

# 中華民國第 64 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國中組 物理科

第二名

030116

水中的奇妙力量探秘—沃辛頓射流

學校名稱：雲林縣私立東南國民中學

作者：  國二 鐘可恩  國二 賴妍恩  國二 李巧盈	指導老師：  陳羿安
---	------------------

關鍵詞：沃辛頓射流、彈性碰撞、表面張力

## 摘要

我們以實驗室容易取得的重物與乒乓球模擬網路上跳水彈射手中球體的沃辛頓射流實驗。結果發現圓形的類天然海綿因為具有吸水迅速、可以平穩入水的優點，因此選擇以此為托球的載體進行實驗。依據我們的實驗結果，至少需要 15 公分水深才能形成完整的射流彈射出乒乓球，原則上在下落軌跡完全垂直於水面時，落下高度越高，球體彈射高度越高，實際實驗水深 15 公分以上時，落下高度 50 公分彈射高度約可達 47 公分，但結果受限於托球的海綿在落下高度 40 公分後下落軌跡不穩定，若期望更高的射流強度需要尋找更穩定下落的載體。

## 壹、前言

### 一、研究動機

某天在滑手機的時候，看到一部有趣的影片。影片內容是一個人抱著一顆皮球跳進水池的畫面，在這個人跳入水池之後，把手中的皮球放開，神奇的是那顆皮球在放開後彈出水面，甚至高過此人原本站的高度。在好奇心的驅使下，我們很想知道為什麼皮球會在持球的人跳入水中放開後，可以彈出距離水面這麼高的地方。在查詢資料後了解這是因為發生『沃辛頓射流』的現象，所以我們想藉由模擬『沃辛頓射流』的現象，探討其成因並試著找出在何種條件下能夠得到更好的實驗結果。



抱球跳水彈射影片畫面（地球科普記，2023）

### 二、研究目的

- (一) 尋找合適進行沃辛頓射流的載體。
- (二) 使用類天然海綿以不同水深和不同落下高測試，探究甚麼條件才能使球彈的最高。
- (三) 探究在沃辛頓射流實驗中，球體彈射高度與載體製造水下空氣柱深度關係。

### 三、文獻探討

射流是指噴出的束狀流體，與周圍的介質相比，射流本身具有較高的動量。如果周圍的介質與射流為相同流體組成，並且此流體具有粘度，則周圍流體會在噴射所造成的卷吸過程中被攜帶前進 (Swain, 2016)。沃辛頓射流 (Worthington Jet) 是指在物體衝擊液體表面時，產生了一條空氣柱，而周圍液體會因為表面張力和恢復力，迅速將這個空氣柱填滿，導致空氣柱中央射出一道與水面垂直的水柱，前述影片中的人跳入水中後，就是利用周圍介質回復產生的力量，使球可以彈得很遠 (鄭永銘, 2023; Worthington and Cole, 1897)。

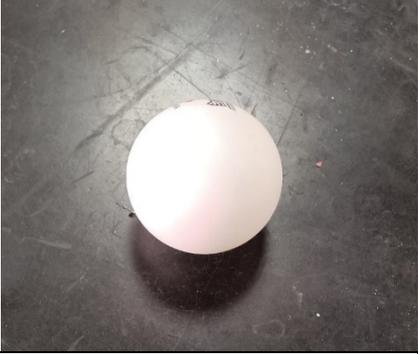


物體衝擊液面時造成的空氣柱 (Annual Reviews Extra, 2013)

沃辛頓射流的產生受到彈性碰撞以及表面張力影響。彈性碰撞是指兩物體碰撞前後動能沒有轉變成其他形式能量，碰撞瞬間遵守能量守恆。因此若一個大質量球體與一個小質量球體發生彈性碰撞，小質量球體會以高於原本速度反彈 (莫斯利, 2017; 潘冠錡, 2011)，而在沃辛頓射流的實驗中，托球的載體與球體在下落過程中可視為發生彈性碰撞的兩個球體，進而推導出球體彈射出時所受的力。表面張力是指液體表面的分子對內部吸引力較大，所以試圖減少表面分子數並獲得最小表面位能的趨勢 (柯賢文, 2007)，目前研究已知可以藉由在水中增加少量界面活性劑破壞液體表面張力，避免在非預期的狀態下發生沃辛頓射流，導致環境中的污染物任意噴發 (Cai, et al., 2022)。

## 貳、研究設備與器材

### 一、實驗器材：(照片為作者自行拍攝)

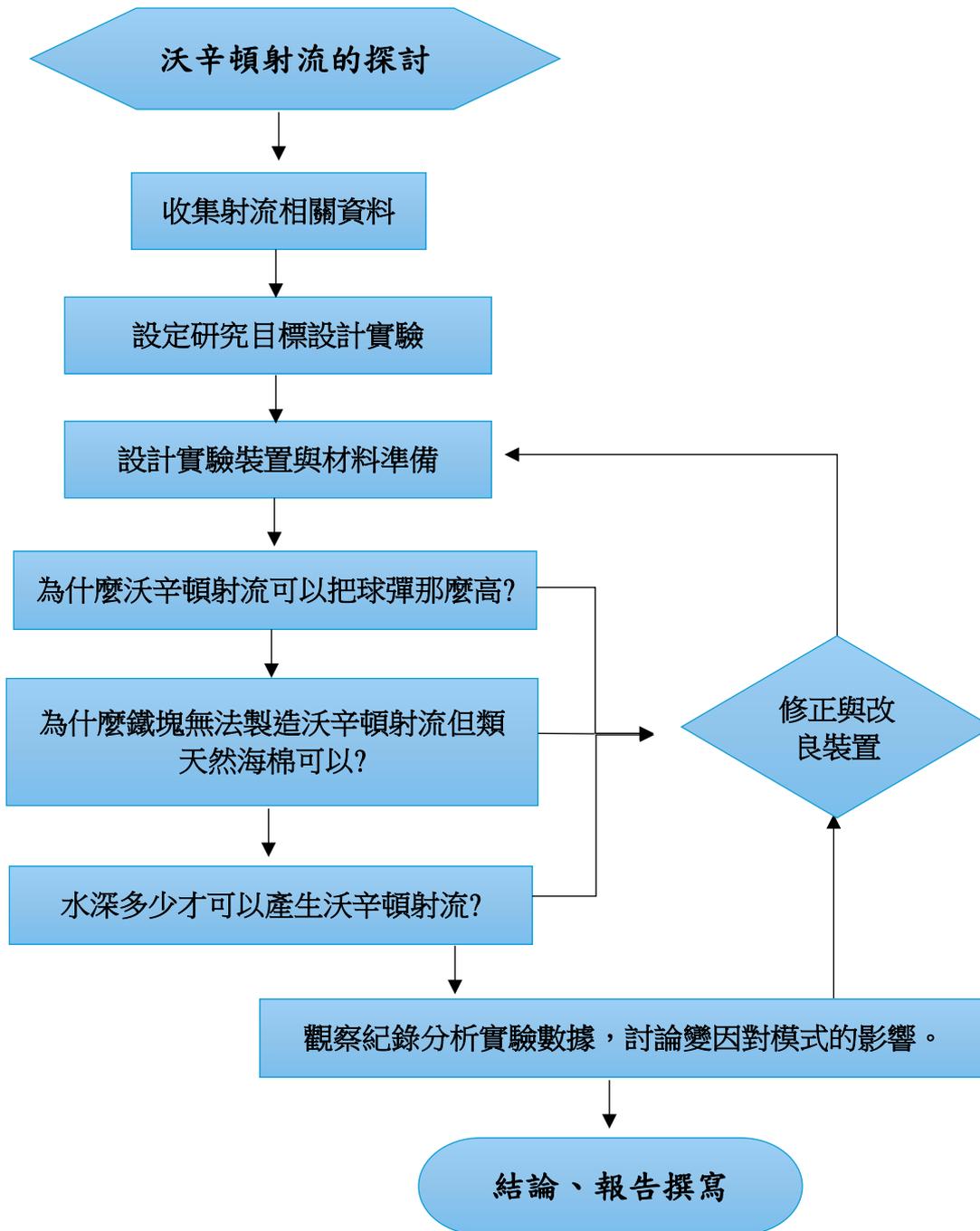
L 型隔網	類天然海綿(濕重 110.62 g 重)	乒乓球 (2.07 g 重)
		
木條	鐵塊	手機 (iphone 15 pro)
		
深桶 (深 30.0 cm)	透明淺桶(深 14.5 cm)	玻璃魚缸(深 40.0 cm)
		

### 二、研究分析軟體：(照片為預設軟體檔案圖示)

數據分析軟體	影片編輯軟體	影像分析軟體
		
Excel (Microsoft Office 專業版 2019)，實驗數據基本運算及圖表繪製。	Filmora 13.3.8 v (Wondershare)，將所拍攝的影片以本軟體每秒 30 格逐格播放，擷取水面上球體彈跳最高點以及水面下載體墜落時造成的空氣柱最低點分析計算。	Image J 1.48v，是由美國國家衛生研究院 (National Institutes of Health, USA) 開發，基於 Java 的公有領域影像處理軟體，我們以此分析計算球體彈跳高度及載體造成水面下空氣柱的深度。

# 參、研究過程及方法

## 一、研究流程



## 二、實驗裝置設計

### (一) 第一代實驗裝置

我們仔細觀看分析影片後，認為下落實驗裝置需要有兩個部分，包含托球的載體（影片中的人）與球體掉落的部分，以及觀察記錄球彈起高度的部分。我們設計以兩根木條支撐實驗物體後架於 L 型架，實驗時將兩根木條分開，讓上面的載體與球體自然落下，如圖 3-1 所示。但結果發現載體與木條間的摩擦力會造成下落裝置非常不穩定，下落時會造成下落延遲或實驗物翻轉的問題，造成實驗誤差。



圖 3-1 第一代實驗裝置（照片為作者自行拍攝）

### (二) 第二代實驗裝置

有鑑於第一代裝置的缺失，我們簡化實驗裝置，把實驗物掉落的部分改為用手持。以左右手拇指、食指、中指輕輕抵住載體部分，開始時左右手同時移開讓物體自由落下，如圖 3-2。實驗過程中，我們需要得知水、球、載體的高度，因此使用每格皆為 5 公分的 L 型架子來當高度的基準。接著使用木棍來標示當前實驗測試物的落下高度，實驗時以自拍架固定手機，以影格速率 24 fps（畫面/秒）錄影紀錄球體掉落彈起的過程，如圖 3-3。



圖 3-2 手持實驗物方式（照片為作者自行拍攝）

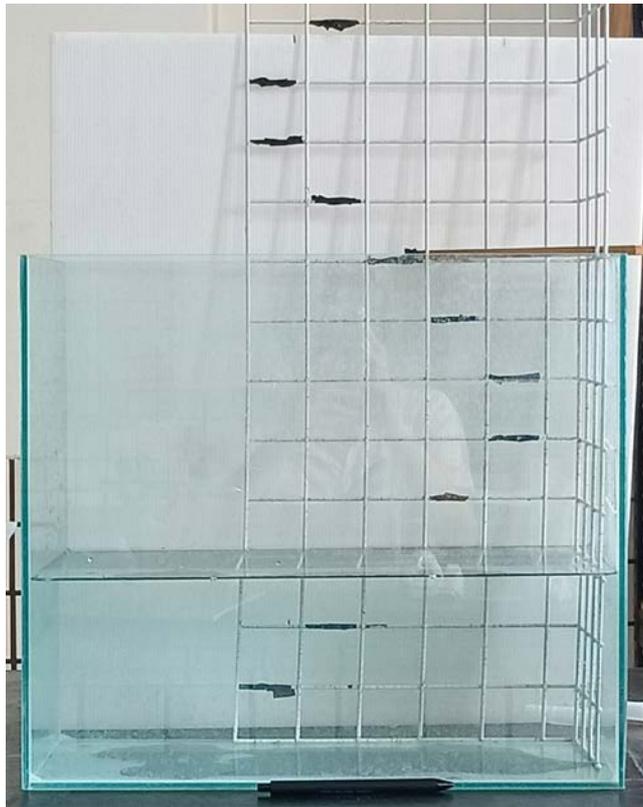


圖 3-3 第二代實驗裝置圖（照片為作者自行拍攝）

### 三、實驗數據分析

#### （一）球體彈跳高度與載體形成水下空氣柱深度分析

1. 實驗完成後，先利用影片分析軟體「Filmora」將手機拍的影片以原始速度每秒 30 張影格速率分析，一幀一幀逐格觀察檢視，將球彈起的最高點擷圖下來。

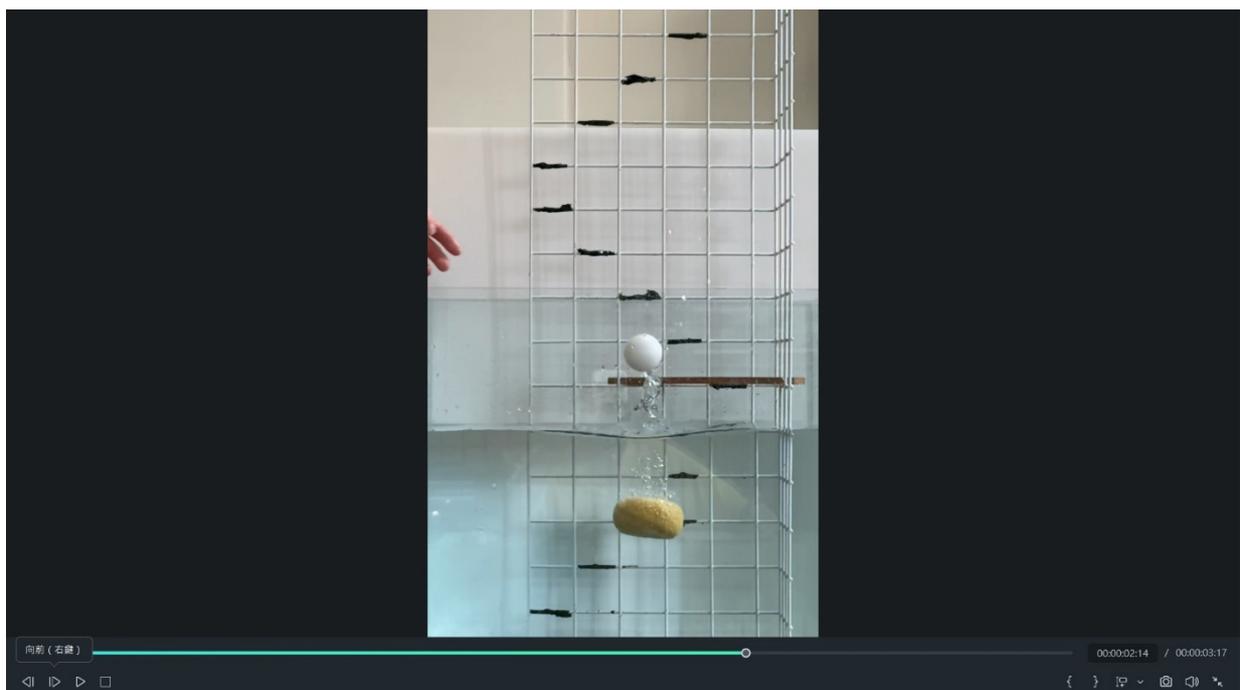


圖 3-4 擷取球彈最高點畫面（電腦畫面擷圖）。

2. 將擷取圖片匯入「Image J」軟體，已知 L 型架子每格長度 5 公分，所以沿著圖片上格架劃線，執行軟體中分析（Analyze）→設定尺度（Set Scale），將已知長度設為測量基準。

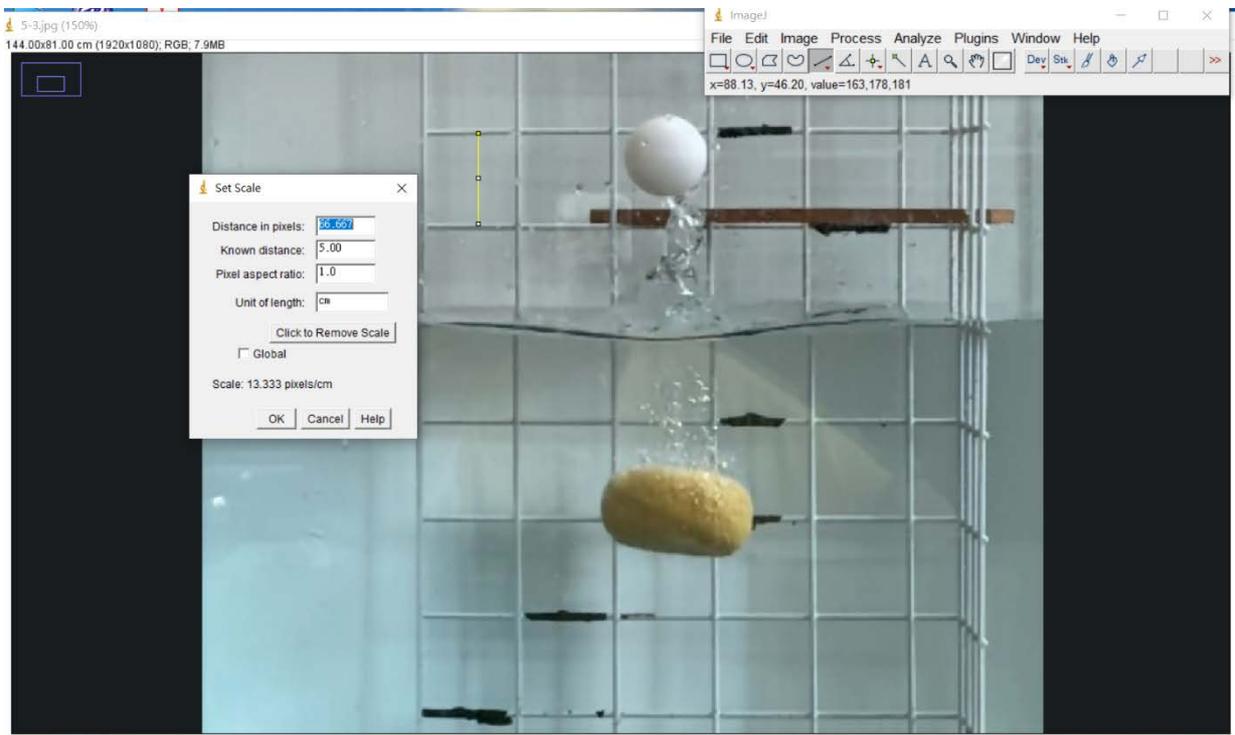


圖 3-5 設定圖片測量基準（電腦畫面擷圖）。

3. 沿著球彈起高度從水平面至球體畫線，執行軟體中分析（Analyze）→測量（Measure）指令，就可獲得實際彈起高度數據。

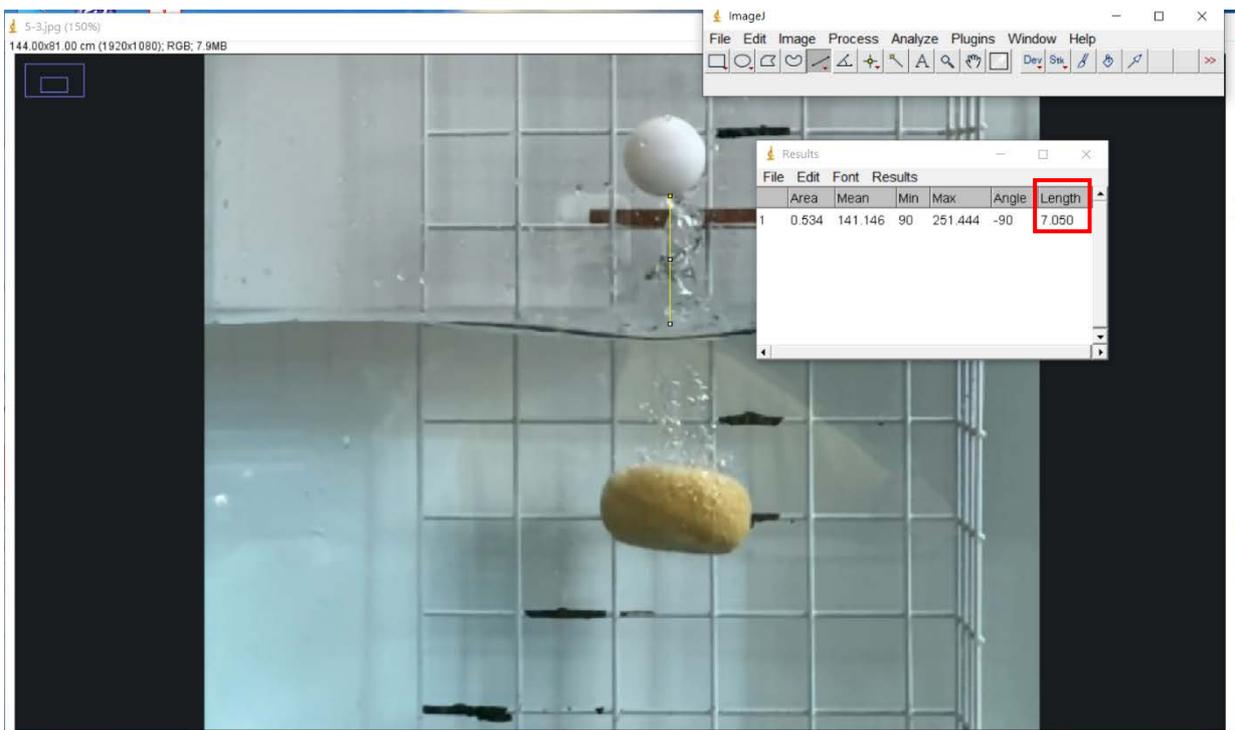


圖 3-6 執行指令獲得測量數據（電腦畫面擷圖）。

4. 擷取載體在水面下形成空氣柱最低點，重複以上步驟計算並記錄空氣柱深度。

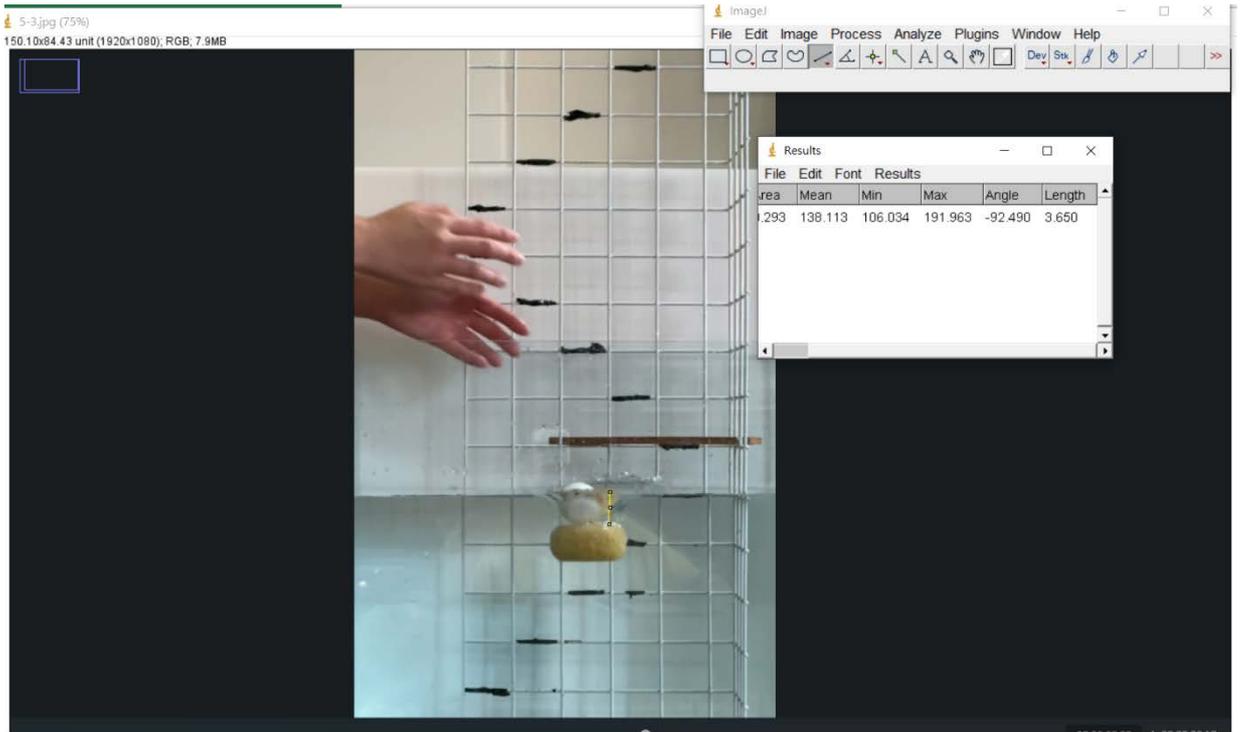


圖 3-7 測量水下空氣柱深度（電腦畫面擷圖）。

5. 數據以「Excel」計算並繪製平均曲線圖。

## (二) 水對球的垂直合力公式推導

### 1. 球體彈射時間計算

由水下空氣柱達最深處至球體彈射最高處，紀錄影片顯示時間並計算求彈到最高處所需時間（影片顯示時間最後一組數字為每秒 30 幀的播放條件下，不足一秒的幀數，如圖為 2 秒 14 幀）。

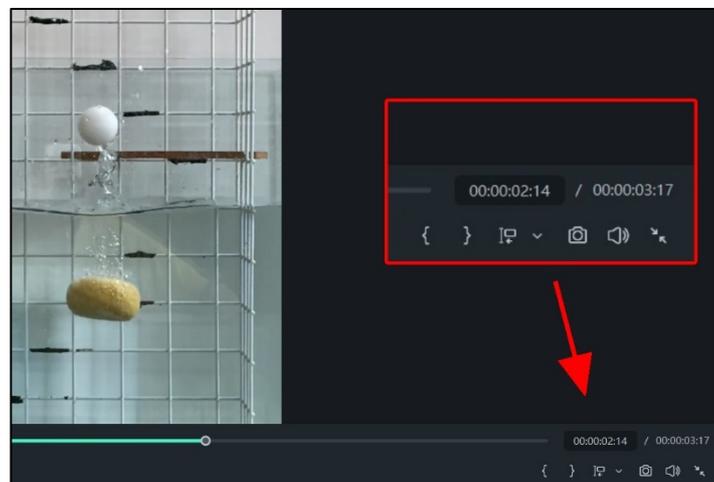


圖 3-8 影片時間紀錄（電腦畫面擷圖）

## 2. 水對球的垂直合力公式推導

我們將實驗現象以力學角度分析如下：將質量為  $m$  的乒乓球從木棍擺放位置丟球高度  $H$  自由下落，撞擊水面後形成水面下深度為  $h_1$  的錐形水坑，後水回復施力  $F$  反彈，使球獲得平均加速度  $a$  由靜止加速  $t_1$  秒到達最高速  $V_{\max}$  脫離水面停止施力後，球應重力減速  $t_2$  秒停滯於水面高度  $h_2$ ，如疊圖(圖 3-9)所示。

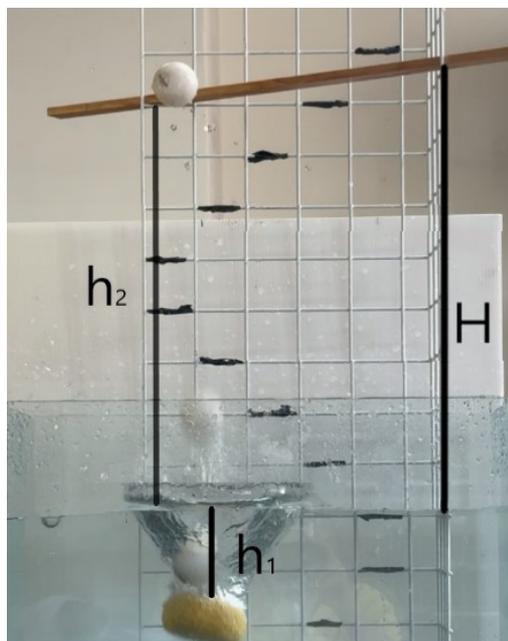


圖 3-9 實驗力學分析代號示意圖  
(照片為作者自行拍攝加註)。

圖(3-9)為水深 30 公分、丟球高度  $H=40$  公分，乒乓球彈跳至最高點以及水面下錐形水坑(空氣柱)深度最深的兩張的影像擷圖拼接而成。藉由影像的時間記錄，我們可以得到球到達水面下深度為  $h_1$  的錐形水坑的時間點和球反彈到達水面高度  $h_2$  停滯的時間點，其時間差為  $T$  經歷過反彈加速  $t_1$  秒和重力減速  $t_2$  秒，故  $T = t_1 + t_2$  --- ①

利用速度變化關係  $\Delta V = at$ ，在球反彈加速與重力減速過程，分別為  $V_{\max} = a \times t_1$  --- ② ;  $V_{\max} = g \times t_2$  --- ③

由於球脫離水面後，只接觸空氣，在忽略空氣阻力後，力學能守恆，球的動能全部轉換為位能，得到關係式為  $\frac{1}{2}mV_{\max}^2 = mgh_2$  可推導為  $V_{\max} = \sqrt{2gh_2}$  --- ④

$$\begin{cases} T = t_1 + t_2 & \text{--- ①} \\ V_{\max} = a \times t_1 & \text{--- ②} \\ V_{\max} = g \times t_2 & \text{--- ③} \\ V_{\max} = \sqrt{2gh_2} & \text{--- ④} \end{cases}$$

在四個關係式中時間差  $T$  和重力加速度  $g$  為已知，故可推得水反彈所造成的平均加速度  $a = \frac{g\sqrt{2h_2}}{T\sqrt{g-\sqrt{2h_2}}}$ ，公式推導過程請見附錄 1，由牛頓第二運動定律  $F = ma$  可得到水反彈的力量大小。

## 肆、研究結果

### 一、實驗載體及條件測試

#### (一) 尋找適合物品作為進行沃辛頓射流實驗載體

我們確立以手托球的方式測試沃辛頓射流實驗後，開始尋找適合的物品作為托球的載體。我們依據影片，推測托球物重量以及面積均為實驗可能的變因，而學校實驗室測重實驗使用的鐵塊組具有形狀相似、重量及面積等比例增加的特點，方便我們規劃在托球重物的測試中進行一序列的實驗，所以我們首先以鐵塊測試，但結果發現上面托住的乒乓球無法成功彈射。因此，我們開始尋找其他適合物品，尋找測試周邊能取得的各種物品，包括寶特瓶蓋、珍珠板、肥皂、洗碗海綿、洗澡類天然海棉、、、等材質，我們發現「類天然海棉」的成功率是最大的。

#### (二) 以類天然海綿測試，尋找最適合落下高度

##### 1. 以高水桶測試落下高度

依照前述結果，我們以類天然海棉作為托球物進行實驗，先以深度 30 公分的水桶，20 公分水深落下測試，得到結果如圖 4-1：

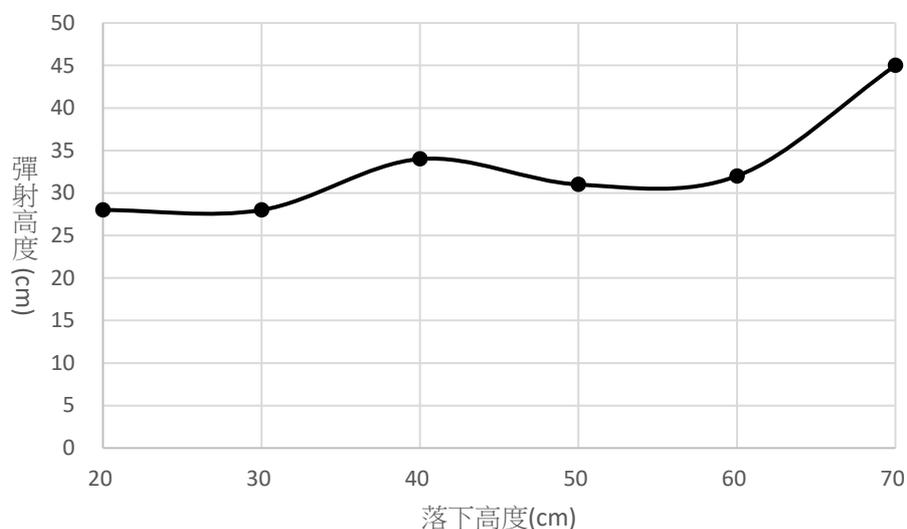


圖 4-1 深水桶乒乓球彈射高度

依據結果，彈射高度與落下高度大致上具有下落高度越高，彈射高度越高的關係。

## (二) 以淺水桶測試落下高度

因為希望能夠更清晰錄製實驗影片，我們更換了一個較淺（深度 14.5 公分）但邊緣透明的盆子，以大約 10 公分的水深先進行初步測試，結果如下：

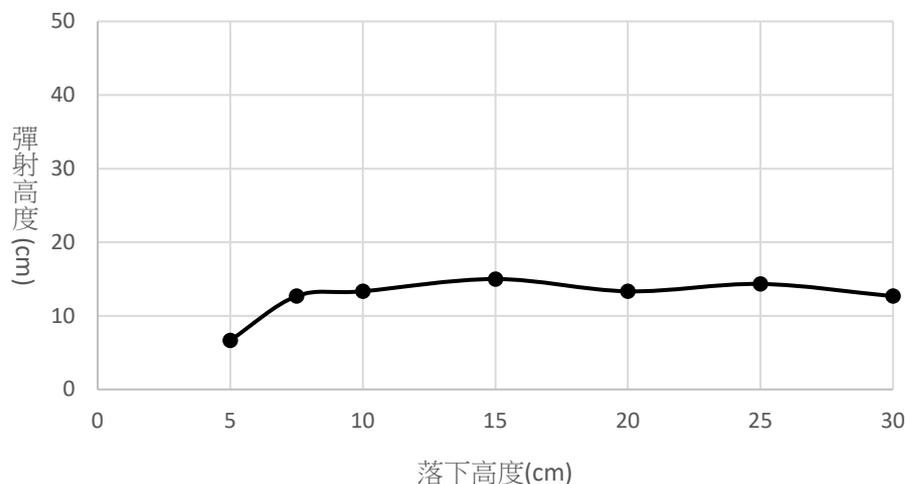


圖 4-2 淺水桶乒乓球彈射高度

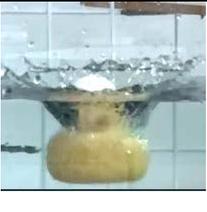
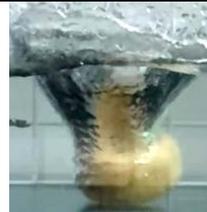
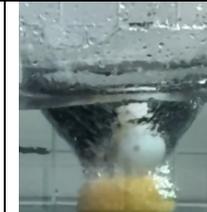
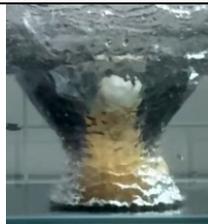
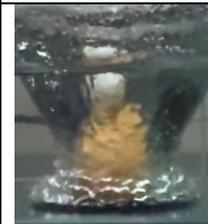
我們發現落下高度超過 10 公分後，彈射高度停在約 15 公分，無法繼續上升，且兩次實驗中類似的落下高度，第二次在淺桶子中得到的結果明顯低於深桶子數據，推測差異應該是來自於水桶中水深太淺，在形成沃辛頓射流時，物體撞擊水面後無法形成完整的空氣柱就撞擊到水桶底部，所以後續填補空氣柱造成的彈射力也不足，因此發現水深實為本實驗重要變因，後續實驗便以測量最適合水深作為實驗目標。

## 二、不同水深及球體落下高度沃辛頓射流測試

依據實驗測試結果，我們訂購了一個深 40 公分的玻璃魚缸進行實驗，以 10、15、20、25 公分的水深測試，實驗物落下高度從 5 公分開始，最高的落下高度則依實際情況來決定。因為在做實驗的時候發現，當落下高度越高時，只要出現一點點小偏差就會讓類天然海綿在降落的時候出現傾斜翻轉的現象，而托載的球會發生旋轉或往側邊彈出，這種情況下球體無法彈射得很遠，且無法準確測定彈射高度，我們將這種情況判定為“失敗”，當我們落下高度高於 40 公分時，這種情況發生頻率很高，甚至成功率會低於 30%，所以我們至少記錄 3-5 組成功時彈射高度數據，當成功率過低時即結束該組實驗。

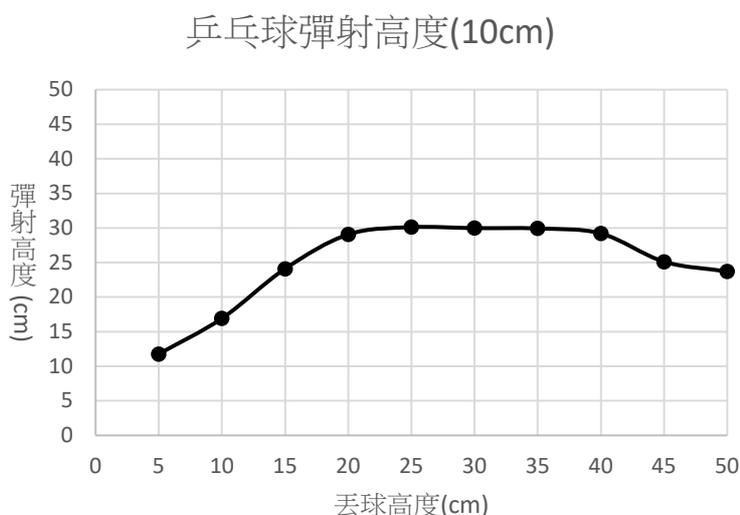
(一) 水深 10 公分的沃辛頓射流測試

1. 水深 10 公分不同丟球高度球體彈射及載體形成空氣柱型態 (作者自行拍攝)

丟球高度	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm
球體彈射					
空氣柱型態					
丟球高度	30 cm	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm
球體彈射					
空氣柱型態					

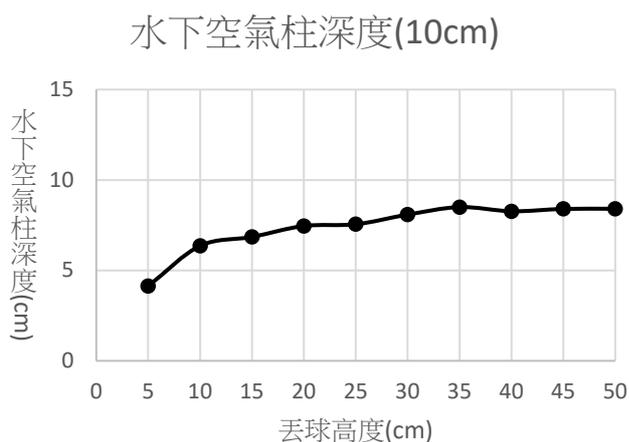
2. 水深 10 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
5.0	11.776
10.0	16.925
15.0	24.099
20.0	29.064
25.0	30.113
30.0	29.976
35.0	29.926
40.0	29.201
45.0	25.120
50.0	23.709



3. 水深 10 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

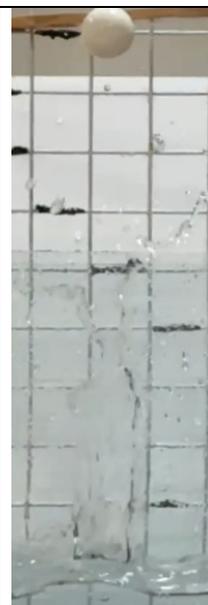
丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
5.0	4.135
10.0	6.357
15.0	6.852
20.0	7.459
25.0	7.551
30.0	8.086
35.0	8.502
40.0	8.272
45.0	8.400
50.0	8.408



水深為 10 公分時，以球體落下高度 20 公分為分界線。低於此高度時，彈射高度隨落下高度上升，至 20 公分時為最高點，彈射高度約 30 公分，之後彈射高度維持 30 公分，至落下高度 40 公分以上彈射高度出現下降趨勢。觀察水下空氣柱，球體落下高度 20 公分以上時，水下空氣柱深度增加幅度明顯減緩，至落下高度 35 公分以上，水下空氣柱深度維持在約 8.5 公分，且觀察影片載體明顯開始碰撞水缸底部，因此推測球體在落下高度時 20 公分以上時，載體落下時開始會碰觸到缸底，無法形成完整沃辛頓射流。

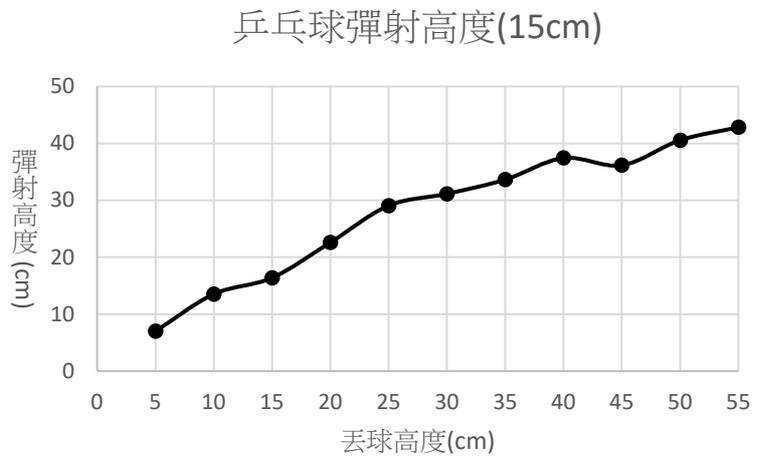
(二) 水深 15 公分的沃辛頓射流測試

1. 水深 15 公分不同丟球高度球體彈射及載體形成空氣柱型態 (作者自行拍攝)

丟球高度	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm
球體彈射					
空氣柱型態					
丟球高度	30 cm	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm
球體彈射					
空氣柱型態					

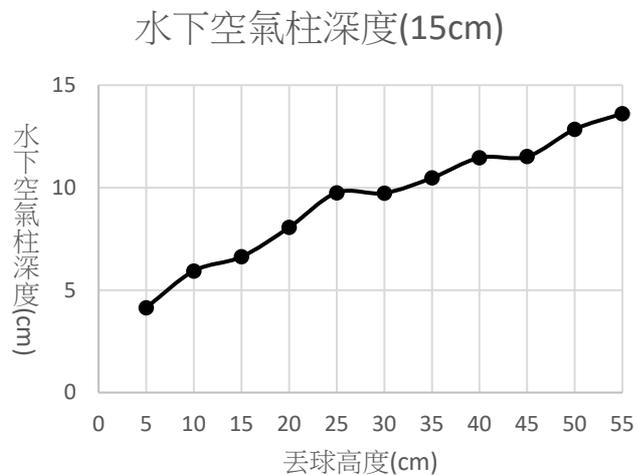
2. 水深 15 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
5.0	7.001
10.0	13.512
15.0	16.385
20.0	22.594
25.0	29.061
30.0	31.144
35.0	33.642
40.0	37.438
45.0	36.165
50.0	40.567
55.0	42.829



3. 水深 15 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

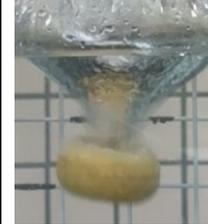
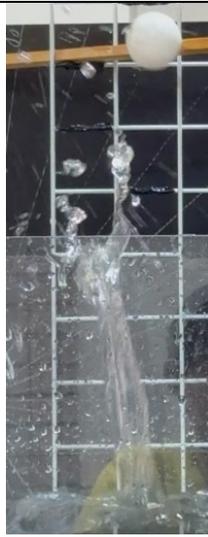
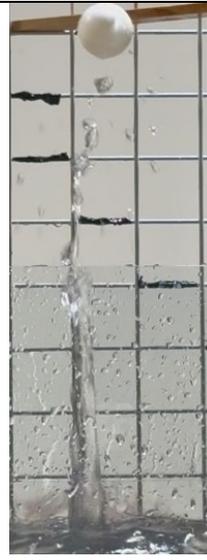
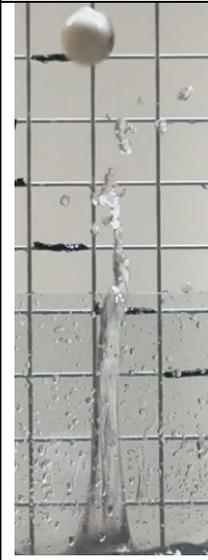
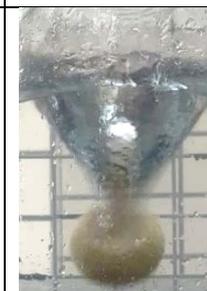
丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
5.0	4.145
10.0	5.936
15.0	6.626
20.0	8.057
25.0	9.7513
30.0	9.734
35.0	10.471
40.0	11.460
45.0	11.515
50.0	12.848
55.0	13.612



水深為 15 公分時，乒乓球彈射高度與水面下空氣柱深度皆隨著丟球高度增加而增加。

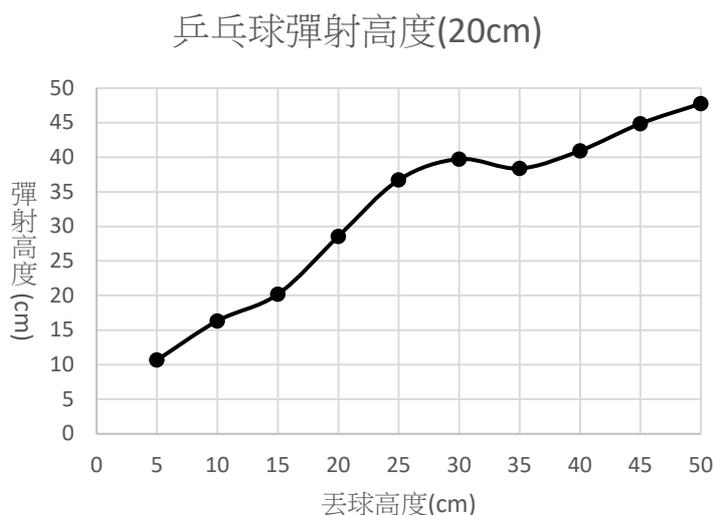
(三) 水深 20 公分的沃辛頓射流測試

1. 水深 20 公分不同丟球高度球體彈射及載體形成空氣柱型態 (作者自行拍攝)

丟球高度	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm
球體彈射					
空氣柱型態					
丟球高度	30 cm	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm
球體彈射					
空氣柱型態					

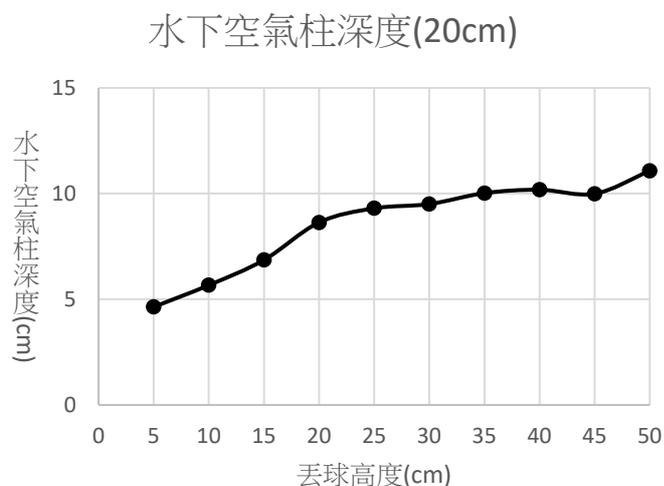
2. 水深 20 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
5.0	10.677
10.0	16.339
15.0	20.189
20.0	28.561
25.0	36.721
30.0	39.740
35.0	38.379
40.0	40.948
45.0	44.866
50.0	47.760



3. 水深 20 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

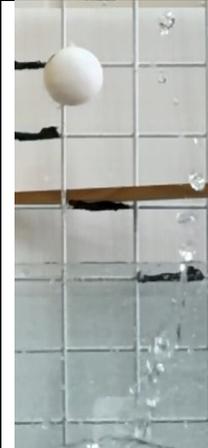
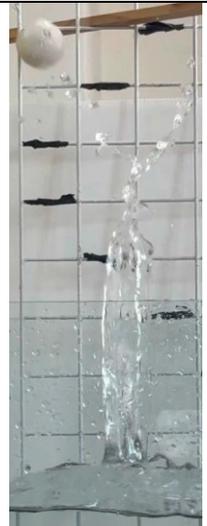
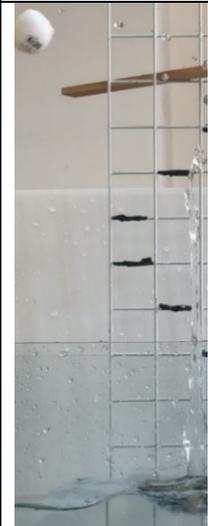
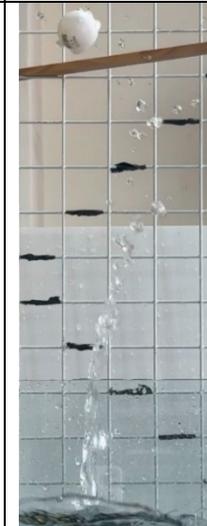
丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
5.0	4.638
10.0	5.669
15.0	6.859
20.0	8.636
25.0	9.305
30.0	9.506
35.0	10.024
40.0	10.184
45.0	9.994
50.0	11.077



水深為 20 公分時，乒乓球彈射高度與水面下空氣柱深度大致上隨著丟球高度增加而增加。

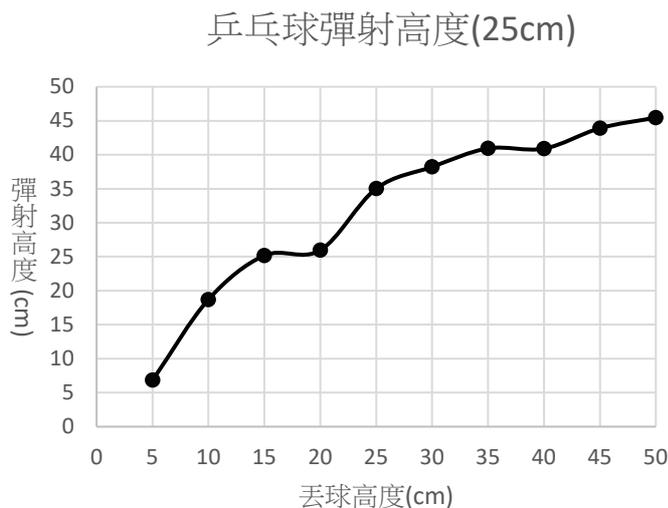
(四) 水深 25 公分的沃辛頓射流測試

1. 水深 25 公分不同丟球高度球體彈射及載體形成空氣柱型態 (作者自行拍攝)

丟球高度	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm
球體彈射					
空氣柱型態					
丟球高度	30 cm	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm
球體彈射					
空氣柱型態					

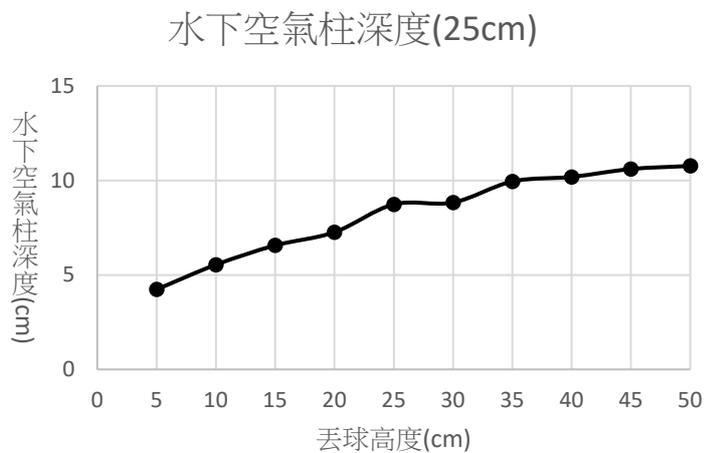
2. 水深 25 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
5.0	6.830
10.0	18.703
15.0	25.181
20.0	25.957
25.0	35.021
30.0	38.219
35.0	40.938
40.0	40.899
45.0	43.904
50.0	45.462



3. 水深 25 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
5.0	4.230
10.0	5.539
15.0	6.561
20.0	7.261
25.0	8.735
30.0	8.832
35.0	9.945
40.0	10.187
45.0	10.603
50.0	10.767



水深為 25 公分時，乒乓球彈射高度與水面下空氣柱深度大致上隨著丟球高度增加而增加，至丟球高 35 公分後增加幅度開始趨於平緩。

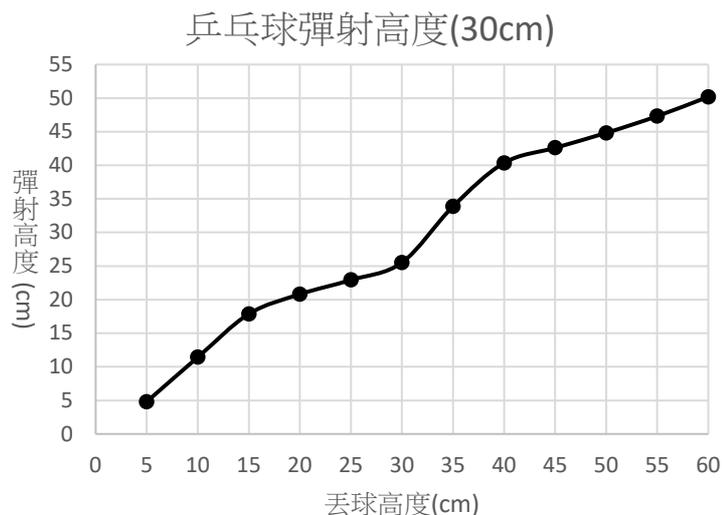
(五) 水深 30 公分的沃辛頓射流測試

1. 水深 30 公分不同丟球高度球體彈射及載體形成空氣柱型態 (作者自行拍攝)

丟球高度	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm
球體彈射					
空氣柱型態					
丟球高度	30 cm	35 cm	40 cm	45 cm	50 cm
球體彈射					
空氣柱型態					

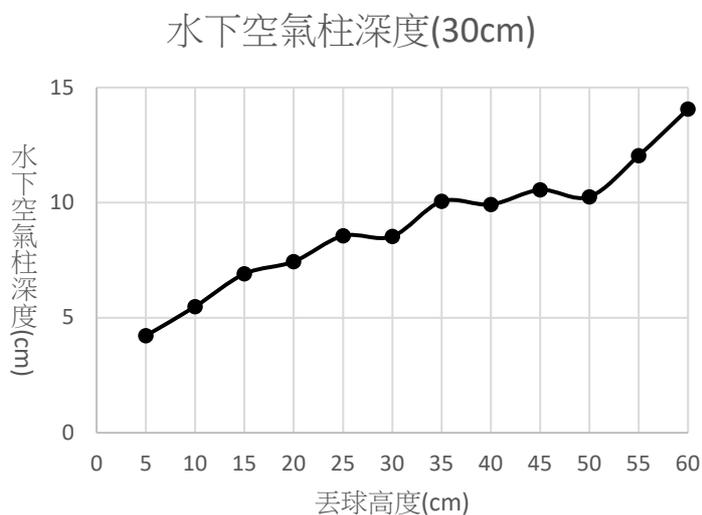
2. 水深 30 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
5.0	4.807
10.0	11.425
15.0	17.865
20.0	20.804
25.0	22.926
30.0	25.519
35.0	33.875
40.0	40.358
45.0	42.598
50.0	44.821
55.0	47.315
60.0	50.194



3. 水深 30 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
5.0	4.217
10.0	5.484
15.0	6.903
20.0	7.440
25.0	8.554
30.0	8.533
35.0	10.052
40.0	9.921
45.0	10.551
50.0	10.256
55.0	12.042
60.0	14.060



水深為 30 公分時，乒乓球彈射高度與水面下空氣柱深度大致上隨著丟球高度增加而增加。

### 三、沃辛頓射流最低水深測試

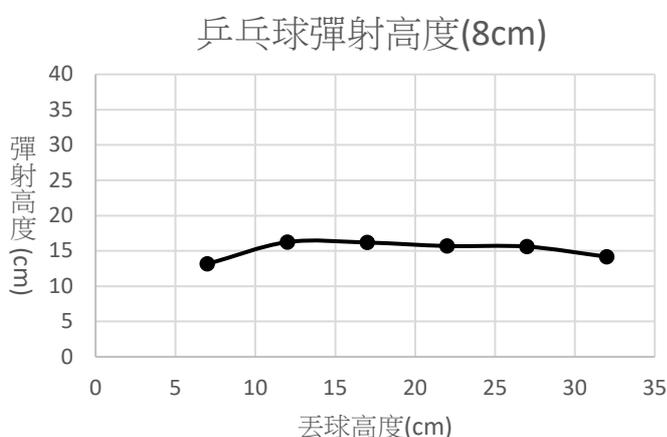
依照第二部份結果，我們推測若水深足夠且落下時穩定度足夠，則落下高度越高，乒乓球彈射高度越高，但在水深 10 公分時，丟球高度高於 20 公分時，乒乓球彈跳高度停滯於 30 公分附近，丟球高度高於 40 公分時甚至出現彈跳高度下降的現象，所以接下來我們將測試範圍縮小至 8、13、18 公分水深，找出以實驗使用的類天然海綿及乒乓球為標準，最少需要多少水深才能順利彈射。

#### (一) 水深 8 公分的沃辛頓射流測試

因為落下高度是以 L 型鐵架格子間距 5 公分為基準，所以這階段實驗從第三格（15 公分高）開始進行，扣除架子浸於水中 8 公分部份，實際落下高度為 7 公分。

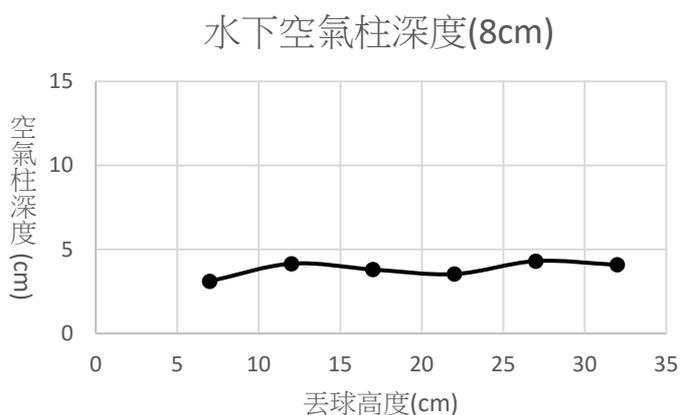
##### 1. 水深 8 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
7.0	13.144
12.0	16.245
17.0	16.179
22.0	15.687
27.0	15.604
32.0	14.170



##### 2. 水深 8 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
7.0	3.110
12.0	4.156
17.0	3.808
22.0	3.535
27.0	4.309
32.0	4.086



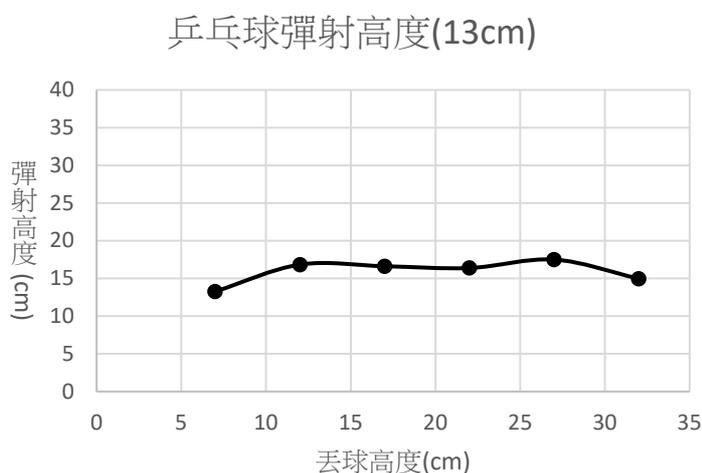
由結果可知，水深 8 公分時，無論落下高度如何增加，彈射高度都僅於限 10~15 公分附近，水下空氣柱也只有 3~4 公分，水深在多數狀況下無法完成沃辛頓射流所需深度。

## (二) 水深 13 公分的沃辛頓射流測試

同上述因為落下高度是以 L 型鐵架格子間距為基準，所以這階段實驗從第四格（20 公分高）開始進行，扣除架子浸於水中 13 公分部份，實際落下高度為 7 公分。

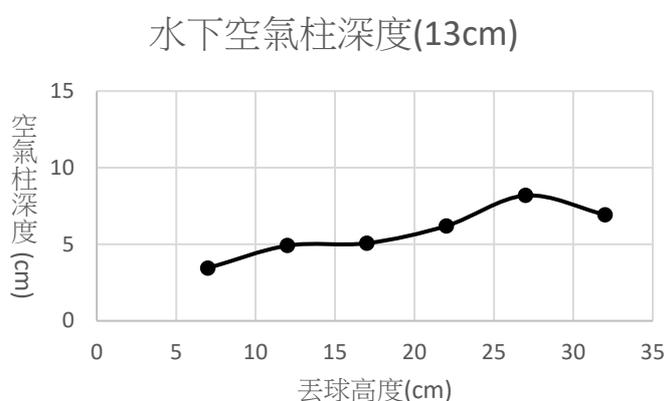
### 1. 水深 13 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
7.0	13.265
12.0	16.835
17.0	16.617
22.0	16.381
27.0	17.501
32.0	14.970



### 2. 水深 13 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
7.0	3.447
12.0	4.911
17.0	5.069
22.0	6.198
27.0	8.180
32.0	6.923



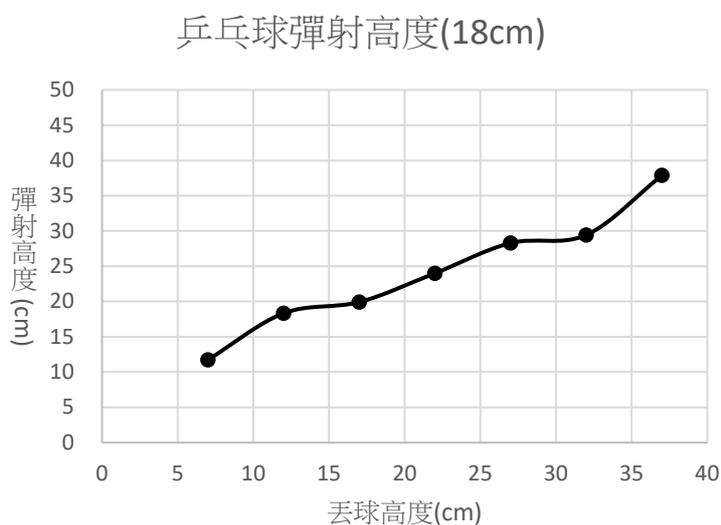
水深 13 公分時，雖然水下空氣柱隨丟球高度增加，彈射高度都僅於限 10~15 公分附近，顯示此水深仍然無法穩定形成沃辛頓射流所。

### (三) 水深 18 公分的沃辛頓射流測試

同上述因為落下高度是以 L 型鐵架格子間距為基準，所以這階段實驗從第五格（25 公分高）進行，扣除架子浸於水中 18 公分部份，實際落下高度為 7 公分。

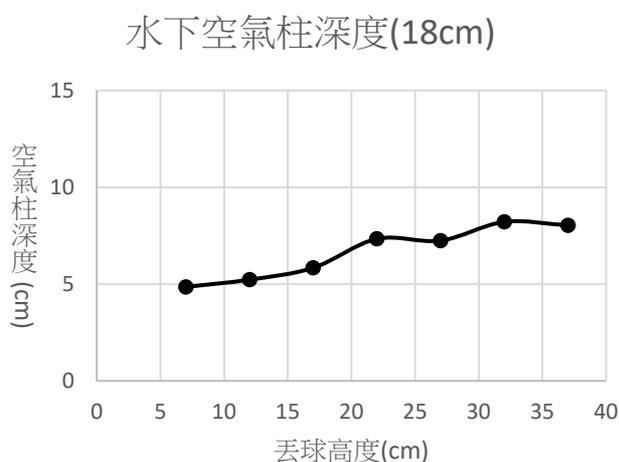
#### 1. 水深 18 公分不同丟球高度乒乓球彈射高度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	彈射高度 (cm)
7.0	11.739
12.0	18.342
17.0	19.927
22.0	24.012
27.0	28.299
32.0	29.430



#### 2. 水深 18 公分不同丟球高度水下空氣柱深度（三次數據平均）

丟球高度 (cm)	空氣柱深度(cm)
7.0	4.851
12.0	5.227
17.0	5.840
22.0	7.336
27.0	7.243
32.0	8.211



水深 18 公分時，乒乓球彈射高度與水面下空氣柱深度大致上隨著丟球高度增加而增加。合併前面水深 15 公分的實驗結果，可知以我們使用的乒乓球與類天然海棉進行實驗，需要水深 15 公分以上才能達到完整沃辛頓射流。

#### 四、沃辛頓射流力學分析

依照我們推導出的沃辛頓射流算式  $a = \frac{g\sqrt{2h_2}}{T\sqrt{g}-\sqrt{2h_2}}$  及由牛頓第二運動定律  $F=ma$

可得球體受到水反彈的力量大小：

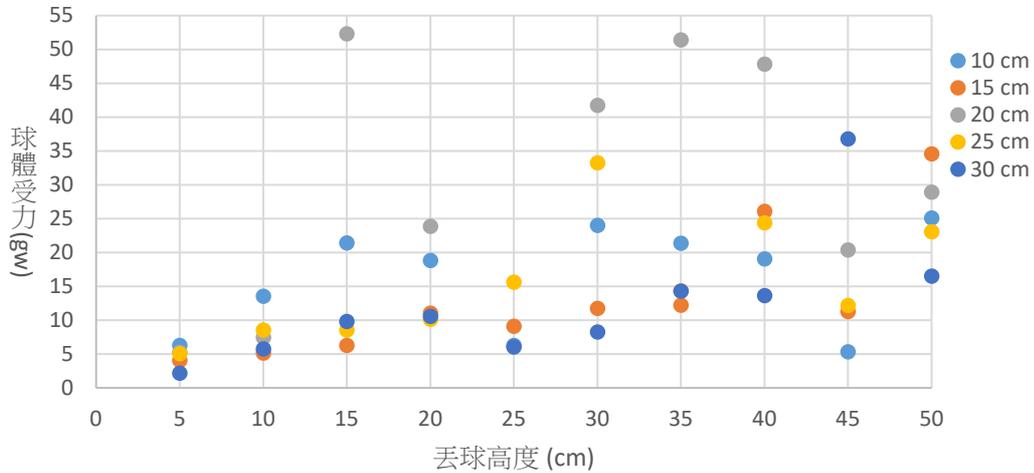


圖 4-3 不同水深球體受力大小分布

我們預期在相同丟球高度條件下，球體受力應該相近，丟球高度越高，球體所受反彈力越大，但計算出結果僅有丟球高度 5 公分（平均受力 4.5 克重）與 10 公分（平均受力 8 克重）符合預期，後續結果散布範圍很大，不符合預期。

#### 伍、討論

一、沃辛頓射流發生條件為高能量物體落入水中產生飛濺，在流體表面產生隕石坑狀液面，周圍液滴升起形成一個皇冠狀液滴。之後液滴坍塌的動能導將液體擠壓形成向上的射流。這種從液滴落在流體表面形成的隕石坑中心突出的中央射流，稱為沃辛頓射流（Worthington Jet）（Cai et al., 2022；鄭永銘，2023），而我們看到的影片即是藉由跳水產生的射流能量將海灘球射出，所以推測模擬實驗中使用的承托重物應具備有下列特點：



圖 5-1 本次實驗觀察到的隕石坑液面及周圍皇冠狀液滴（照片為作者自行拍攝）。

- (一) 需有足夠重量在落水後在水面下產生足夠深的空氣柱，讓周圍液體迅速補充形成射流。

(二) 與水面接觸面積大，掉落時需要完全垂直以底部平面入水、不易翻轉以尖角接觸水面破壞水面的表面張力，以圓形較佳。

所以我們推測前期實驗時使用的鐵塊在掉落途中容易翻滾破壞水面表面張力，無法在水面形成完整“隕石坑”液面，其餘洗碗海綿等等物品容易浮於水面無法在水面下形成儲備能量的空氣柱，而類天然海棉因為吸水性佳，入水後孔隙立即充滿水份是能夠順利成功彈射球體的原因。

二、總結我們類天然海棉做為托球載體、乒乓球作為彈射球體，以不同水深進行實驗：

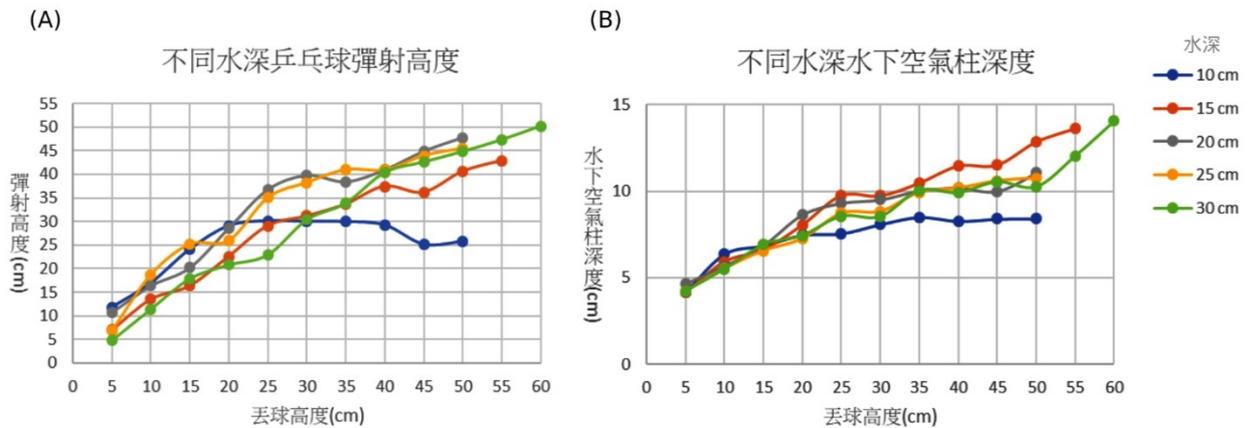


圖 5-2 不同水深對沃辛頓射流彈射及水下空氣柱影響。

以測試範圍水深 10~30 公分而言，丟球高度在 20 公分以內，不同水深乒乓球彈射高度及趨勢類似，丟球高度在 20 公分以上在水深 10 公分的組別乒乓球彈射高度明顯停滯甚至下降，推測是因為沃辛頓射流是靠著重物進入水中後產生空氣柱、兩邊液體迅速補滿這個空氣柱時所產生的能量噴射，若重物高度過高，落下時直接撞擊水盆底部，則無法形成完整空氣柱，蓄積能量消耗於撞擊底部過程，所以無法形成足夠能量的射流噴發，對照水下空氣柱觀察結果，水深 10 公分組別在丟球高 20 公分以上皆有類天然海棉在形成完整空氣柱前觸底的問題。在水深 15 至 30 公分組別，後續空氣柱深度隨丟球高增加而緩慢增加，彈跳高度也趨向隨丟球高增加而增加。

三、理論上若水深夠深，則落下高度和彈射高度應為正相關，但是落下高度達一定高度時，載體和球體容易有翻滾情況，無法垂直撞擊水面，水面不易產生明顯射流，上面乒乓球也容易向旁邊噴發，推測為過程中彈性碰撞的能量傳遞被破壞之故。以沃辛頓射流而言，重物落水時需呈垂直入水，彈射出的射流才能擁有最大能量，若發生翻

轉，能量從側面散失，無法完全傳遞給噴發的射流。所以實際應用時，尋求更重更穩定的物體，應該能獲得強大的射流。

四、依據上述托球重物撞擊水底會影響空氣柱形成而無法完成沃辛頓射流，同理測試的海綿與乒乓球本身具有厚度與重量，也是限制沃辛頓射流生成的變因，以目前條件結果，水深至少 15 公分以上才能形成較明顯射流。

五、球體的受力的力學推算上，我們預期在相同丟球高度條件下，球體受力應該相近，丟球高度越高，球體所受反彈力越大，但結果僅有丟球高度 5 公分（平均受力 4.5 克重）與 10 公分（平均受力 8 克重）符合，推測可能原因如下：

（一）在時間的計算上，我們影片播放速度為每秒 30 影格，但每次實驗球體從最低點彈跳至最高點，多數皆未超過 10 幀影格，這在估算最高點及最低點時間時形成極大誤差，表示我們需要能夠每秒能拍攝播放更多影格的高速攝影設備才能作更精確的估算。希望接下來可以將數據重新以較高幀數的設備重新計算。

（二）在實際實驗方面，球體噴射出水面很難完全垂直方向噴射出，造成噴射力量從旁邊散逸，另外球體噴射能量是來自於空氣柱兩邊補水的推進能力噴射，若補水無法完全從下方推球、甚至崩落的水花從上方打到球體，都是能量散失的可能原因。

六、沃辛頓射流是生活中常出現現象，無論是下雨天撞擊水窪造成地表污物彈射的情況或是運動員跳水時濺起的水花影響成績，再再影響著我們的生活，我們實際動手以簡易實驗測試，期盼能對此現象更深入的理解與應用。

## 陸、結論

一、適合做沃辛頓射流測試的載體為圓形、接觸面積較大、具有一定重量的物體，可在落水後在水面下產生足夠深的空氣柱，讓周圍液體迅速補充形成射流，掉落時可完全垂直以底部平面入水、不易翻轉破壞水面的表面張力，本次實驗測試物體以類天然海棉最佳。

二、要能完整表現沃辛頓射流的水深與測試的載體與球體重量有關，以本組實驗用使用的類天然海棉（110.62 克重）及球體（2.07 克重），至少需要 15 公分水深才能形成完整的射流。

三、由實驗可知，載體在下落軌跡完全垂直於水面時，落下高度越高，球體彈射高度越高，以本次實驗用使用的類天然海棉的大小及重量（110.62 克重）為標準，水深 15 公分以上時，落下高度 50 公分彈射高度可達 47 公分，但結果受限於類天然海綿在落下高度 40 公分後下落軌跡不穩定，若期望更高的射流強度需要尋找更穩定下落的載體。

## 柒、參考資料

Swain, P. C. (2016) Fluid Dynamics Lecture Notes. Department of Civil Engineering.

[https://www.vssut.ac.in/lecture\\_notes/lecture1525500174.pdf](https://www.vssut.ac.in/lecture_notes/lecture1525500174.pdf)

Worthington, A. M., and Cole, R. S. (1897) V. Impact with a liquid surface, studied by the aid of instantaneous photography. Philosophical Transactions of the Royal Society A. 189: 137-148.

Annual Reviews Extra (2013) Water Entry of Projectiles: Supplemental Video 6.

<https://youtu.be/yblbsylowkY>

Cai, Z., Wang, B. Liu, S., Li, H. Luo, S., Dong, Z., Wang, Y., and Jiang, L. (2022) Beating Worthington jet by surfactants. Cell Reports Physical Science 3, 100775.

<https://doi.org/10.1016/j.xcrp.2022.100775>

地球科普戰記（2023）「沃辛頓射流」是什麼？為何抱著球跳水，球能被彈跳幾十公尺？

<https://youtu.be/9a9aHhAX8tc>

莫斯利（2017）彈性碰撞。基礎物理(2A) 第六章第二節。

[https://www.phyworld.idv.tw/BAPHY\\_2A/CH6/6-2\\_POINT.pdf](https://www.phyworld.idv.tw/BAPHY_2A/CH6/6-2_POINT.pdf)

鄭永銘（2023）沃辛頓射流。跟著鄭大師玩科學 <https://www.masters.tw/319614/worthington-jet>

潘冠錡（2011）大球撞小球。好好玩物理網。

<https://haha90.phy.ntnu.edu.tw/content/funExperiment/allFunExps/ballHitBall/ballHitBall.html>

柯賢文（2007）表面張力的應用。科技大觀園。

<https://scitechvista.nat.gov.tw/Article/c000003/detail?ID=a39a983b-db66-4beb-b686-1b7cd6fe799b>

## 附錄 1 公式堆導

$$\begin{cases} T = t_1 + t_2 & \text{--- ①} \\ V_{\max} = a \times t_1 & \text{--- ②} \\ V_{\max} = g \times t_1 & \text{--- ③} \\ V_{\max} = \sqrt{2gh_2} & \text{--- ④} \end{cases}$$

$$\text{②} \Rightarrow \frac{V_{\max}}{a} = t_1 \text{ 代入①式} ; \text{③} \Rightarrow \frac{V_{\max}}{g} = t_2 \text{ 代入①式}$$

$$\text{①} \Rightarrow T = \frac{V_{\max}}{a} + \frac{V_{\max}}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{V_{\max}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{V_{\max}} - \frac{1}{g} = \frac{1}{a} \quad \text{④式代入}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{\sqrt{2gh_2}} - \frac{1}{g} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{T\sqrt{g}}{g\sqrt{2h_2}} - \frac{\sqrt{2h_2}}{g\sqrt{2h_2}} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{T\sqrt{g} - \sqrt{2h_2}}{g\sqrt{2h_2}} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{g\sqrt{2h_2}}{T\sqrt{g} - \sqrt{2h_2}}$$

## 【評語】 030116

本作品作者設法在實驗室中，重現在影片中看到的物理現象。嘗試不同載體、水深、落下高度，找到容易產生沃辛頓射流的組合，並拍攝影片，利用一張一張的影像，觀察整個現象的發生過程。學生清楚整個實驗的流程及細節，是很好的學習範例。建議報告撰寫可更加完整及嚴謹，學生有利用其他材料製作載體，但報告中並未紀錄這部分的實驗結果；報告書的討論中提及，海綿因為有孔隙、吸水性佳，所以順利成功彈射，但未設計實驗支持或推翻這個論點；說明書中多次提及表面張力，但未設計實驗討論表面張力在作者的裝置中，是否有舉足輕重的影響。在報告一開始所提出的假設，上升期間由兩段等加速度運動組成，於實驗後已知假設有誤，但未再提出其他模型，殊為可惜！此外，乒乓球的質量測量，反彈的高度測量，都可以再更精確。

## 作品簡報

水中的奇妙力量。

「沃辛頓射流」

# 壹、動機

某天在滑手機的時候，看到一部有趣的影片。影片內容是一個人抱著一顆皮球跳進水池的畫面，在這個人跳入水池之後，把手中的皮球放開，皮球在放開後彈出水面，甚至高過此人原本站的高度。我們很想知道為什麼皮球會在持球的人跳入水中放開後，可以彈出距離水面這麼高的地方。在查詢資料後了解這是因為發生『沃辛頓射流』的現象，所以我們想藉由模擬『沃辛頓射流』的現象，探討其成因並試著找出在何種條件下能夠得到更好的實驗結果。



抱球跳水彈射影片畫面 (地球科普記 · 2023)

# 貳、文獻探討

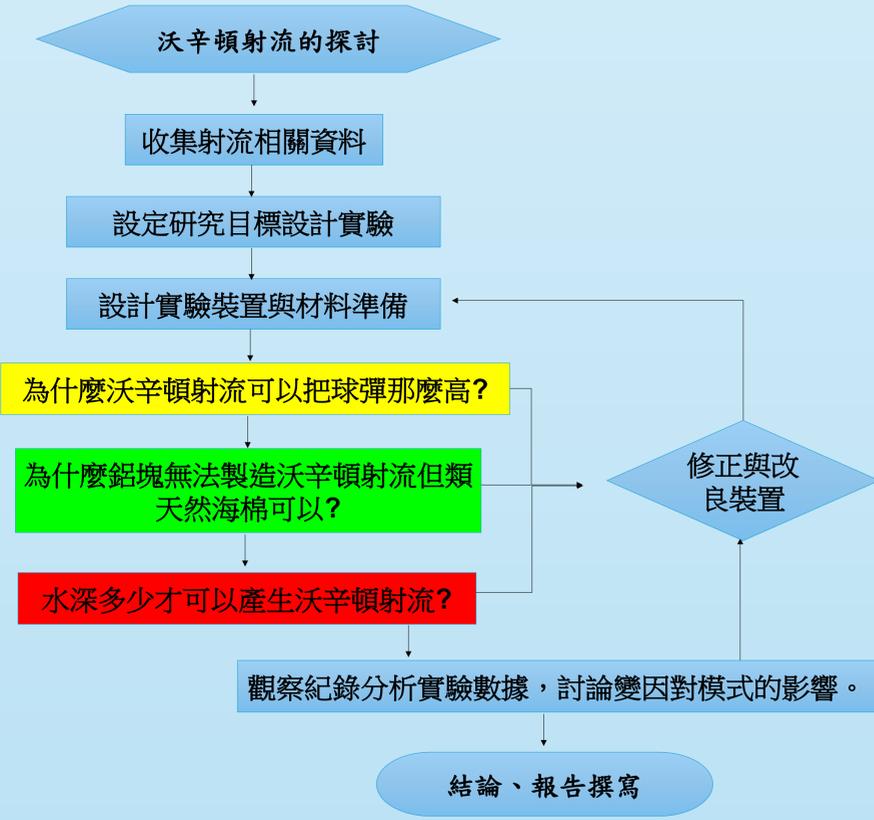
沃辛頓射流是指在物體衝擊液體表面時，產生了一條空氣柱，而周圍液體會因為表面張力和恢復力，迅速將這個空氣柱填滿，導致空氣柱中央射出一道與水面垂直的水柱，前述影片中的人跳入水中後，就是利用周圍介質回復產生的力量，使球可以彈得很遠。並且落入水中產生飛濺，在流體表面產生隕石坑狀液面，周圍液滴升起形成一個皇冠狀液滴。



# 參、研究目的與架構

- 目的：
- 一. 尋找合適進行沃辛頓射流的載體。
  - 二. 使用類天然海綿以不同水深和不同落下高測試，探究甚麼條件才能使球彈的最高。
  - 三. 探究在沃辛頓射流實驗中，球體彈射高度與載體製造水下空氣柱深度關係。

研究架構：

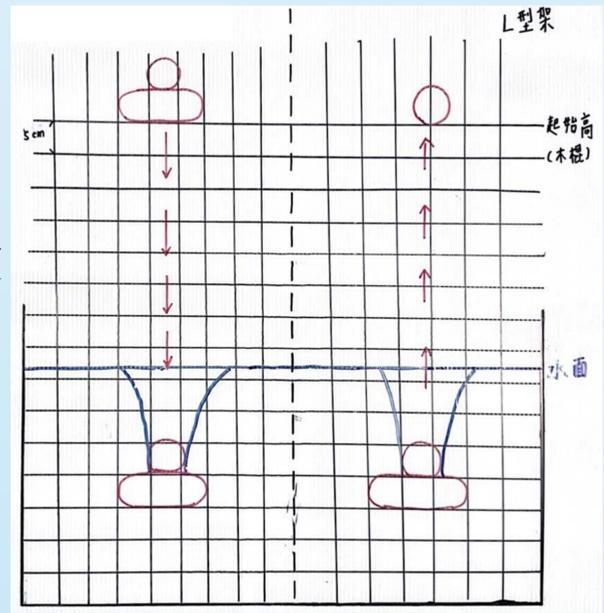


# 肆、裝置設計、測試與過程

## 裝置設計

### 主要變因

1. 丟球高度
2. 空氣柱深度
3. 彈射高度
4. 水深



## 尋找載體



## 裝置改進過程

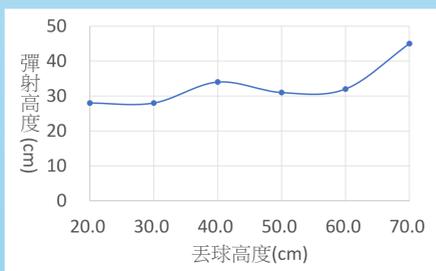
第一代：以兩根木條支撐實驗物體後架於L型架，實驗時將兩根木條分開讓上面的載體與球體自然落下。但結果發現載體與木條間的摩擦力會造成下落裝置非常不穩定，下落時會造成下落延遲或實驗物翻轉的問題，造成實驗誤差。



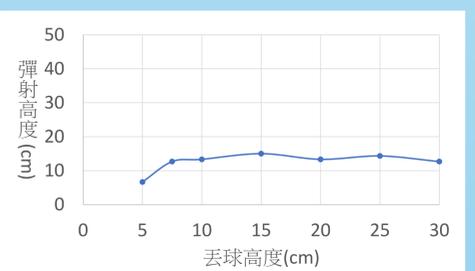
第二代：實驗物掉落的部分改為用手持，桶子則為深桶子。我們是以左右手拇指、食指、中指輕輕抵住載體部分，開始時左右手同時移開讓物體自由落下。另外繼續沿用第一代的L型架來觀測高度。



### 深桶子(水深20公分)

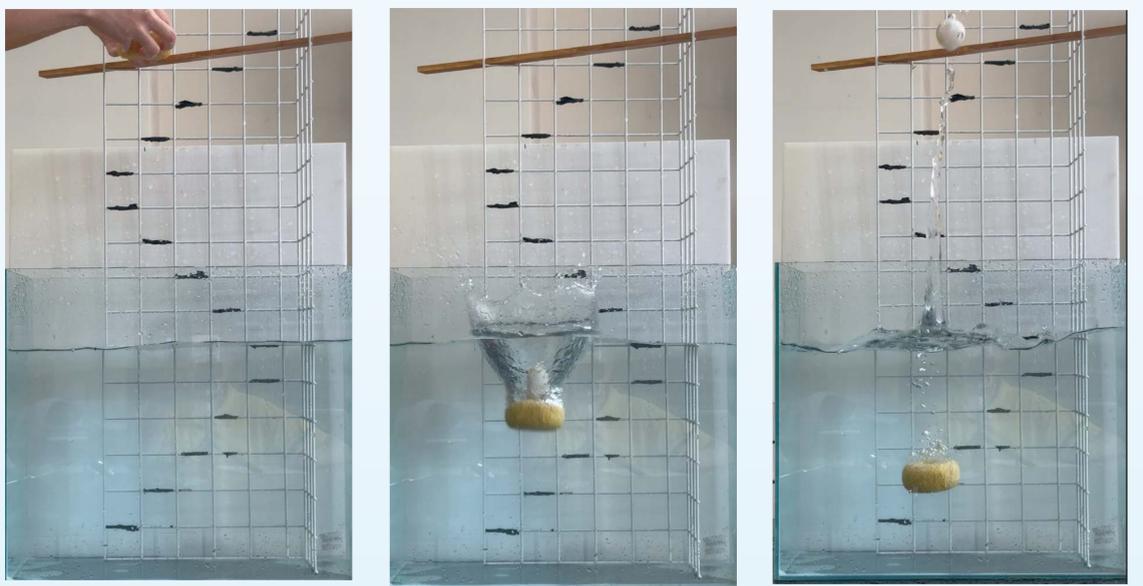


### 淺桶子(水深10公分)



第三代：下落裝置沿用第二代的手持，而觀測高度依樣使用L型架，但裝水的桶子我們改為較透明且深度較深的魚缸，可以更清楚的看到水下的空氣柱變化的情況。

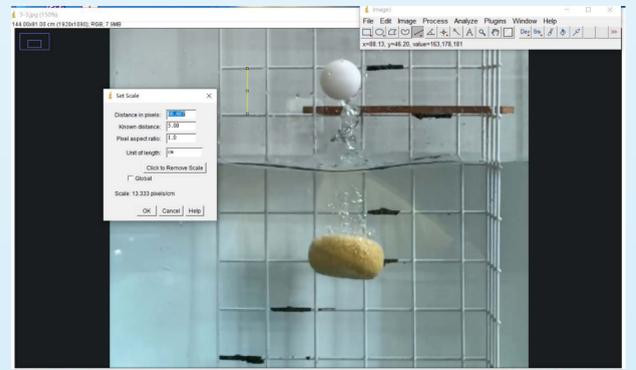
影片拍攝時，第二代為幀數每秒30幀，而後發現30幀不夠，球體彈射時中間會有空缺，因此第三代改為每秒240幀的手機拍攝。



## 伍、數據處理與分析

### 數據處理

- 1.至威力導演將影片以1幀為單位撥放並截下球彈射的最高點與空氣柱最深的畫面。
- 2.利用小畫家將截到的照片轉為JPG檔並分類命名。
- 3.將照片以Image J軟體計算出實際高度與長度。
- 4.使用Excel將得到的數據及幀數套用公式計算出力量。



### 數據分析(理論模型)

#### 第一階段：球掉落撞擊水面

質量為 $m$ 的乒乓球從木棍擺放位置丟球高度 $H$ 自由下落，撞擊水面後形成水面下深度為 $h_1$ 的錐形水坑。

#### 第二階段：球回彈到水面

水坑以回復施力 $F$ 反彈，使球獲得平均加速度 $a$ 由靜止 $V_1$ 加速 $t_1$ 秒到達最高速 $V_{max}$ 到達水面。

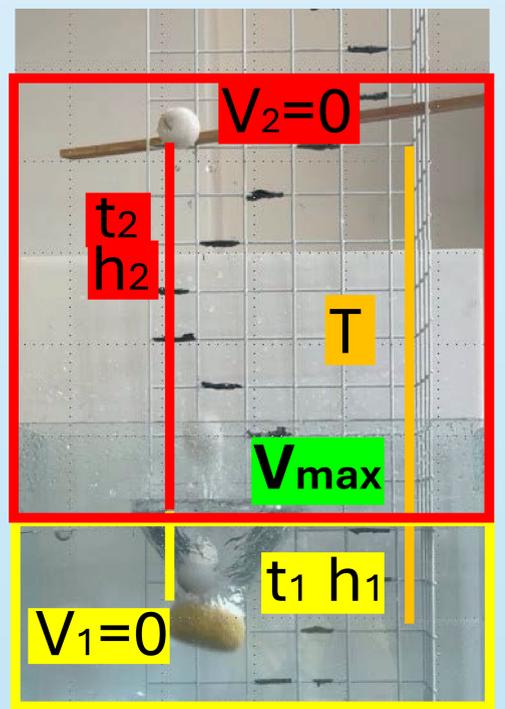
#### 第三階段：球減速到最高點

脫離水面水停止施力後，球受重力減速 $t_2$ 秒，最終停滯於水面高度 $h_2$ ，第二三階段共經歷 $T$ 時間。

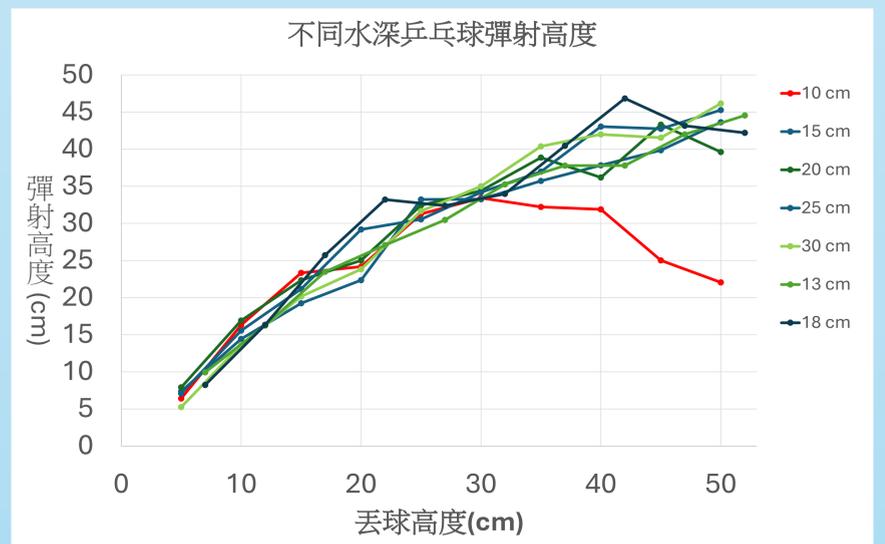
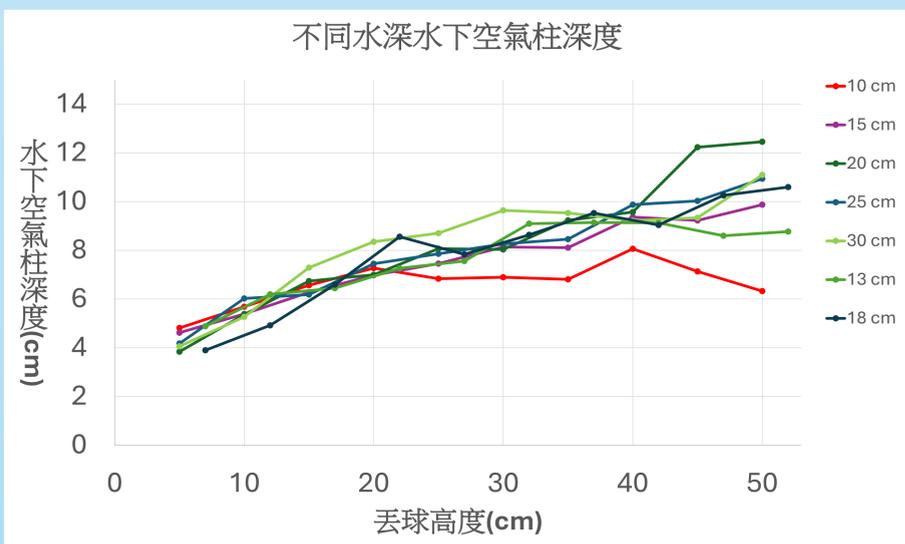
- $T$  為第二和三階段的全程時間。
- $F$  為水坑回復力。
- $t_1$  為第二階段的時間。
- $V_1$  為球在最低點速度，亦為第二階段初速。
- $a$  為水坑回復力造成的平均加速度。
- $V_{max}$  為第二階段末速，亦為第三階段初速。
- $T_2$  為第三階段的時間。
- $V_2$  為球在最高點速度，亦為第二階段初速。
- $g$  為重力加速度

$$\begin{cases} T = t_1 + t_2 & \text{--- ①} \\ V_{max} = V_1 + a \times t_1 & \text{--- ②} \\ V_2 = V_{max} - g \times t_2 & \text{--- ③} \\ V_{max} = \sqrt{2gh_2} & \text{--- ④} \end{cases}$$

$$a = \frac{g\sqrt{2h_2}}{T\sqrt{g} - \sqrt{2h_2}} \quad F = m \times a$$



## 陸、實驗結果與討論



### 水下空氣柱與乒乓球彈射高度

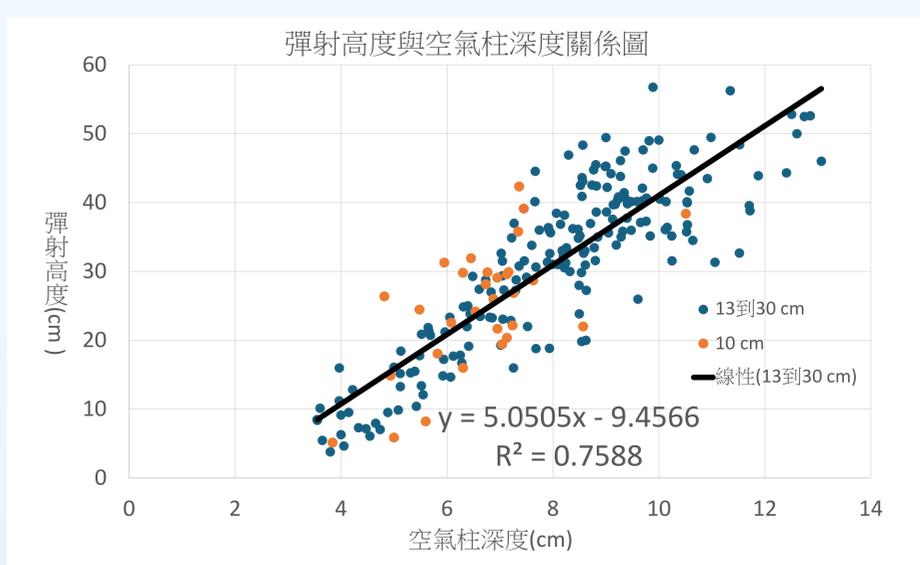
- 一、水深為10公分時，以落下高度30公分為分界線。低於此高度時，乒乓球的彈射高度隨落下高度增加，至30公分為最高點；高於此高度時，彈射高度維持30公分，至40公分落下高，彈射高度開始出現下降趨勢。原因為：海綿在落下高30公分時，已經碰撞到桶子底部。
- 二、水深15公分以上時，乒乓球的彈射高度皆是隨著落下高增加而變化。
- 三、落下高40公分後，因為海綿會出現「翻滾」的情形，而導致實現結果出現偏差。



水深10公分-落下高35公分

## 空氣柱與彈射關係

我們以不同組別結果繪製球體彈射高度與水下空氣柱關係圖（圖5-6），可發現彈射高度與水柱深度為正相關（ $r^2$ 值為0.75），趨勢線方程式  $y = 5.0505x - 9.4566$ ，顯示二者比例約為水下1公分的空氣柱約可使球體彈射5公分高度，符合我們對球體及托球載體物落水後造成的空氣柱深度會影響球體彈射高度的推論。

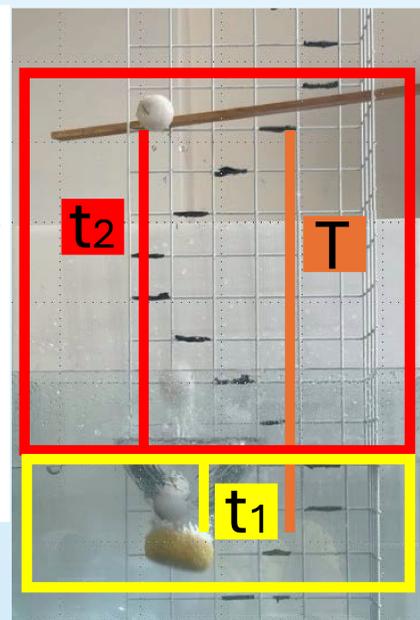
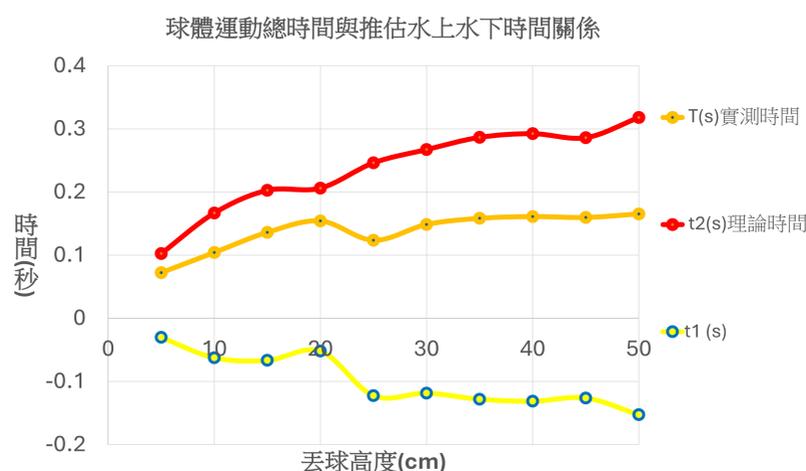


## 陸、力量分析

T為影片中球由水面下最深點到水面上最高點的實測量時間

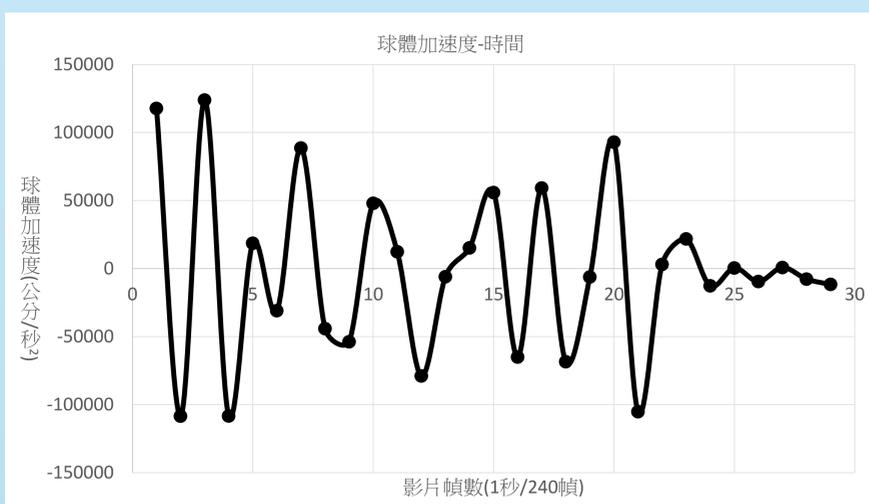
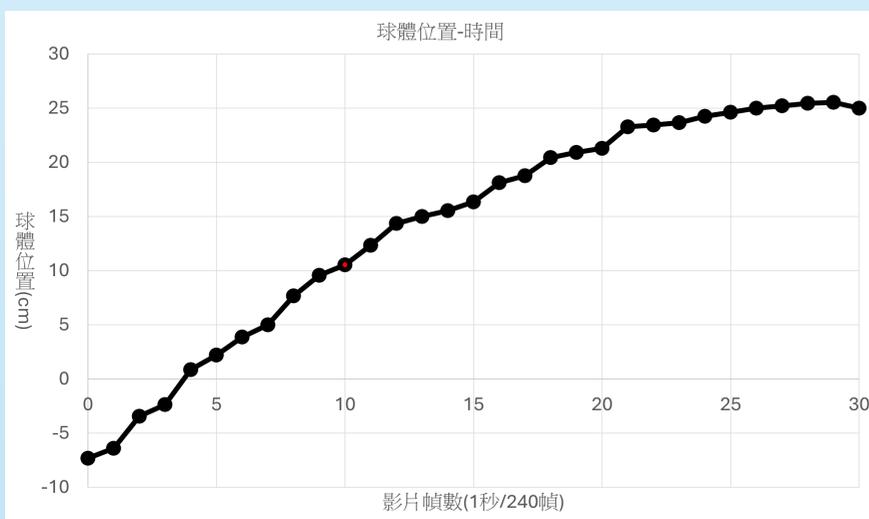
t2為球受重力由Vmax減速到V2的理論時間

根據我們的理論全時間的T應該大於部分時間的t2



## 解決方法與結果

我們將以水深20公分丟球高20公分組別影片，將每一幀截下來計算每幀影格乒乓球移動的距離、速度（距離/時間）及加速度（速度/時間），得到以下結果：



結果與討論：

- 一. 球體位置隨時間呈一弧線比例上升至最高點。
- 二. 球體速度呈現上下震盪、逐漸趨緩的趨勢，至球體位置為最高點時速度趨近於零。
- 三. 球體加速度呈現正負值震盪情況。

球體彈射過程中反覆受到重力及空氣阻力等因素影響降速，又受到下方射流水柱力量推擠而加速，直到水柱崩塌後才以自由落體的方式墜落。

## 柒、研究結論

- 一、適合做沃辛頓射流測試的載體為圓形、接觸面積較大、具有一定重量的物體，可在落水後在水面下產生足夠深的空氣柱，讓周圍液體迅速補充形成射流，掉落時可完全垂直以底部平面入水、不易翻轉破壞水面的表面張力，本次實驗測試物體以類天然海棉最佳。
- 二、由實驗可知，載體在下落軌跡完全垂直於水面時，落下高度越高，球體彈射高度越高，以本次實驗用使用的類天然海棉的大小及重量（110.62克重）為標準，水深15公分以上時，落下高度50公分彈射高度可達47公分，但結果受限於類天然海綿在落下高度40公分後下落軌跡不穩定，期望更高的射流強度需要尋找更穩定下落的載體。
- 三、以不同組別結果繪製球體彈射高度與水下空氣柱關係圖，發現彈射高度與水柱深度為正相關（ $r^2$ 值為0.75），趨勢線方程式  $y = 5.0505x - 9.4566$ ，顯示二者比例為水下1公分的空氣柱約可使球體彈射5公分高度。
- 四、球體彈射過程中反覆受到重力及空氣阻力等因素影響降速，又受到下方射流水柱力量推擠而加速，故不能以無外力的理想模型推論。