

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會  
作品說明書

---

國中組 物理科

第一名

030112

波以爾對抗托里切利的表面功夫—探討量測大  
氣壓力、震度與氣體流速之影響

學校名稱：臺南市立建興國民中學

作者：  國二 邱衍睿  國二 鍾亭羽	指導老師：  楊志鴻  劉沛琳
---------------------------------	-----------------------------

關鍵詞：波以爾定律、托里切利原理、綜效表面壓

# 得獎感言

## 受惠滿盈 謝天不足

這一路走來要感謝的人太多了，但不能只是”謝天”。我是邱衍睿，容我代表團隊一一致謝。

我常有天馬行空的想法，極富創意，隊友鍾亭羽則是沉著冷靜、實事求是。我們互補的性格，也正符合了「大膽假設，小心求證。」的科學研究精神，感謝彼此能夠成為隊友。一年級時我們就曾各自參加第63屆科展，分別獲得市賽的第三名與第二名。當時沒能拔得頭籌而代表台南市參加全國比賽，心中留有遺憾，所以當楊志鴻老師與劉沛琳老師號召我們再次叩關時，隨即點燃我們的熱情。感謝兩位老師找我們組隊、給予指導，尤其是提供了研究方向讓我們有一個有趣的主题以及好的開始。

最初，我們設計了水柱管測量氣壓的實驗(照片1)，想操作的變因很多，也推測了各種可能的結果。而最困難的是實驗器材，網路上找到可以訂製各種尺寸的壓克力管工廠，但找遍各大五金商家也沒有合適的漏孔接頭。多方諮詢之後，總算尋得成功大學Maker Factory專業講師鍾文泰博士的幫忙，他不僅熟悉3D列印也是Arduino軟體的專家。感謝鍾博士的訓練，讓我們可以學會3D列印的操作，克服了實驗器材的限制。很幸運地，我們在市賽獲得比去年更好的名次。

由於極端氣候，地震與風災頻傳，我們想修改裝置，增加有關震動與風速測量實驗以備戰全國比賽。感謝台南市政府安排嘉義大學高柏青教授為我們集訓，感謝高教授給了我們許多中肯且極具建設性的建議。其中包含指出共振現象，合理解釋了奇異的震動實驗數據，並說明傅立葉轉換的原理，得以證明共振現象確實存在。此實驗也賴以鍾博士的專長，教會了我們利用Arduino的程式設計來製作符合實驗使用的震動控制器(照片2)。另一方面，老師們指導了我們白努力定律，以之為測量風速的理論基礎進而完成實驗。

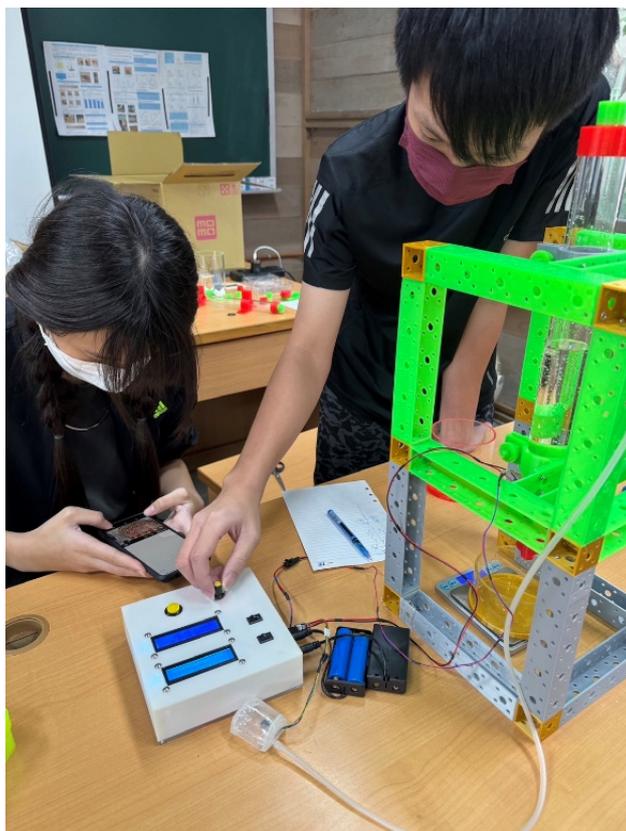
無論是理論架構、實驗操作、口頭報告、問答等等的練習，必須在非上課時

間甚至是晚上或假日，感謝兩位老師無償的付出。此外，有賴建興國中侯志偉校長以及各單位的鼎力支持，讓我們隨時可以使用學校的空間(照片2、3)也時常關心我們的需求，而且安排各領域專家為參賽隊伍在校內做模擬練習(照片3)，實為最堅強的後盾。這次科展歷經了快一年的時間，我和亭羽增進了友誼也豐富了許多專業知識，就算最後沒有獲得好成績，也是受惠滿盈。

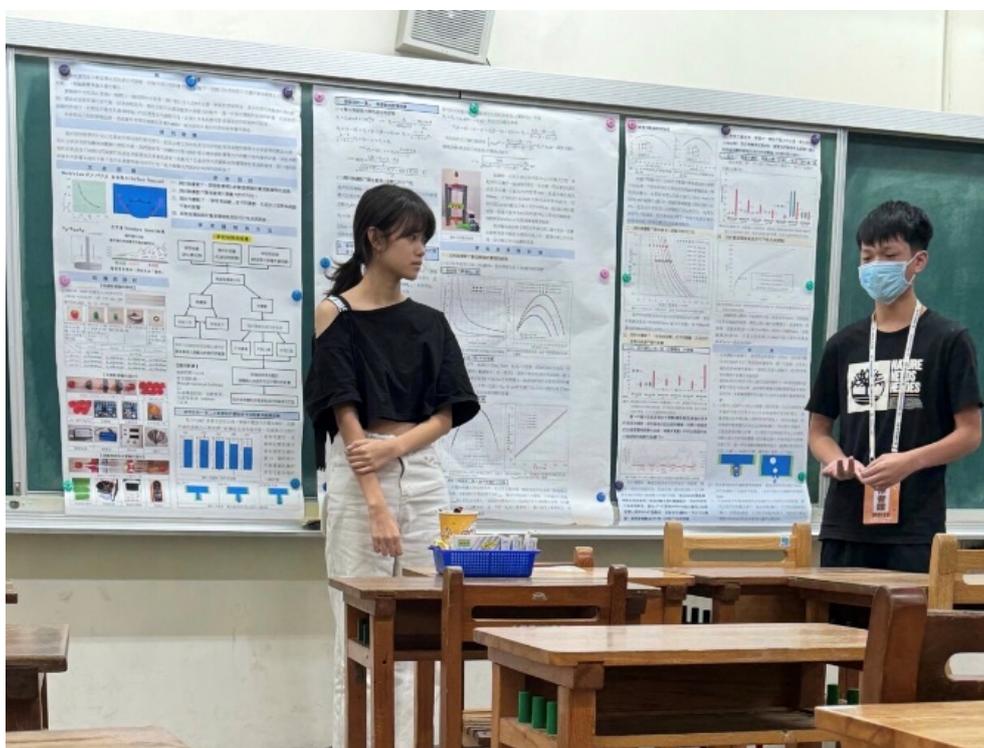
科學研究沒有必成，只有充實自己的能力，秉持實驗精神努力不懈才可能克服難關，供學弟妹們參考。最後，再次感謝幫助過我們的所有師長與各個單位，缺少其中之一，我們都無法獲得這個榮耀。



阿里山上實際操作自製氣壓計



自製擾動裝置測試



全國賽賽前模擬練習

# 波以爾對抗托里切利的表面功夫— 探討量測大氣壓力、震度與氣體流速之影響

## 摘要

本研究運用波以爾定律以及托里切利原理，討論不同口徑對應不同水柱壓下，因開口的表面張力及邊界層效應產生之「綜効表面壓」，模擬與實測漏水量的變化。

實驗操作流程為以管長  $L$  一端開口一端封閉的水柱管，開口朝上注入高  $h$  的水量，將其封閉倒置後，其水柱管內氣壓與外界  $P_0$  相同。開啟底部使其漏水至平衡，結果發現使用一般的水就可以簡易量測大氣壓力的條件。

進一步探討擾動對系統的影響，在綜効表面壓的作用下，於特定的震度和震頻時瓶口的加速度具有週期行為，並得出本系統應用於偵測氣流的限制與可行性。

本研究由已知的原理出發，透過實作來探究複雜且真實的機制，進而發現有趣的物理現象與實用價值。

# 波以爾對抗托里切利的表面功夫一 探討量測大氣壓力、震度與氣體流速之影響

## 壹、前言

### 一、研究動機

基於對物理學的好奇心及探索科學技術的應用潛力。從波以爾定律和托里切利原理此兩項基礎物理學中非常重要的概念出發，其中分別涉及到氣體與液體壓力間的平衡。我們發現管口液體的內聚力與附著力應該會影響管內外的壓力如何達到平衡。因此本研究的初衷是為了試探我們建置的系統是否能簡易且準確地測量大氣壓力？且當受到外界擾動或周遭環境有氣流經過時，開口端的作用會如何影響系統的平衡？是否具備實際應用的可行性？能否解釋我們看到的特殊物理現象？

### 二、研究目的

- (一) 探討無擾動下，原理推導與比較數值模擬和實測數據間的差異。
- (二) 探討無擾動下簡易量測大氣壓力的可行性。
- (三) 探討有擾動下，「綜效表面壓」於不同震動、孔徑及口型對系統達平衡的影響。
- (四) 原理推導與探討實測環境氣流的可行性及其限制。

### 三、文獻回顧

#### (一) 波以爾定律[1]

波以爾-馬略特定律（英語：Boyle's law，也稱作 Boyle–Mariotte law 或 Mariotte's law），是由愛爾蘭化學家羅伯特·波以爾，在 1662 年根據實驗結果提出：「在密閉容器中的定量氣體，在恆溫下，氣體的壓力和體積成反比關係。」稱之為波以爾定律。此定律實驗結果首先由 Henry Power 所發現。這是人類歷史上第一個被發現的「定律」。馬略特在 1676 年發表在《氣體的本性》論文中：一定質量的氣體在溫度不變時其體積和壓力成反比。波以爾和馬略特這兩人是各自分別獨立確立定律的，因此在英語國家，這一定律被稱為波以爾定律，而在歐洲大陸則被稱為馬略特定律。

## (二) 托里切利原理[2]

托里切利的首要發明是水銀氣壓計，當初是為了解決一個實際問題而發明的。托斯卡納大公屬下的水泵製造商試圖將水壓到至少 12 米高，但卻發現 10 米是水泵的極限。托里切利使用了水銀，它比水重 13.6 倍。在 1643 年他製造了一支管大約一米長的玻璃管，密封管口用水銀裝滿管子，並將管子垂直插入一個裝滿水銀的盆子，於是水銀柱降到大約 76 cm 高，留下上面的真空就稱為托里切利真空。現在我們知道，水銀柱的高度變動與大氣壓的變化有關，而這就是第一個氣壓計。這個發現使他的名望永存，而真空測量的單位托就是用他的名字來命名的。

本研究想要探討不用抽真空，且仍利用液體密度為  $1\text{g/cm}^3$  的水，是否仍然可以簡易地測量大氣壓力？

## (三) 綜效表面壓[3]

本研究系統達平衡的開口端，包含有水分子的內聚力、杯口及杯緣或杯壁之間如附著力等諸多邊界層效應之綜合作用後產生的「綜效表面壓」，來共同參與管內想要壓出水柱的壓力(密閉氣壓和管內水柱壓)及管外大氣壓力之間的競合。

以下分別針對表面張力及邊界層效應整理說明：

### 1.表面張力 (Surface Tension)：

在物理上的狹義定義是指液體試圖獲得最小表面位能的傾向；廣義則是所有兩種不同物態的物質之間界面上的張力被稱為表面張力。常見的單位為  $\text{F/L}$ ，亦即單位長度的力。表面張力最常見的例子發生在液體與其他物質的接觸面。以水為例，水的表面張力來自於由凡得瓦力所造成的內聚力。當固體，如水黽，跑到水上時，表面張力會盡可能將水面維持平整的狀態，以達到最小表面位能。如果水黽的重量維持在限度內，那麼水面將只會有少許凹陷，這就是水黽能夠在水面上活動的原理。

### 2.邊界層 (boundary layer) 效應：

邊界層理論[4] (boundary layer theory) 首先由普朗特(L.Prandtl)於 1904 年提出，描述高雷諾茲數流(high Reynolds number flow)流經一流線型固體表面時，鄰近固體表面之處，因流體分子的黏性效應及流場速度梯度的存在，產生一極薄的剪力流層(shear layer flow)，稱此薄

層為邊界層。邊界層內，沿邊界法線方向，流速由固體邊界上的零速，急速地增加到邊界層外緣的勢流流速，形成極大的流速梯度，而凸顯出黏性剪力之重要性。

由全國科展國中組物理科 52 屆第三名「大珠小珠落一盤－出水端水滴體積變化之研究」[5]中也顯示水滴在滴下後原管底部水滴會彈性內縮，且其毛邊效應造成溢出體積下降，說明除了表面張力外，尚有不可忽略的邊界層效應。另外，本研究於探討口型的實驗中也發現不同口型下，因綜效表面壓不同而有不同的漏水量影響。因此是否有不同於毛邊的邊界層效應？

#### (四)加速度歐氏範數[6]

在數學中，歐幾里得距離是歐幾里得空間中兩點間直線距離，在三維直角座標中，若兩點座標  $A(x_1, y_1, z_1)$  和  $B(x_2, y_2, z_2)$ ，其  $x = x_2 - x_1$ 、 $y = y_2 - y_1$ 、 $z = z_2 - z_1$ ，其歐氏距離即為兩點直線的距離  $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。若以歐氏空間成為度量空間，相關聯的範數稱為歐幾里得範數(簡稱歐氏範數)。加速度歐氏範數即指在三維直角座標中，一個物體所受加速度為三個方向加速度  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  平方和的開根號，即  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ 。

本研究於擾動實驗中，利用陀螺儀偵測瓶口處受擾動時的三維加速度值，利用上述歐氏範數的方法進行數據處理，並嘗試解釋加速度變動過程與本實驗漏水多寡的物理現象。

## 貳、研究設備及器材

### 一、無擾動實驗的器材：

透過以下壓克力水柱管( $L'$ )、注水接頭( $D_{in}$ )、漏孔接頭( $w_n$ )、漏孔蓋等，如表 01 之器材，可組合成 12 種測試組合(如表 02)。

表 01 無擾動實驗所需之器材(圖片皆由作者拍攝)

一端封閉一端開口的壓克力水柱管共 12 支，水管長 $L'$ 分別為 107、127、147 cm，各 4 種內徑 $D_{in}$ 為 21、26、31、36 mm。 				
				
3D 列印注水接頭共 12 個，4 種口徑各 3 個接於水柱管之開口端。	3D 列印之漏孔接頭共 3 個，漏孔孔徑 $d_h$ 分別為 4、3、2 mm。	3D 列印之漏孔蓋 1 個。	刻度尺貼紙 12 個。	止漏環 15 個，12 個用於注水接頭，3 個用於漏孔接頭。

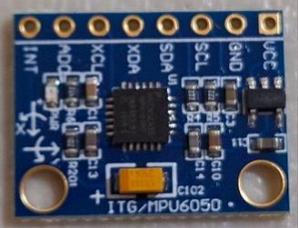
表 02 實驗器材所需之 12 種對應管長  $L$

$L$	$D_{in}$	21 mm	26 mm	31 mm	36 mm
		$w_2=4\text{ mm}$		$w_2=2\text{ mm}$	
107 cm		$L_1=110.65\text{ cm}$	$L_1=110.45\text{ cm}$	$L_1=110.45\text{ cm}$	$L_1=110.45\text{ cm}$
127 cm		$L_2=130.65\text{ cm}$	$L_2=130.45\text{ cm}$	$L_2=130.45\text{ cm}$	$L_2=130.45\text{ cm}$
147 cm		$L_3=150.65\text{ cm}$	$L_3=150.45\text{ cm}$	$L_3=150.45\text{ cm}$	$L_3=150.45\text{ cm}$

二、有擾動實驗的器材：

採用長 40 公分內徑 3.6 公分的壓克力管、漏孔口徑 2、4、6、8、10、12、14mm 的平口漏孔( $d_h$ 平)和 2、4、6、8、10mm 的凸口漏孔( $d_h$ 凸)、氣壓量儀 (量測範圍 300~110000Pa，精確度 $\pm 2\text{Pa}$ )、震動馬達及電控箱(控制馬達轉速)等器材(如表 03)來組裝並進行實驗測試。

表 03 有擾動實驗所需之器材(圖片皆由作者拍攝)

			
長 40 公分內徑 3.6 公分的壓克力管		平口漏孔( $d_h$ 平)	
			
凸口漏孔( $d_h$ 凸)	陀螺儀	氣壓量儀	水杯和電子秤
			
震動馬達	鋰電池	電控箱	漏斗

三、測量環境氣流實驗的器材：

採用長 45 公分內徑 2.6 公分的壓克力管、3D 列印曲道型  $L$  漏孔、渦輪風扇、電源供應器(控制電壓及電流以控制風速)及風速計等器材(如表 04)來組裝並進行實驗測試。

表 04 測量環境氣流之器材(圖片皆由作者拍攝)

			
長 45 公分內徑 2.6 公分的壓克力管			
			
曲道型 L 漏孔	渦輪風扇	電源供應器	風速計

#### 四、應用軟體：

(一) 繪圖軟體：EXCEL

(二) 箱型圖軟體：Minitab Statistical Software 22

(三) 馬達轉速控制、氣壓量測、加速度量測：Arduino 1.8.19

## 參、研究過程及方法

### 一、研究發展流程圖

本研究在不考量加入其他物質或溫度對純水表面張力的影響下，根據動機與目的，整理本研究的研究發展流程圖，如圖 01 所示。

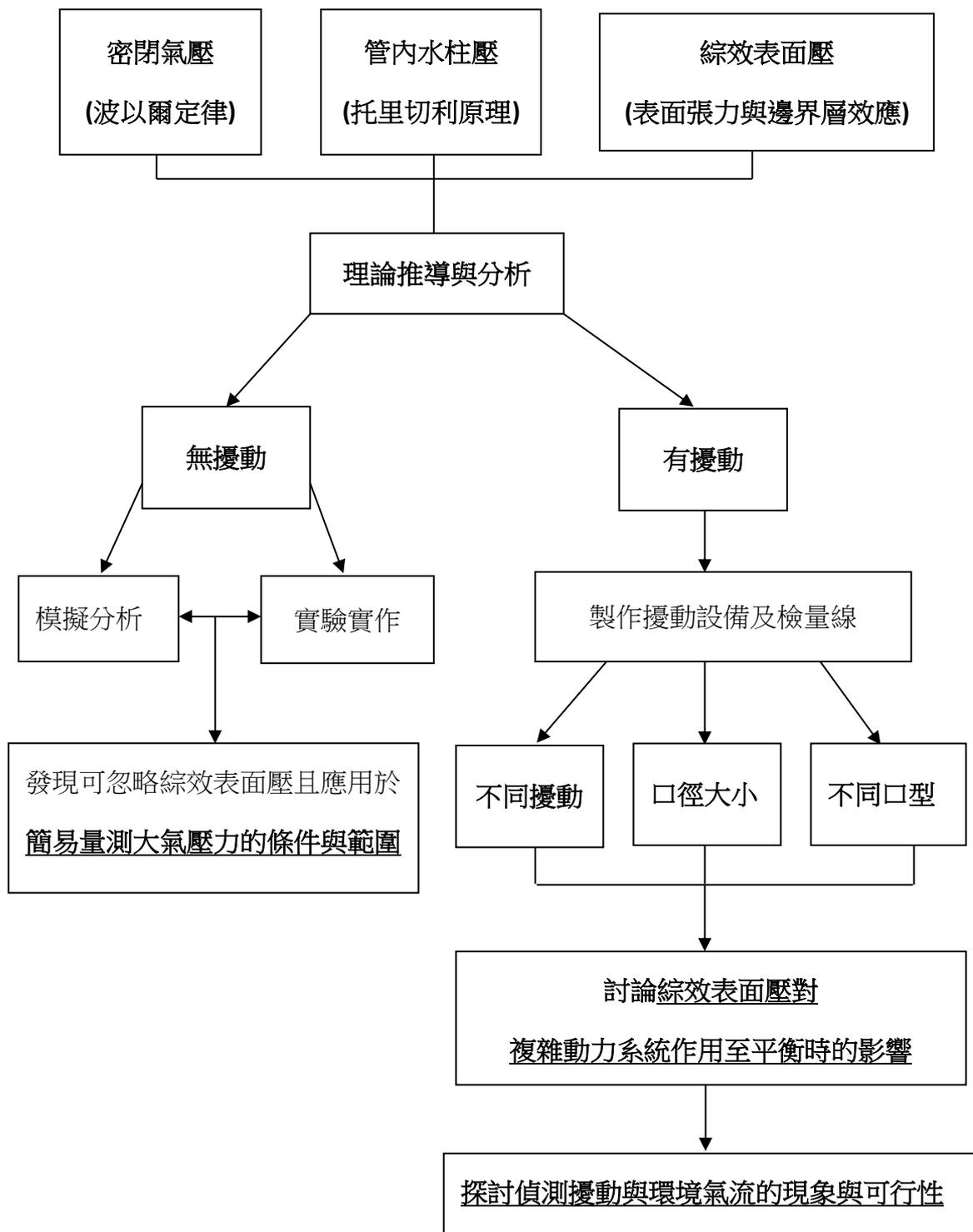


圖 01 研究發展流程圖

## 二、研究方法

### (一) 探討無擾動下，原理推導與比較數值模擬和實測數據間的差異

先經由波以爾定律及托里切利等物理原理導出由我們設計的壓克力水管器材裝置中，其大氣壓力、水柱長度與空氣柱之間的壓力關係後，進一步測量水柱長度及空氣柱間變化關係。

#### 1.原理推導：

##### (1)關於表面張力

表面張力  $T_s$  可以發生在液體與其他物質的接觸面，為單位長度的力。如圖 02，表面張力作用在孔徑  $d_h$  的圓形漏孔孔緣處，與鉛直線夾角  $\theta$ 。它造成的總力大小為

$$F_s = T_s \cos \theta \times 2\pi \left(\frac{d_h}{2}\right) \quad (\text{式 01})$$

對應的壓力可表示為

$$P_s = \frac{F_s}{\pi(d_h/2)^2} = \frac{4T_s \cos \theta}{d_h} \quad (\text{式 02})$$

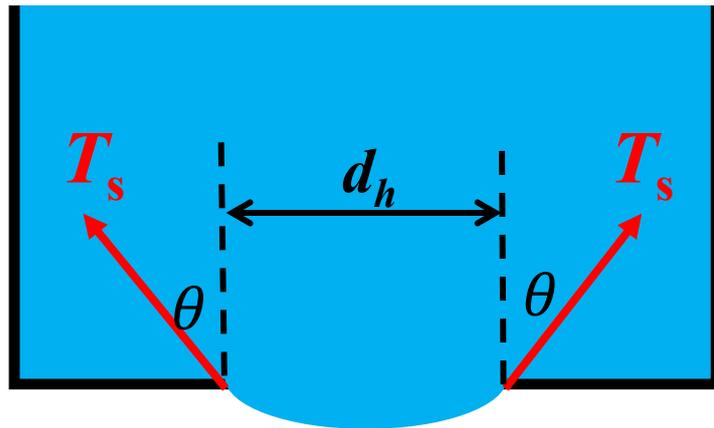


圖 02 漏孔處之表面張力示意圖

上面圖 02與式 02的描述乃是最理想的狀態。以表面張力的理論，確定 $\theta$ 角即可得對應的壓力 $P_s$ ，而且它必為負壓(壓力方向朝向管內)，而實際的實驗觀察狀態(如圖 03)，系統每次達平衡後，漏孔處液面可能出現內凹、外凸或是附著液滴等現象，其中液面內凹 $P_s$ 為正壓，其餘兩者為負壓。此外，不同漏孔孔徑 $d_h$ ，液體在管壁內的附著效果及漏孔處之邊界層效應都不同，因此無法理想化地將 $P_s$ 視為表面張力 $T_s$ 所對應的壓力。故此，我們將漏孔處附近多個成因造成之 $P_s$ 統稱為「綜效表面壓」。

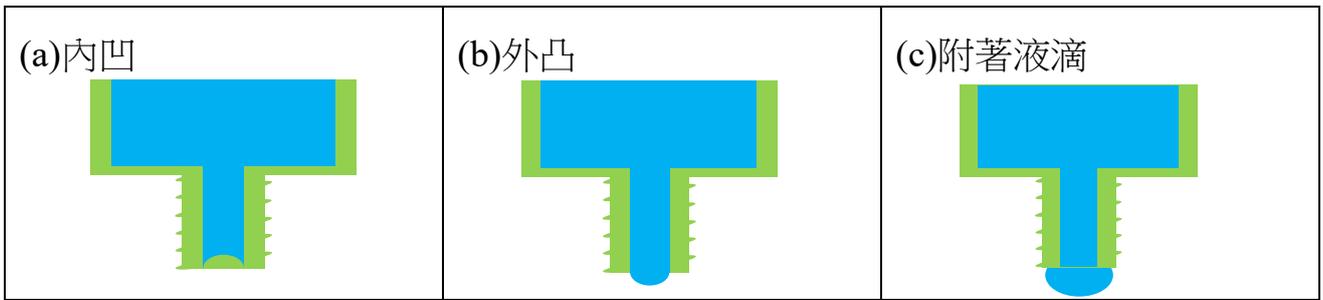


圖 03 平衡後，漏孔處液面可能出現的三種現象

### (2)關於波以爾定律

根據波以爾定律，空氣柱( $L-h$ )伸長前壓力  $P_0$  [圖 04 (c)]與伸長  $x$  後之壓力  $P_a$  [圖 04 (e)]的關係如下：

$$P_0 \times (L - h) = P_a \times [L - (h - x)] \quad (\text{式 } 03)$$

$$\Rightarrow P_a = \frac{L - h}{L - h + x} P_0 \quad (\text{式 } 04)$$

### (3)整合托里切利原理

底部小孔洩水達平衡時 [圖 04 (e)] 水柱管內外之壓力相等，因此空氣柱壓力  $P_a$  與水柱壓力  $P_h$ 、液體表面張力及邊界效應形成的綜效表面壓  $P_s$ ，三者之和等於外界氣壓  $P_0$ ，表示為

$$P_a + P_h + P_s = P_0 \quad (\text{式 } 05)$$

將  $P_a$  以式 04 代換，且將壓力單位以公分水柱表示，可得  $P_h = h - x$ ，式 05 可改寫為

$$\frac{L - h}{L - h + x} P_0 + (h - x) \times 1 + P_s = P_0 \quad (\text{式 } 06)$$

$$\Rightarrow P_0 = (h - x + P_s) \times \frac{L - h + x}{x} \quad (\text{式 } 07)$$

測量水柱原高度  $h$  與水面下降高度  $x$ ，即可得到綜效表面壓與外界氣壓的關係。

⇒⇒⇒ 進行數值模擬：

式 07 中，若將外界氣壓  $P_0$  與綜效表面壓  $P_s$  視為已知之物理量，可進一步推導得到  $x$  與  $h$  之關係為一個二次函數，如下：

$$x^2 - [(h + P_s) + (h - L) - P_0]x + (h + P_s)(h - L) = 0 \quad (\text{式 } 08)$$

其解為

$$x = [(2h + P_s - L - P_0) + \sqrt{(2h + P_s - L - P_0)^2 - 4(h + P_s)(h - L)}] / 2。 \quad (\text{式 } 09)$$

將式 09 中  $x$  與  $h$  輸出數據作圖，可預測實驗測量之結果。

## 2.實際操作步驟：

為了避免空氣進入的現象發生，所以我們選擇凸口型的器材來實作。

### (1)裝置長度校正

以游標尺測量水柱管裝置上刻度尺以外之長度  $w_1$ (=32.5 mm)如圖 04，包含注水接頭與漏孔接頭。此外，還要考慮注水接頭接觸水管處之管軸方向厚度  $w_2$ (圖 05)，依 3D 列印之數據，對於內徑 21 mm 之水管其  $w_2=4$  mm，其餘管徑水管之  $w_2=2$  mm。因此，若刻度尺顯示之水位為  $h'$ ，則水柱總高  $h = w_1 + w_2 + h'$ ，而 4 種水管長度  $L'$  分別組合成研究裝置後(不計掛勾)的長度  $L = w_1 + w_2 + L'$ (表 02)。



圖 04 刻度尺以外之長度為  $w_1$

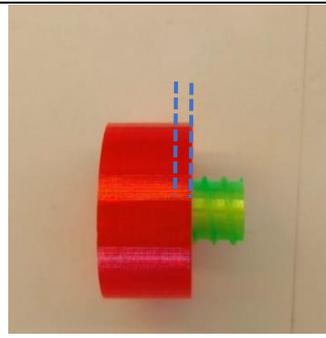


圖 05 注水接頭接觸水管處之管軸方向厚度  $w_2$ ，約為兩虛線之間

### (2)實驗步驟：

- A. 取表02中長度 $L_3$ (=150.65 cm)、內徑( $D_{in}$ =21 mm)裝置，搭配孔徑 $d_h$ =4 mm之漏孔接頭。旋開漏孔接頭以漏斗注水約9分滿。
- B. 旋緊漏孔接頭與漏孔蓋，此時管內氣體與外界氣壓相同。
- C. 將裝置在鉛直面上旋轉180°，此動作需緩慢，避免激起水中氣泡。
- D. 將裝置掛於樑上之懸線，待穩定靜止後，紀錄水位高 $h'$ 。
- E. 緩慢旋開漏孔蓋，令漏孔開始漏水。待漏水停止後，再次紀錄水位高 $h''$ ，水位下降高度  $x = h' - h''$ 。
- F. 旋緊漏孔蓋，進行步驟C，此時漏孔蓋朝上。旋開漏孔接頭，使管內氣體與外界連通。
- G. 重複步驟B~F，記錄每一組水柱總高 $h$ 對水位下降高度 $x$ 之數據。

依上述實驗步驟，運用到表 02 中的 12 款的水柱管，搭配 3 種漏孔孔徑  $d_h=4、3、2$  mm 的漏孔接頭，共得到 36 組數據。

下圖 06 為本實驗操作流程圖。

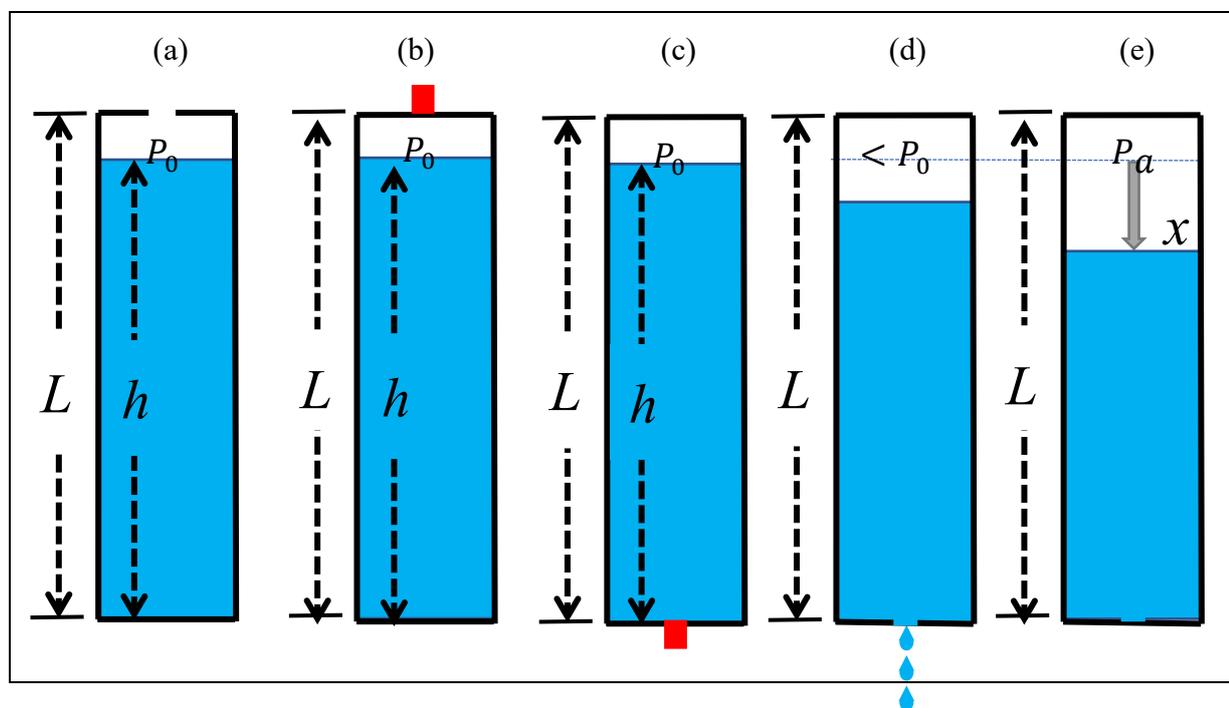


圖 06 無擾動下操作流程圖

## (二) 探討無擾動下簡易量測大氣壓力的可行性

在人跡可及的深坑或高峰，其氣壓都有顯著不同。在驗證本研究實驗測量的準確度後，我們進一步把設計的實驗裝置實際拿去測量各地的大氣壓值。

在我們實驗方法中，綜效表面壓 $P_s$ 之測量是相對不易的。因為每一次可以紀錄數據的平衡狀態，漏孔處的液滴是否附著或液面的角度(式 02 中的  $\theta$ )可能都不同。即便每次記錄數據都拍照分析角度也難以得到準確值，這樣的裝置並不便利。所以我們利用實驗一的實驗與理論比較分析，得到了綜效表面壓可以被忽略的條件，為  $L_3$ 、 $d_h=4$  mm、 $h>110$  cm。

在綜效表面壓可被忽略的條件下，式 07 可被改寫成

$$P_{out} = (h - x) \times \frac{L-h+x}{x} \quad (\text{式 } 10)$$

已知  $L=150.45$  cm，控制水柱高  $h$ ，測量到液面下降量  $x$ ，即可得到當地的氣壓 $P_{out}$ 。

綜合上述實驗，系統壓力平衡破壞後的漏水造成水位下降，如實驗(一)結果，水位愈接近管柱中間值，漏水量會加大；並且於實驗過程發現，氣泡進入的情形偶有不穩定的現象，因此我們好奇在系統經擾動造成平衡破壞而有氣泡進入時，若氣泡進入後對管內上方的密閉氣壓值雖有微幅變動，但是和外面環境的氣壓值比較(也是有在變動)也都差不多的情況下，我們不再重複打開又關閉上方進氣開關(原步驟是讓管內氣壓每次都恢復與外界氣壓相同)，在系統持續遭遇脈衝擾動時，漏水和管口進氣的情形以及因為綜效表面壓的運作而又再度達壓力平衡不再漏水的現象，其中有何奧秘？於是我們進行接下來的實驗。

### (三) 探討有擾動下，「綜效表面壓」對震動、漏孔口徑及口型對系統達平衡的影響

當系統持續遭遇脈衝擾動時，空氣進入管內並漏水，透過理論推導擬合與實際實驗數據整理，我們針對「改變不同震度來觀察對不同漏孔口徑或口型的漏水量變化影響」及「相同震度，改變不同漏孔口徑及口型」的漏水量變化來進行研究：

#### 1.有擾動的理論推導：

式 11 是(圖 07 左)水柱管內、外壓力平衡式。

$$P_a + P_h + P_s = P_0 \quad (\text{式 11})$$

其中 $P_a$ 是氣柱內壓力， $P_h = \rho_w \times g \times h$ 為水柱壓力， $P_s$ 是綜效表面壓的影響， $P_0$ 是環境壓力

當震動發生時，綜效表面壓的平衡破壞，水滴滴下，環境氣體進入氣柱。假設震動停止後，系統平衡再次發生，此時水面下降高度 $h_{w_o}$ ，落下水滴總體積 $V_{w_o}$ ，水密度 $\rho_w$ ，水柱內徑 $D_{in}$ ，故水滴質量 $M_{w_o} = \rho_w \times V_{w_o} = \rho_w \times \pi \times \left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 \times h_{w_o}$ ，可將其改寫為式 12。震動後氣柱壓力 $P_{a'}$ ， $P_{s'}$ 是震後綜效表面壓的影響壓力，故可得震動前後的壓力平衡式 13。將式 12 代入式 13 可得式 14。

$$h_{w_o} = \frac{4 \times M_{w_o}}{\rho_w \times \pi \times D_{in}^2} \quad (\text{式 12})$$

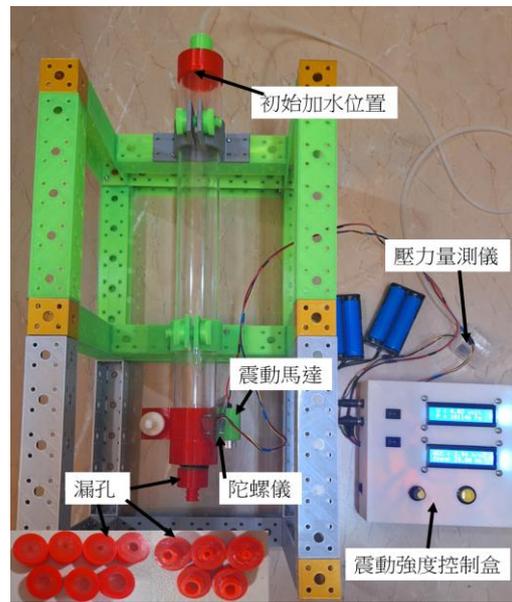
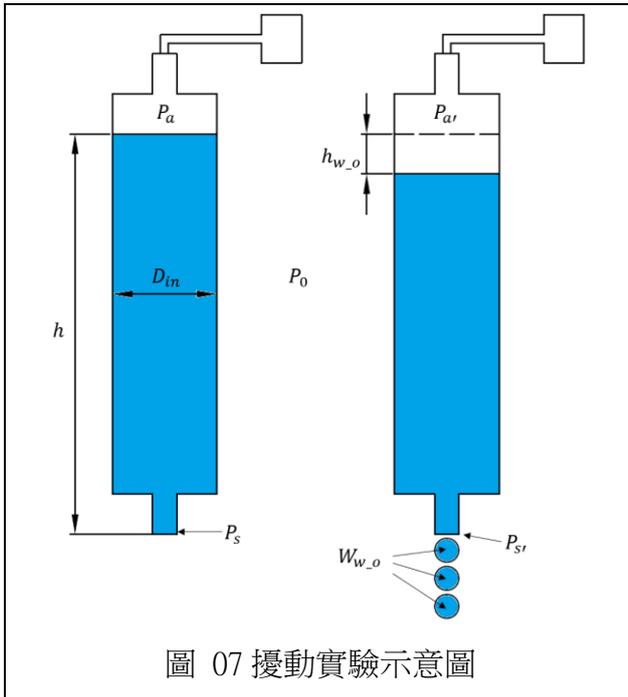
$$P_a + \rho_w \times g \times h + P_s = P_{a'} + \rho_w \times g \times (h - h_{w_o}) + P_{s'} \quad (\text{式 13})$$

$$M_{w_o} = \frac{\pi \times D_{in}^2 \times (P_{a'} - P_a)}{4 \times g} + \frac{\pi \times D_{in}^2 \times (P_{s'} - P_s)}{4 \times g} \quad (\text{式 14})$$

若 $P_s$ 和 $P_{s'}$ 非常接近，可將式 14 改寫成式 15。藉由量測前後的氣柱內壓力值 $P_a$ 、 $P_{a'}$ ，可

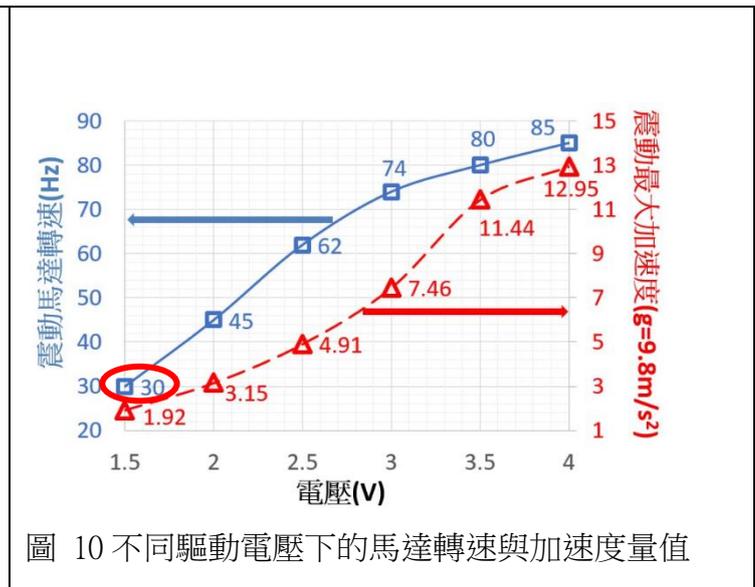
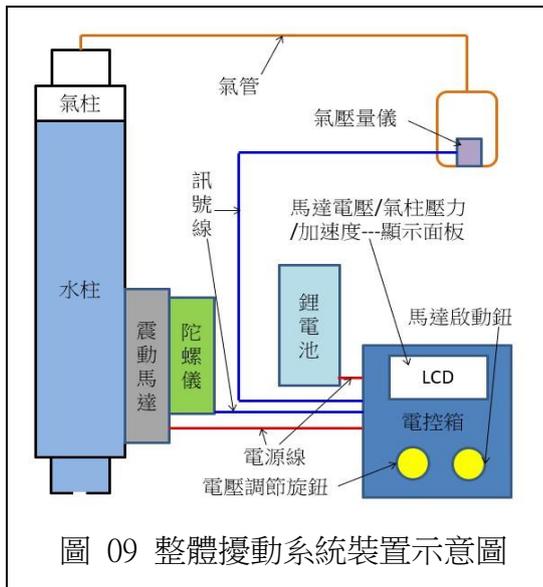
以用來估算排出水滴的質量 $M_{w_o}$ 。

$$M_{w_o} = \frac{\pi \times D_{in}^2 \times (P_{a'} - P_a)}{4 \times g} \quad (式 15)$$



## 2. 製作擾動設備

利用長 40 公分內徑 3.6 公分的壓克力管，搭配 3D 列印漏孔，漏孔口徑 2、4、6、8、10、12、14mm 的平口漏孔(dh 平)和 2、4、6、8、10mm 的凸口漏孔(dh 凸)進行實驗測試。壓克力管的上端連接密封氣管可與氣壓量儀（量測範圍 300~110000Pa，精確度±2Pa）連接，以量測氣柱內壓力。在漏孔處附近安裝震動馬達產生擾動，並利用電控箱來控制馬達轉速。在震動馬達附近安置陀螺儀，觀察擾動情況，裝置說明如圖 09。利用水杯盛接水滴並搭配電子秤(精確度 0.01g)量測水的質量。由鋰電池供應電控箱電力，漏斗裝填水柱管水量。其中震動馬達轉速與電壓的關係測量結果如圖 10。



### 3. 實際實驗操作：

(1) 針對「相同漏孔口徑口型下，改變震度」來進行實驗，我們利用改變電壓大小來控制馬達的強度。其實驗步驟：

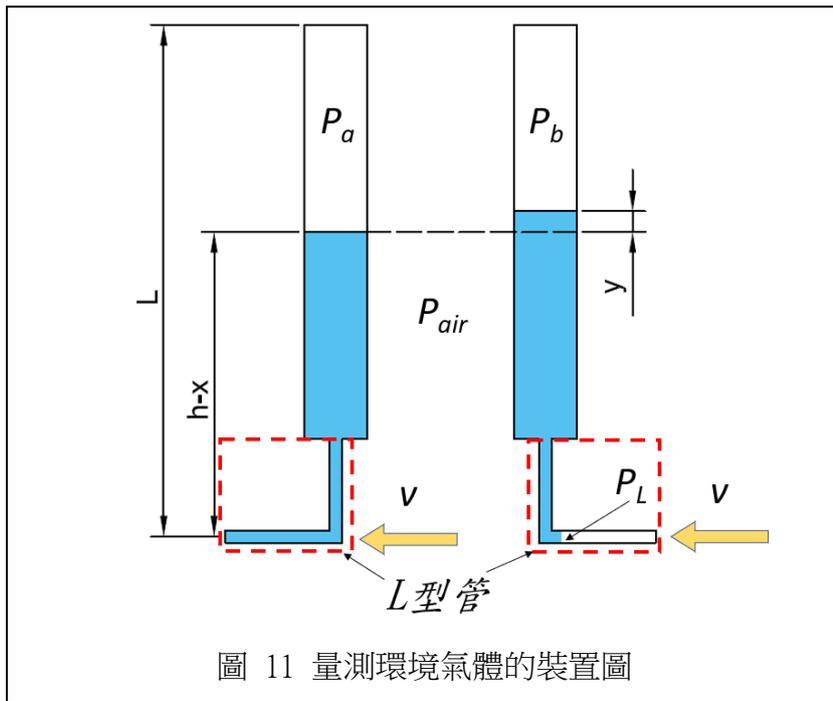
- 裝上口徑  $d_h$  平=2mm 的漏孔，將水加至上紅蓋下緣(如圖 08)後，蓋上綠色上蓋。
- 依序測試馬達電壓分別為 1.5、2.0、2.5、3.0、3.5 和 4.0 伏特。
- 按壓電控箱按鈕(馬達會持續震動 10 秒)，記錄每一次漏水的質量( $M_{w_o}$ )和( $P_{a'} - P_a$ )，並重複 10 次且記錄數據。
- 依序裝上口徑  $d_h$  平=4、6、8、10、12mm 的漏孔，每種口徑皆進行上述 A~C 實驗步驟。

(2) 針對「相同震度，改變不同漏孔口徑」、「相同震度，改變不同漏孔口型」之實驗步驟：

- 裝上漏孔口徑 2mm 的平口漏孔，將水加至上紅蓋下緣(如圖 08)，蓋上綠色上蓋。
- 固定馬達電壓為 1.5 伏特後，按壓電控箱按鈕(馬達會持續震動 10 秒)後，記錄每一次漏水的質量( $M_{w_o}$ )和( $P_{a'} - P_a$ )，並重複 10 次且記錄數據。
- 改變不同漏孔口徑、口型，重複上述 A、B 步驟。

#### (四) 原理推導與探討實測環境氣流的可行性及其限制

透過實驗(一)的裝置不只能夠推估管內的氣壓( $P_a$ )，若在開口裝置上加上一個 L 型管(圖 11 中紅框標示)，還可以用來量測環境氣體的流動速度，裝置設計如圖 11 所示。



### 1. 有環境氣流的原理推導：

假設環境流體的速度是  $v$  (由右往左流動，方向如圖 11 中黃色箭頭)，壓力是  $P_{air}$ ，密度是  $\rho_{air}$ 。當  $L$  型管開口端朝左時，開口端背向流體的流動方向，故管內的壓力  $P_a$  不會受到流體的流動而有所改變，如圖 11 左。當  $L$  型管開口端朝右時 (即水平旋轉  $180^\circ$ )，開口端面向流體的流動方向，環境流體會進入  $L$  型管，且流速度會變成  $0$ ，依照白努利定律，此時  $L$  管內的壓力  $P_L$  會滿足白努利方程式如式 16，將  $P_{air} = P_a + \rho_w g(h - x)$  帶入式 16 得式 17，其中  $\rho_w$  代表水的密度。

$$\frac{1}{2}\rho_{air}v^2 + P_{air} = P_L \quad (式 16)$$

$$\frac{1}{2}\rho_{air}v^2 + P_a + \rho_w g(h - x) = P_L \quad (式 17)$$

管內的水面會升高，假設液位升高的高度是  $y$ ，如圖 11 右，可得  $P_L$  的壓力為

$$P_b + \rho_w g(h - x + y) = P_L \quad (式 18)$$

則由波以爾定律得

$$P_b[L - (h - x) - y] = P_a[L - (h - x)] \quad (式 19)$$

$$\Rightarrow P_b = \frac{P_a[L - (h - x)]}{[L - (h - x) - y]} \quad (式 20)$$

將式 20 代入式 16 且與式 17 聯立得

$$\frac{1}{2}\rho_{air}v^2 = \frac{P_a[L - (h - x)]}{[L - (h - x) - y]} - P_a + \rho_w gy \quad (式 21)$$

將式 21 簡化成式 22，則得到環境流速  $v$  與液面升高高度  $y$  的關係式。

$$v = \sqrt{\frac{2yP_a}{\rho_{air}[L - (h - x) - y]} + 2\frac{\rho_w}{\rho_{air}}gy} \quad (式 22)$$

故可以藉由量測  $y$  值來估算環境流速。此方法於未來應用的範圍非常廣泛。

## 2. 製作流速量測裝置

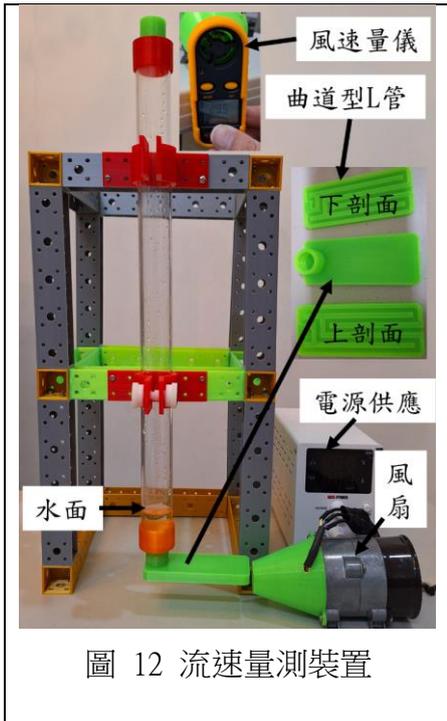


圖 12 流速量測裝置

利用長 45 公分內徑 2.6 公分的壓克力管，搭配 3D 打印製作一曲道型  $L$  漏孔，如左圖，用以增加  $L$  漏孔內的容水量。 $L$  漏孔內的管徑 4mm，曲道內總長度約 500mm，可容納約 5.652ml( $=3.14 \times 0.2 \times 0.2 \times 45$ )的水，可供內徑 2.6cm 的壓克力管上升約 1.065cm。在  $L$  漏孔開口處設置一風速可達 29.5m/s(約時速 106.2 公里)的渦輪風扇，用精準度  $\pm 0.5$ (m/s) 的風速量儀量測風速。

當渦輪風扇啟動並朝向  $L$  管漏孔開口處吹風時，流體的動壓會使得壓克力管的水面上升，量測水面上升的高度，則可推估得到氣體的流速。

## 肆、研究結果與討論

針對本研究的四個研究方向，先透過原理推導，再經電腦程式模擬與實際實驗取得的數據比對，進行如下的分析與討論：

### 一、比較無擾動下數值模擬和實測的結果

#### (一) 分析表面張力、漏孔口徑、管長對水位下降的效應

##### 1. 表面張力與漏孔口徑

式 02，水的表面張力  $T_s (=72.75 \text{ mN/m})$  代入對應的壓力  $P_s = 4T_s \cos \theta / d_h$ ，以公分水柱為單位可得  $P_s = 2.968 \cos \theta / d_h$ 。令  $\cos \theta = 1$ (以下討論皆如此假設)，且與汞之比較如圖 13， $P_s$

與漏孔口徑大小 $d_h$ 成反比，所以 $d_h$ 越小，表面張力的貢獻越大。

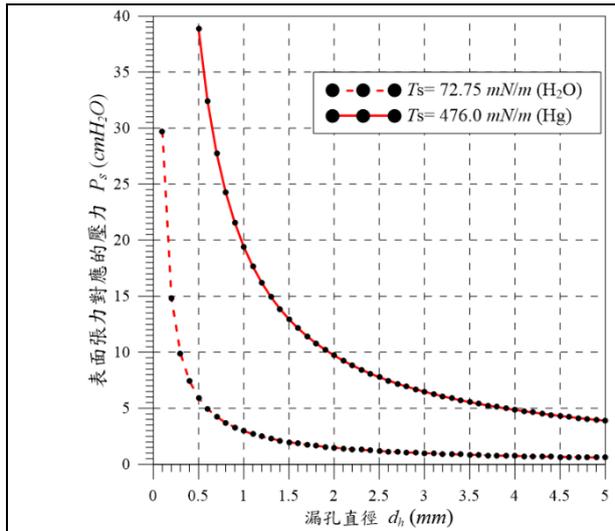


圖 13 水與汞表面張力對應的壓力 $P_s$ 分別與漏孔直徑的關係

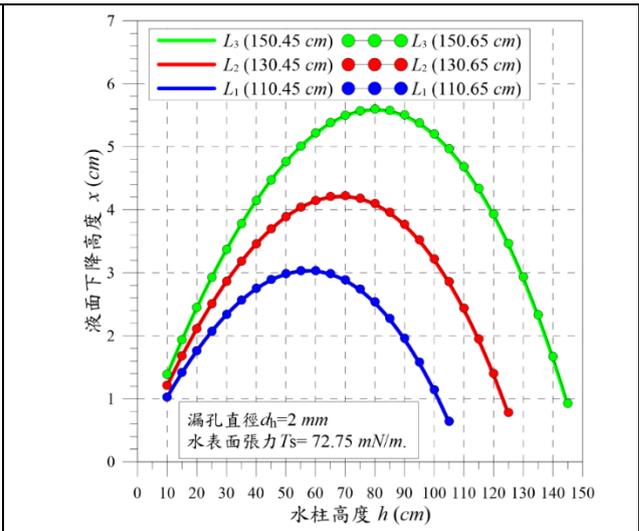


圖 14 各種水柱管裝置長度，液面下降高度 $x$ 與水柱高 $h$ 之關係

## 2. 水柱管裝置長度 $L$ 對 $x-h$ 的效應

以 1.中之結果，設漏孔口徑 $d_h=2\text{ mm}$ ， $P_0$ 為一大氣壓，即 1033.6 公分水柱，可將式 09 之  $x-h$  輸出數據如圖 14。數據顯示，任一管長  $L$ ，液面下降高度  $x$  與水柱高  $h$  為一個二次曲線。而對同一個水柱高  $h$ ， $L$  越長  $x$  也相對越大，故使用較長的水柱管有利於實驗數據的測量。此外，水管口徑最小 $D_{in}=21\text{ mm}$ 所對應的  $L$  比其它口徑的  $L$  長了 2 mm，這些微的差距對圖中結果也沒有明顯的影響。

## 3. 漏孔口徑 $d_h$ 對 $x-h$ 的效應

由 2.的結果得知， $L_3$ 較長較易觀察，我們選擇了 $L_3$ 以及各種不同漏孔口徑 $d_h$ ，來了解其對  $x-h$  的效應。如圖 15 所示，小 $d_h$ 對應大的 $P_s$ ，可以分擔水柱壓力 $P_h$ 的量值，所以液面下降高度  $x$  相對較大(同水柱高  $h$ )。此外，隨著 $d_h$ 的增加， $P_s$ 減低、 $x$  變小， $x-h$  曲線漸漸靠近 $T_s=0$ 。這表示漏孔口徑 $d_h$ 大到某個程度時，表面張力 $T_s$ 可以被忽略，尤其是在水柱高  $h$  較大時更為明顯。

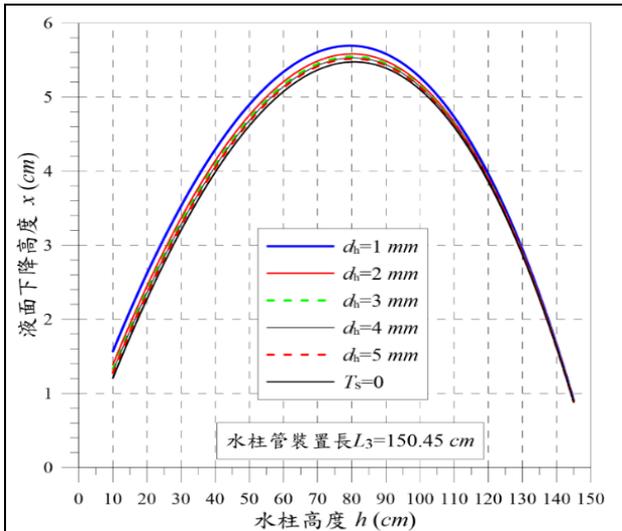


圖 15 水柱管裝置長度 $L_3$ 搭配各種漏孔口徑下，液面下降高度  $x$  與水柱高  $h$  之關係

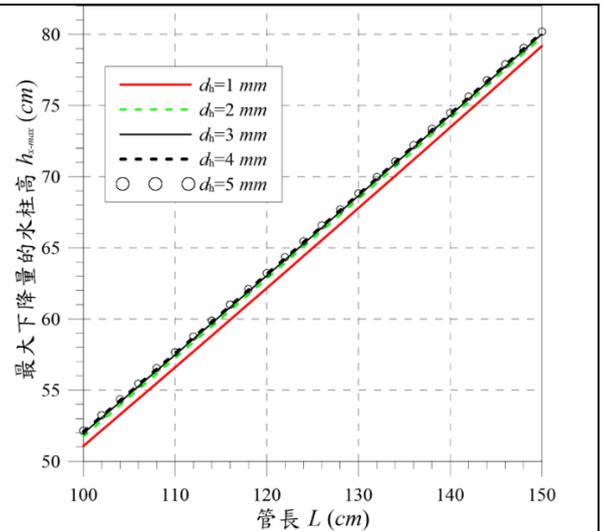


圖 16 各種漏孔口徑，液面最大下降量所對應的水柱高  $h_{x-max}$  與水柱管裝置長度  $L$  之關係

#### 4. 液面下降高度之最大值所對應的水柱高

由 2、3 的結果得知，水柱管裝置的每一種長度都存在液面下降高度之最大值，其對應的水柱高表示為  $h_{x-max}$ 。圖 16 中的結果可以發現，不同漏孔口徑  $d_h$ ，其  $h_{x-max}$  對  $L$  都是線性變化。這個線性關係也可以由式 09 中令  $x$  對  $h$  微分為零， $h$  之解近似為  $L$  的一次函數得到。另一方面， $d_h$  由小慢慢增大，圖中線段也漸漸貼近，這表示表面張力貢獻度趨弱。

#### (二) 實驗測量結果 (以下僅呈現水柱管長 $L_3$ ，漏孔口徑 $d_h=2$ mm，其他數據列於實驗日誌)

##### 1. 水柱管長 $L_3$ ，漏孔口徑 $d_h=2$ mm

表 05 水柱管裝置長度  $L_3$ ，漏孔口徑  $d_h=2$  mm，各種水管內徑的實驗數據

$L_3=150.65$ cm, $d_h=2$ mm, $D_{in}=21$ mm																					
$h$ (cm)	135.25	132.95	130.40	127.55	124.40	120.9	117.05	112.90	108.45	103.75	98.75	93.55	88.20	82.75	77.25	71.70	66.30	60.95	55.80	50.85	46.15
$x$ (cm)	2.30	2.55	2.85	3.15	3.50	3.85	4.15	4.45	4.70	5.00	5.20	5.35	5.45	5.50	5.50	5.40	5.35	5.15	4.95	4.70	4.45
$L_3=150.45$ cm, $d_h=2$ mm, $D_{in}=26$ mm																					
$h$ (cm)	128.70	125.70	122.35	118.70	114.70	110.40	105.80	100.95	90.60	85.20	79.70	74.20	68.75	63.35	58.10	53.05	48.25				
$x$ (cm)	3.00	3.35	3.65	4.00	4.30	4.60	4.85	5.10	5.25	5.40	5.50	5.45	5.40	5.25	5.05	4.80	4.55				
$L_3=150.45$ cm, $d_h=2$ mm, $D_{in}=31$ mm																					
$h$ (cm)	123.45	119.90	116.00	111.80	107.30	102.55	97.55	92.30	86.95	81.50	75.95	70.50	65.05	59.80	54.70	49.80					
$x$ (cm)	3.55	9.90	4.20	4.50	4.75	5.00	5.25	5.35	5.45	5.55	5.45	5.45	5.25	5.10	4.90	4.65					
$L_3=150.45$ cm, $d_h=2$ mm, $D_{in}=36$ mm																					
$h$ (cm)	129.80	126.90	123.70	120.15	116.30	112.10	107.65	102.90	97.90	92.70	87.30	81.85	76.35	70.85	65.45	60.15	55.05	50.10	45.45		
$x$ (cm)	2.90	3.20	3.55	3.85	4.10	4.45	4.75	5.00	5.20	5.40	5.45	5.50	5.50	5.40	5.30	5.10	4.95	4.65	4.40		

#### (三) 比較量測數據與理論值

將本實驗中表 03~11(表 04~11 數據呈現在實驗日誌)之數據與理論值表示於圖 17~25。

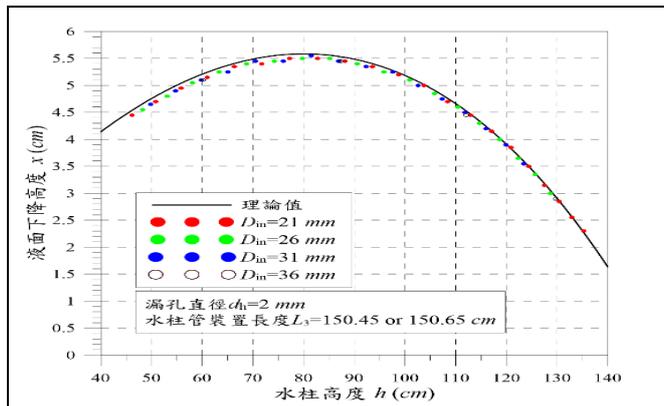


圖 17 ( $L_3, d_h=2 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

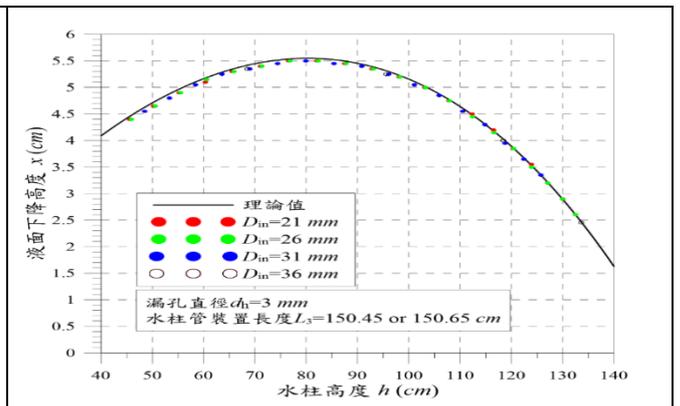


圖 18 ( $L_3, d_h=3 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

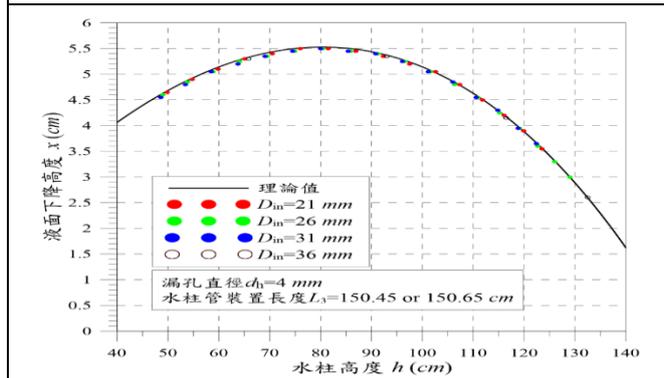


圖 19 ( $L_3, d_h=4 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

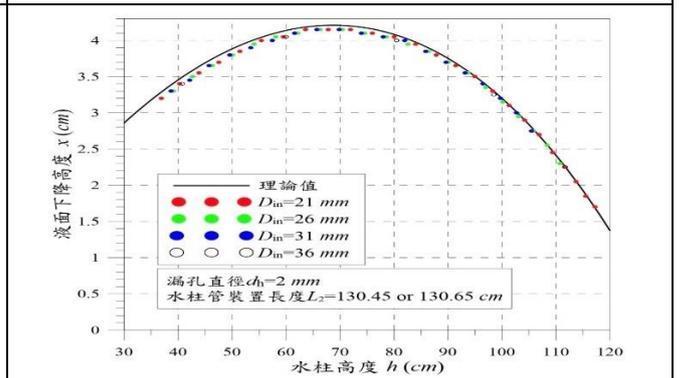


圖 20 ( $L_2, d_h=2 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

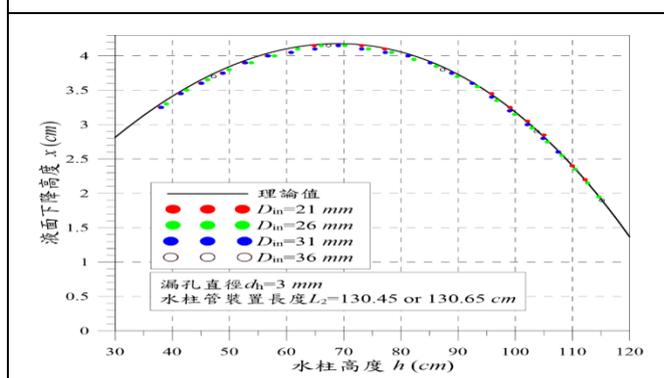


圖 21 ( $L_2, d_h=3 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

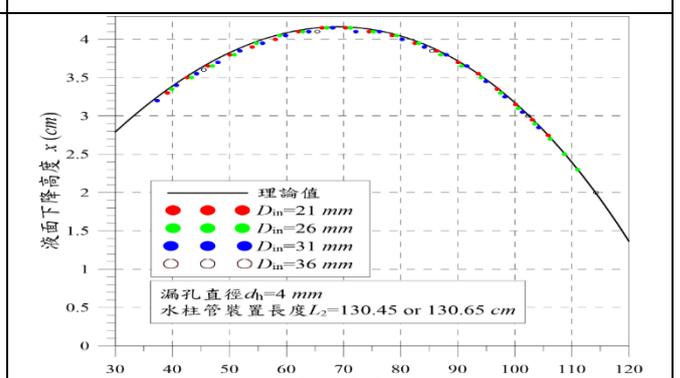


圖 22 ( $L_2, d_h=4 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

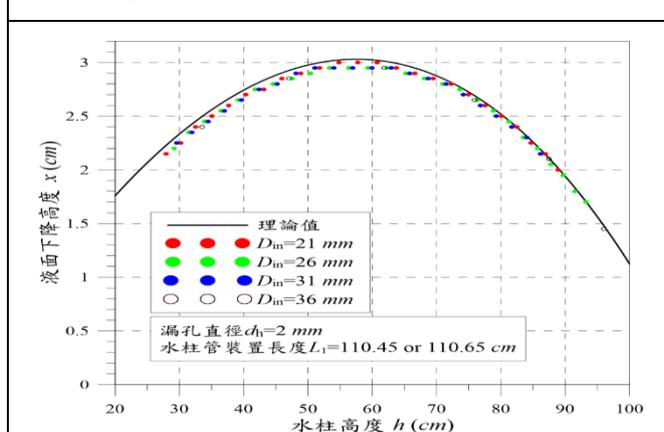


圖 23 ( $L_1, d_h=2 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

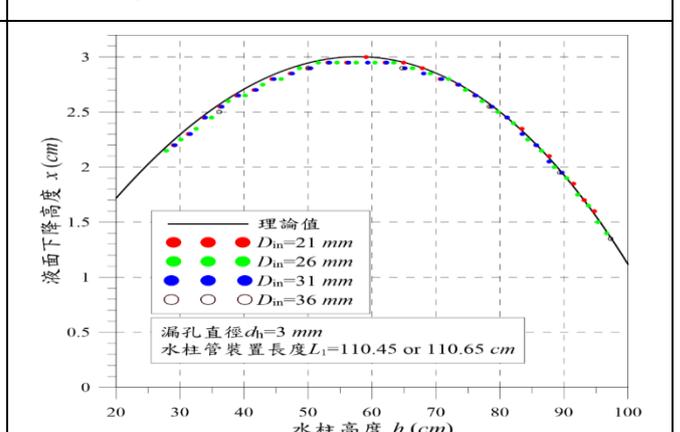


圖 24 ( $L_1, d_h=3 \text{ mm}$ )各  $D_{in}$  的實驗與理論值比較

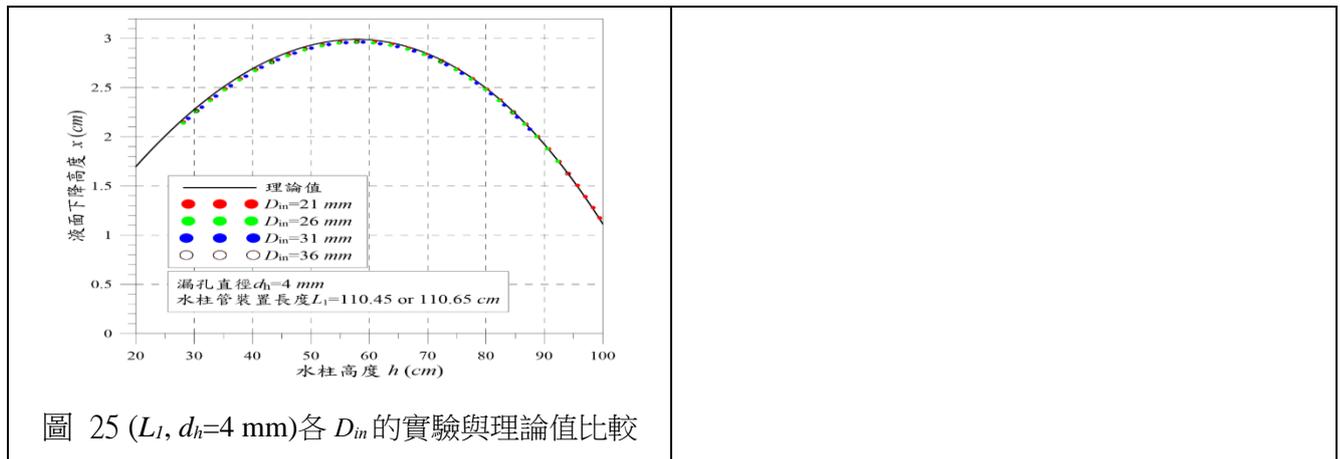


圖 25 ( $L_l, d_h=4$  mm)各  $D_{in}$ 的實驗與理論值比較

由圖 17~25 可得幾項重要結果：首先，水柱管口徑 $D_{in}$ 的大小對於測量結果沒有明顯的效應，這與理論預期結果相同。此外，實驗測量之數據與理論值非常接近，理論值又略大於實驗數據。此略大的原因，主要來自於我們將式 02 表面張力總力中的 $\cos \theta$ 設為 1， $P_s$ 的效應被調成最大值，使得液面下降高度  $x$  也相對增大。

由每張圖中橫軸量值較大與較小的區域做比較，可發現較高的水柱高度其理論與實驗數據之間的差距較小。而由同一種裝置長度中漏孔口徑最大 $d_h=4$  mm(圖 19、22、25)與漏孔口徑最小 $d_h=2$  mm(圖 17、20、23)之數據做比較，漏孔口徑越大這個差距也會越小。甚至在裝置長度 $L_3$ 且最大漏孔口徑 $d_h=4$  mm 中  $h > 110$  cm 的範圍內 (圖 19)，理論與實驗數據之間的差距小於 1%。這是由於表面張力 $T_s$ 與漏孔口徑 $d_h$ 成反比， $d_h$ 增加使得 $T_s$ 大幅減低。而水柱高度  $h$  增加，也會令式 05 中 $P_h$ 的也增加，而使得表面張力形成之壓力 $P_s$ 的貢獻度降低。

## 二、探討無擾動下簡易量測大氣壓力的可行性

利用式 10，我們將不同水柱高  $h$  所對應的 $P_{out}$ 與  $x$  的關係繪製如下頁圖 26 所示，其中一大氣壓下可以測量的數據以紅圈方式標示在圖 26 中，測量的條件為  $L=150.45$  cm、 $d_h=4$  mm、 $D_{in}=26$  mm，各種  $h$  對應的  $x$ ，數據如下表：

表 06  $L_l=150.45$  cm， $d_h = 4$  mm， $D_{in}=26$  mm，一大氣壓下實驗數據

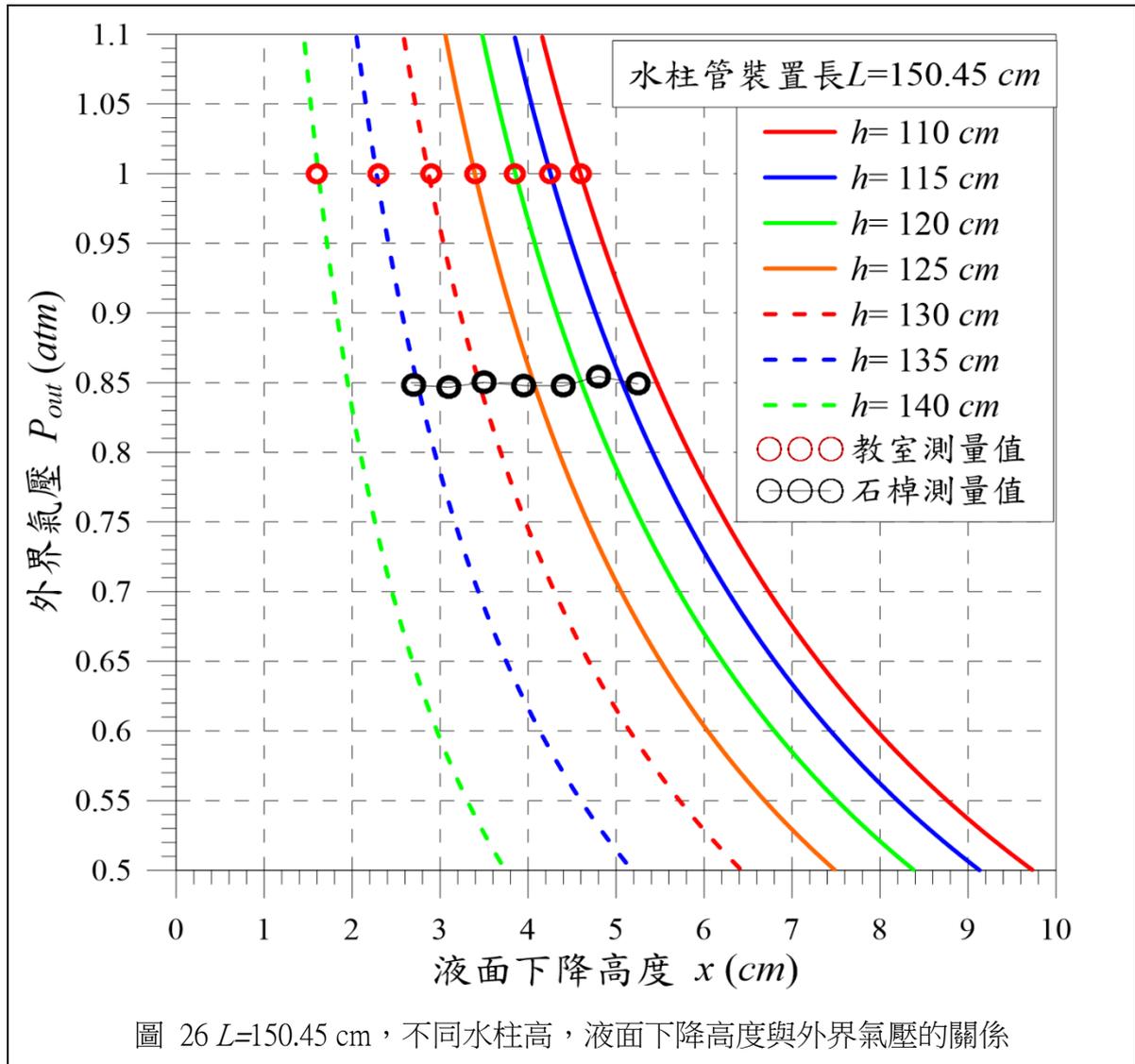
$h$ (cm)	110.1	115.0	119.9	125.1	130.0	135.05	139.9
$x$ (cm)	4.60	2.25	3.85	3.40	2.90	2.30	1.60

此外，我們也到達阿里山石棹實地測量當地的氣壓(海報展示會場以影片呈現)，以隨機的水柱高  $h$  測量液面下降量  $x$ ，再代入式 10 獲得氣壓值 $P_{out}$ (於圖 26 中以黑圈標示)，數據如下表：

表 07  $L_l=150.45\text{ cm}$  ,  $d_h=4\text{ mm}$  ,  $D_{in}=26\text{ mm}$  , 阿里山石棹當地實驗數據

$h$ (cm)	135.30	132.50	129.25	125.60	121.40	116.80	111.65
$x$ (cm)	2.80	3.25	3.70	4.15	4.65	5.10	5.55
$P_{out}$ (atm)	0.822	0.816	0.817	0.821	0.819	0.821	0.820

阿里山石棹當地的氣壓測量值平均為  $0.819\text{ atm}$  , 與手機 app 測量為  $0.844\text{ atm}$  相差小於 3%。



### 三、探討有擾動下, 「綜效表面壓」於不同震動、孔徑及口型對系統達平衡的影響

針對有加擾動的研究, 我們發現因擾動而造成氣泡進入偶有不穩定的現象。若當次的氣泡量突然一次入侵很多, 那對管口水膜的擾動, 包括表面水分子間的內聚力、水分子與口緣及管壁的附著力等作用的變動可能會有加大作用, 因而造成更多氣泡進入, 造成漏水量出現較大誤差, 在最後做趨勢分析時將不取該次數數據; 若操作時其進氣是穩定的, 且迅速地讓系

統內外壓力達到平衡且不再漏水，則取得十次有效數據後做平均，進行趨勢分析。

如前述，我們觀察到表面水膜於空氣進入的過程中，有時外凸有時內凹，水分子間的內聚力有時向上、有時向下，應該是有產生類似簡諧力的作用，然後在某些特定的驅策力條件下，進行驅策力、耗散力及簡諧力共同建構複雜動力系統的特殊加速行為。此現象應與水的表面張力受擾動時產生類似鼓面的駐波振動有關。

實驗數據分析如下：

### (一) 以「相同漏孔口徑口型，改變震度」的實驗

雖然我們有做各種漏孔口型及口徑大小的震度實驗，不同於目的一及二的實驗選擇凸口平嘴進行實驗，以下實驗選擇較易漏水的平口型中較大口徑  $d_{h平}=10\text{mm}$  之數據做整理分析，如圖 27 所示。結果可發現：

1. 在增加馬達電壓實驗中，電壓從 1.5 增加到 2.0 伏特時，漏水量從 22.74g 下降至 5.89g 如圖 27。當電壓增加到 2.5 伏特後，水從漏孔滴出的量變得更少，甚至在一次按壓電控箱按鈕(持續 10 秒鐘震動)的期間，不會有水漏出。水滴漏水較多的時間點是在馬達開始和結束震動的時候。這與我們原本預測加大電壓(擾動震度)會漏水更多的預測違背。

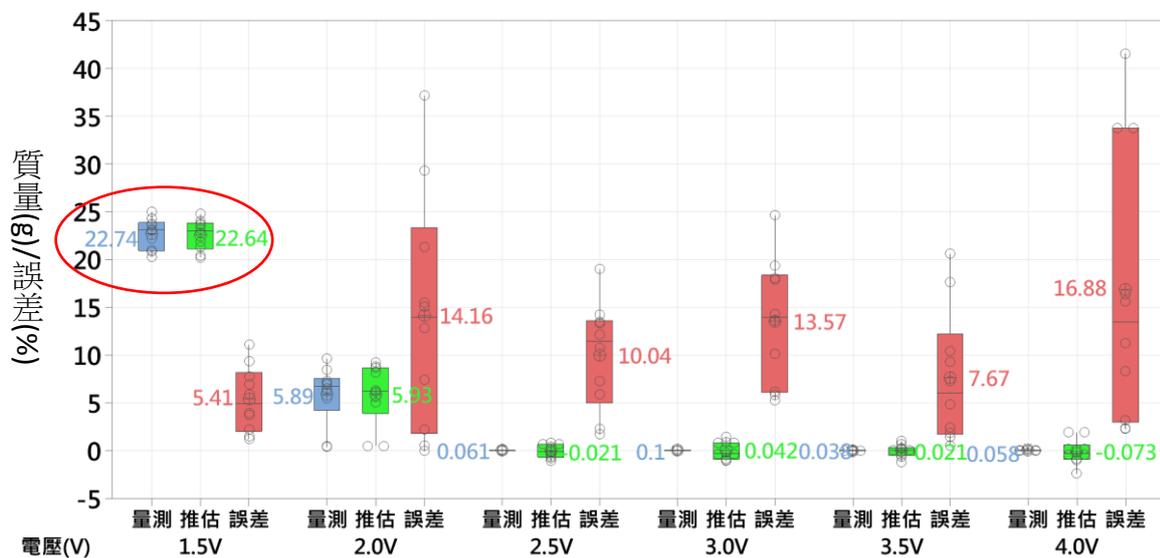


圖 27 固定漏孔形狀  $d_{h平}=10\text{mm}$ ，改變電壓 1.5~4.0V，量測漏水質量和推估漏水質量(由式 15 推估)箱型圖。其中藍色代表量測漏水質量，綠色代表推估漏水質量，紅色代表量測與推估的誤差(誤差 =

$$\left| \frac{\text{推估水重} - \text{量測水重}}{\text{量測水重}} \right| * 100\%$$

2. 為了解為何在震動馬達電壓為 1.5V 伏特才会有較多的水滴從漏孔漏出的現象。於是經討

論後決定在馬達附近加裝陀螺儀，收集三個維度的加速度隨時間變化曲線，將陀螺儀量測到的三個方向加速度( $a_x$ 、 $a_y$  和  $a_z$ )分別平方後相加，最後開根號，得到加速度歐氏範數 $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ，並將其與時間關係曲線圖繪製如圖 28。在圖 28 中，可以明顯觀察出馬達電壓 1.5V 時出現每秒有六個波型的週期行為(圖 28 中紅色曲線)，代表瓶口受擾動後有固定的震動基頻 6Hz。而加大電壓時，雖總加速度值有同步加大，但即使一樣出現多週期的週期行為，但卻出現入侵的氣泡較小且水膜能迅速封閉管口達到壓力平衡的現象。**推估這 6Hz 的震動頻率為馬達在低電壓時造成的擾動，是破壞開口表面液體水膜的關鍵條件。**

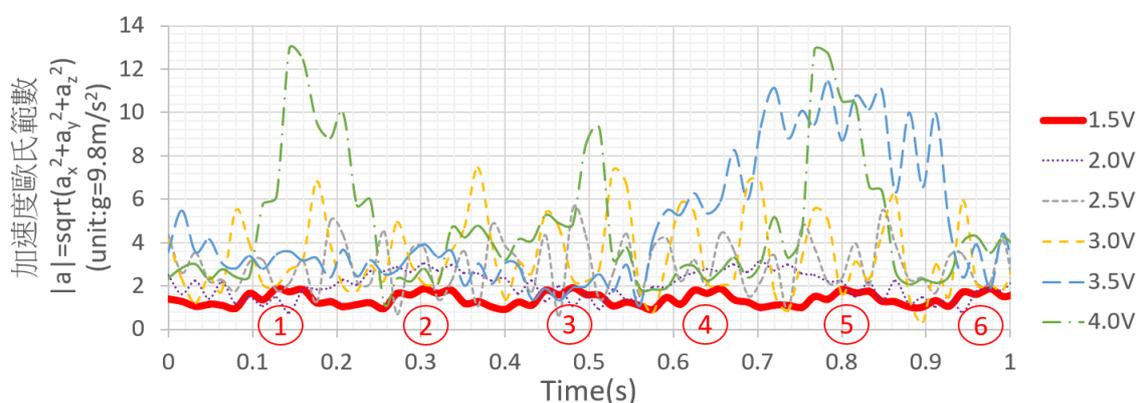
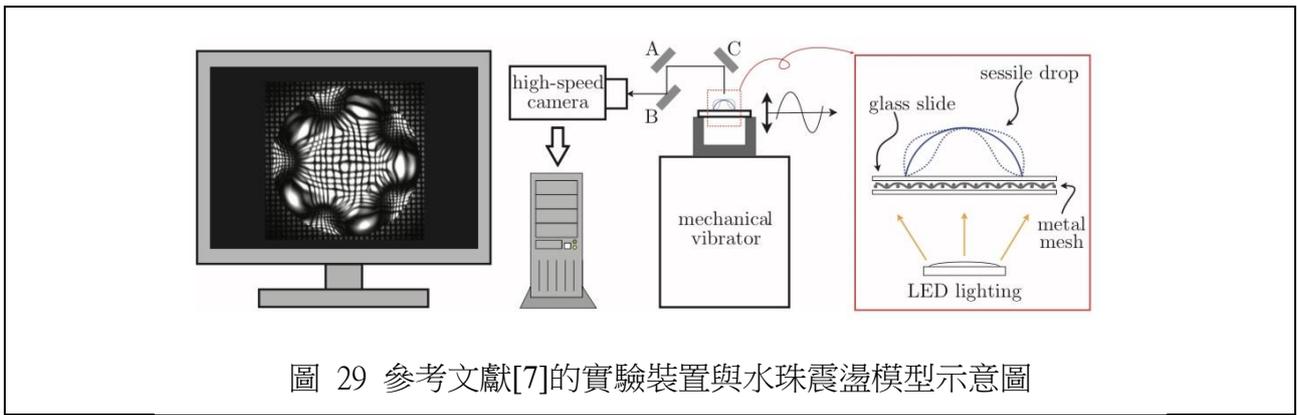


圖 28 電壓 1.5V~4.0V 之震動馬達的加速度歐氏範數隨時間變化曲線圖

- 我們認為擾動本研究智能系統的馬達不應該只是單純提高電壓時會增強擾動的強度，同時也有改變馬達震頻，由第 14 頁中之圖 10 不同驅動電壓下的馬達轉速與加速度量值中可以發現，電壓值為 1.5V 的馬達震頻為 30Hz，恰為瓶口量到的加速度變化頻率 6Hz 的整數倍，應該是出現所謂的「共振放大效應」，導致因振幅加大而破裂，讓大量的氣泡入侵；查詢文獻[7]得知，靜置於一震動平板上的水珠(如圖 29)，當水珠半徑 11.8mm 時，其自然頻率也是 6Hz(由文獻[7]中公式 $\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2)$ ，取 $n = 2$ 求得，其中 $\omega_n$ 是水滴的自然頻率， $\sigma$ 是水的表面張力， $\rho$ 是水的密度， $R$ 是水的半徑)。雖是巧合，但是尺度很接近，證實我們推測本系統開口處形成表面液壓的綜合作用力中有簡諧力的想法是合理的。



【註】每一個物體都有一個自然震動頻率，關乎他的形狀、對稱性以及重心位置。只要外界驅動力頻率接近這個物體自然震動頻率，振幅就會越來越大，直到物體毀壞崩潰。

延續前面的實驗發現，我們故意選取固定 1.5V 的驅動電壓來擾動系統，重新觀察不同漏孔口徑及口型對漏水量的影響。

(二) 固定 1.5V 電壓的擾動，測量改變不同漏孔口徑及口型的漏水量，取十次做平均值並以檢量線箱形圖呈現，如圖 30 所示。

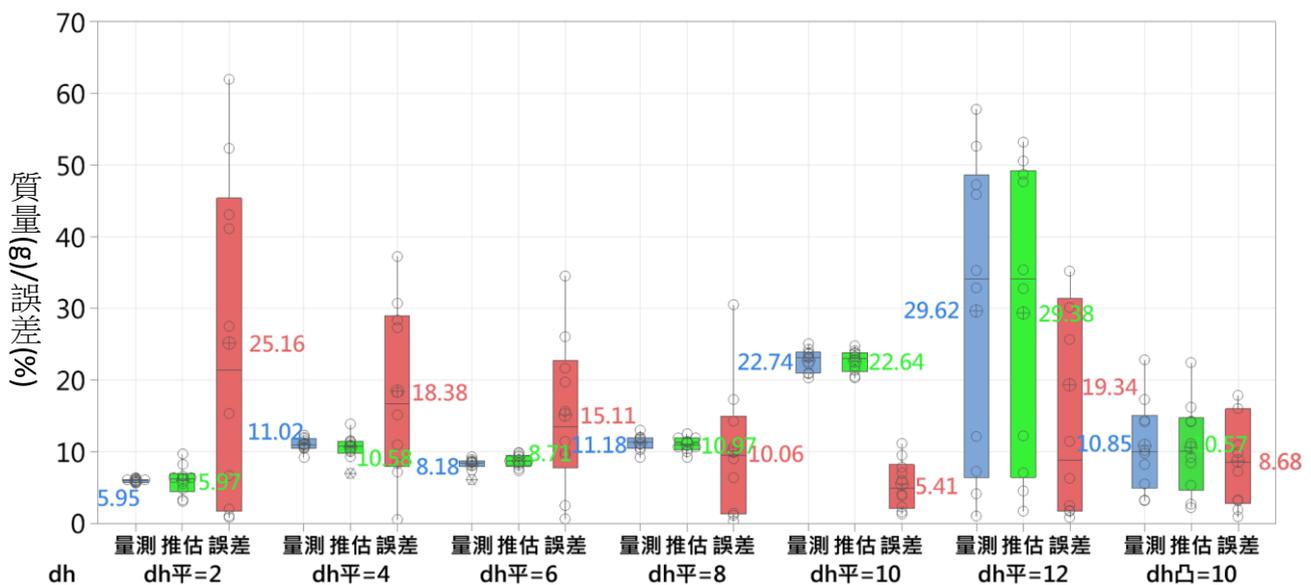


圖 30 固定電壓 1.5V，改變漏孔形狀，量測漏水質量和推估漏水質量(由式 15 推估)箱型圖。

其中藍色代表量測漏水質量，綠色代表推估漏水質量，紅色代表量測與推估的誤差(誤差 =  $\left| \frac{\text{推估水重} - \text{量測水重}}{\text{量測水重}} \right| * 100\%$ )

由圖 30 的量測值、推估值及誤差率相對後可發現：

1. 在平口漏孔的測試當中， $d_h$  平=2mm 時，每按壓一次電控按鈕，平均每次會漏下 5.95g 的水，漏出的水量最少。 $d_h$  平=4~8mm 時，平均每次漏水質量大約在 8.18~11.18g 之間，並無隨孔

徑增加而有明顯增加漏水量的趨勢。 $d_h$  平=10mm 時，平均每次漏水質量增加至 22.74g。 $d_h$  平=12mm 時，每次漏水質量變化很大，第一次漏水最多(57.8g)，最後一次漏水最少(1g)，平均每次會漏下 29.62g 的水。 $d_h$  平=14mm 時，按壓二次電控按鈕水大致就漏完了，總漏水量 387.1g(還有微量水在漏孔流不下來)。

2.在凸口漏孔的測試當中， $d_h$  凸=2~8mm 時，水均不易漏出，無法量測到穩定的質量變化，而  $d_h$  凸=10mm 時，平均每次漏水質量 10.85g，比  $d_h$  平=10mm 的漏水量居然少了約一半左右。由此證明，即使漏孔口徑相同，不同漏孔形狀對綜效表面壓的影響也會不同。符合我們認為系統達平衡不只是表面張力的作用而已，應由綜效表面壓的觀點進行思考。

3.用壓力推估質量部分(式 15)，若以平均量測漏水質量和平均推估漏水質量來比較平均漏量

誤差，如圖 31。(平均漏量誤差 =  $\left| \frac{\text{平均推估漏水質量} - \text{平均量測漏水質量}}{\text{平均量測漏水質量}} \right|$ ) (單位:%)

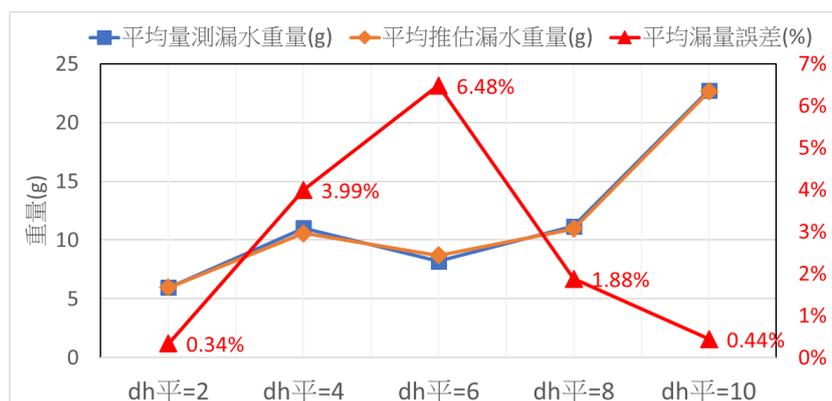


圖 31 平均量測漏水質量、平均推估漏水質量和平均漏量誤差比較圖

結果顯示在  $d_h$  平=2 ~ 10mm 的平均漏量誤差在 0.34~6.48%之間。造成誤差的原因有氣壓量儀的精確度(由式 15 推得 2Pa 的變化約對應質量 0.21g)、電子秤的精確度(0.01g)和綜效表面壓變化對出水量的影響為  $\pi \times D_{in}^2 \times (P_{s'} - P_s) / (4 \times g)$ 。以  $d_h$  平=6 的誤差來估算，平均量測漏水質量 8.18g，平均推估漏水質量 8.71g，綜效表面壓變化對平均出水量的影響  $\cong$  平均推估漏水質量(8.71g) - 平均量測漏水質量(8.18g) - 氣壓量儀的精確度(0.21g) - 電子秤的精確度(0.01g) = 0.31g。因綜效表面壓在過程中是變動的。推測若量測的樣本次數越多，平均推估漏水質量會越接近平均量測漏水質量。

4.在量測與推估誤差比較中(圖 30 紅色箱型圖部分)，在  $d_h$  平=2~10mm 的區間，箱型圖的範圍有越來越小的現象，這代表誤差有越來越收斂的趨勢，誤差的平均值由  $d_h$  平=2mm 的 25.16% 降至  $d_h$  平=10mm 的 5.41%，這代表開孔口徑越大，綜效表面壓變化對漏水量的影響越小。

#### 四、分析實測環境氣流的可行性及其限制

由氣壓量儀量測當時的環境壓力為  $P_0=101,305\text{Pa}$ ，水密度  $\rho_w=1000(\text{kg}/\text{m}^3)$ ，空氣密度  $\rho_{air}=1000(\text{kg}/\text{m}^3)$ ，重力加速度  $g=9.8(\text{m}/\text{s}^2)$ ，壓克力的管長  $L=43.63\text{cm}$ ，封住漏孔加水的初始水柱高  $h=5.35\text{cm}$ ，打開漏孔水漏下後水柱下降 2mm 的高度，經由式 04 推估  $P_a=100779\text{Pa}$ 。

渦輪風扇所能提供的最大風速是 29.5(m/s)，因曲道型 L 型管有遮蔽的效應，導致出風口處的面積變小，流速增加。原量測出風口風速的截面積為  $490.9\text{mm}^2$ ，經遮蔽後出風口面積為  $247.6\text{mm}^2$ ，經質量守恆估算，遮蔽後風速  $v = 29.5 \times 490.9 \div 247.6 = 58.39(\text{m}/\text{s})$ 。

經實驗量測，水面上升高度  $y=1.8\text{mm}$ ，代入式 22 計算所得風速 60.47(m/s)，誤差  $3.56\%=(60.47-58.39)/58.39$ 。圖 32 是針對管長  $L=43.65、83.65\text{cm}$  和初始水柱高  $h=5.34、20.35\text{cm}$  的氣體流速  $v$  對水面上升高度  $y$  的模擬曲線圖。

發現水柱高  $h$  越小，在相同的氣體流速下，上升的水面高度  $y$  越大。管長  $L$  越長，在相同的氣體流速下，上升的水面高度  $y$  越大。可藉由調整水柱高  $h$  和管長  $L$  來量測合適的流體速度。

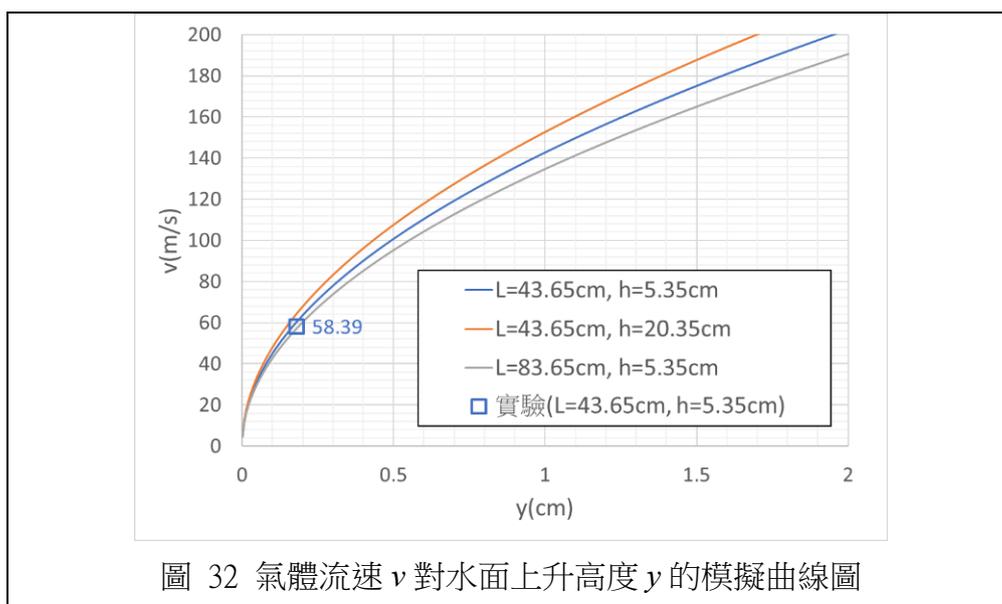


圖 32 氣體流速  $v$  對水面上升高度  $y$  的模擬曲線圖

## 伍、結論與建議

通過本智能系統，觀察不同管長及水位高對液面下降的影響及適合測量大氣壓力的條件，並量測受擾動時漏水質量與有外界氣流產生壓差造成的液面上升等現象，中間都明顯有綜效表面壓的影響。這讓我們知道要理解和面對真實世界的複雜動力行為，應該用系統化的思考去分析，並找出應用的可能與限制。從一系列的研究中我們得到以下結論：

- 一、在無擾動的實驗一中，完成數值模擬與實驗測量後，發現理論值與實驗數據十分吻合，其結果顯示水柱高  $h$  與水位下降高度  $x$  的關係為一個二次曲線，且管長  $L$  越長使得  $x$  的變化量越大，越利於測量大氣壓力，而水柱管管徑的變因不影響其測量結果。
- 二、當有較高的水柱與在較大漏孔孔徑的條件下，綜效表面壓  $P_s$  貢獻度下降至可被忽略，此狀態的實驗測量數據與理論值相差低於 1%。由於可以精準地測量上述數據，所以此實驗裝置可以被用來測量各種環境的氣壓，例如：我們實地到阿里山石棹去測量當地的氣壓，以隨機的水柱高  $h$  測量液面下降量  $x$ ，可得到當地的氣壓之測量平均值為 0.819 atm，與手機 app 測量為 0.844atm 相差小於 3%。
- 三、比較同口徑的平口和凸口兩種口型的差異，凸口口型因為有多層水膜的內聚力及管內水分子和管壁間有更多附著力，另外，還有壓差將水往外擠出時入侵的氣泡彷彿進入一狹長的通道，受到管壁的反作用力而無法迅速伸展擴大，所以較不易漏水，且能迅速達到壓力平衡(如圖 33 左所示)；平口型的入侵氣泡則是在上升過程因壓力減少立即伸展體積(波以爾定律)，然後再因浮力原理加速上升，進一步因減壓而體積變得更大，能擠出更多的水且管口的壓力不易達到平衡，導致漏水量較大且不穩定(如圖 33 右所示)。

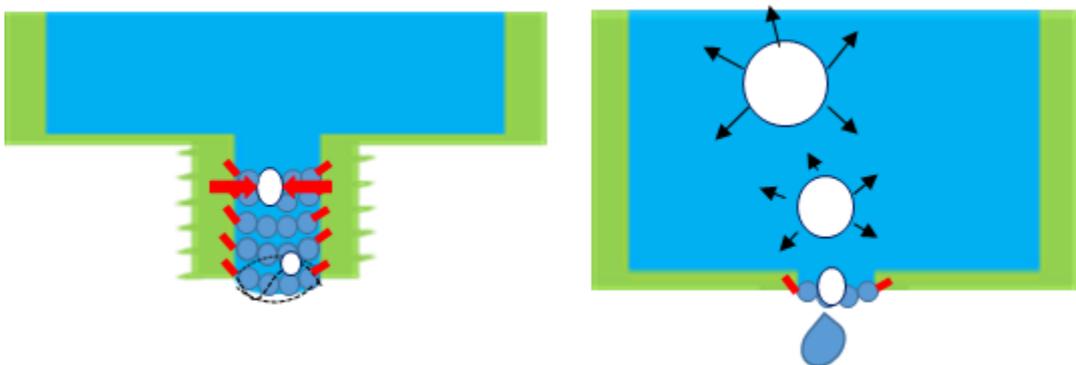


圖 33 粒子觀點解析綜效表面壓的物理建模

- 四、研究發現特定的擾動震度與震頻，會造成綜效表面壓的簡諧力作用過程之「共振放大效應」，因此我們認為未來有應用於類似地震偵測的可能性。參考文獻中[7]提及若水滴半徑愈大，放在震動平板上的自然頻率愈小，而我們的系統則是於加大擾動震度與震頻時，量測到瓶口加速度變化頻率由結果顯示也是變小的，系統偵測到較大漏水量反而是較低震度(其實是因為震頻)。因此，當我們企圖應用在類似地震的偵測時，只要找出每種能產生液面共振效應的特定震度與震頻所對應的管長、口徑與口型，不僅可以量測且可以辨識！
- 五、本裝置應用於量測環境氣流流速的可行性評估及其限制，發現在相同的氣體流速下，當水柱高  $h$  越小，上升的水面高度  $y$  越大；當管長  $L$  越長，上升的水面高度  $y$  越大。因此便可藉由調整水柱高  $h$  和管長  $L$  來量測合適的流體速度。

## 陸、參考文獻資料

- 1.維基百科。「波以耳-馬略特定律」。2023 年 8 月。取自  
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E7%8E%BB%E6%84%8F%E8%80%B3-%E9%A9%AC%E7%95%A5%E7%89%B9%E5%AE%9A%E5%BE%8B>
- 2.維基百科。「埃萬傑利斯塔·托里拆利」。2023 年 8 月。取自  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9F%83%E8%90%AC%E5%82%91%E5%88%A9%E6%96%AF%E5%A1%94%C2%B7%E6%89%98%E9%87%8C%E6%8B%86%E5%88%A9>
- 3.維基百科。「表面張力」。2023 年 8 月。取自  
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A1%A8%E9%9D%A2%E5%BC%A0%E5%8A%9B>
- 4.國家教育研究院辭書。「邊界層理論」。2024 年元月。取自  
<https://pedia.cloud.edu.tw/Entry/Detail/?title=%E9%82%8A%E7%95%8C%E5%B1%A4%E7%90%86%E8%AB%96&search=%E9%82%8A%E7%95%8C>
5. 劉勝傑等 3 人。「大珠小珠落一盤—出水端水滴體積變化之研究」。全國科展國中組物理科 52 屆第三名作品。科學教育館。台北市。中華民國。
6. 維基百科。加速度歐氏範數。2024 年 3 月。取自  
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E8%8C%83%E6%95%B0>

7. Chun-Ti Chang et al (2013). *Substrate constraint modifies the Rayleigh spectrum of vibrating sessile drops*. PHYSICAL REVIEW E 88.023015.

## 【評語】 030112

本作品探討運用波以爾定律以及托里切利原理，探討量測大氣壓力、震度與氣體流速之影響，研究上一端開口一端封閉的水柱管，探討不同口徑對不同水柱壓，表面張力及邊界層效應產生綜効表面壓，但可以除了考慮上述的效應外，也許可以將水的蒸氣壓列入考量，讓作品在物理面上的討論更加完整。實驗設計相當的詳細，如果可以把實驗所用的測量工具最小測量刻度祥列出來，可以讓數據的呈現及分析更加的精確，整體來說作品具有學術和實用價值。從實際的問答中可以看出同學對於作品內容實驗的熟悉度很高，對於作品的陳述也相當的完整。

## 作品簡報

# 波以爾對抗托里切利的**表面功夫**

—探討量測**大氣壓力**、**震度**與**氣體流速**之影響



〈以下所有圖片皆由作者製作〉

本研究運用波以爾定律以及托里切利原理，討論不同口徑對應不同水柱壓下，因開口的表面張力及邊界層效應產生之「綜效表面壓」，模擬與實測漏水量的變化。

實驗操作流程為以管長 $L$ 一端開口一端封閉的水柱管，開口朝上注入高 $h$ 的水量，將其封閉倒置後，其水柱管內氣壓與外界 $P_0$ 相同。開啟底部使其漏水至平衡，結果發現使用一般的水就可以簡易量測大氣壓力的條件。進一步探討擾動對系統的影響，在綜效表面壓的作用下，於特定的震度和震頻時瓶口的加速度具有週期行為，並得出本系統應用於偵測氣流的限制與可行性。

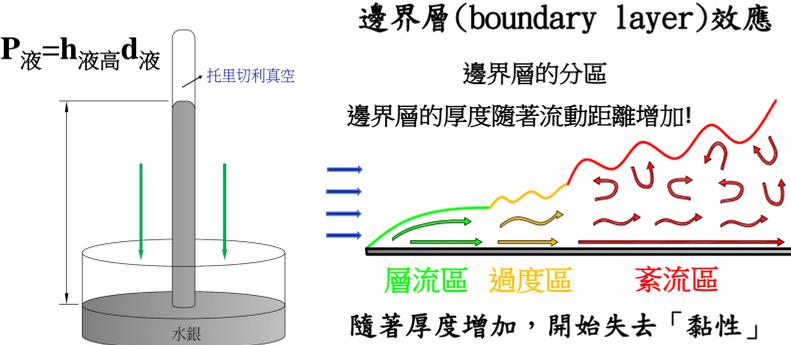
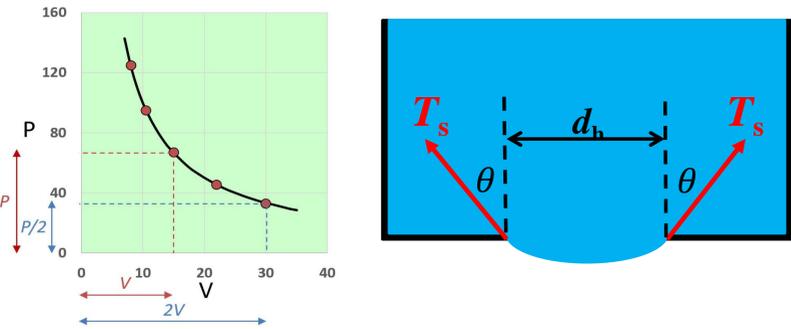
本研究由已知的原理出發，透過實作來探究複雜且真實的機制，進而發現有趣的物理現象與實用價值。

研究動機

基於對物理學的好奇心及探索科學技術的應用潛力。從波以爾定律和托里切利原理此兩項基礎物理學中非常重要的概念出發，其中分別涉及到氣體與液體壓力間的平衡。我們發現管口液體的內聚力與附著力應該會影響管內外的壓力如何達到平衡。因此本研究的初衷是為了試探我們建置的系統是否能簡易且準確地測量大氣壓力？且當受到外界擾動或周遭環境有氣流經過時，開口端的作用會如何影響系統的平衡？是否具備實際應用的可行性？能否解釋我們看到的特殊物理現象？

文獻回顧

Boyle's Law ( $P_1V_1=P_2V_2$ ) 表面張力(Surface Tension)

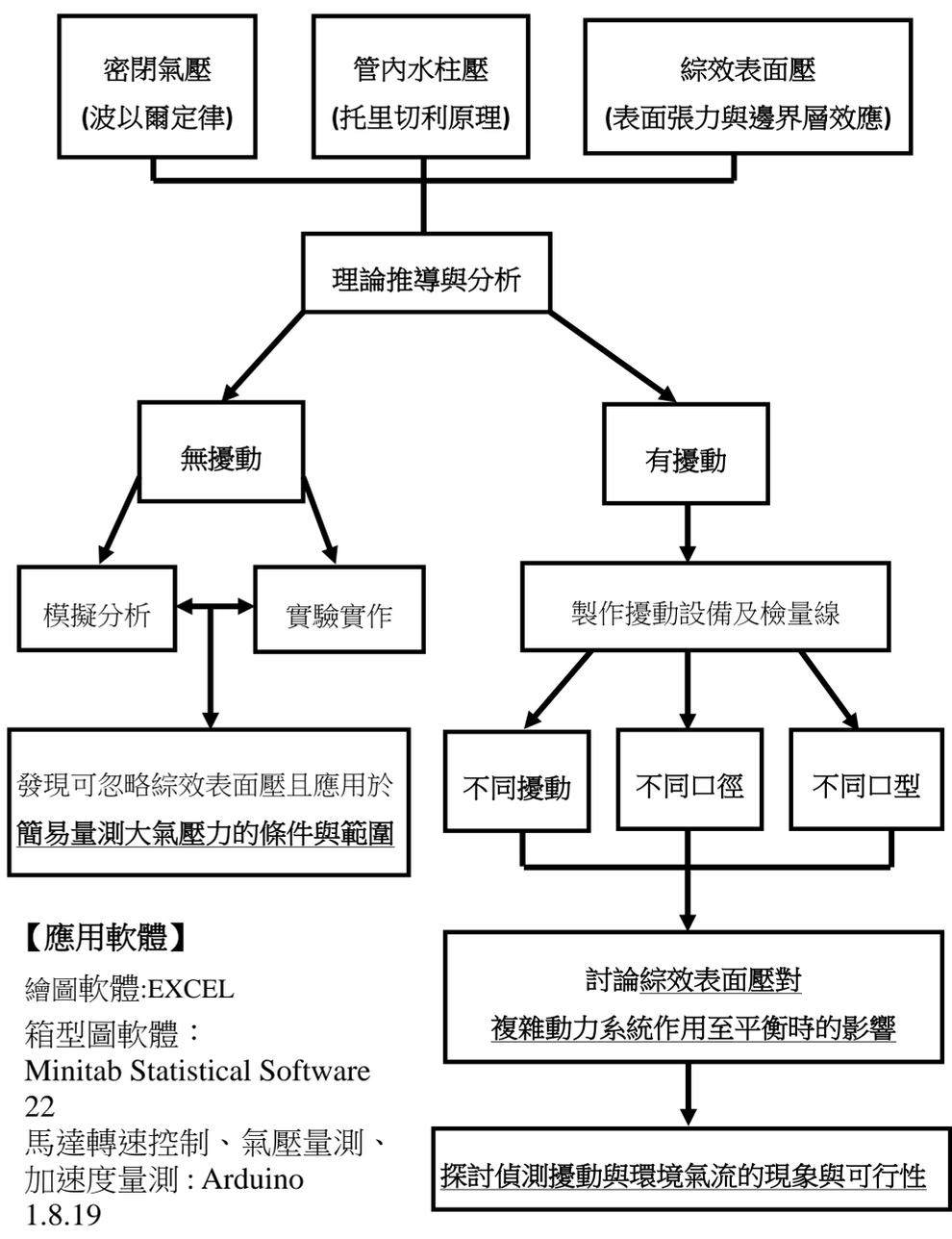


研究目的

- 一. 探討無擾動下，原理推導與比較數值模擬和實測數據間的差異。
- 二. 探討無擾動下簡易量測大氣壓力的可行性。
- 三. 探討有擾動下，「綜效表面壓」於不同震動、孔徑及口型對系統達平衡的影響。
- 四. 原理推導與探討實測環境氣流的可行性及其限制。

研究過程與方法

研究發展流程圖



設備與器材

【無擾動實驗的器材】

一端封閉一端開口的壓克力水柱管共12支  
水管長 $L'$ 分別為107、127、147 cm，各4種內徑 $D_{in}$ 為21、26、31、36 mm。

3D列印注水接頭共12個，4種口徑各3個接於水柱管之開口端。	3D列印之漏孔接頭共3個漏孔孔徑 $d_h$ 分別為4、3、2 mm。	3D列印之漏孔蓋1個	刻度尺貼紙12個。	止漏環15個 12個用於注水接頭，3個用於漏孔接頭。
$D_{in}$	21 mm	26 mm	31 mm	36 mm
$L'$	$w_2=4$ mm		$w_2=2$ mm	
107 cm	$L_1=110.65$ cm	$L_1=110.45$ cm	$L_1=110.45$ cm	$L_1=110.45$ cm
127 cm	$L_2=130.65$ cm	$L_2=130.45$ cm	$L_2=130.45$ cm	$L_2=130.45$ cm
147 cm	$L_3=150.65$ cm	$L_3=150.45$ cm	$L_3=150.45$ cm	$L_3=150.45$ cm

【有擾動實驗的器材】

長40公分內徑3.6公分的壓克力管	平口漏孔( $d_h$ 平)
凸口漏孔( $d_h$ 凸)	陀螺儀
氣壓量儀	水杯和電子秤
震動馬達	鋰電池
電控箱	漏斗

【測量環境氣流實驗的器材】

長45公分內徑2.6公分的壓克力管	曲道型L漏孔	渦輪風扇	電源供應器	風速計

一、研究目的之一及二之無擾動的實驗操作流程圖與觀察記錄

每次均進行裝置長度校正後，實驗步驟操作步驟如圖01。在操作過程發現凸口型的管口較穩定且容易達平衡，故選擇凸口型的器材來實作，並觀察紀錄到達平衡的過程及漏水量(x)。

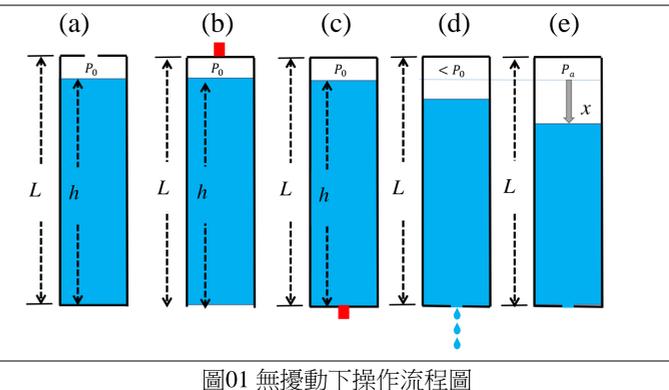


圖01 無擾動下操作流程圖

圖02表示平衡後漏孔處的液面可能出現的三種狀態。

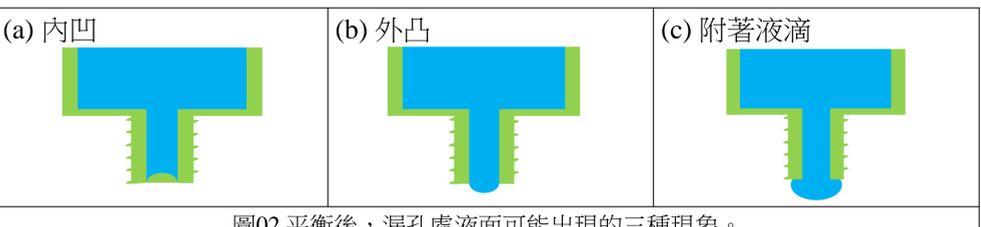


圖02 平衡後，漏孔處液面可能出現的三種現象。

## 二、研究目的之一及二：無擾動的原理推導

### (一) 整合表面張力與托里切利原理

$$F_s = T_s \cos \theta \times 2\pi \left(\frac{d_h}{2}\right) \implies P_s = \frac{F_s}{\pi(d_h/2)^2} = \frac{4T_s \cos \theta}{d_h}$$

$$P_0 \times (L - h) = P_a \times [L - (h - x)] \implies P_a = \frac{L - h}{L - h + x} P_0$$

$$\frac{L - h}{L - h + x} P_0 + (h - x) + P_s = P_0$$

$$\implies P_0 = (h - x + P_s) \times \frac{L - h + x}{x}$$

$$\implies x(h) = \frac{(2h + P_s - L - P_0)}{2} + \frac{\sqrt{(2h + P_s - L - P_0)^2 - 4(h + P_s)(h - L)}}{2}$$

### (二) 探討無擾動下簡易量測大氣壓力的可行性

我們利用實驗一的實驗與理論比較分析，得到了綜效表面壓可以被忽略的條件，為  $L_3$ 、 $d_h=4\text{ mm}$ 、 $h>110\text{ cm}$ 。

忽略  $P_s$  時可得到

$$P_0 = (h - x + P_s) \times \frac{L - h + x}{x} \implies P_{out} = (h - x) \times \frac{L - h + x}{x}$$

已知  $L = 150.45\text{ cm}$ ，控制水柱高  $h$ ，測量到液面下降量  $x$ ，即可得到當地的氣壓  $P_{out}$ 。

## 三、探討有擾動下，「綜效表面壓」在不同震動、漏孔口徑及口型時對系統達平衡的影響

$$P_a + P_h + P_s = P_0$$

當震動發生時，綜效表面壓的平衡破壞，水滴滴下，環境氣體進入氣柱。假設震動停止後，系統平衡再次發生，此時水面下降高度  $h_{w_o}$ ，落下水滴總體積  $V_{w_o}$ ，水密度  $\rho_w$ ，水柱內徑  $D_{in}$ ，則落下水滴總質量可表示為

$$M_{w_o} = \rho_w \times V_{w_o} = \rho_w \times \pi \times \left(\frac{D_{in}}{2}\right)^2 \times h_{w_o}$$

$$\implies h_{w_o} = \frac{4 \times M_{w_o}}{\rho_w \times \pi \times D_{in}^2} \text{ 代入下式,}$$

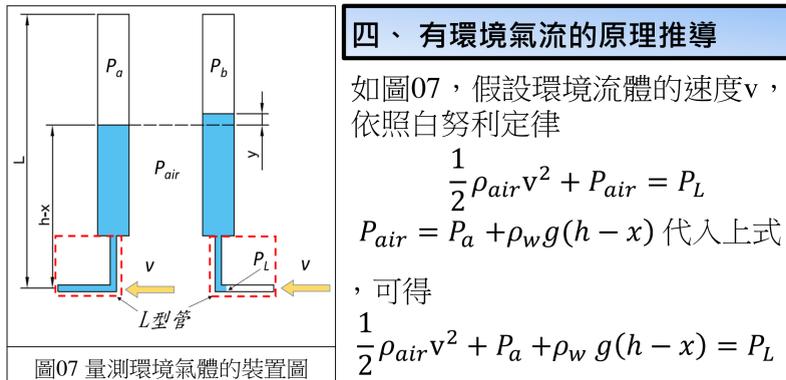
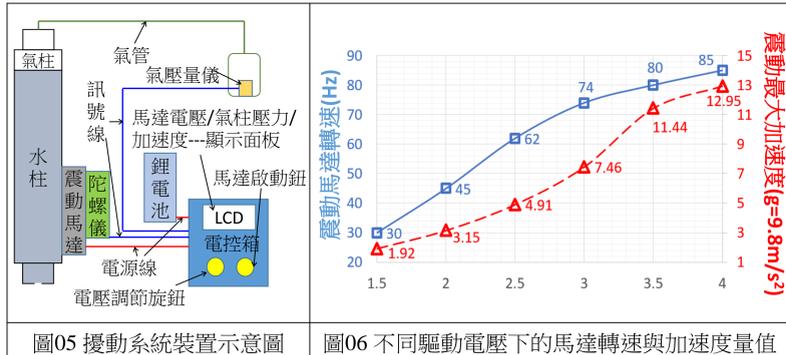
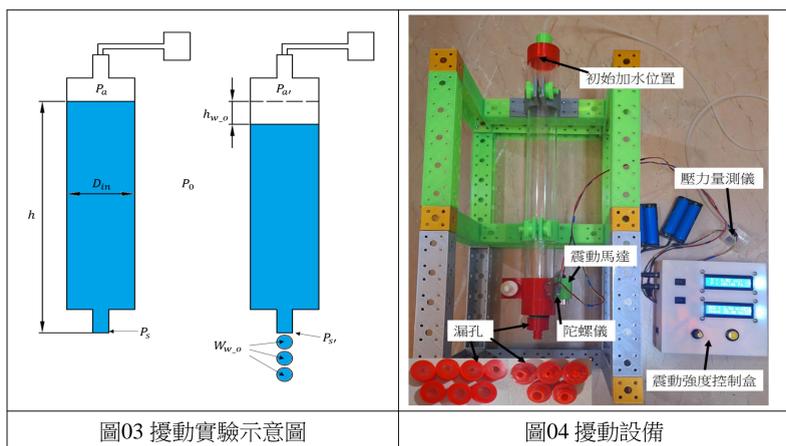
$$P_a + \rho_w \times g \times h + P_s = P_{a'} + \rho_w \times g \times (h - h_{w_o}) + P_{s'}$$

$$\implies M_{w_o} = \frac{\pi \times D_{in}^2 \times (P_{a'} - P_a)}{4 \times g} + \frac{\pi \times D_{in}^2 \times (P_{s'} - P_s)}{4 \times g}$$

若  $P_s$  和  $P_{s'}$  非常接近，可將上式改寫成下式

$$M_{w_o} = \frac{\pi \times D_{in}^2 \times (P_{a'} - P_a)}{4 \times g}$$

圖04與圖05分別為擾動設備及裝置示意圖。



## 四、有環境氣流的原理推導

如圖07，假設環境流體的速度  $v$ ，依照白努利定律

$$\frac{1}{2} \rho_{air} v^2 + P_{air} = P_L$$

$P_{air} = P_a + \rho_w g (h - x)$  代入上式

，可得

$$\frac{1}{2} \rho_{air} v^2 + P_a + \rho_w g (h - x) = P_L$$

管內的水面會升高，假設液位升高的高度是  $y$  (圖03右)，可得

$P_L = P_b + \rho_w g (h - x + y)$ ，再由波以爾定律得

$$P_b [L - (h - x) - y] = P_a [L - (h - x)] \implies P_b = \frac{P_a [L - (h - x)]}{[L - (h - x) - y]}$$

，與前面的式子聯立整理得  $\frac{1}{2} \rho_{air} v^2 = \frac{P_a [L - (h - x)]}{[L - (h - x) - y]} - P_a + \rho_w g y$ ，最後可簡化環境流速  $v$  與液面升高高度  $y$  的關係式如下

$$v = \sqrt{\frac{2yP_a}{\rho_{air}[L - (h - x) - y]} + 2 \frac{\rho_w}{\rho_{air}} g y}$$

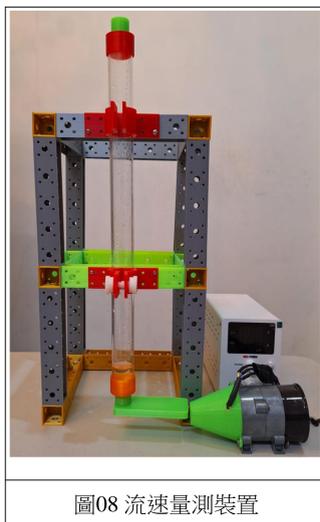


圖08 流速量測裝置

如圖08，利用長45公分內徑2.6公分的壓克力管，搭配3D打印製作一曲道型L漏孔，如左圖，用以增加L漏孔內的容水量。L漏孔內的管徑4mm，曲道內總長度約500mm，可容納約5.652ml(=3.14×0.2×0.2×45)的水，可供內徑2.6cm的壓克力管上升約1.065cm。在L漏孔開口處設置一風速可達29.5m/s(約時速106.2公里)的渦輪風扇，用精準度±0.5(m/s)的風速量儀量測風速。

當渦輪風扇啟動並朝向L管漏孔開口處吹風時，流體的動壓會使得壓克力管的水面上升，量測水面上升的高度，則可推估得到氣體的流速。

## 研究結果與討論

### 一、比較無擾動下數值模擬和實測的結果

(一) 分析表面張力與口徑(圖09)、管長等對水柱下降(圖10)的效應。

#### 1. 表面張力與漏孔口徑

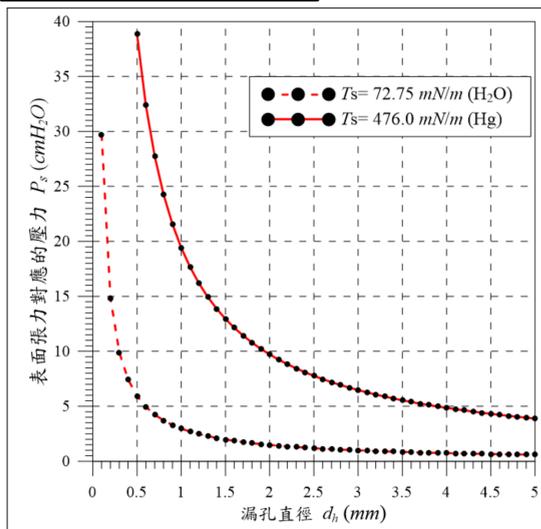


圖09 水與汞表面張力對應的壓力  $P_s$  與漏孔直徑的關係

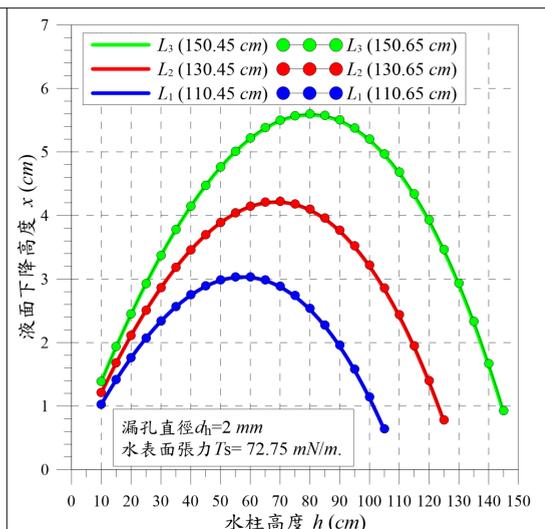


圖10 各種水柱管裝置長度，液面下降高度  $x$  與水柱高  $h$  之關係

#### 2. 水柱管裝置長度 $L$ 對 $x-h$ 的效應

以圖09中之結果，設漏孔口徑  $d_h=2\text{ mm}$ ， $P_0$  為一大氣壓，即1033.6公分水柱，可將  $x-h$  輸出數據如圖10。數據顯示，任一管長  $L$ ，液面下降高度  $x$  與水柱高  $h$  為一個二次曲線。而對同一個水柱高  $h$ ， $L$  越長  $x$  也相對越大，故使用較長的水柱管有利於實驗數據的測量。此外，水管口徑最小  $D_{in}=21\text{ mm}$  所對應的  $L$  比其它口徑的  $L$  長了2mm，這些微的差距對圖中結果也沒有明顯的影響。

#### 3. 漏孔口徑 $d_h$ 對 $x-h$ 的效應

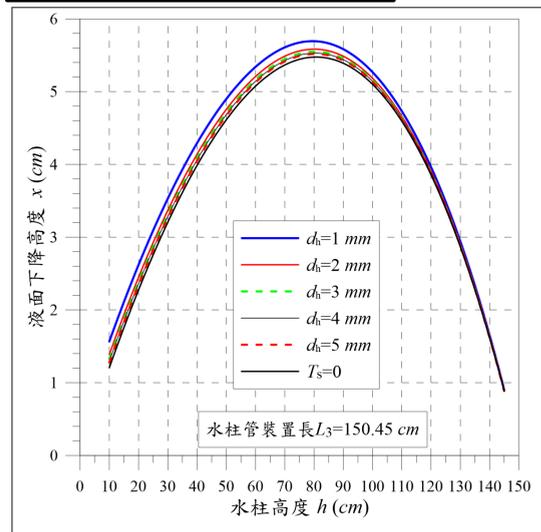


圖11 水柱管裝置長度  $L_3$  搭配各種漏孔口徑下，液面下降高度  $x$  與水柱高  $h$  之關係

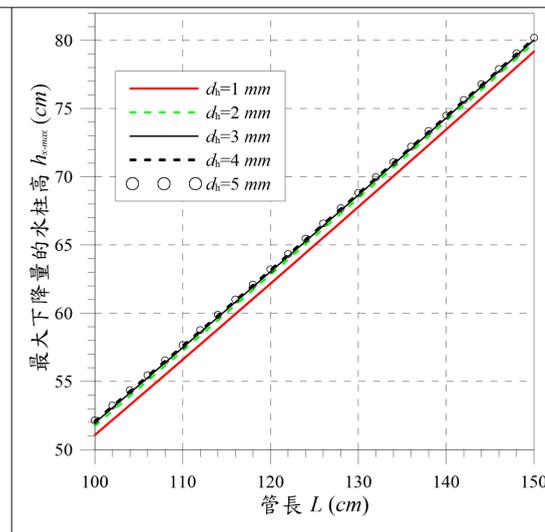


圖12 各種漏孔口徑，液面最大下降量所對應的水柱高  $h_{x-max}$  與水柱管裝置長度  $L$  之關係

#### 4. 液面下降高度之最大值所對應的水柱高

由圖10與圖11的結果得知，水柱管裝置的每一種長度都存在液面下降高度之最大值，其對應的水柱高表示為  $h_{x-max}$ 。圖12中的結果可以發現，不同漏孔口徑  $d_h$  其  $h_{x-max}$  對  $L$  都是線性變化。這個線性關係也可以由  $x(h)$  式中令  $x$  對  $h$  微分為零， $h$  之解近似為  $L$  的一次函數得到。另一方面， $d_h$  由小慢慢增大，圖中線段也漸漸貼近，這表示表面張力貢獻度趨弱。

## (二)比較量測數據與理論值

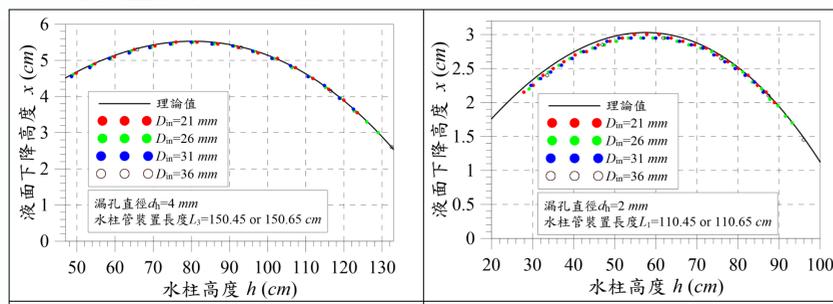


圖13 ( $L_3, d_h=4\text{ mm}$ )各 $D_m$ 的實驗與理論值比較

如圖13與圖14示，比較所有數據的橫軸量值較大與較小的區域，可發現較高的水柱高度其理論與實驗數據之間的差距較小。在裝置長度 $L_3$ 且最大漏孔口徑 $d_h=4\text{ mm}$ 中 $h > 110\text{ cm}$ 的範圍內(圖13)，理論與實驗數據之間的差距小於1%。這是由於表面張力 $T_s$ 與漏孔口徑 $d_h$ 成反比， $d_h$ 增加使得 $T_s$ 大幅減低。而水柱高度 $h$ 增加，也會令 $P_h$ 值也增加，使得表面張力形成之壓力 $P_s$ 的貢獻度降低。

## 二、探討無擾動下簡易量測大氣壓力的可行性

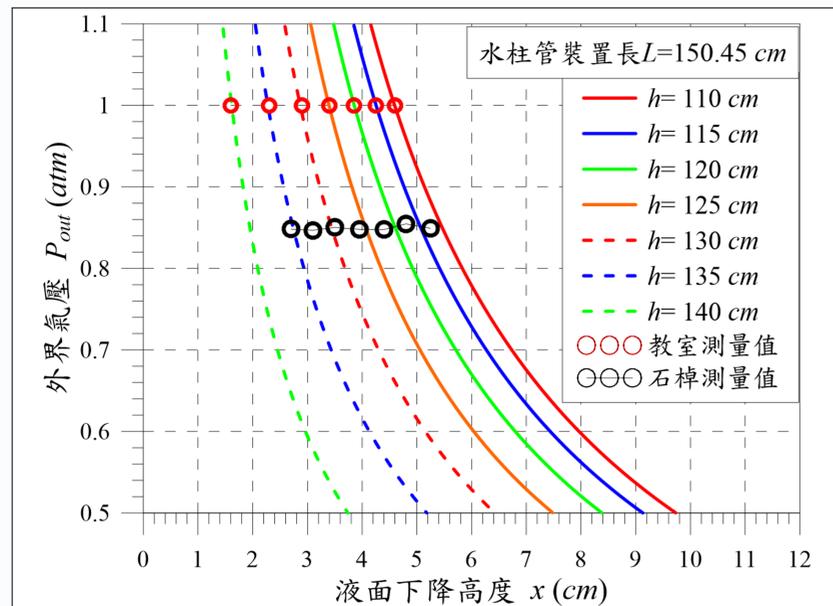


圖15  $L=150.45\text{ cm}$ ，不同水柱高，液面下降高度與外界氣壓的關係

我們到海拔較高的阿里山石棹實測當地的氣壓，當地的氣壓測量值平均為 $0.819\text{ atm}$ (圖15中黑圈)，與手機app測量為 $0.844\text{ atm}$ 相差小於3%。

## 三、探討有擾動下，「綜效表面壓」於不同震動、孔徑及口型對系統達平衡的影響

### (一)以「相同漏孔口徑口型，改變震度」的實驗

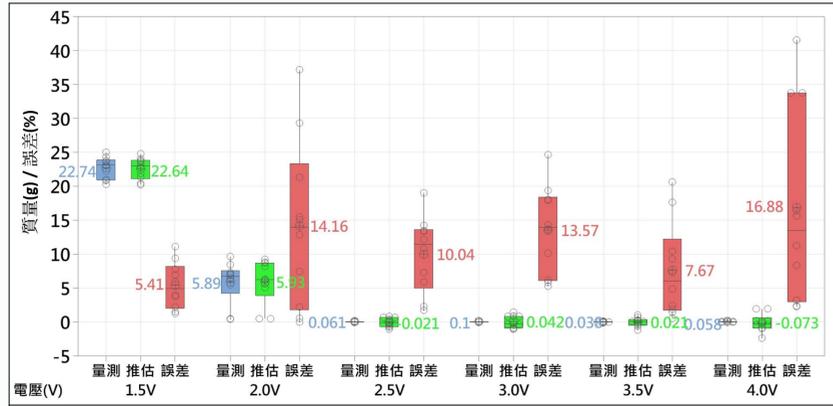


圖16 固定漏孔形狀 $d_h=10\text{ mm}$ ，改變電壓1.5~4.0V，量測漏水質量和推估漏水質量(由式15推估)箱型圖。其中藍色代表量測漏水質量，綠色代表推估漏水質量，紅色代表量測與推估的誤差

圖16中顯示的結果與加大電壓(擾動震度)會漏水更多的預測相違背。經討論後決定加裝陀螺儀，收集三個維度的加速度隨時間變化曲線。測量後電壓1.5V時出現每秒有六個波型的週期行為(圖17)。

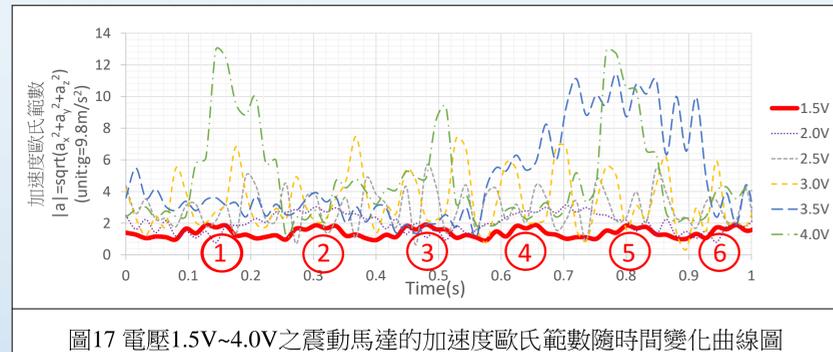


圖17 電壓1.5V~4.0V之震動馬達的加速度歐氏範數隨時間變化曲線圖

加大電壓時，雖總加速度值有同步加大，但即使一樣出現多週期的週期行為，但卻出現入侵的氣泡較小且水膜能迅速封閉管口達到壓力平衡的現象。推估6Hz的震動頻率是容易破壞開口表面液體水膜的關鍵條件；本研究使用之馬達電壓值，僅在1.5V的震頻(30Hz)為瓶口量到之加速度變化頻率6Hz的整數倍，其餘皆非(圖06)。所以可以推論：當馬達電壓為1.5V時，出現了「共振效應」。

查詢文獻得知，靜置於一震動平板上的水珠，當水珠半徑11.8mm時，其自然頻率也是6Hz。證實我們推測本系統開口處形成表面液壓的綜效作用力中有簡諧力的想法是合理的。

## (二)固定1.5V電壓的擾動，測量改變不同漏孔口徑及口型的漏水量

固定電壓1.5V，平口型以10mm落水量最多，而凸口型幾乎不漏水(圖18)。

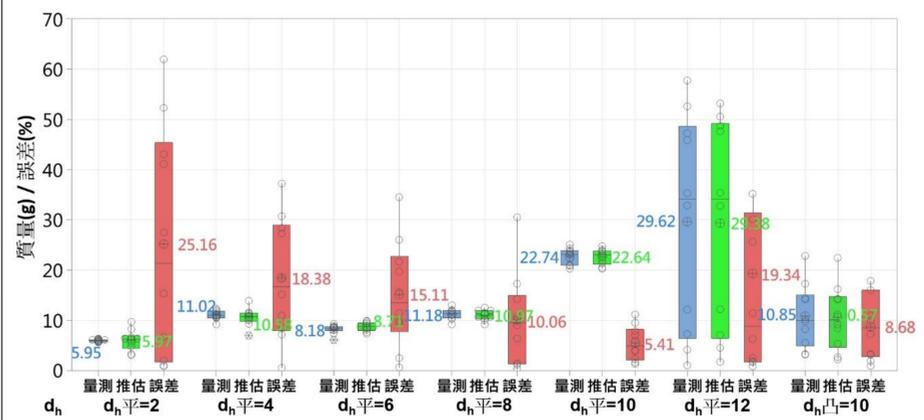


圖18 固定電壓1.5V，改變漏孔口徑與形狀，量測漏水質量和推估漏水質量箱型圖其中藍色代表量測漏水質量，綠色代表推估漏水質量，紅色代表量測與推估的誤差

## 四、分析實測環境氣流的可行性及其限制

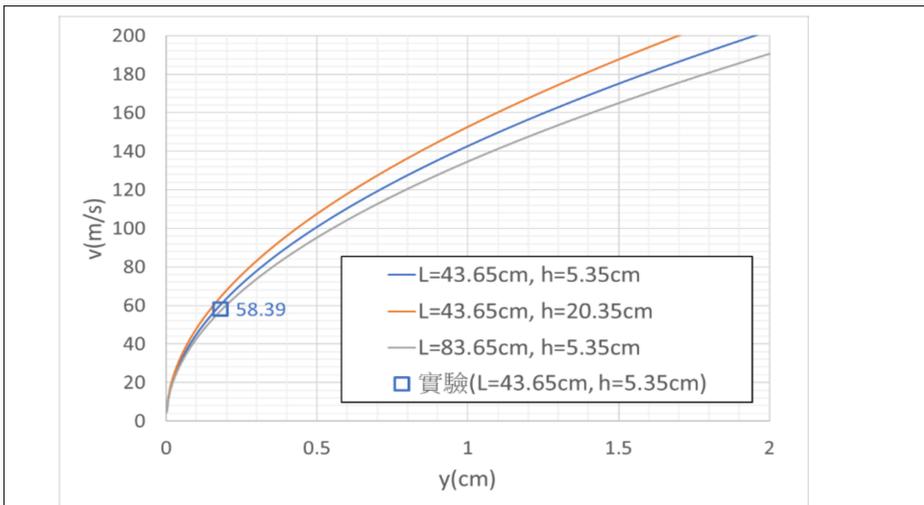


圖19 針對管長 $L=43.65, 83.65\text{ cm}$ 和初始水柱高 $h=5.34, 20.35\text{ cm}$ 的氣體流速 $v$ 對水面上升高度 $y$ 的模擬曲線圖

渦輪風扇(圖08)所能提供的最大風速是 $29.5\text{ (m/s)}$ ，因曲道型L型管有遮蔽的效應，導致出風口處的面積變小，流速增加。經推算，遮蔽後風速 $v = 29.5 \times 490.9 \div 247.6 = 58.39\text{ (m/s)}$ 。經實驗量測(圖19)，水面上升高度 $y=1.8\text{ mm}$ 回推計算所得風速 $60.47\text{ (m/s)}$ ，誤差為3.56%。

## 結 論

- 一、在無擾動的實驗中，發現理論與實驗十分吻合，其結果均顯示水柱高 $h$ 與水位下降高度 $x$ 的關係為一個二次曲線，且管長 $L$ 越長使得 $x$ 的變化量越大，越利於測量大氣壓力，而水柱管管徑的變因不影響其測量結果。
- 二、當有較高的水柱與在較大漏孔口徑的條件下，綜效表面壓 $P_s$ 貢獻度下降至可被忽略，此狀態的實驗測量數據與理論值相差低於1%。本實驗裝置利用水就可以被用來測量各種環境的氣壓。
- 三、比較同口徑的平口和凸口兩種口型的差異，凸口口型因為有多層的內聚力及管內水分子和管壁間有更多附著力，因壓差將水往外擠出時入侵的氣泡彷彿進入一狹長的通道，受到管壁的反作用力而無法迅速伸展擴大，所以較不易漏水，且能迅速達到壓力平衡。平口型的入侵氣泡則是在上升過程因壓力減少立即伸展體積(波以爾定律)，然後再因浮力原理加速上升，進一步因減壓而體積變得更大，能擠出更多的水且管口的壓力不易達到平衡，導致漏水量較大且不穩定。
- 四、研究發現特定的擾動震度與震頻，會造成綜效表面壓的簡諧力作用過程之「共振放大效應」，未來可應用於震動的偵測與辨識！
- 五、本裝置應用於量測環境氣流流速的可行性評估及其限制，發現在相同的氣體流速下，當水柱高 $h$ 越小，上升的水面高度 $y$ 越大；當管長 $L$ 越長，上升的水面高度 $y$ 越大。因此便可藉由調整水柱高 $h$ 和管長 $L$ 來量測合適的流體速度。

