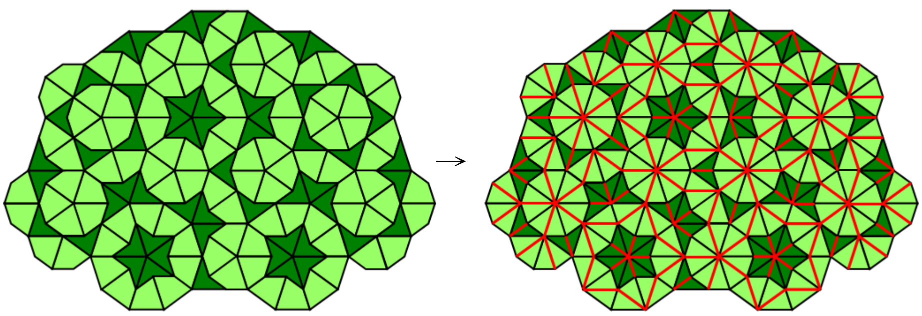
	A 元件	B 元件
圖示		
三個內角	108°、36°、36°	36°、72°、72°
腰邊長	1	φ
底邊長	φ	1

此外，如下圖，如果是採用彭羅斯瓷磚的另一種形式，也就是元件為兩種不同的菱形，分別沿著其中一條對稱軸將兩種菱形切一半，也可以得到上述提及的「角度為 36°、72°、72°的等腰銳角三角形」和「角度為 108°、36°、36°的等腰鈍角三角形」。不一樣的地方是，在「菱形形式」下，等腰鈍角三角形的短邊會等於等腰銳角三角形的長邊。本篇採用的是「飛鏢與風箏形式」進行後續研究。

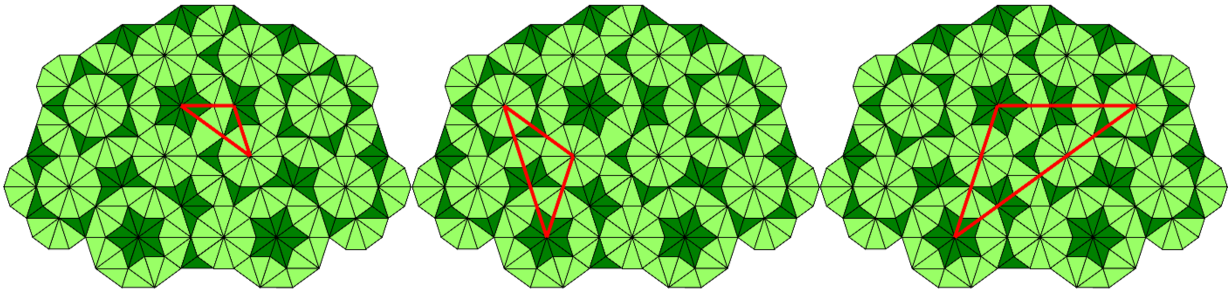


(二) 相似 A、B 元件的面積

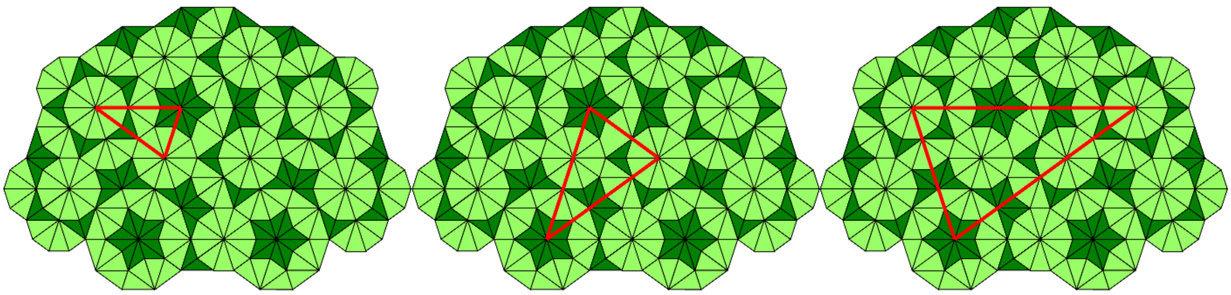
如下圖，將彭羅斯瓷磚中的飛鏢與風箏元件切一半，得出由 A、B 元件拼貼的鑲嵌圖形，我們發現裡頭有許多與 A、B 元件相似的放大三角形，



將彭羅斯瓷磚的的飛鏢與風箏切成 A、B 元件



飛鏢與風箏切成 A、B 元件後裡面的相似 A 元件



飛鏢與風箏切成 A、B 元件後裡面的相似 B 元件

由此可知，拿數量不等的 A、B 兩種元件可以拼成面積更大且與原本元件相似的三角形，於是，我們好奇是不是所有與這兩種元件相似的三角形都可以拼出來？首先，我們先觀察 A、B 元件的面積有什麼關係，由黃金比例 φ 的等價式子：

$$\varphi^2-\varphi-1=0 \Rightarrow \varphi^2=\varphi+1 \;；\; \frac{1}{\varphi}=\varphi-1$$

得出所有以 φ^2 和 $\dfrac{1}{\varphi}$ 表示的式子都可以化簡成的 φ 一次形式。

$\boxed{\text{A 元件}}$

$$\text{高 } h_A=\sqrt{1^2-\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4-\varphi^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-(\varphi+1)}=\frac{1}{2}\sqrt{3-\varphi}$$

$$\text{面積 } s_A=\varphi\times\frac{1}{2}\sqrt{3-\varphi}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\varphi\sqrt{3-\varphi}=\frac{1}{4}\sqrt{\varphi^2(3-\varphi)}=\frac{1}{4}\sqrt{(\varphi+1)(3-\varphi)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{3\varphi-\varphi^2+3-\varphi}=\frac{1}{4}\sqrt{3+2\varphi-(\varphi+1)}=\frac{1}{4}\sqrt{2+\varphi}$$

$\boxed{\text{B 元件}}$

$$\text{高 } h_B=\sqrt{\varphi^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\varphi^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4\varphi^2-1}=\frac{1}{2}\sqrt{4(\varphi+1)-1}=\frac{1}{2}\sqrt{3+4\varphi}$$

$$\text{面積 } s_B=1\times\frac{1}{2}\sqrt{3+4\varphi}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{3+4\varphi}$$

由 A、B 元件的面積可以推論出以下兩個面積關係式：

1. **面積關係式一：$\boldsymbol{s_A \times \varphi = s_B}$**

$$s_A \times \varphi = \frac{1}{4}\varphi\sqrt{2+\varphi} = \frac{1}{4}\sqrt{\varphi^2(2+\varphi)} = \frac{1}{4}\sqrt{(\varphi+1)(2+\varphi)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2\varphi+\varphi^2+2+\varphi} = \frac{1}{4}\sqrt{2+3\varphi+(\varphi+1)} = \frac{1}{4}\sqrt{3+4\varphi} = s_B$$

由此可知，A 元件面積 $\times \varphi =$ B 元件面積，即$s_A \times \varphi = s_B$。

2. **面積關係式二：$\boldsymbol{s_B \times \varphi = s_A + s_B}$**

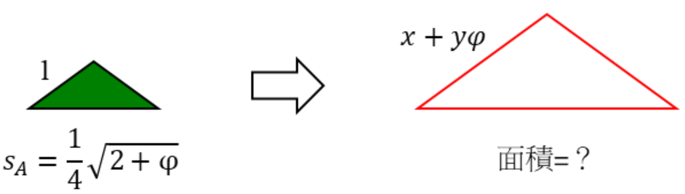
根據 1. 可得到 $s_A = \frac{1}{\varphi} \times s_B = (\varphi - 1) \times s_B$

$\Rightarrow s_A = s_B \times \varphi - s_B \Rightarrow s_B \times \varphi = s_A + s_B$

由此可知，B 元件面積 $\times \varphi =$ A 元件面積 $+$ B 元件面積，即$s_B \times \varphi = s_A + s_B$。

因為是拿數量不等的 A、B 兩種元件進行拼貼，所以拼出來的相似三角形，其邊長會是 A、B 元件邊長的整數倍，也就是 1 和 φ 的整數倍。由 φ 的等價式子，可以計算出腰邊長為 $x + y\varphi$ 的相似三角形的面積，其中 x、y 為正整數，再根據面積關係式一、二，進而整理出需要使用多少數量的 A 元件及 B 元件。

$\boxed{\text{相似 A 元件}}$



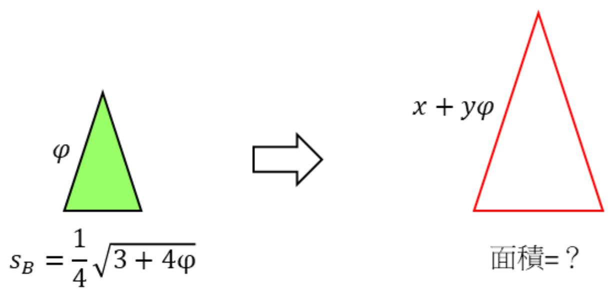
腰邊長為 $x + y\varphi$ 的相似 A 元件，面積為 A 元件的 $(x+y\varphi)^2$ 倍，

$$(x+y\varphi)^2 = x^2 + 2xy\varphi + y^2\varphi^2 = x^2 + 2xy\varphi + y^2(\varphi+1) = (x^2+y^2) + (2xy+y^2)\varphi$$

$$\text{面積} = s_A \times [(x^2+y^2) + (2xy+y^2)\varphi] = (x^2+y^2) \times s_A + (2xy+y^2) \times s_A \times \varphi$$

$$= (x^2+y^2) \times s_A + (2xy+y^2) \times s_B$$

$\boxed{\text{相似 B 元件}}$



腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似 B 元件，面積為 A 元件的 $(\dfrac{x+y\varphi}{\varphi})^2$ 倍，

$$\left(\frac{x+y\varphi}{\varphi}\right)^2=\left(x\cdot\frac{1}{\varphi}+y\right)^2=[x(\varphi-1)+y]^2=[(-x+y)+x\varphi]^2$$

$$=(x^2-2xy+y^2)+(-2x^2+2xy)\varphi+x^2\varphi^2$$

$$=(x^2-2xy+y^2)+(-2x^2+2xy)\varphi+x^2(\varphi+1)$$

$$=(2x^2-2xy+y^2)+(-x^2+2xy)\varphi$$

面積 $=s_B\times[(2x^2-2xy+y^2)+(-x^2+2xy)\varphi]$

$$=(2x^2-2xy+y^2)\times s_B+(-x^2+2xy)\times s_B\times\varphi$$

$$=(2x^2-2xy+y^2)\times s_B+(-x^2+2xy)\times(s_A+s_B)$$

$$=(-x^2+2xy)\times s_A+(x^2+y^2)\times s_B$$

小結一

1. **如果要拼出腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似 A 元件，需要使用 x^2+y^2 個 A 元件與 $2xy+y^2$ 個 B 元件，其中 x、y 為正整數。**
2. **如果要拼出腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似 B 元件，需要使用 $-x^2+2xy$ 個 A 元件與 x^2+y^2 個 B 元件，其中 x、y 為正整數。**

(三) 相似 A 元件的圖形解構

雖然小結一得出數量關係，但拼貼時還需考慮角度、長度等因素，於是，我們使用一層層往下加腰為 1 或 φ 的等腰梯形的拼法，有系統地找出無法拼出何種邊長的相似三角形。在相似 A 元件中，起始可以從腰長為 1 或 φ 開始，故可以得出兩個樹狀圖（如圖 4、圖 5）：

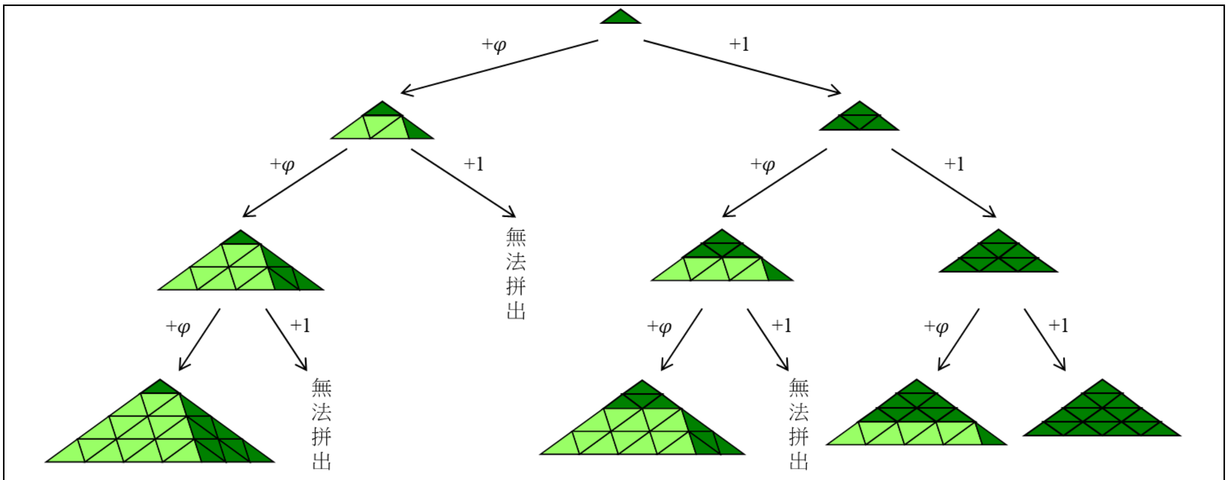


圖 4：起始 A 元件腰長為 1，往下加等腰梯形之樹狀圖

從圖 4 的樹狀圖中，可以看到有些路徑是無法拼出的，例如：腰邊長從 1 開始，先往下加一層腰長為 φ 的等腰梯形，若要再加一層腰長為 1 的等腰梯形，會無法拼出，原因是剩下的空隙無法再用元件拼出（如右圖），但是如果最終想要拼出腰長為 $2+\varphi$ 的相似 A 元件，還是可以經由不同的路徑得出，也就是腰邊長從 1 開始，先往下加一層腰長為 1 的等腰梯形，再加一層腰長為 φ 的等腰梯形。因此，在這種情況下，所有的圖形都有辦法拼出來。

另外，從圖 4 中也可以計算出往下拼接的等腰梯形中，A、B 元件分別使用的數量，我們將數量整理成表 2，已知 x、y 為正整數，沒有任何一個相似 A 元件的底邊為 1 的 x 倍，所以在這個情況下就不繼續討論往下加等腰梯形；當前一個三角形的底邊為 1 的 x 倍加 φ 的 y 倍，則無法在往下加腰長為 1 的等腰梯形。

表 2：起始 A 元件腰長為 1，往下方加等腰梯形之元件數量關係

前一個底邊 / 加上梯形的腰	x	$y\varphi$	$x+y\varphi$
1	無	A 元件：$2y+1$ B 元件：0	無
φ	無	A 元件：1 B 元件：$2y+1$	A 元件：$2x+1$ B 元件：$2y+1$

*註：x、y 為正整數

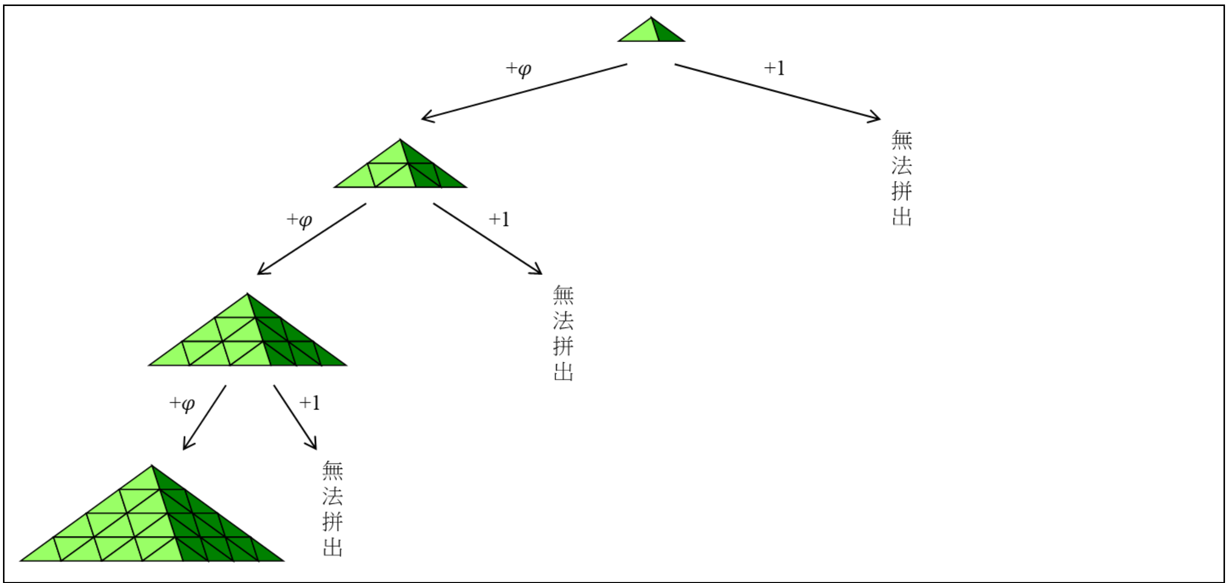


圖 5：起始相似 A 元件腰長為 φ，往下加等腰梯形之樹狀圖

從圖 5 的樹狀圖中，可以看到腰邊長從 φ 開始，都無法再往下加一層腰長為 1 的等腰梯形，但是如果最終想要拼出如腰長為 $1+\varphi$ 的相似 A 元件，還是可以從圖 4 的路徑中得出。總結圖 4 與圖 5，所有的相似 A 元件都有辦法拼出來。將數量整理成表 3。

表 3：起始相似 A 元件腰長為 φ，往下方加等腰梯形之元件數量關係

前一個底邊 \ 加上梯形的腰	x	$y\varphi$	$x+y\varphi$
1	無	無	無
φ	無	無	A 元件：$2x+1$ B 元件：$2y+1$

*註：x、y 為正整數

(四) 相似 B 元件的圖形解構

在相似 B 元件中，起始只能從腰長為 φ 開始，故只會得到一個樹狀圖（如圖 6）：

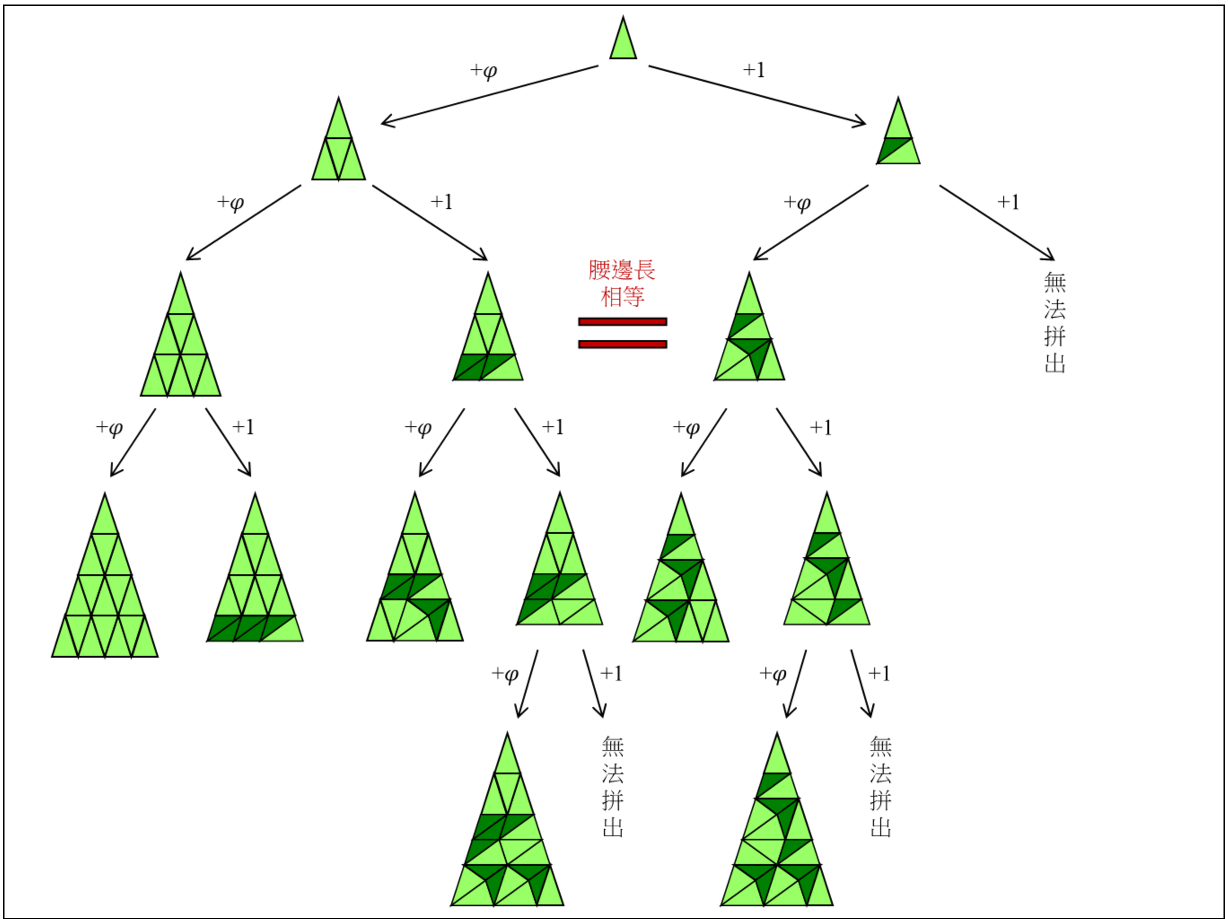


圖 6：起始 B 元件腰長為 φ，往下加等腰梯形之樹狀圖

從圖 6 的樹狀圖中，可以看到有些路徑是無法拼出的，舉例一：腰邊長從 φ 開始，先往下加一層腰長為 1 的等腰梯形，若要再加一層腰長為 1 的等腰梯形，會無法拼出，原因是剩下空隙的面積比元件還小，所以無法再拼上元件(如右圖)，且腰長為 $2+\varphi$ 的相似 B 元件也無法經由其他路徑得出。舉例二：腰邊長從 φ 開始，往下加腰長為的 $2+\varphi$ 等腰梯形（順序可換，即「加 1→加φ→加 1」或「加φ→加 1→加 1」)，若要再加一層腰長為 1 的等腰梯形，會無法拼出，且腰長為 $3+2\varphi$ 的相似 B 元件也無法經由其他路徑得出。

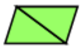
因此，我們發現以下性質：利用數量不等的 A、B 元件無法拼出腰長為 $(k+1)+k\varphi$ 的相似 B 元件，其中 k 為正整數。

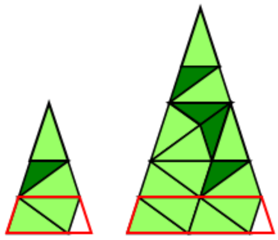
證明：

如果要拼出腰長為 $(k+1)+k\varphi$ 的相似 B 元件，會有以下兩種方式：

Case1：從腰長為 $k+k\varphi$ 的相似 B 元件往下加一層腰為 1 的等腰梯形

腰長為 $k+k\varphi$ 的相似 B 元件 ⇒ 底邊長 $\dfrac{k+k\varphi}{\varphi}=k\cdot\dfrac{1}{\varphi}+k=k\cdot(\varphi-1)+k=k\varphi$

由右圖可知，當底邊長為 φ 的正整數倍，則無法往下加一層腰為 1 的等腰梯形，因為必需先放上平行四邊形 ，放完後剩下空隙的面積比元件還小，所以無法再拼上元件，因此，Case1 這個方式是做不到的。



Case2：從腰長為 $(k+1)+(k-1)\varphi$ 的相似 B 元件往下加一層腰為 φ 的等腰梯形

腰長為 $(k+1)+(k-1)\varphi$ 的相似 B 元件 ⇒ 底邊長為 $\dfrac{(k+1)+(k-1)\varphi}{\varphi}$

$=(k+1)\cdot\dfrac{1}{\varphi}+(k-1)=(k+1)\cdot(\varphi-1)+(k-1)=(k+1)\varphi-2$

因為利用 A、B 元件拼貼時，數量會是正整數，所以底邊長必定為 1 的正整數倍加 φ 的正整數倍，故不會是 $(k+1)\varphi-2$，因此，Case2 這個方式也是做不到的。

由此可知，不是所有的相似 B 元件都可以利用 A、B 元件拼貼出來。

另外，我們將數量整理成表 4，根據上述的 Case1 可得，在表中可以得出，當前一個三角形的底邊為 φ 的 y 倍，則無法在往下加腰長為 1 的等腰梯形，

表 4：起始 B 元件腰長為 φ，往下方加等腰梯形之元件數量關係

前一個底邊 \ 加上梯形的腰	x	$y\varphi$	$x+y\varphi$
1	A 元件：$2x-1$ B 元件：1	無	A 元件：$2x-1$ B 元件：$2y+1$
φ	A 元件：0 B 元件：$2x+1$	A 元件：$2y$ B 元件：$2y+1$	A 元件：$2y$ B 元件：$2x+2y+1$

*註：x、y 為正整數

小結二

1. 所有腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似 A 元件都有辦法利用 A、B 元件拼貼出來，其中 x、y 為正整數。

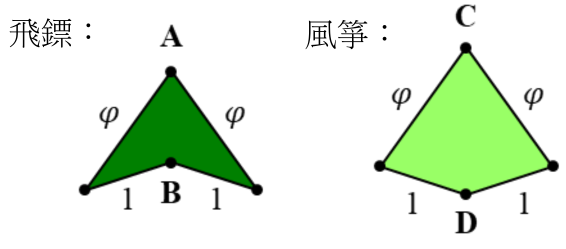
2. 所有腰邊長為 $x+y\varphi\ (x\neq y+1)$ 的相似 B 元件都有辦法利用 A、B 元件拼貼出來，其中 x、y 為正整數。

二、強制匹配費氏拼法建構彭羅斯瓷磚

由於要拼出非週期性鑲嵌的彭羅斯瓷磚是件不容易的事情，本研究旨在找出一套建構彭羅斯瓷磚的方式，於是便有了接下來的研究過程。

(一) 強制匹配規則

強制匹配規則有不同畫法，其目的是為了能夠拼出非週期性鑲嵌的圖形，所以其畫法是根據非週期性鑲嵌而訂定的，而彭羅斯瓷磚的其中一種強制匹配畫法，是在飛鏢與風箏上畫弧線[3]，拼貼時要將弧線連接在一起。接下來，我們將說明如何在飛鏢的頂點 A、B 以及風箏的頂點 C、D 上畫弧線（如右圖），由於飛鏢是由兩個 A 元件組成、風箏是由兩個 B 元件組成，故假設飛鏢與風箏的短邊皆為 1、長邊皆為φ。



如圖 7，如果從飛鏢開始往下拼貼，由圖中上方分支可看出，

頂點 B 剛好可以放一個風箏 144°的內角，但是按照這樣的拼法會形成週期性鑲嵌，因此，在飛鏢的頂點 B 所畫的弧線，其半徑不可以和在風箏的頂點 D 所畫的弧線一樣；圖中下

方分支才是正確的拼法，也就是在頂點 B 放入兩個風箏 72°的內角，由此可得條件一：

在飛鏢的頂點 B 所畫的弧線半徑 ＝1－在風箏的頂點 D 所畫的弧線半徑

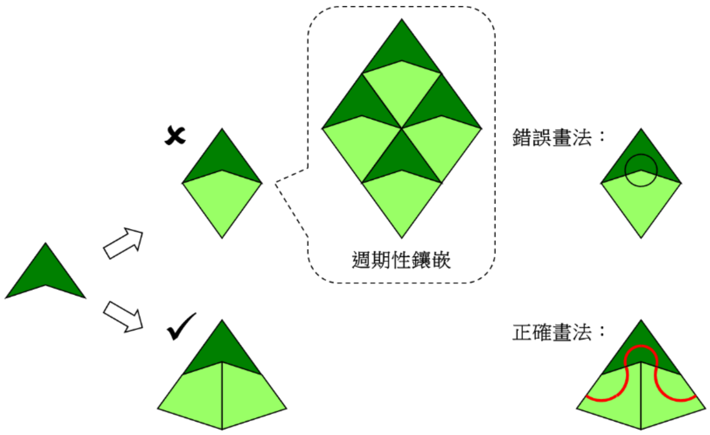


圖 7：從飛鏢開始往下拼貼

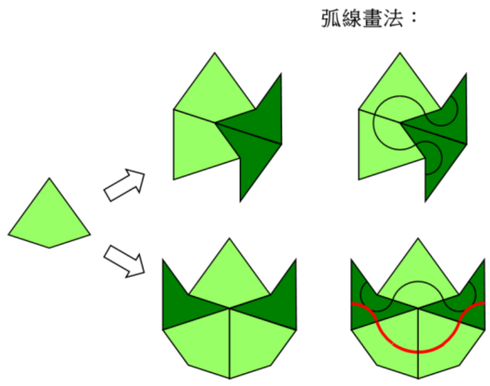


圖 8：從風箏開始往下拼貼

如圖 8，如果從風箏開始往下拼貼，圖中上方分支的弧線畫法就是剛剛討論的那一組；觀察圖中的下方分支，頂點 D 先從左右各加一個飛鏢 36°的內角，若考慮等邊長拼貼，剩下的 144°只能放入兩個風箏 72°的內角，由此可得條件二：

在飛鏢的頂點 A 所畫的弧線半徑 ＝ φ－在風箏的頂點 C 所畫的弧線半徑

綜合條件一與條件二，如圖 9，假設在飛鏢的頂點 A 及頂點 B 所畫的弧線半徑分別為 y 及 x，則在風箏的頂點 C 及頂點 D 所畫的弧線半徑分別會是 $1-x$ 及 $\varphi-y$，

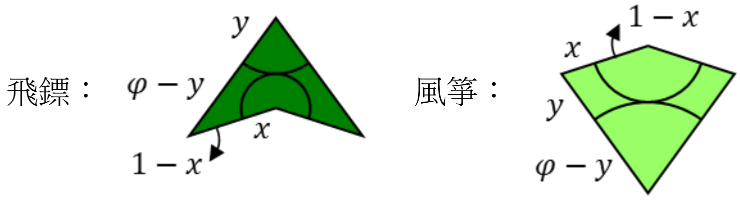
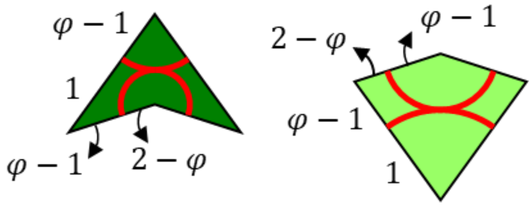
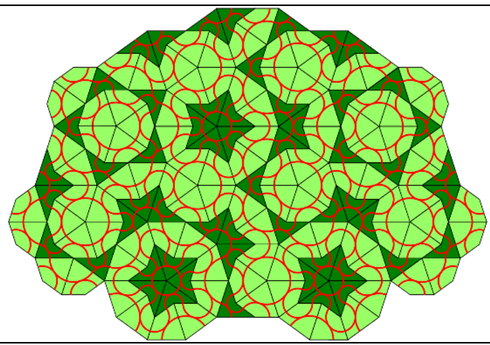
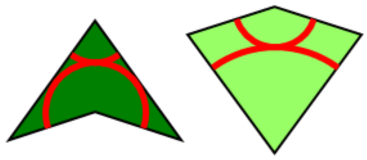
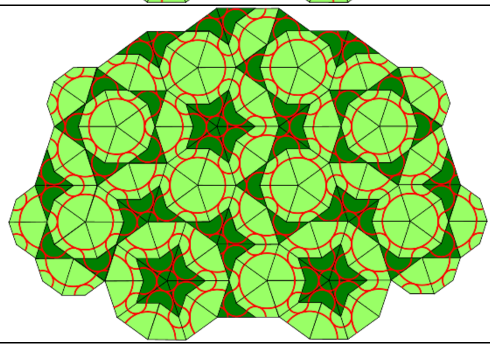


圖 9：飛鏢與風箏的強制匹配規則畫法

計算長度範圍，其中長度 x 不得大於 A 元件長邊上的高（$=\frac{1}{2}\sqrt{3-\varphi}$），否則弧線會超出飛鏢。若再加上剛好讓兩的弧線碰在一起的條件（即 $x+y=1$），可以推出 x 和 y 的範圍如下：

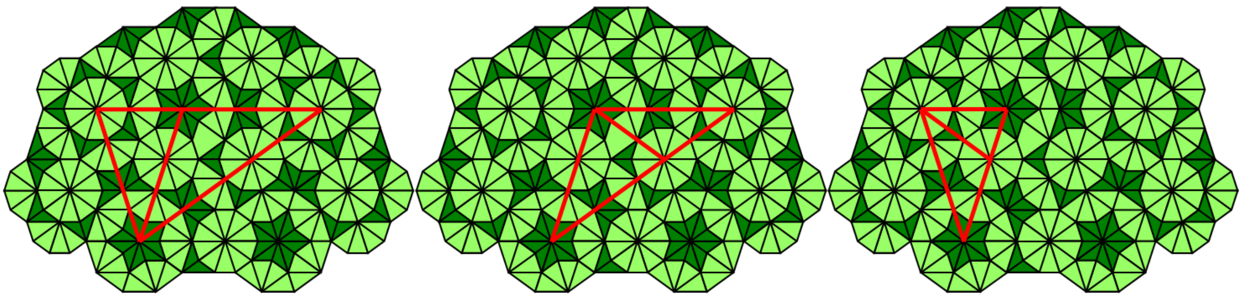
$$\begin{cases} 0<x\le\frac{1}{2}\sqrt{3-\varphi} \\ 0<y<1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<x\le\frac{1}{2}\sqrt{3-\varphi}\fallingdotseq 0.59 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3-\varphi}\le y<1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

下表舉出兩個例子，舉例一是參考網路與書籍資料最常見的畫法[8]，即 $x=2-\varphi$、$y=\varphi-1$，舉例二是在符合 x 和 y 的範圍內，任意選擇的一種畫法。

<table>
<tr><td></td><td>弧線畫法</td><td>彭羅斯瓷磚</td></tr>
<tr><td>舉
例
一</td><td>$x=2-\varphi$、$y=\varphi-1$
</td><td></td></tr>
<tr><td>舉
例
二</td><td>在範圍內任意選擇
</td><td></td></tr>
</table>

(二) 面積與費氏數列的關係

觀察解構後的彭羅斯瓷磚，也就是將飛鏢與風箏切一半得出由 A、B 元件拼貼的鑲嵌圖形，裡頭的相似 A、B 元件可以拆解成，由面積比它小的相似 A 元件和相似 B 元件拼貼在一起，此拼法與費氏數列有關，在維基百科中也有提及[3]。



彭羅斯瓷磚中相似 A、B 元件的拼法

這些相似 A、B 元件具有特殊的面積關係，根據前面提到的面積關係式一、二，可以寫出首項為 s_A、公比為 φ 的等比數列 a_n，列出前六項如下：

$$a_1=s_A$$

$$a_2=s_A\times\varphi=s_B$$

$$a_3=s_A\times\varphi^2=s_B\times\varphi=s_A+s_B=a_1+a_2$$

$a_4 = s_A \times \varphi^3 = (s_A + s_B) \times \varphi = s_A \times \varphi + s_B \times \varphi = s_A + 2s_B = a_2 + a_3$

$a_5 = s_A \times \varphi^4 = (s_A + 2s_B) \times \varphi = s_A \times \varphi + 2s_B \times \varphi = 2s_A + 3s_B = a_3 + a_4$

$a_6 = s_A \times \varphi^5 = (2s_A + 3s_B) \times \varphi = 2s_A \times \varphi + 3s_B \times \varphi = 3s_A + 5s_B = a_4 + a_5$

從列出來的前幾項可以發現等比數列 a_n 會滿足費氏數列的遞迴關係式，也就是

$$a_n = s_A \times \varphi^{n-1} = a_{n-2} + a_{n-1}\text{，}n \geq 3\text{，}$$

另外，還發現等比數列 a_n 也可以表示成 s_A 和 s_B 的整數倍，其中係數為費氏數，

定義費氏數列足碼為 $\begin{cases} f_1 = 1\,, f_2 = 1 \\ f_i = f_{i-2} + f_{i-1}\,, i \geq 3 \end{cases}$，則 $a_n = f_{n-2} \times s_A + f_{n-1} \times s_B$， $n \geq 3$。

綜合以上，可以整理出首項為 s_A、公比為 φ 的等比數列 a_n 會滿足以下關係式：

$$\boldsymbol{a_n = s_A \times \varphi^{n-1} = a_{n-2} + a_{n-1} = f_{n-2} \times s_A + f_{n-1} \times s_B\ , n \geq 3}$$

$$\textbf{,其中費氏數 } \boldsymbol{f} \textbf{ 為 } \begin{cases} \boldsymbol{f_1 = 1\,, f_2 = 1} \\ \boldsymbol{f_i = f_{i-2} + f_{i-1}\,, i \geq 3} \end{cases}$$

證明：(利用數學歸納法)

Step1：檢查第 3 項是否成立。

$a_1 = s_A$

$a_2 = s_A \times \varphi^1 = s_B$

$a_3 = s_A \times \varphi^2 = s_B \times \varphi = s_A + s_B = a_1 + a_2$

Step2：假設第 k 項成立，檢查第 k+1 項是否成立。

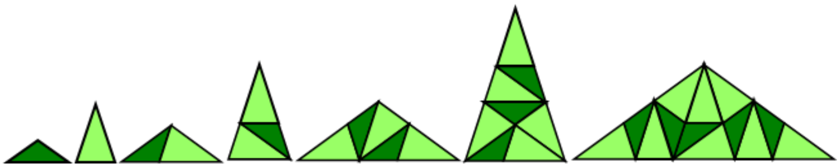
設 $a_k = s_A \times \varphi^{k-1} = f_{k-2} \times s_A + f_{k-1} \times s_B$

則 $a_{k+1} = a_k \times \varphi = f_{k-2} \times s_A \times \varphi + f_{k-1} \times s_B \times \varphi = f_{k-2} \times s_B + f_{k-1} \times (s_A + s_B)$

$= f_{k-1} \times s_A + (f_{k-2} + f_{k-1}) \times s_B = f_{k-1} \times s_A + f_k \times s_B$

因此，由數學歸納法得知，原式 $a_n = f_{n-2} \times s_A + f_{n-1} \times s_B$ 成立。

此項數列 a_n 可以對應拼貼過程中相似三角形的面積，如果將短邊長為 1、φ、φ^2…的相似 A 元件（面積為a_1、a_3、a_5…），以及短邊長為 1、φ、φ^2…的相似 B 元件（面積為a_2、a_4、a_6…），如下圖交錯擺放，則後面圖形是前兩個圖形的組合，所以，使用的元件數量總和會是費氏數列。此外，如果僅計算圖形使用 A 元件或 B 元件的數量，其分別也會是費氏數列。



A 元件：1, 0, 1, 1, 2, 3, 5

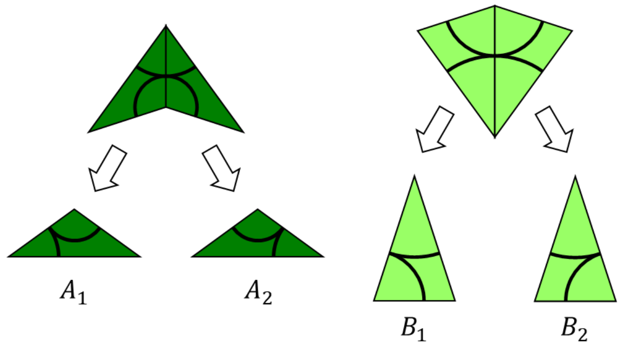
B 元件：0, 1, 1, 2, 3, 5, 8

總　數：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

註：以上拼法僅將前兩個圖形經由旋轉進行拼貼。

(三) 強制匹配費氏拼法

接下來，我們想要先利用 A、B 元件，根據上述提到與費氏數列有關的拼貼方式，拼出相似三角形，再將裡頭有兩個拼在一起的 A 元件轉換成飛鏢、兩個拼在一起的 B 元件轉換成風箏，進而建構出彭羅斯瓷磚。為了避免拼出來的圖形不是非週期性鑲嵌，所以我們還需要同時考慮強制匹配規則，如果按照強制匹配規則的弧線劃法，將飛鏢與風箏切一半，如右圖，飛鏢可以切出兩種 A 元件，分別稱作 A_1、A_2；同理，風箏也可以切出兩種 B 元件，分別稱作 B_1、B_2。



因為要先決定好一開始的兩個圖形，也就是 A、B 元件，才能利用「後面圖形是前兩個圖形的組合」這種費氏數列拼法繼續拼出更大的相似三角形。因此，要從 A_1、A_2以及 B_1、B_2中各選一個，這四種元件可分成兩種組合，如下：

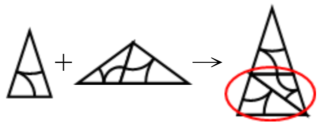
組合一：元件 A_1 和元件 B_1（或 元件 A_2 和元件 B_2）

組合二：元件 A_2 和元件 B_1（或 元件 A_1 和元件 B_2）

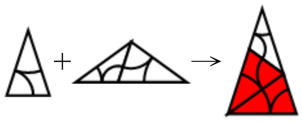
我們選擇的是組合二作為前兩個圖形，接下來，我們會先說明如何利用元件 A_2 和元件 B_1 來建構彭羅斯瓷磚，最後，才會解釋如果使用組合一會發生什麼問題。

組合二的前兩個圖形為和，利用「後面圖形是前兩個圖形的組合」這種費氏數列拼法，也就是下一個圖形會是。因為我們的目的是要拼成彭羅斯瓷磚，所以最後還是要將 A、B 元件轉換成飛鏢與風箏，如果不經過翻轉，只利用旋轉的方式，將前兩的圖拼在一起，會發生不符合強制匹配的規則或者無法轉換成飛鏢或風箏的情形，下方舉出兩個例子：

圈起來的部分不符合強制匹配規則

旋轉拼法 1：

塗色部分不符合風箏的強制匹配弧線

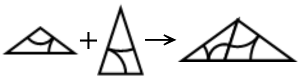
旋轉拼法 2：

因此，我們發現如果要拼貼成相似 A 元件，只需將前兩個圖形旋轉後後拼在一起；但是如果要拼貼成相似 B 元件，必需先將前一個相似 A 元件翻轉，再經由旋轉的方式將兩個圖形拼在一起，這樣才會符合強制匹配，因此，我們使用的規則如下，並將其稱作「強制匹配費氏拼法」。

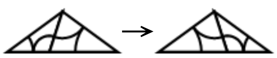
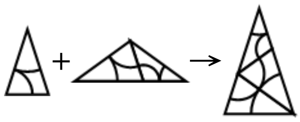
【強制匹配費氏拼法】

為了符合強制匹配規則，利用費氏數列拼法拼貼相似 A、B 元件時，進行的模式如下：

- **拼貼成相似 A 元件時，只需經由旋轉拼在一起即可；**

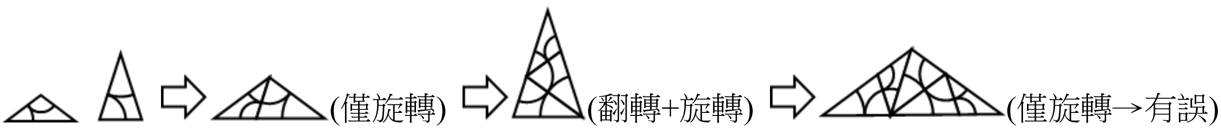
舉例：旋轉拼貼 

- **拼貼成相似 B 元件時，要先將前一個相似 A 元件翻轉，再經由旋轉拼在一起。**

舉例：Step1.先翻轉  **Step2.再旋轉拼貼** 

底以下列出利用強制匹配費氏拼法，拼出的前幾項相似三角形。

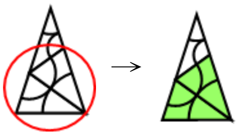
此外，如果選擇組合一，會發現無法找出一套規則進行拼貼，如下圖所示，第三個圖形（相似 A 元件）只需經由旋轉將前兩個圖形拼在一起；第四個圖形（相似 B 元件）為了要滿足強制匹配規則，要先將前一個圖形翻轉，再經由旋轉拼在一起；但是，第五個圖形（相似 A 元件）如果只經由旋轉拼貼會得到不符合強制匹配的圖形。由於在拼貼相似 A、B 元件時，沒有一致的規則，因此不採用組合一作為前兩個圖形。



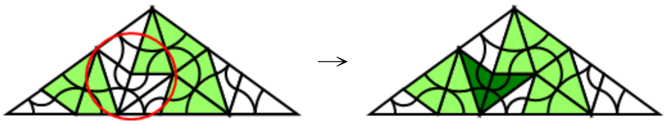
(三) 交界處的 A、B 元件轉換成飛鏢或風箏

當圖形經由強制匹配費氏拼法拼在一起時，交界處可能會出現兩個 A 元件或兩個 B 元件，當兩個 A 元件的短邊相連就可以轉換成飛鏢；當兩個 B 元件的長邊相連就可以轉換成風箏，舉例：

兩個 B 元件長邊轉換成風箏



兩個 A 元件短邊轉換成飛鏢



不過，要特別注意的是，有時候交界處雖然出現兩個 B 元件相連，但是卻不能轉換成風箏，如下圖 10，原因是裡頭的弧線不符合風箏的強制匹配規則。

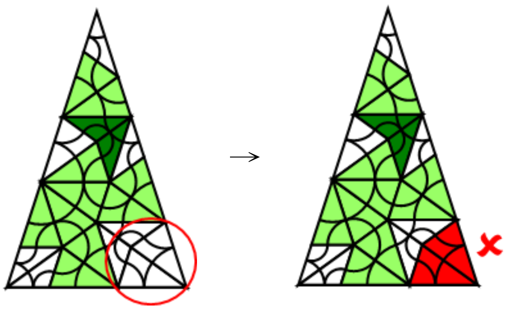
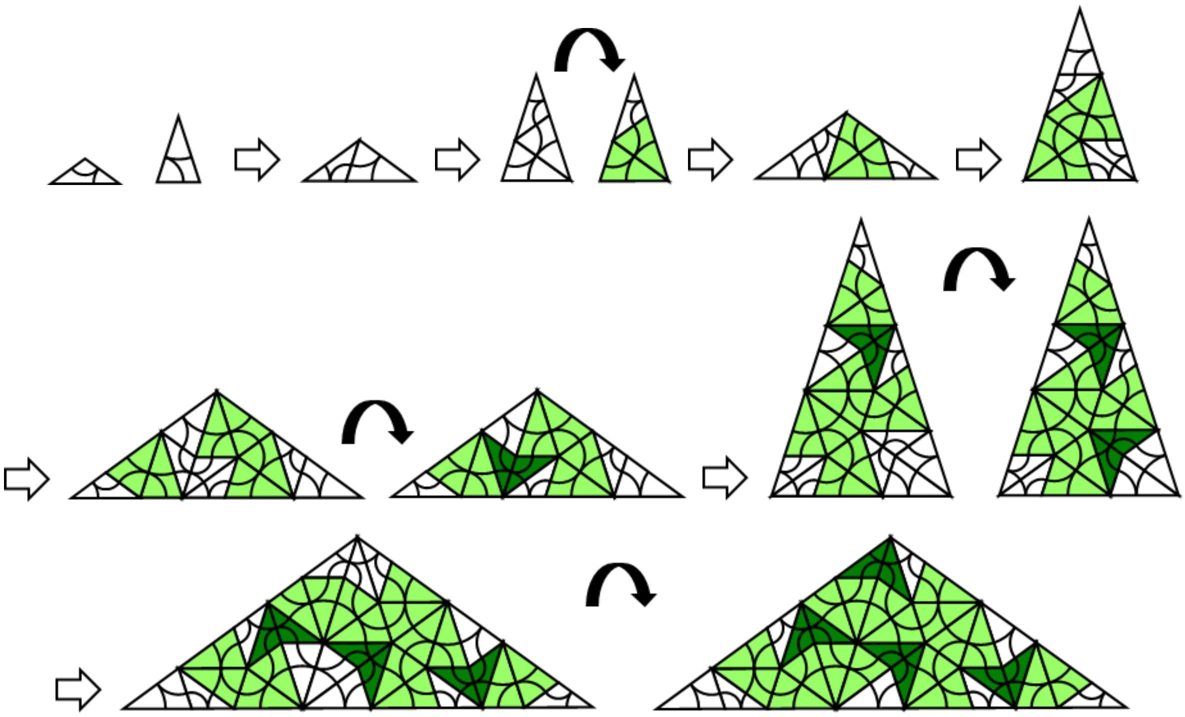
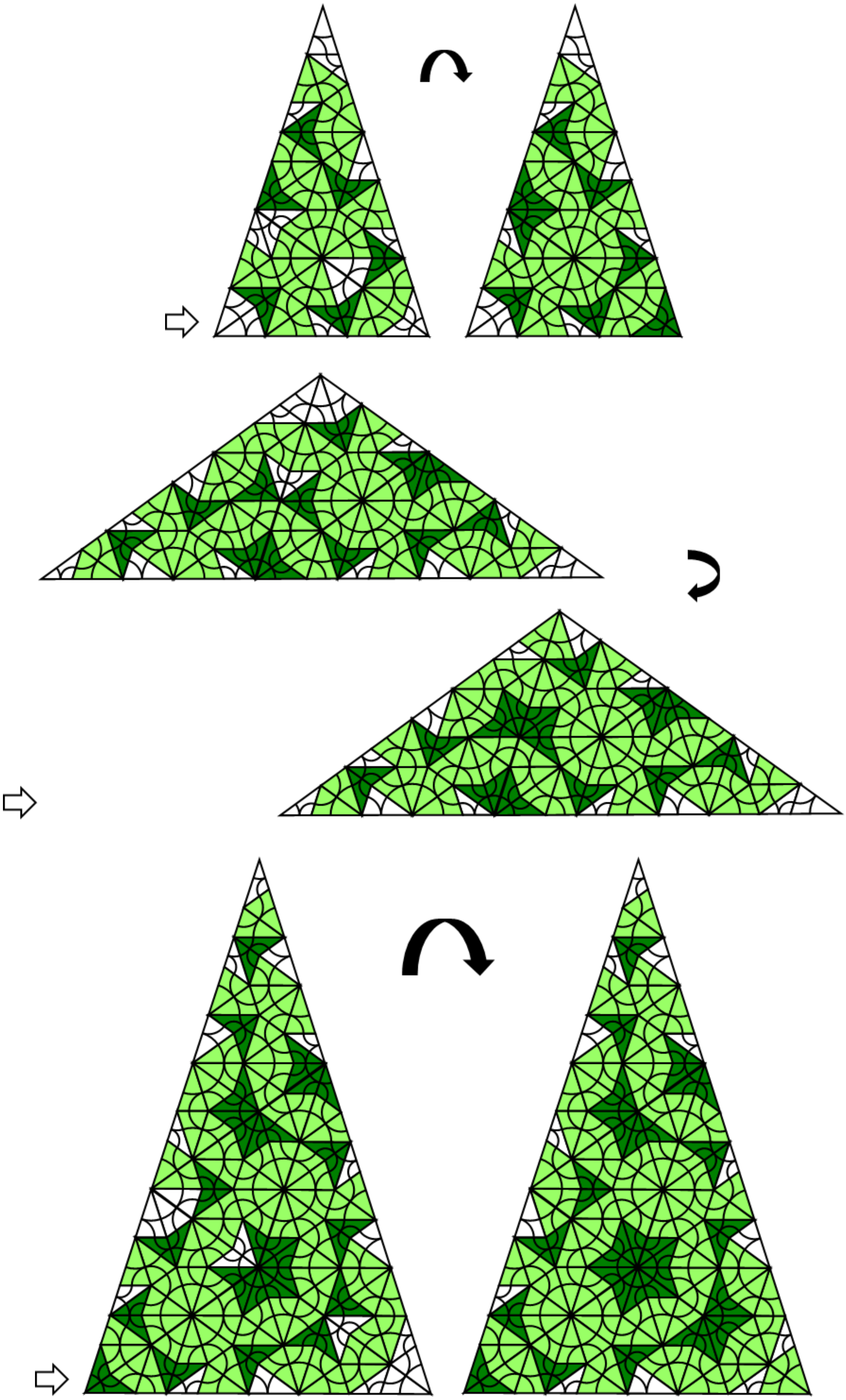


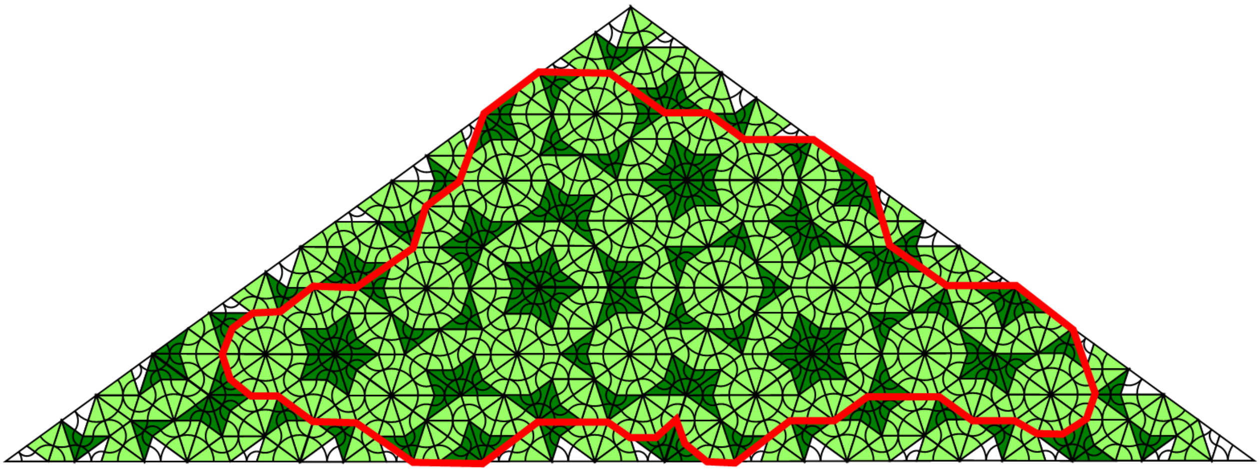
圖 10：交界處出現兩個 B 元件的長邊相連但不能轉換成風箏

綜合以上流程，可以依序拼出相似 A、B 元件，並轉換成飛鏢與風箏，如下方所示。





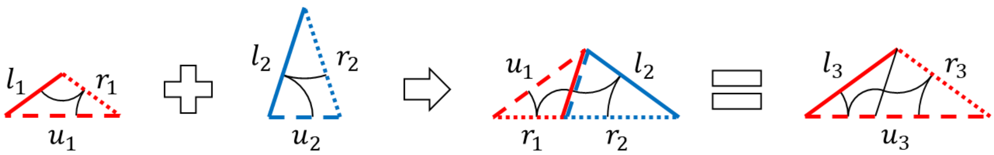
如果要建構出彭羅斯瓷磚，可以利用上述提到的強制匹配費氏拼法，同時將元件轉換成飛鏢與風箏，當拼出足夠大的相似三角形後，再擷取部分圖形就可以得出彭羅斯瓷磚，而擷取原則就是排除未轉換成飛鏢與風箏的單獨 A、B 元件。下圖為面積為 a_{15} 的相似三角形，圖中紅色粗線圍起來的區塊，就是其中一種擷取成彭羅斯瓷磚的方法。



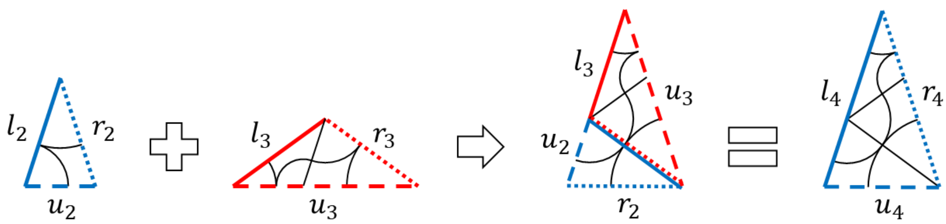
三、飛鏢與風箏數量的遞迴關係式

(一) 強制匹配費氏拼法邊長與交界處的關係式

我們將面積為 a_n 的等腰三角形的三個邊給予符號，左側的腰邊長設為 l_n、右側的腰邊長設為 r_n、底邊長設為 u_n，按照上述提及的「強制匹配費氏拼法」，將三邊長在拼貼時的關係式寫出來。因為在拼貼相似 A 元件時，只需經由旋轉拼在一起即可，觀察下方拼貼的過程，會發現 $l_3 = u_1$、$r_3 = l_2$、$u_3 = r_1 + r_2$，交界處設為 c_n，得到 $c_3 = l_1 = u_2$；



因為在拼貼相似 B 元件時，要先將前一個相似 A 元件翻轉，再經由旋轉拼在一起，觀察下方拼貼的過程，會發現 $l_4 = l_3 + u_2$、$r_4 = u_3$、$u_4 = r_2$，交界處 $c_4 = l_2 = r_3$；



於是，我們將拼貼成相似 A 元件與相似 B 元件的邊長對應關係分別繪製成圖 11 和圖 12，

並將長度為幾個 A 元件的短邊(1_A)、A 元件的長邊(φ_A)、B 元件的短邊(1_B)、B 元件的長邊(φ_B)表示出來，另外，圖中打星號★的是交界處。

	左腰 $\boldsymbol{l_n}$	右腰 $\boldsymbol{r_n}$	底邊 $\boldsymbol{u_n}$
$\boldsymbol{a_1}$	c_3 ★ 1_A	1_A	φ_A
a_2	φ_B	φ_B	1_B ★ c_3
$\boldsymbol{a_3}$	c_5 ★ φ_A	φ_B	$1_A+\varphi_B$
a_4	φ_A+1_B	$1_A+\varphi_B$	φ_B ★ c_5
$\boldsymbol{a_5}$	c_7 ★ $1_A+\varphi_B$	$1_B+\varphi_A$	$\varphi_B+\varphi_B+1_A$
a_6	$\varphi_B+1_A+\varphi_B$	$\varphi_B+\varphi_B+1_A$	φ_B+1_A ★ c_7
$\boldsymbol{a_7}$	$\varphi_B+\varphi_B+1_A$	$\varphi_B+1_A+\varphi_B$	$\varphi_A+1_B+1_A+\varphi_B+\varphi_B$
a_8	$1_A+\varphi_B+\varphi_B+\varphi_B+1_A$	$\varphi_A+1_B+1_A+\varphi_B+\varphi_B$	$1_A+\varphi_B+\varphi_B$

圖 11：利用「強制匹配費氏拼法」拼出相似 A 元件時邊長的對應關係(c_n為交界處)

	左腰 $\boldsymbol{l_n}$	右腰 $\boldsymbol{r_n}$	底邊 $\boldsymbol{u_n}$
a_1	1_A	1_A	φ_A
$\boldsymbol{a_2}$	c_4 ★ φ_B	φ_B	1_B
a_3	φ_A	c_4 ★ φ_B	$1_A+\varphi_B$
$\boldsymbol{a_4}$	c_6 ★ φ_A+1_B	$1_A+\varphi_B$	φ_B
a_5	$1_A+\varphi_B$	c_6 ★ $1_B+\varphi_A$	$\varphi_B+\varphi_B+1_A$
$\boldsymbol{a_6}$	c_8 ★ $\varphi_B+1_A+\varphi_B$	$\varphi_B+\varphi_B+1_A$	φ_B+1_A
a_7	$\varphi_B+\varphi_B+1_A$	c_8 ★ $\varphi_B+1_A+\varphi_B$	$\varphi_A+1_B+1_A+\varphi_B+\varphi_B$
$\boldsymbol{a_8}$	$1_A+\varphi_B+\varphi_B+\varphi_B+1_A$	$\varphi_A+1_B+1_A+\varphi_B+\varphi_B$	$1_A+\varphi_B+\varphi_B$

圖 12：利用「強制匹配費氏拼法」拼出相似 B 元件時邊長的對應關係(c_n為交界處)

根據圖 11 和圖 12，可以得出下方邊長與交界處之關係式，

【邊長與交界處之關係式】

利用「強制匹配費氏拼法」拼出面積為 $\boldsymbol{a_n}$ 的相似三角形，左側腰邊長 $\boldsymbol{l}$、右側腰邊長 $\boldsymbol{r}$、底邊長 $\boldsymbol{u}$ 以及交界處 $\boldsymbol{c}$ 的關係式如下：

$$\text{相似A元件：}\begin{cases} l_{2n+1}=u_{2n+1} \\ r_{2n+1}=l_{2n} \\ u_{2n+1}=r_{2n-1}+r_{2n} \\ c_{2n+1}=u_{2n}=l_{2n-1} \end{cases}\text{；相似B元件：}\begin{cases} l_{2n+2}=u_{2n}+l_{2n+1} \\ r_{2n+2}=u_{2n+1} \\ u_{2n+2}=r_{2n} \\ c_{2n+2}=r_{2n+1}=l_{2n} \end{cases},\ n\geq 1$$

(二) 交界處數量與腰邊長數量的關係

由於飛鏢與風箏數量的關鍵就在交界處，於是我們使用 Excel 軟體，根據上述提到的遞迴關係式，將前 27 項邊長中元件邊（1_A、φ_A、1_B、φ_B）的數量紀錄在表 5。觀察表 5，我們發現面積為 a_2、a_6、a_{10}、a_{14}…的相似 B 元件中，也就是足碼相差四項，其左側腰邊長與右側腰邊長的元件邊數量都相等；面積為 a_4、a_{12}、a_{20} 的相似 B 元件中，也就是足碼相差八項，其右側腰邊長的 1_A 比左側腰邊長多 1 個；面積為 a_8、a_{16}、a_{24} 的相似 B 元件中，足碼亦相差八項，但是相反的，其右側腰邊長的 1_A 比左側腰邊長少 1 個。

表 5：利用「強制匹配費氏拼法」拼出相似三角形時，邊長與交界處的元件邊數量

	左側腰邊長l_n				右側腰邊長r_n				底邊長u_n				交界處c_n			
	1_A	φ_A	1_B	φ_B	1_A	φ_A	1_B	φ_B	1_A	φ_A	1_B	φ_B	1_A	φ_A	1_B	φ_B
a_1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0				
a_2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0				
a_3	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0
a_4	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
a_5	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	2	0	0	0	1
a_6	1	0	0	2	1	0	0	2	1	0	0	1	0	1	1	0
a_7	1	0	0	2	1	0	0	2	1	1	1	2	1	0	0	1
a_8	2	0	0	3	1	1	1	2	1	0	0	2	1	0	0	2
a_9	1	1	1	2	2	0	0	3	2	1	1	4	1	0	0	2
a_{10}	2	1	1	4	2	1	1	4	1	1	1	2	2	0	0	3
a_{11}	2	1	1	4	2	1	1	4	4	1	1	7	1	1	1	2
a_{12}	3	2	2	6	4	1	1	7	2	1	1	4	2	1	1	4
a_{13}	4	1	1	7	3	2	2	6	6	2	2	11	2	1	1	4
a_{14}	6	2	2	11	6	2	2	11	4	1	1	7	3	2	2	6
a_{15}	6	2	2	11	6	2	2	11	9	4	4	17	4	1	1	7
a_{16}	10	3	3	18	9	4	4	17	6	2	2	11	6	2	2	11
a_{17}	9	4	4	17	10	3	3	18	15	6	6	28	6	2	2	11
a_{18}	15	6	6	28	15	6	6	28	9	4	4	17	10	3	3	18
a_{19}	15	6	6	28	15	6	6	28	25	9	9	46	9	4	4	17
a_{20}	24	10	10	45	25	9	9	46	15	6	6	28	15	6	6	28
a_{21}	25	9	9	46	24	10	10	45	40	15	15	74	15	6	6	28
a_{22}	40	15	15	74	40	15	15	74	25	9	9	46	24	10	10	45
a_{23}	40	15	15	74	40	15	15	74	64	25	25	119	25	9	9	46
a_{24}	65	24	24	120	64	25	25	119	40	15	15	74	40	15	15	74
a_{25}	64	25	25	119	65	24	24	120	104	40	40	193	40	15	15	74

a_{26}	104	40	40	193	104	40	40	193	64	25	25	119	65	24	24	120
a_{27}	104	40	40	193	104	40	40	193	169	64	64	313	64	25	25	119

以上的現象與強制匹配費氏拼法有關，觀察面積為 a_6 的相似 B 元件，左側的腰邊長 $\overline{AB}$ 可以分割成 $\overline{AD}+\overline{DB}$，右側的腰邊長 $\overline{AC}$可以分割成 $\overline{AE}+\overline{EC}$，根據圖 13 可知，$\overline{AD}=\overline{EC}=u_3$。接下來，觀察 $\overline{DB}$ 和 $\overline{AE}$ 的關係，根據圖 14 可知，$\overline{DB}=r_2$ 且 $\overline{AE}=l_2$。

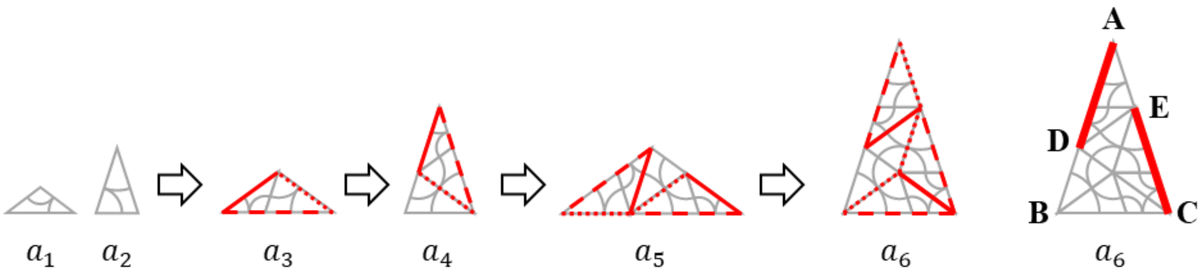


圖 13：利用「強制匹配費氏拼法」拼出面積為a_6的相似三角形與a_3邊長的關係

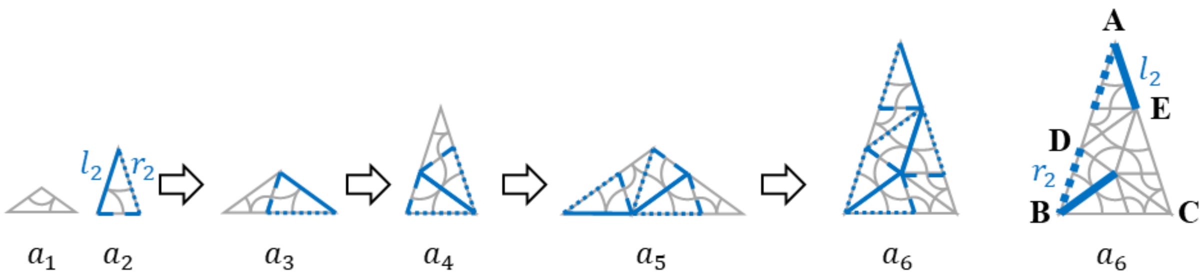
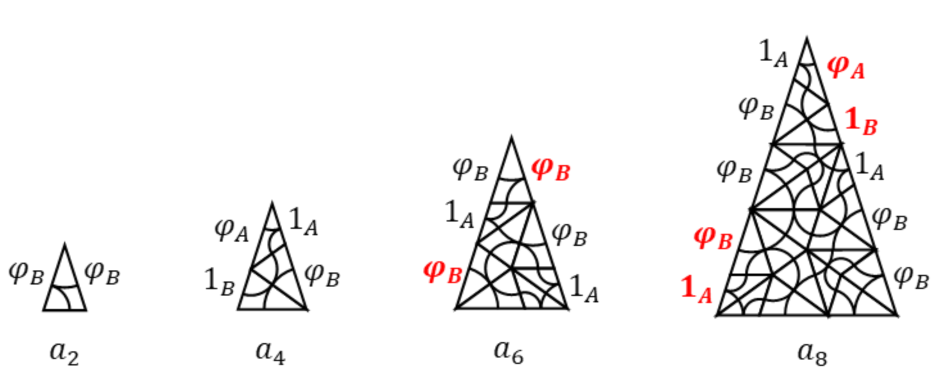


圖 14：利用「強制匹配費氏拼法」拼出面積為a_6的相似三角形與a_2邊長的關係

因此，如果想得到相似 B 元件左側腰邊長與右側腰邊長中 1_A 數量的關係，只要看 $\overline{DB}$ 和 $\overline{AE}$，也就是前四項的相似 B 元件即可，但是要留意，前四項的左側會移到此項的右側，同理，前四項的右側就會移到此項的左側。



從上圖可知，在面積為 a_2 的相似 B 元件中，$l_2=r_2=\varphi_B$；在面積為 a_4 的相似 B 元件中，$l_4=\varphi_A+1_B$ 且 $r_4=1_A+\varphi_B$，得到右側比左側多一個 1_A，記作 $n_{1_A}(r_4-l_4)=1$；

接下來，根據上述發現的僅需觀察前四項的事實，在面積為 a_6 的相似 B 元件中，前四項為 a_2，又 $l_2 = r_2$，故可得到 $l_6 = r_6$；繼續往下看，在面積為 a_8 的相似 B 元件中，前四項為 a_4，留意左右會移動，因此會得到右側比左側少一個 1_A，記作 $n_{1_A}(r_8 - l_8) = -1$。

由上方的觀察，可以得到性質 1-1，

【性質 1-1】

利用「強制匹配費氏拼法」拼出的相似 B 元件中，左側腰邊長 l 和右側腰邊長 r 中 1_A 數量的關係式如下，其中 $n_{1_A}(x)$ 表示在 x 長度中 1_A 的數量：

$$\begin{cases} l_{4n-2} = r_{4n-2} \\ n_{1_A}(r_{8n-4} - l_{8n-4}) = 1 \\ n_{1_A}(r_{8n} - l_{8n}) = -1 \end{cases}, n \geq 1$$

根據【邊長與交界處之關係式】，以及【性質 1-1】，可以得到下方性質 1-2，

【性質 1-2】

利用「強制匹配費氏拼法」拼出相似三角形，當交界處 c 出現 1_A 時，兩側的 A 元件會轉換成飛鏢，而交界處 1_A 數量的關係式如下，其中 $n_{1_A}(x)$ 表示在 x 長度中 1_A 的數量：

$$\begin{cases} c_{4n} = c_{4n+1} \\ n_{1_A}(c_{8n-1} - c_{8n-2}) = 1 \\ n_{1_A}(c_{8n+3} - c_{8n+2}) = -1 \end{cases}, n \geq 1$$

證明：

由【邊長與交界處之關係式】推得 $c_{4n} = r_{4n-1} = l_{4n-2}$、$c_{4n+1} = u_{4n} = r_{4n-2}$，

再由【性質 1-1】，得到 $c_{4n} = l_{4n-2} = r_{4n-2} = c_{4n+1}$；

同理，由【邊長與交界處之關係式】推得 $c_{8n-1} = u_{8n-2} = r_{8n-4}$、$c_{8n-2} = r_{8n-3} = l_{8n-4}$，

再由【性質 1-1】，得到 $n_{1_A}(c_{8n-1} - c_{8n-2}) = n_{1_A}(r_{8n-4} - l_{8n-4}) = 1$；

同理，由【邊長與交界處之關係式】推得 $c_{8n+3} = u_{8n+2} = r_{8n}$、$c_{8n+2} = r_{8n+1} = l_{8n}$，

再由【性質 1-1】，得到 $n_{1_A}(c_{8n+3} - c_{8n+2}) = n_{1_A}(r_{8n} - l_{8n}) = -1$。

(三) 飛鏢與風箏的數量

計算利用強制匹配費氏拼法拼出相似 A、B 元件中，飛鏢與風箏的數量，我們將交界處的飛鏢（dart）數量與風箏（kite）數量分別用 d_n 與 k_n 表示，總數量則是用大寫的 D_n 與 K_n 表示。首先，根據性質 1-2 可知交界處 1_A 數量的關係式，當交界處出現 1_A 時，

兩側的 A 元件就可以轉換成飛鏢，因此，我們將交界處飛鏢數量形成的數列紀錄在表 6，並在相同腰長的情況下，分成相似 B 元件以及相似 A 元件，表 6 呈現 d_4~d_{27} 的數據。

表 6：交界處飛鏢增加的數量 d_n 與關係式

腰長	交界處長	交界處的飛鏢數量 d_n			
		相似 B 元件	**費氏乘積**	相似 A 元件	**與前項關係**
$\varphi+1$	φ	$d_4=0=0\times1$	$\boldsymbol{f_0\times f_1}$	$d_5=0$	$\boldsymbol{d_5=d_4}$
$2\varphi+1$	$\varphi+1$	$d_6=0=0\times1$	$\boldsymbol{f_0\times f_2}$	$d_7=1$	$\boldsymbol{d_7=d_6+1}$
$3\varphi+2$	$2\varphi+1$	$d_8=1=1\times1$	$\boldsymbol{f_1\times f_2}$	$d_9=1$	$\boldsymbol{d_9=d_8}$
$5\varphi+3$	$3\varphi+2$	$d_{10}=2=1\times2$	$\boldsymbol{f_1\times f_3}$	$d_{11}=1$	$\boldsymbol{d_{11}=d_{10}-1}$
$8\varphi+5$	$5\varphi+3$	$d_{12}=2=1\times2$	$\boldsymbol{f_2\times f_3}$	$d_{13}=2$	$\boldsymbol{d_{13}=d_{12}}$
$13\varphi+8$	$8\varphi+5$	$d_{14}=3=1\times3$	$\boldsymbol{f_2\times f_4}$	$d_{15}=4$	$\boldsymbol{d_{15}=d_{14}+1}$
$21\varphi+13$	$13\varphi+8$	$d_{16}=6=2\times3$	$\boldsymbol{f_3\times f_4}$	$d_{17}=6$	$\boldsymbol{d_{17}=d_{16}}$
$34\varphi+21$	$21\varphi+13$	$d_{18}=10=2\times5$	$\boldsymbol{f_3\times f_5}$	$d_{19}=9$	$\boldsymbol{d_{19}=d_{18}-1}$
$55\varphi+34$	$34\varphi+21$	$d_{20}=15=3\times5$	$\boldsymbol{f_4\times f_5}$	$d_{21}=15$	$\boldsymbol{d_{21}=d_{20}}$
$89\varphi+55$	$55\varphi+34$	$d_{22}=24=3\times8$	$\boldsymbol{f_4\times f_6}$	$d_{23}=25$	$\boldsymbol{d_{23}=d_{22}+1}$
$144\varphi+89$	$89\varphi+55$	$d_{24}=40=5\times8$	$\boldsymbol{f_5\times f_6}$	$d_{25}=40$	$\boldsymbol{d_{25}=d_{24}}$
$233\varphi+144$	$144\varphi+89$	$d_{26}=65=5\times13$	$\boldsymbol{f_5\times f_7}$	$d_{27}=64$	$\boldsymbol{a_{27}=a_{26}-1}$

觀察表 6 可以發現，在拼貼相似 B 元件時，當交界處飛鏢的數量為d_4、d_8、d_{12}、d_{16}、d_{20}、d_{24}，也就是足碼相差四項，其數量可以寫成相鄰兩項的費氏數相乘；當交界處飛鏢的數量為d_6、d_{10}、d_{14}、d_{18}、d_{22}、d_{26}，足碼亦相差四項，其數量可以寫成間隔一項的費氏數相乘。因此，拼貼相似 B 元件的交界處飛鏢數量如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{d_{4n}=f_{n-1}\times f_n}\\ \boldsymbol{d_{4n+2}=f_{n-1}\times f_{n+1}}\end{cases},\boldsymbol{n\geq1}$$

另外，從表 6 中也能看出拼貼相似 A 元件時交界處飛鏢的數量，與拼貼相似 B 元件的數量有關，在拼貼相似 A 元件時，當交界處飛鏢的數量為d_5、d_9、d_{13}、d_{17}、d_{21}、d_{25}，也就是足碼相差四項，其數量與前一項（d_4、d_8、d_{12}、d_{16}、d_{20}、d_{24}）相等；當交界處

飛鏢的數量為d_7、d_{15}、d_{23}，也就是足碼相差八項，其數量是前一項（d_6、d_{14}、d_{22}）加 1；當交界處飛鏢的數量為d_{11}、d_{19}、d_{27}，也就是足碼相差八項，其數量是前一項（d_{10}、d_{18}、d_{26}）減 1。因此，拼貼相似 A 元件的交界處飛鏢數量如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{d_{4n+1} = d_{4n}} \\ \boldsymbol{d_{8n-1} = d_{8n-2} + 1} \\ \boldsymbol{d_{8n+3} = d_{8n+2} - 1} \end{cases} \boldsymbol{, n \geq 1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{d_{4n+1} = d_{4n}} \\ \boldsymbol{d_{4n+3} = d_{4n+2} + (-1)^{n+1}} \end{cases} \boldsymbol{, n \geq 1}$$

知道交界處的數量後，我們就可以將相似 A、B 元件中飛鏢與風箏的總數量寫出來，以數對（飛鏢數量, 風箏數量）來表示，整理成表 7，其中總數量用大寫的 D_n 與 K_n 表示。由於我們使用的是強制匹配費氏拼法，所以在計算飛鏢與風箏的總數量時，要先將前兩個圖形的數量加起來，再加上交界處增加的數量。

表 7：強制匹配費氏拼法建構相似 A、B 元件中的（飛鏢數量D_n ，風箏數量K_n）

面積	費氏拼法		交界處增加 (d_n, k_n)		總數量 (D_n, K_n)
a_1					（0, 0）
a_2					（0, 0）
a_3	（0, 0）	+	**（0, 0）**	=	（0, 0）
a_4	（0, 0）	+	**（0, 1）**	=	（0, 1）
a_5	（0, 1）	+	**（0, 0）**	=	（0, 1）
a_6	（0, 2）	+	**（0, 0）**	=	（0, 2）
a_7	（0, 3）	+	**（1, 0）**	=	（1, 3）
a_8	（1, 5）	+	**（1, 0）**	=	（2, 5）
a_9	（3, 8）	+	**（1, 1）**	=	（4, 9）
a_{10}	（6, 14）	+	**（2, 1）**	=	（8, 15）
a_{11}	（12, 24）	+	**（1, 1）**	=	（13, 25）
a_{12}	（21, 40）	+	**（2, 2）**	=	（23, 42）
a_{13}	（36, 67）	+	**（2, 1）**	=	（38, 68）
a_{14}	（61, 110)	+	**（3, 2）**	=	（64, 112）
a_{15}	（102, 180)	+	**（4, 2）**	=	（106, 182）
a_{16}	（170, 294)	+	**（6, 3）**	=	（176, 297）
a_{17}	（282, 479)	+	**（6, 4）**	=	（288, 483）
a_{18}	（464, 780)	+	**（10, 6）**	=	（674, 786）
a_{19}	（962, 1269)	+	**（9, 6）**	=	（971, 1275）
a_{20}	（1645, 2061)	+	**（15, 10）**	=	（1660, 2071）

根據【性質 1-2】、表 6 以及表 7，得出性質 2 飛鏢總數量 D_n 的遞迴關係式，

【性質 2】

利用「強制匹配費氏拼法」建構相似 A、B 元件，並將元件轉換成飛鏢與風箏後，飛鏢總數量 D_n 的遞迴關係式如下：

$$\begin{cases} D_1 = D_2 = D_3 = 0 \\ D_{4n} = D_{4n-2} + D_{4n-1} + f_{n-1} \times f_n \\ D_{4n+1} = D_{4n-1} + D_{4n} + f_{n-1} \times f_n \\ D_{4n+2} = D_{4n} + D_{4n+1} + f_{n-1} \times f_{n+1} \\ D_{4n+3} = D_{4n+1} + D_{4n+2} + f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n+1} \end{cases}, n \geq 1$$

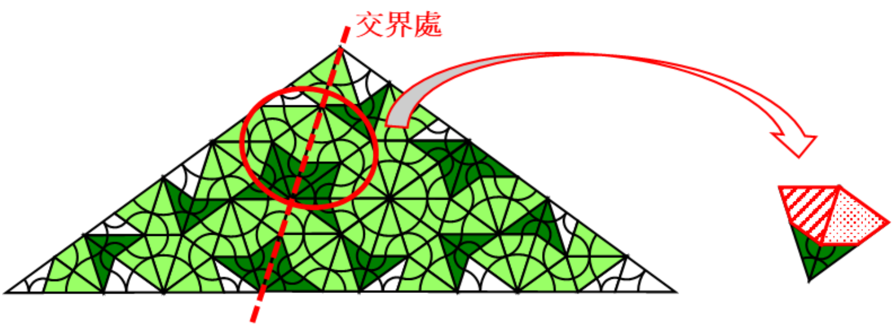
觀察表 7，從第六項開始，交界處風箏的數量是飛鏢前兩項的數量，也就是$k_n = d_{n-2}, n \geq 6$，於是得出性質 3，

【性質 3】

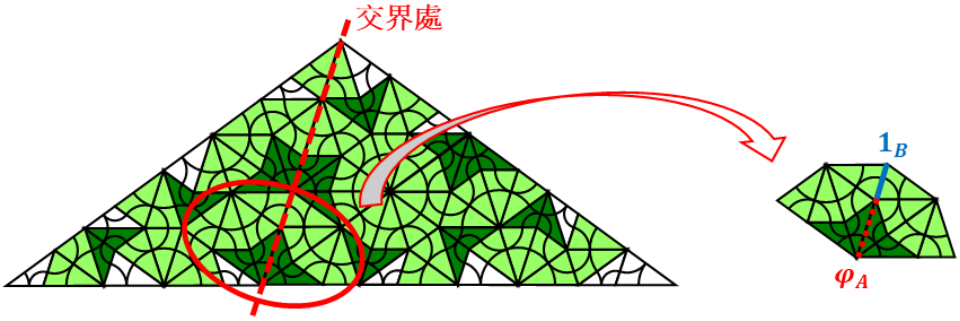
利用「強制匹配費氏拼法」建構相似 A、B 元件，並將元件轉換成飛鏢與風箏後，風箏總數量 K_n 的遞迴關係式如下：

$$\begin{cases} K_1 = K_2 = K_3 = 0, K_4 = K_5 = 1 \\ K_{4n+2} = K_{4n} + K_{4n+1} + f_{n-1} \times f_n \\ K_{4n+3} = K_{4n+1} + K_{4n+2} + f_{n-1} \times f_n \\ K_{4n+4} = K_{4n+2} + K_{4n+3} + f_{n-1} \times f_{n+1} \\ K_{4n+5} = K_{4n+3} + K_{4n+4} + f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n+1} \end{cases}, n \geq 1$$

另外，要特別留意的是，當交界處出現 1_A 時，兩側的 A 元件會轉換成飛鏢，但是，當交界處出現 φ_B 時，兩側的 B 元件不一定會轉換成風箏，舉例來說，如下圖，當交界處出現飛鏢時，根據非週期性鑲嵌的拼法，飛鏢的凹口處會拼入兩個風箏，也就是交界處的 φ_B 會是風箏的邊長，而不是對稱軸，所以不能轉換成風箏。



且從表 5 中還可以發現，在交界處中 φ_A 的數量會等於 1_B 的數量，原因也跟非週期性鑲嵌的拼法有關，如下圖所示。

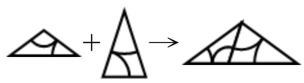


肆、研究結果

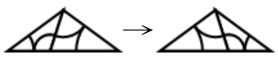
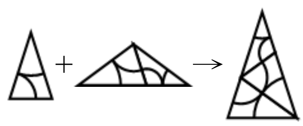
一、將彭羅斯瓷磚的飛鏢沿對稱軸切一半，定義 A 元件是角度為 108°、36°、36°的等腰鈍角三角形，其腰邊長為 1，底邊長為 φ；將彭羅斯瓷磚的風箏沿對稱軸切一半，定義 B 元件是角度為 36°、72°、72°的等腰銳角三角形，其腰邊長為 φ，底邊長為 1。拿數量不等的 A、B 兩種元件拼成面積更大且與原本元件相似的三角形，利用一層層往下加腰為 1 或 φ 的等腰梯形的拼法繪製出樹狀圖，得出**所有腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似 A 元件，以及所有腰邊長為 $x+y\varphi$ $(x\neq y+1)$的相似 B 元件，都有辦法利用 A、B 元件拼貼出來，其中x、y為正整數**。

二、本研究訂定出一套建構彭羅斯瓷磚的方法，使用的拼法為後面圖形是前兩個圖形的組合，且過程中必需符合拼貼非週期性鑲嵌所繪製的強制匹配弧線，本篇將這樣的拼法稱為**強制匹配費氏拼法**，接著再將**交界處的 A、B 元件轉換成飛鏢與風箏**，其規則如下 1~3。當拼貼夠大時，排除沒有轉換的單獨 A、B 元件，擷取部分圖形就可以得出彭羅斯瓷磚。

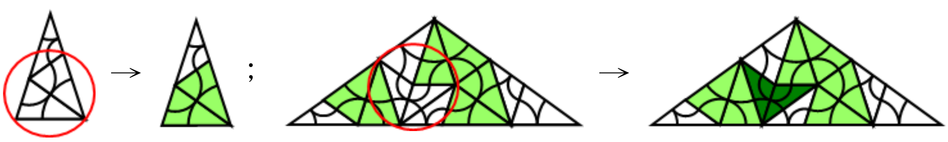
1. 前兩項為  和 ，接下來的拼法為後面圖形是前兩個圖形的組合。

2. **拼貼成相似 A 元件時，只需經由旋轉拼在一起即可；** 

   拼貼成相似 B 元件時，要先將前一個相似 A 元件翻轉，再經由旋轉拼在一起。

   先翻轉：， 再旋轉：

3. 當交界處出現兩個 A 元件或兩個 B 元件相連時，有機會可以形成飛鏢或風箏。



三、本研究利用「強制匹配費氏拼法」拼出短邊長為 1、φ、φ^2…的相似 A 元件以及相似 B 元件，交錯排列後，面積以數列 a_n 表示。藉由邊長與交界處之關係式（詳見頁 21），進而推得將元件轉換成飛鏢與風箏後，在面積為 a_n 的相似三角形中，飛鏢總數量 D_n 與風箏總數量 K_n的遞迴關係式如下，其中定義費氏數 f_i 為 $\begin{cases} f_1 = 1\,, f_2 = 1 \\ f_i = f_{i-2} + f_{i-1}\,, i \geq 3 \end{cases}$：

$$\textbf{飛鏢}\begin{cases} \boldsymbol{D_1 = D_2 = D_3 = 0} \\ \boldsymbol{D_{4n} = D_{4n-2} + D_{4n-1} + f_{n-1} \times f_n} \\ \boldsymbol{D_{4n+1} = D_{4n-1} + D_{4n} + f_{n-1} \times f_n} \\ \boldsymbol{D_{4n+2} = D_{4n} + D_{4n+1} + f_{n-1} \times f_{n+1}} \\ \boldsymbol{D_{4n+3} = D_{4n+1} + D_{4n+2} + f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n+1}} \end{cases} \boldsymbol{, n \geq 1}$$

$$\textbf{風箏}\begin{cases} \boldsymbol{K_1 = K_2 = K_3 = 0\,, K_4 = K_5 = 1} \\ \boldsymbol{K_{4n+2} = K_{4n} + K_{4n+1} + f_{n-1} \times f_n} \\ \boldsymbol{K_{4n+3} = K_{4n+1} + K_{4n+2} + f_{n-1} \times f_n} \\ \boldsymbol{K_{4n+4} = K_{4n+2} + K_{4n+3} + f_{n-1} \times f_{n+1}} \\ \boldsymbol{K_{4n+5} = K_{4n+3} + K_{4n+4} + f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n+1}} \end{cases} \boldsymbol{, n \geq 1}$$

伍、討論與結論

一、討論與結論

本研究從彭羅斯瓷磚中飛鏢與風箏沿對稱軸切出的 A、B 元件，與從正五邊形沿對角線切割出來的三角形是相似的，過去也有科展作品針對這兩種三角形進行研究，比較過去科展與本篇研究的差異，整理成下表：

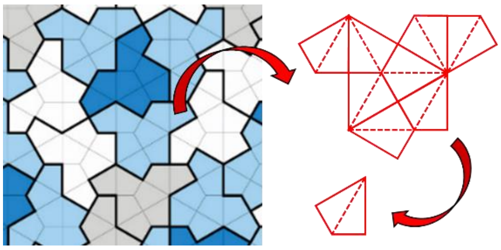
科展作品名稱	研究重要結論
臺灣 2007 年國際科學展覽會 數學科 生生不息–正五邊形的繁衍及算術法則[9]	(1) 證明出任何一種邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y (x, y \in N)$ 形式之正五邊形都能以這兩種三角形排出。 (2)“質形”為不能被分解成更小的正五邊形之正五邊形，其邊長可以寫成費氏數列，且兩種三角形的個數可以寫成盧卡斯數列。
中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會 國小組　數學科 分分合合-圖形的分割與重組[10]	(1) 兩種三角形的分割規律為費氏數列，正五邊形的分割規律為盧卡斯數列。 (2) 利用分割、重組的方式得到兩個不同分割次數的正五邊形，並推算出關係式。

本篇 彭羅斯瓷磚之強制匹配費氏拼法及元件數量計算	(1) 訂定出「強制匹配費氏拼法」拼出相似三角形，將交界處轉換成飛鏢與風箏，進一步建構出彭羅斯瓷磚。 (2) 推算此建構方法下，飛鏢與風箏數量的遞迴關係式。

由此表可知，本篇研究與過去最大的差異在於解構或重構的圖形不同，過去多半圍繞在正五邊形上，而本篇是探討結構相較複雜的非週期性鑲嵌圖形，即彭羅斯瓷磚。

二、未來展望

近期數學家在非週期性鑲嵌上的突破是找出單一地磚，如右圖（截取至圖 2），僅拿具有 13 個邊的帽子，就能完成非週期性鑲嵌，解構圖形發現帽子是由另一種風箏組成，也可以切割成三角形，未來也許可以參考本研究的解構模式，找出一套建構的方法。



陸、參考文獻資料

[1] 陳宏賓（2023 年 03 月 29 日）。【幾何】數學家終於找到名為「愛因斯坦」的瓷磚。UniMath。資料引自：https://reurl.cc/A4Ve3E

[2] David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan and Chaim Goodman-Strauss (CC BY-SA 4.0)

[3] Penrose tiling（2023 年 11 月 21 日）。維基百科。資料引自：https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

[4] 中華民國第 45 屆中小學科學展覽會。平面與立體鑲嵌之研究。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/high/0304/030414.pdf

[5] 中華民國第 62 屆中小學科學展覽會。解構奧運會徽探討平面鑲嵌。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-030417.pdf?0.3177104569040239

[6] 中華民國第 62 屆科小學科學展覽會。百密無一疏－特殊多邊形密閉區塊之研究。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-050402.pdf?0.5943970666266978

[7] 新北市 111 學年度中小學科學展覽。潘洛斯多邊形性質與非週期性密鋪之研究。資料引自：https://www.tcjh.ntpc.edu.tw/p/406-1000-9050,r87.php

[8] 小 A 君科普（2020 年 05 月 08 日）。數學家的美：彭羅斯鋪陳。資料引自：https://kknews.cc/zh-tw/education/n2k26gg.html

[9] 臺灣 2007 年國際科學展覽會。生生不息－正五邊形的繁衍及算術法則。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2007/pdf/010030.pdf

[10]中華民國第 50 屆中小學科學展覽會。分分合合-圖形的分割與重組。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/080406.pdf

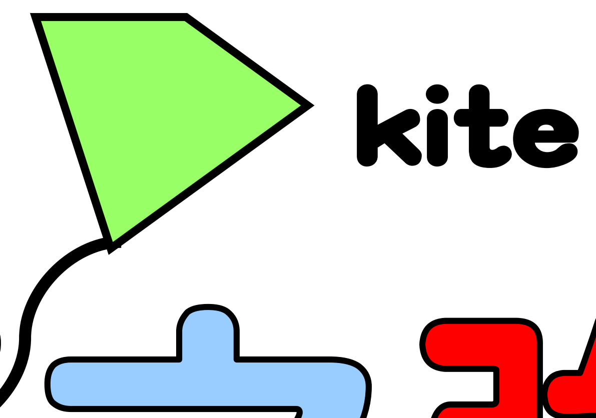
註：圖 1 引用來源[2]；圖 2、圖 3 參考引用來源[3]再自行繪製；
除了上述圖片引自他處，其他圖片均為作者親自繪製。

【評語】030401

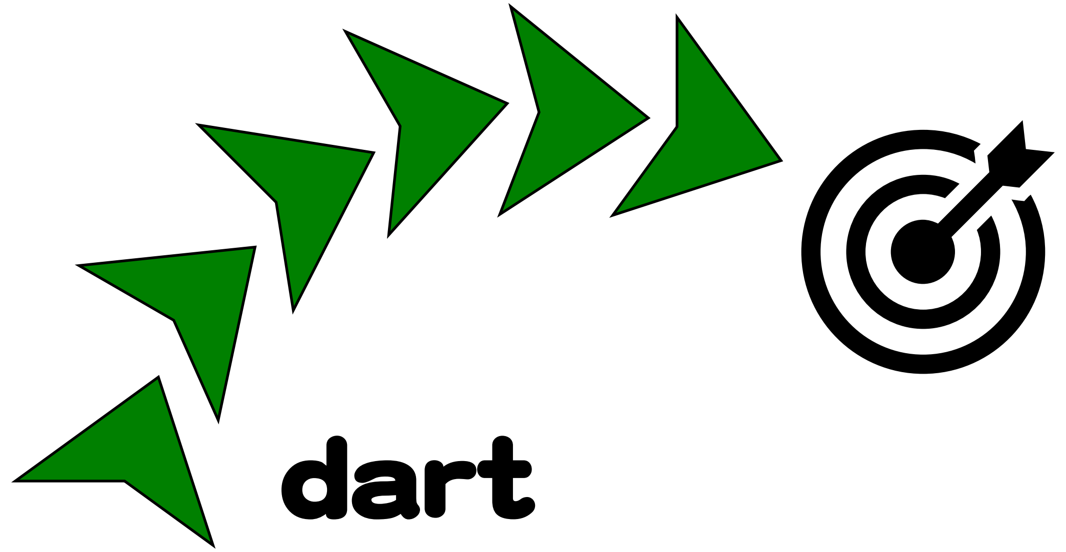
本作品應用費氏數列拼法及強制匹配規則，以 108-36-36、36-72-72 兩種等腰三角形當作 A,B 元件，分別得出所有腰邊長為 x+y φ 相似元件，從而建構出非週期性鑲嵌彭螺絲磁磚。本作品使用的拼法為後面圖形是前面兩個圖形的組合，拼貼過程符合非週期性鑲嵌所繪製的強制匹配弧線，並利用幾何圖形來解釋所獲得代數公式是此研究成果的一個不錯的亮點。

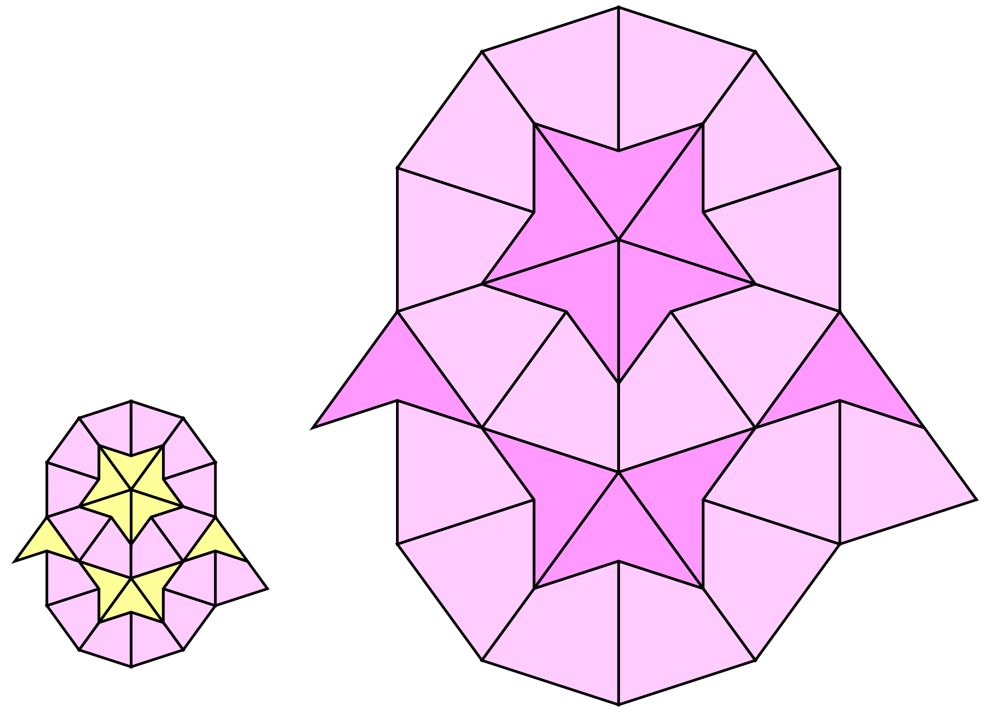
整體而言，此作品是一完整且富創意的研究。內容的鋪陳及想法，值得肯定。文中可再強調說明這些遞迴關係式與可鋪成圖形之間的關係。另外其方法有更進一步推廣的空間。對於非周期的著墨不多，是比較可惜的。

作品簡報



彭羅斯瓷磚之強制匹配費氏拼法及元件數量計算





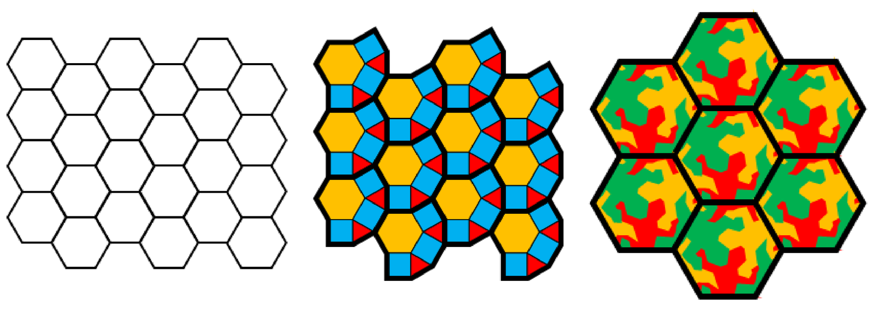
摘要

本研究從彭羅斯瓷磚出發，將飛鏢與風箏沿對稱軸切出角度分別為108°、36°、36°及36°、72°、72°的等腰三角形，將兩者的短邊設為1分別定義為A、B元件。拿數量不等的兩種元件拼成與原本元件相似的三角形，得出所有腰邊長為 $x+y\varphi$ 的相似A元件，以及所有腰邊長為 $x+y\varphi\ (x\neq y+1)$ 的相似B元件，都有辦法利用A、B元件拼貼出來，其中x、y為正整數。

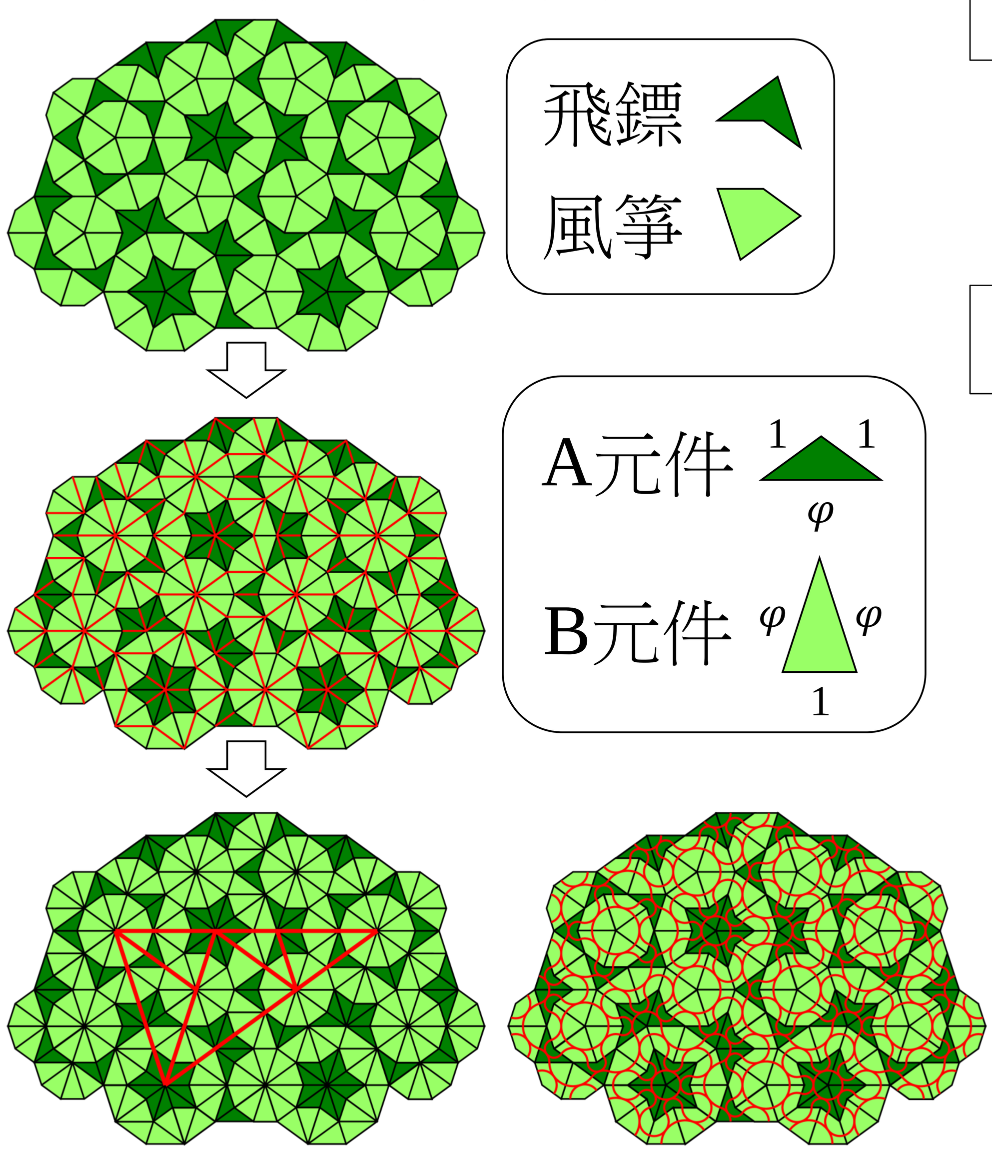
本研究訂定「強制匹配費氏拼法」來拼貼相似A、B元件，從而建構出非週期性鑲嵌彭羅斯瓷磚。使用的拼法為後一個圖形是前兩個圖形的組合，且過程中因需符合強制匹配弧線，在拼貼相似B元件時，需將前一個圖形翻轉後，再經旋轉將兩個圖形組合。**本研究找出拼湊結合時，產生飛鏢與風箏數量的規律，推算出總數量的遞迴關係式。**

研究架構

週期性鑲嵌



非週期性鑲嵌



強制匹配費氏拼法

⇩

元件數量遞迴關係式

研究動機

不管是用單一、多個正多邊形，或是如艾雪作品中經由平移、旋轉、鏡射技巧的鑲嵌，都是週期性鑲嵌。而數學家彭羅斯發現了由兩個瓷磚組成的非週期性鑲嵌[3]，引發我們的好奇心。

文獻探討

與鑲嵌有關的歷屆科展作品

週期性鑲嵌：[4]、[5]、[6]

非週期性鑲嵌：[7]

研究目的

(一)解構彭羅斯瓷磚，將飛鏢和風箏兩種元件沿著對稱軸切一半，計算邊長大小，定義出本研究中使用的A、B元件。利用兩種元件拼貼相似三角形，運用一層層往下加等腰梯形的拼法繪製出樹狀圖，有系統地找出無法拼出何種邊長的相似三角形。

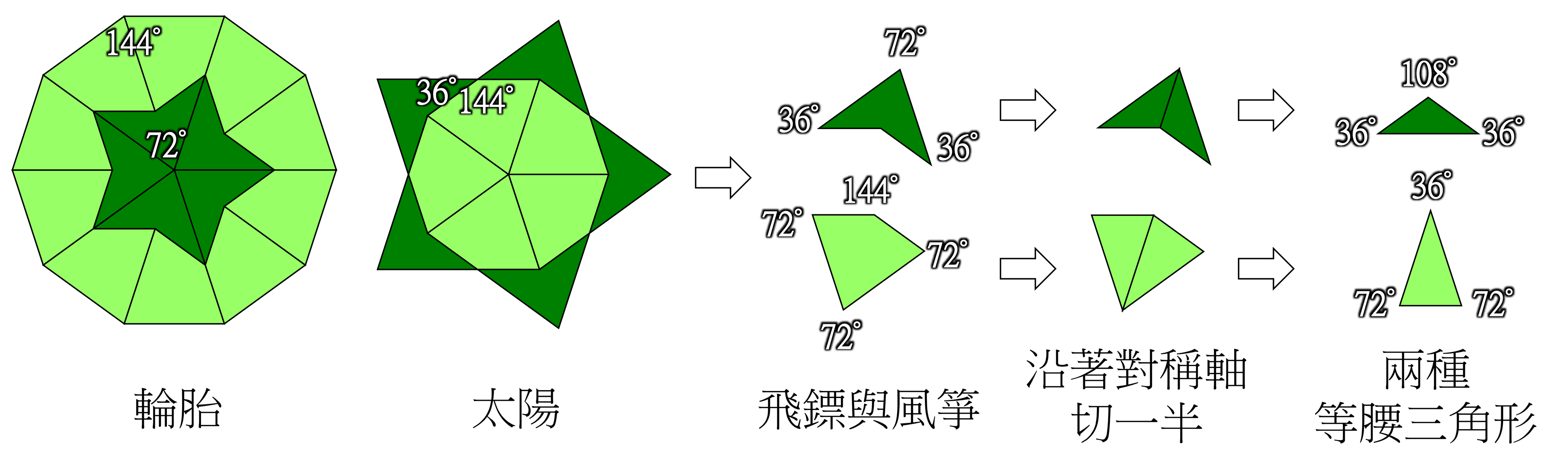
(二)應用費氏數列拼法搭配強制匹配規則拼貼相似三角形，並將交界處的A、B元件轉換成飛鏢或風箏，本研究自訂一套規則將難以拼貼的非週期性鑲嵌彭羅斯瓷磚建構出來。

(三)找出在強制匹配費氏拼法下，腰邊、底邊以及交界處在拼貼時的關係式，進一步推算出飛鏢與風箏數量的遞迴關係式，並利用幾何圖形加以解釋代數式子。

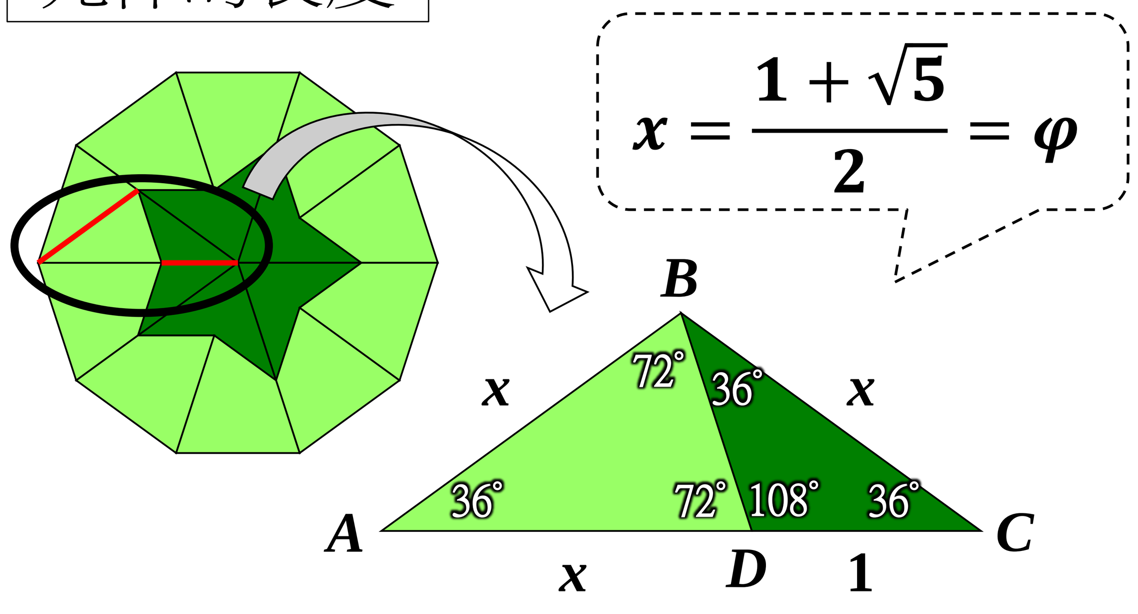
研究過程與方法

一、彭羅斯瓷磚切出A、B元件拼貼相似三角形

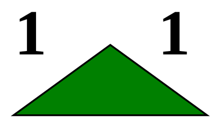
元件的角度

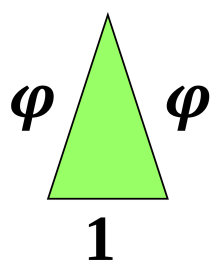


元件的長度



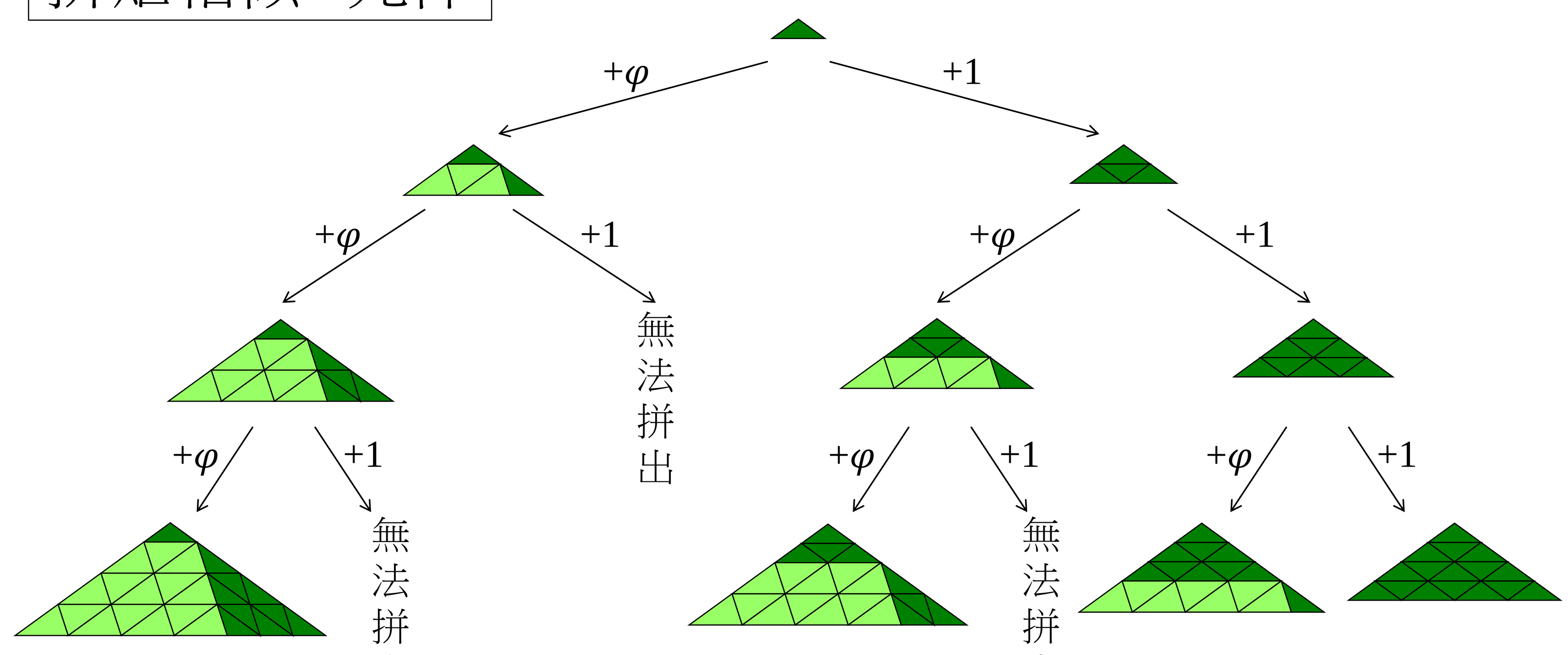
定義A、B元件

A元件： 面積 $s_A=\frac{1}{4}\sqrt{2+\varphi}$

B元件： 面積 $s_B=\frac{1}{4}\sqrt{3+4\varphi}$

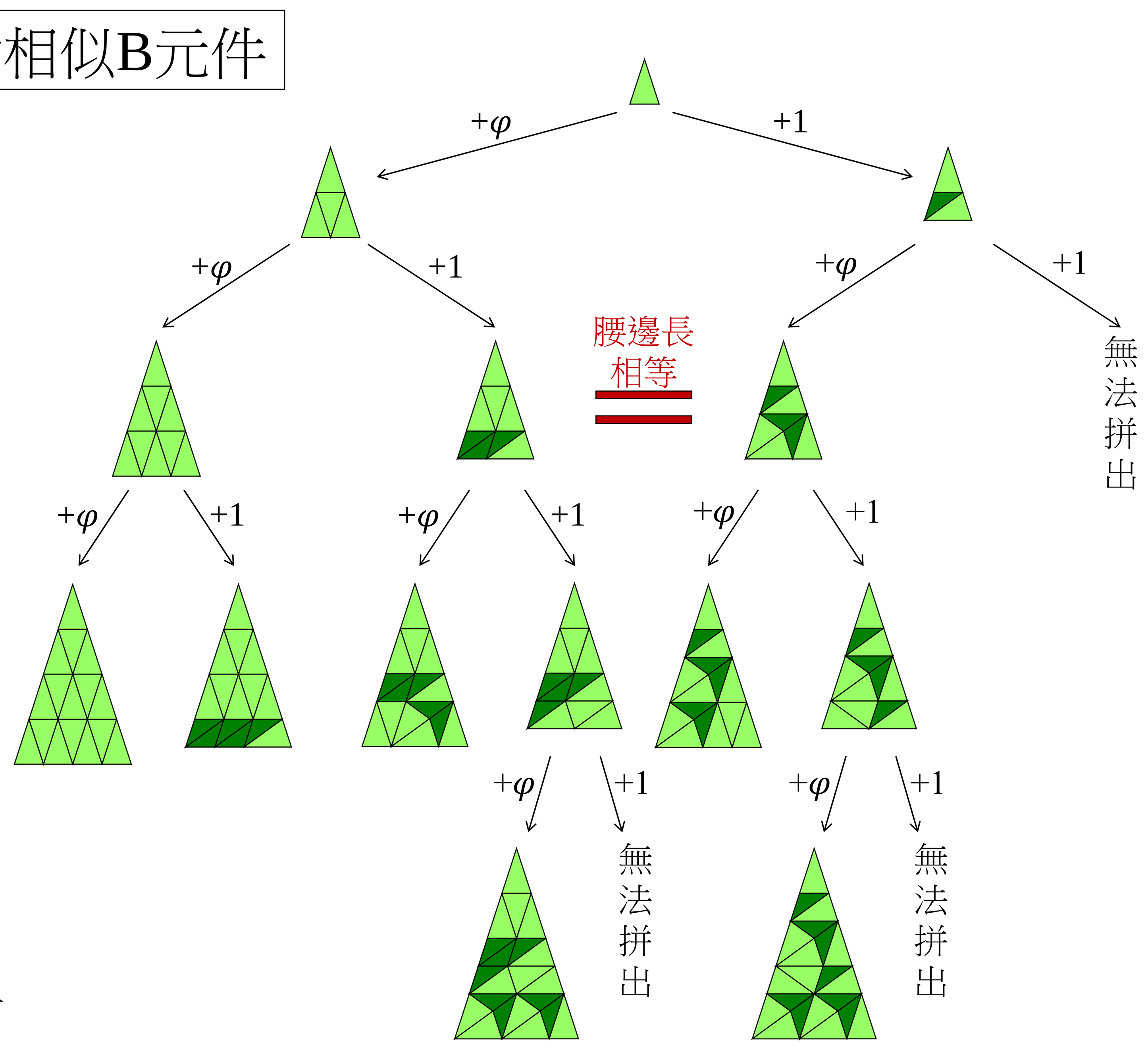
元件面積關係式：(1) $s_A\times\varphi=s_B$ (2) $s_B\times\varphi=s_A+s_B$

拼貼相似A元件



圖一

拼貼相似B元件

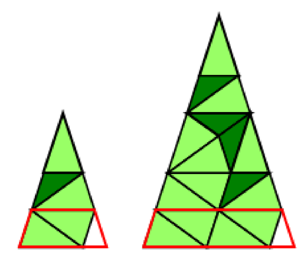


圖二

【圖一】雖然有些圖形無法拼出，但可以透過其他路徑得出。

【圖二】拿數量不等的A、B元件無法拼出腰長為 $(k+1)+k\varphi$ 的相似B元件，其中k為正整數。

Case1：從腰長 $k+k\varphi$ 往下加等腰梯形(腰長=1)　Case2：從腰長$(k+1)+(k-1)\varphi$ 往下加等腰梯形(腰長=φ)



剩下空隙的面積比元件還小。

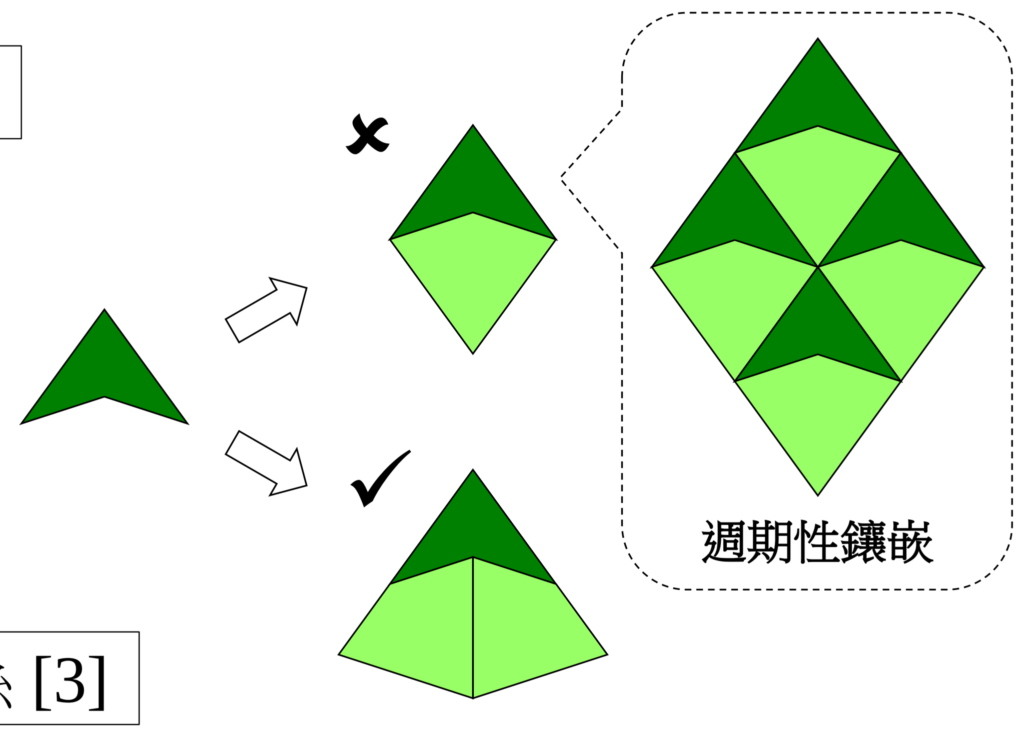
底邊 $\dfrac{(k+1)+(k-1)\varphi}{\varphi}=(k+1)\varphi-2$(不合)

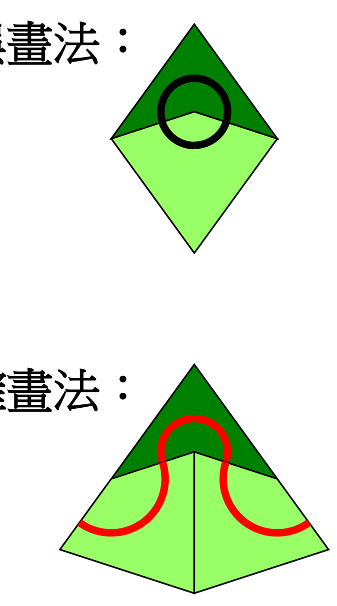
二、強制匹配費氏拼法建構彭羅斯瓷磚

註：底下出現面積為a_n的相似三角形所對應的圖形同時也稱作a_n

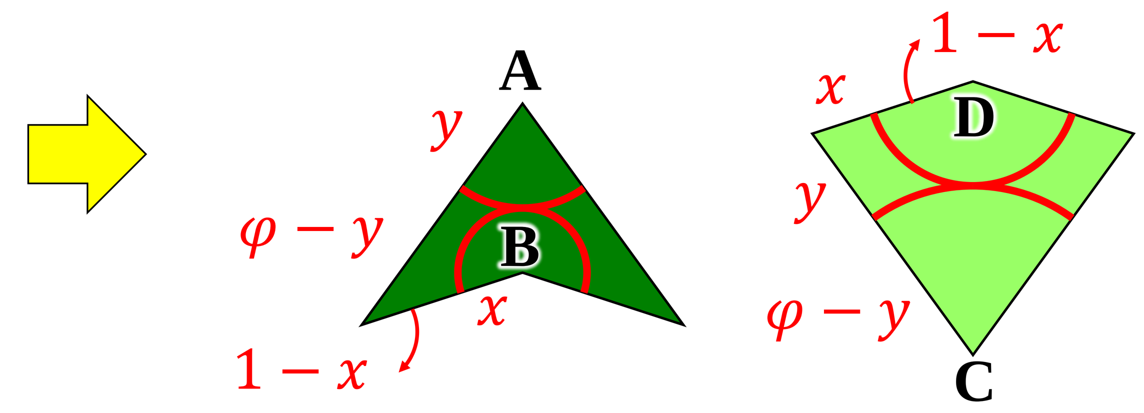
強制匹配規則 [3]、[8]

- 條件是根據非週期性鑲嵌而訂定。
- 畫法不只一種。





弧線需符合以下條件：



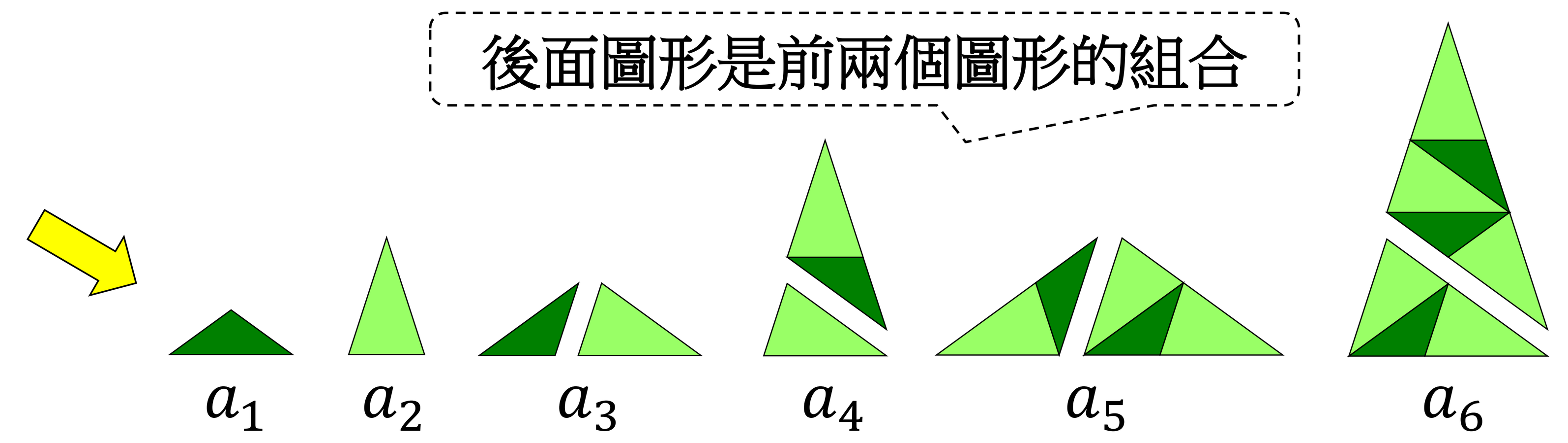
面積與費氏數列的關係 [3]

首項為 s_A、公比為 φ 的等比數列 a_n會滿足以下關係式：

$$\boldsymbol{a_n=s_A\times\varphi^{n-1}=a_{n-2}+a_{n-1}=f_{n-2}\times s_A+f_{n-1}\times s_B}$$

$$, n\geq 3, \text{其中費氏數 } f \text{ 為 } \begin{cases} f_1=1, f_2=1\\ f_i=f_{i-2}+f_{i-1}, i\geq 3\end{cases}$$

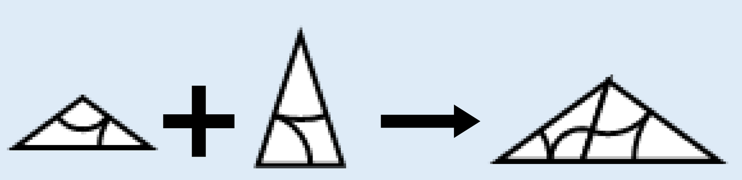
後面圖形是前兩個圖形的組合



【強制匹配費氏拼法 (本研究自訂的規則)】

為了符合強制匹配規則，利用費氏數列拼法拼貼相似A、B元件時，進行的模式如下：

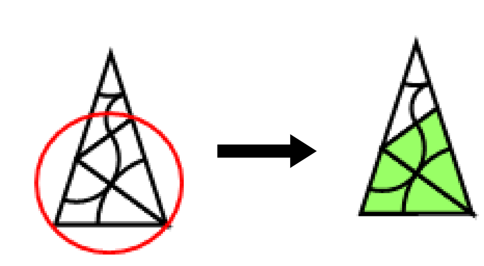
- **拼貼成相似A元件時，只需經由旋轉拼在一起即可；**
  舉例：旋轉拼貼



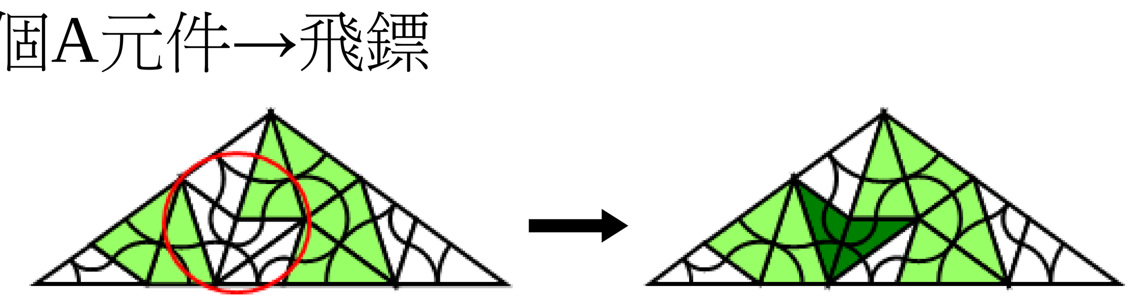
- **拼貼成相似B元件時，要先將前一個相似A元件翻轉，再經由旋轉拼在一起。**
  舉例：Step1.先翻轉　Step2.再旋轉拼貼

交界處的A、B元件轉換成飛鏢或風箏

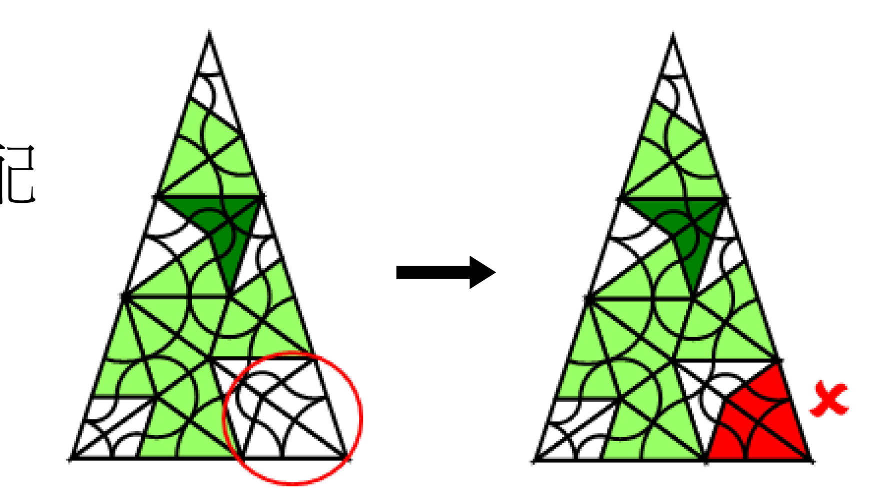
Ex. 兩個B元件→風箏



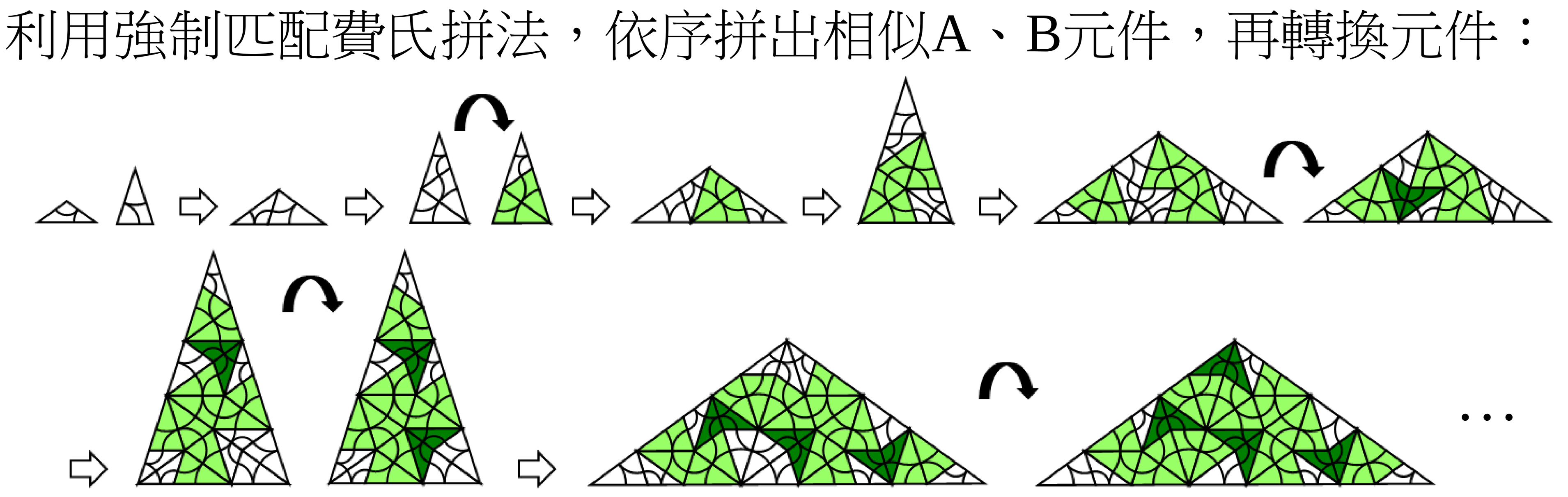
Ex. 兩個A元件→飛鏢



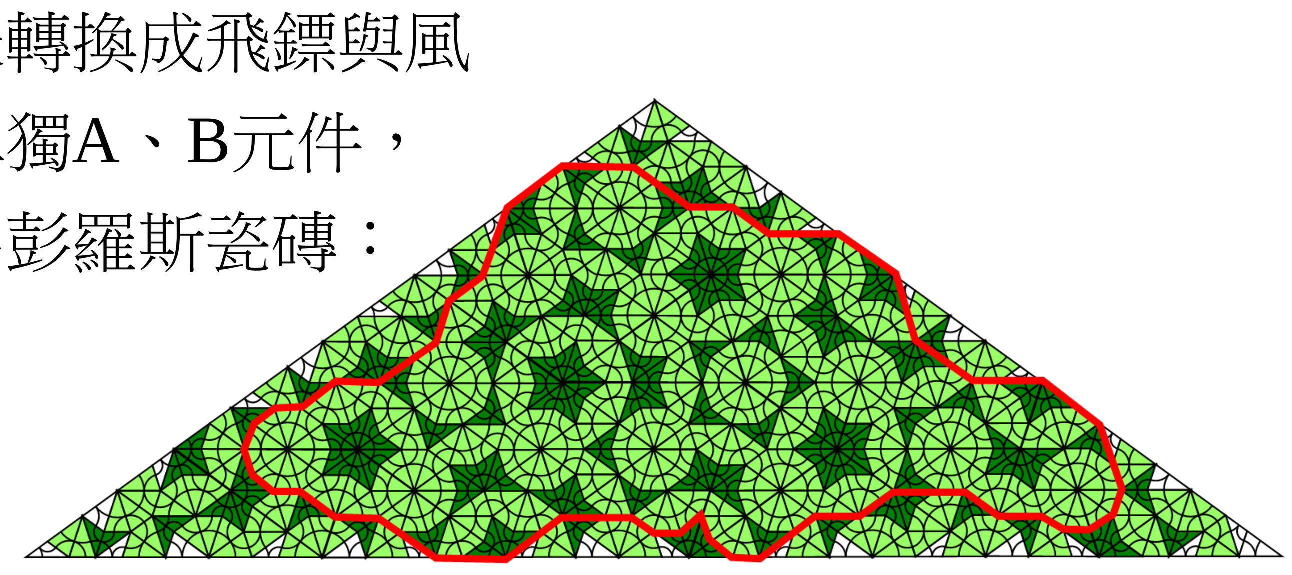
Note.
需符合強制匹配
才能轉換！



利用強制匹配費氏拼法，依序拼出相似A、B元件，再轉換元件：

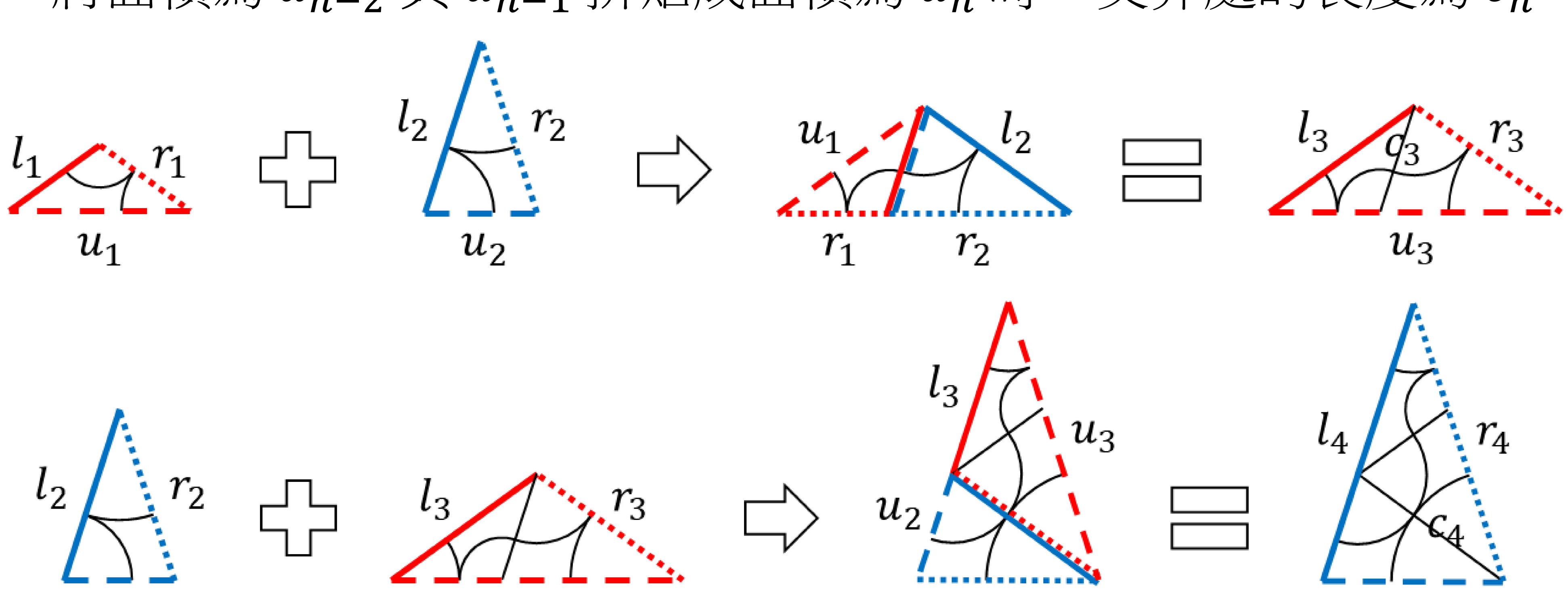


排除未轉換成飛鏢與風箏的單獨A、B元件，擷取出彭羅斯瓷磚：



三、飛鏢與風箏數量的遞迴關係式

- 面積為 a_n 的相似A、B元件之三邊長：
  l_n：左側的腰邊長、r_n：右側的腰邊長、u_n：底邊長
- 將面積為 a_{n-2} 與 a_{n-1} 拼貼成面積為 a_n 時，交界處的長度為 c_n



【邊長與交界處之關係式】

利用「強制匹配費氏拼法」拼出面積為 a_n 的相似三角形，左側腰邊長l、右側腰邊長r、底邊長u以及交界處c的關係式如下：

相似A元件：
$$\begin{cases} l_{2n+1}=u_{2n-1}\\ r_{2n+1}=l_{2n}\\ u_{2n+1}=r_{2n-1}+r_{2n}\\ c_{2n+1}=u_{2n}=l_{2n-1}\end{cases};$$

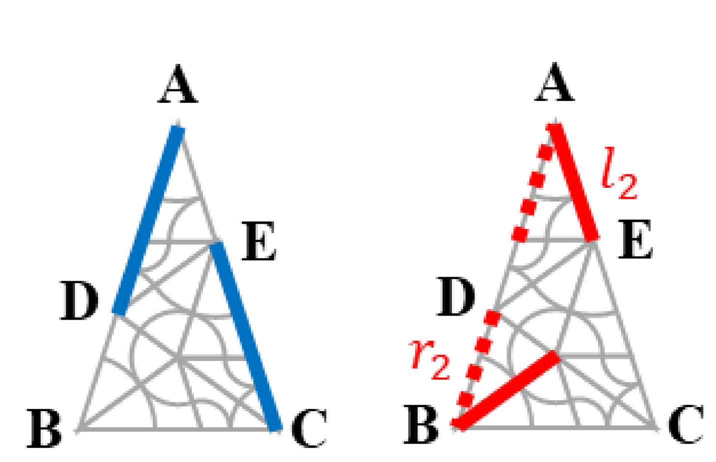
相似B元件：
$$\begin{cases} l_{2n+2}=u_{2n}+l_{2n+1}\\ r_{2n+2}=u_{2n+1}\\ u_{2n+2}=r_{2n}\\ c_{2n+2}=r_{2n+1}=l_{2n}\end{cases}, n\geq 1$$

觀察面積為a_6的相似B元件：

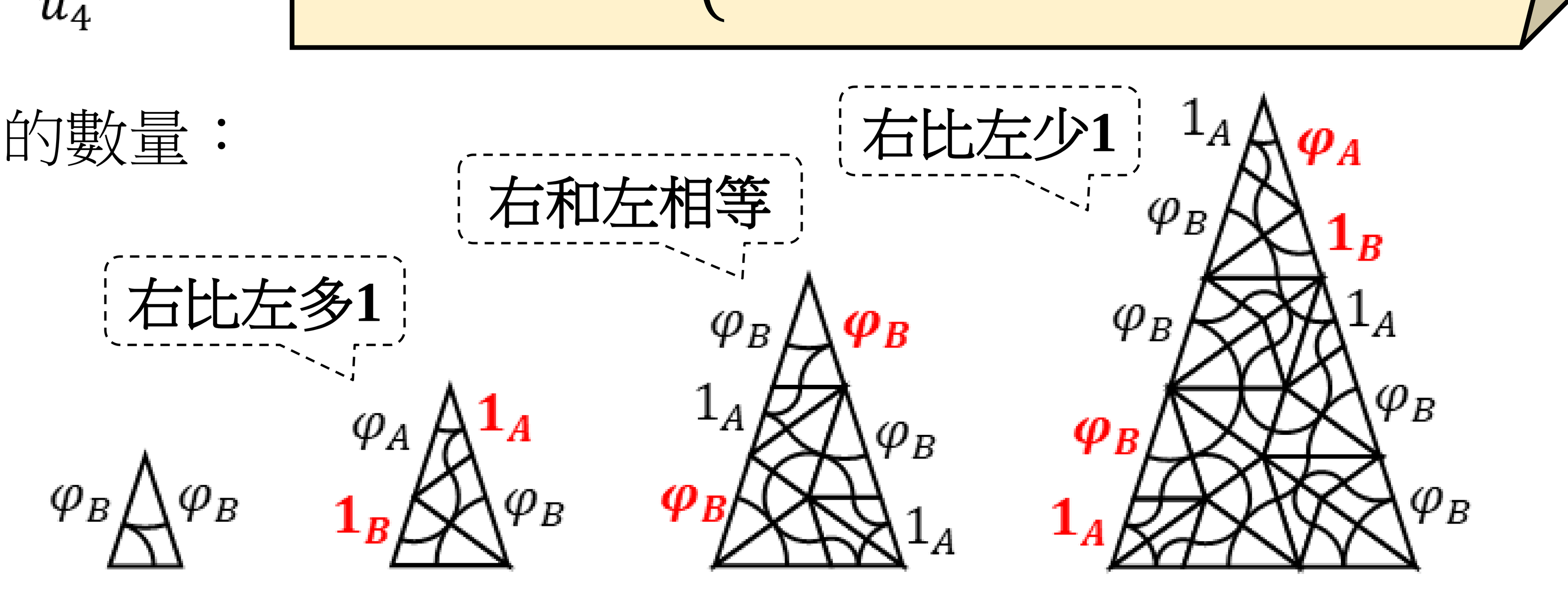
左腰長 $\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}$

右腰長 $\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{EC}$

- $\overline{AD}=\overline{EC}=u_3$
- $\overline{DB}=r_2$
- $\overline{AE}=l_2$



觀察1_A的數量：



【性質1-1】

利用「強制匹配費氏拼法」拼出的相似B元件中，左側腰邊長 l 和右側腰邊長 r 中 1_A 數量的關係式如下，其中 $n_{1_A}(x)$ 表示在 x 長度中 1_A 的數量：

$$\begin{cases} l_{4n-2} = r_{4n-2} \\ n_{1_A}(r_{8n-4} - l_{8n-4}) = 1 \\ n_{1_A}(r_{8n} - l_{8n}) = -1 \end{cases}, n \geq 1$$

【性質1-2】

利用「強制匹配費氏拼法」拼出相似三角形，當交界處 c 出現 1_A 時，兩側的A元件會轉換成飛鏢，而交界處 1_A 數量的關係式如下，其中 $n_{1_A}(x)$ 表示在 x 長度中 1_A 的數量：

$$\begin{cases} c_{4n} = c_{4n+1} \\ n_{1_A}(c_{8n-1} - c_{8n-2}) = 1 \\ n_{1_A}(c_{8n+3} - c_{8n+2}) = -1 \end{cases}, n \geq 1$$

飛鏢與風箏的數量

d_n：交界處的飛鏢數量、k_n：交界處的風箏數量

D_n：相似三角形中飛鏢總數量、K_n：相似三角形中風箏總數量

表一：交界處飛鏢增加的數量 d_n 與費氏數的關係

腰長	交界處長	交界處的飛鏢數量 d_n			
		相似B元件	費氏乘積	相似A元件	與前項關係
$\varphi+1$	φ	$d_4 = 0 = 0 \times 1$	$f_0 \times f_1$	$d_5 = 0$	$d_5 = d_4$
$2\varphi+1$	$\varphi+1$	$d_6 = 0 = 0 \times 1$	$f_0 \times f_2$	$d_7 = 1$	$d_7 = d_6 + 1$
$3\varphi+2$	$2\varphi+1$	$d_8 = 1 = 1 \times 1$	$f_1 \times f_2$	$d_9 = 1$	$d_9 = d_8$
$5\varphi+3$	$3\varphi+2$	$d_{10} = 2 = 1 \times 2$	$f_1 \times f_3$	$d_{11} = 1$	$d_{11} = d_{10} - 1$
$8\varphi+5$	$5\varphi+3$	$d_{12} = 2 = 1 \times 2$	$f_2 \times f_3$	$d_{13} = 2$	$d_{13} = d_{12}$
$13\varphi+8$	$8\varphi+5$	$d_{14} = 3 = 1 \times 3$	$f_2 \times f_4$	$d_{15} = 4$	$d_{15} = d_{14} + 1$
$21\varphi+13$	$13\varphi+8$	$d_{16} = 6 = 2 \times 3$	$f_3 \times f_4$	$d_{17} = 6$	$d_{17} = d_{16}$
$34\varphi+21$	$21\varphi+13$	$d_{18} = 10 = 2 \times 5$	$f_3 \times f_5$	$d_{19} = 9$	$d_{19} = d_{18} - 1$
$55\varphi+34$	$34\varphi+21$	$d_{20} = 15 = 3 \times 5$	$f_4 \times f_5$	$d_{21} = 15$	$d_{21} = d_{20}$
$89\varphi+55$	$55\varphi+34$	$d_{22} = 24 = 3 \times 8$	$f_4 \times f_6$	$d_{23} = 25$	$d_{23} = d_{22} + 1$
$144\varphi+89$	$89\varphi+55$	$d_{24} = 40 = 5 \times 8$	$f_5 \times f_6$	$d_{25} = 40$	$d_{25} = d_{24}$
$233\varphi+144$	$144\varphi+89$	$d_{26} = 65 = 5 \times 13$	$f_5 \times f_7$	$d_{27} = 64$	$a_{27} = a_{26} - 1$

表二：相似三角形中飛鏢與風箏的總數量

面積	費氏拼法		交界處增加 (d_n, k_n)		總數量 (D_n, K_n)
a_1					(0, 0)
a_2					(0, 0)
a_3	(0, 0)	+	(0 , 0)	=	(0, 0)
a_4	(0, 0)	+	(0 , 1)	=	(0, 1)
a_5	(0, 1)	+	(0 , 0)	=	(0, 1)
a_6	(0, 2)	+	(0 , 0)	=	(0, 2)
a_7	(0, 3)	+	(1 , 0)	=	(1, 3)
a_8	(1, 5)	+	(1 , 0)	=	(2, 5)
a_9	(3, 8)	+	(1 , 1)	=	(4, 9)
a_{10}	(6, 14)	+	(2 , 1)	=	(8, 15)
a_{11}	(12, 24)	+	(1 , 1)	=	(13, 25)
a_{12}	(21, 40)	+	(2 , 2)	=	(23, 42)
a_{13}	(36, 67)	+	(2 , 1)	=	(38, 68)
a_{14}	(61, 110)	+	(3 , 2)	=	(64, 112)
a_{15}	(102, 180)	+	(4 , 2)	=	(106, 182)
a_{16}	(170, 294)	+	(6 , 3)	=	(176, 297)
a_{17}	(282, 479)	+	(6 , 4)	=	(288, 483)
a_{18}	(464, 780)	+	(10 , 6)	=	(674, 786)
a_{19}	(962, 1269)	+	(9 , 6)	=	(971, 1275)
a_{20}	(1645, 2061)	+	(15 , 10)	=	(1660, 2071)

【性質2：飛鏢數量遞迴關係式】

利用「強制匹配費氏拼法」拼貼面積為 a_n 的相似三角形中，元件經轉換後，飛鏢總數量 D_n的遞迴關係式：

$$\begin{cases} D_1 = D_2 = D_3 = 0 \\ D_{4n} = D_{4n-2} + D_{4n-1} + f_{n-1} \times f_n \\ D_{4n+1} = D_{4n-1} + D_{4n} + f_{n-1} \times f_n \\ D_{4n+2} = D_{4n} + D_{4n+1} + f_{n-1} \times f_{n+1} \\ D_{4n+3} = D_{4n+1} + D_{4n+2} + f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n+1} \end{cases}, n \geq 1$$

【性質3：風箏數量遞迴關係式】

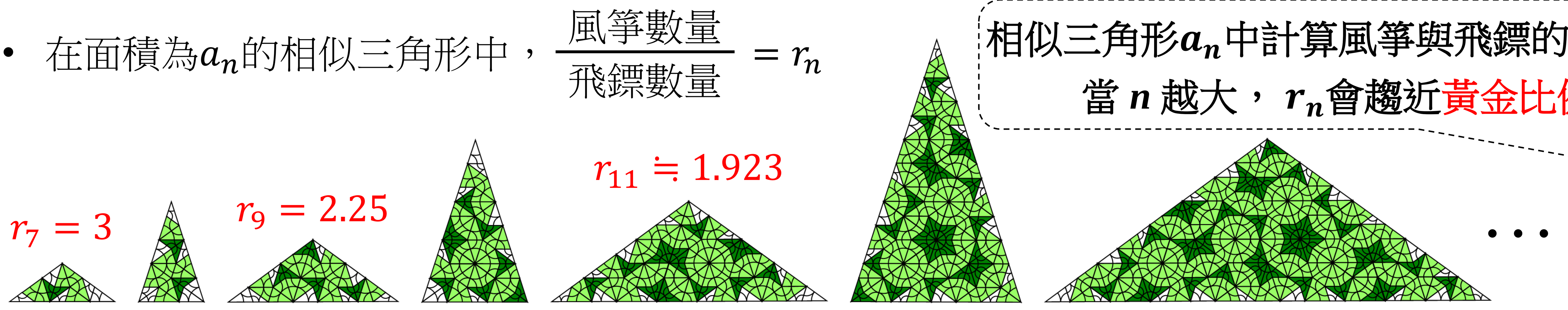
利用「強制匹配費氏拼法」拼貼面積為 a_n 的相似三角形中，元件經轉換後，風箏總數量 K_n的遞迴關係式：

$$\begin{cases} K_1 = K_2 = K_3 = 0, K_4 = K_5 = 1 \\ K_{4n+2} = K_{4n} + K_{4n+1} + f_{n-1} \times f_n \\ K_{4n+3} = K_{4n+1} + K_{4n+2} + f_{n-1} \times f_n \\ K_{4n+4} = K_{4n+2} + K_{4n+3} + f_{n-1} \times f_{n+1} \\ K_{4n+5} = K_{4n+3} + K_{4n+4} + f_{n-1} \times f_{n+1} + (-1)^{n+1} \end{cases}, n \geq 1$$

- 在面積為a_n的相似三角形中，$\dfrac{\text{風箏數量}}{\text{飛鏢數量}} = r_n$

相似三角形a_n中計算風箏與飛鏢的數量比例

當 n 越大，r_n會趨近黃金比例 φ



$r_8 = 2.5$　$r_{10} = 1.875$　$r_{12} ≒ 1.826$　$r_{13} ≒ 1.789$　$r_{37} ≒ 1.618$

研究結論

(一)拿數量不等的A、B兩種元件拼成面積更大且與原本元件相似的三角形，得出所有腰邊長為 $x + y\varphi$ 的相似A元件，以及所有腰邊長為 $x + y\varphi$ $(x \neq y + 1)$的相似B元件，都有辦法利用A、B元件拼貼出來，其中x、y為正整數。

(二)本研究訂定出一套以飛鏢和風箏為元件建構相似三角形的方法，先利用強制匹配費氏拼法，依序拼出相似A、B元件，接著再將交界處的A、B元件轉換成飛鏢與風箏。當拼貼夠大時，排除邊上沒有轉換的單獨A、B元件，擷取內部圖形就可以得出彭羅斯瓷磚。

(三)本研究將短邊長為1、φ、φ^2…的相似A元件以及相似B元件，交錯排列後，面積以數列 a_n 表示。由邊長與交界處之關係式，進而推得將元件轉換成飛鏢與風箏後，在面積為 a_n 的相似三角形中，飛鏢總數量與風箏總數量的遞迴關係式，且當 n 夠大時，兩者數量的比例會趨近黃金比例 φ。

參考文獻資料

[1] 陳宏賓（2023年03月29日）。【幾何】數學家終於找到名為「愛因斯坦」的瓷磚。UniMath。資料引自：https://reurl.cc/A4Ve3E

[2] David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan and Chaim Goodman-Strauss (CC BY-SA 4.0)

[3] Penrose tiling（2023年11月21日）。維基百科。資料引自：https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_tiling

[4] 中華民國第45屆中小學科學展覽會。平面與立體鑲嵌之研究。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/high/0304/030414.pdf

[5] 中華民國第62屆中小學科學展覽會。解構奧運會徽探討平面鑲嵌。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-030417.pdf?0.3177104569040239

[6] 中華民國第62屆科小學科學展覽會。百密無一疏–特殊多邊形密閉區塊之研究。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/62/pdf/NPHSF2022-050402.pdf?0.5943970666266978

[7] 新北市111學年度中小學科學展覽。潘洛斯多邊形性質與非週期性密鋪之研究。資料引自：https://www.tcjh.ntpc.edu.tw/p/406-1000-9050,r87.php

[8] 小A君科普（2020年05月08日）。數學家的美：彭羅斯鋪陳。資料引自：https://kknews.cc/zh-tw/education/n2k26gg.html

[9] 臺灣2007年國際科學展覽會。生生不息–正五邊形的繁衍及算術法則。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2007/pdf/010030.pdf

[10]中華民國第50屆中小學科學展覽會。分分合合-圖形的分割與重組。資料引自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/50/pdf/080406.pdf