

中華民國第 64 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 物理科

030110

磁鐵物理擺阻尼振盪之探究與應用

學校名稱： 高雄市立正興國民中學

作者： 國二 高珮瑤 國二 王家盈 國二 施昀萱	指導老師： 黃馨萱 蔡仲凱
---	-----------------------------

關鍵詞： 電磁感應、渦電流、阻尼

摘要

當以磁鐵做為擺錘的物理擺，並讓它在金屬面附近作週期振盪，經由實驗量測與理論擬合分析發現，本裝置會因電磁感應而在金屬面上產生渦電流，並對擺產生阻尼作用，其渦電流阻尼力是空氣阻尼力的 18.4 倍，進而使物理擺較快停止。進一步研究，發現渦電流阻尼作用力大小亦與金屬片材質、厚度、擺與金屬距離、磁鐵強度等因子相關，再者，因金屬的集膚效應，渦電流大小在金屬內的分布會隨著深度而呈現指數衰減；且此大小會受到金屬層間隙或是金屬面的不完整而進一步劣化。最後針對「減震」研究，經由磁鐵物理擺產生的總阻尼力以消除物體的振動能量增益達 112%，較同質量的物理擺增益亦達 25%，可實現較輕質量塊的物理擺式阻尼器在建築物防震領域上的有效應用。

壹、研究動機

生活中無意間看到一位網紅發布的影片，影片中他用以細線懸掛的磁鐵自高處擺動下來，並欲撞擊一立於桌面的銅板，奇怪的是磁鐵剛好在銅塊前定住，兩者沒有接觸，此現象引發 5 百萬人圍觀，還被搬運到了國內的影片網站上；經學校老師告知磁鐵會在銅塊前定住是因銅塊會因磁鐵靠近而產生一渦電流，並感應出一與磁鐵相反極性的磁場排斥力，使磁鐵定住。另外，有次家裡被告知有高額電費使用，因此去查看電錶後發現會有一金屬片在旋轉；經學校老師告知此感應式電錶是利用渦電流測量用電量的。當用電的時候，電流通過電錶裡的線圈產生磁場，磁場使電錶裡的一個鋁盤產生渦電流並轉動，帶動電錶指數錶盤變化。再者，在科學漫畫和書籍中看到關於單擺的介紹，知道單擺受到空氣阻力影響時，其擺動幅度會愈來愈小。結合上述的學習經驗與生活發現，我們以磁鐵做為擺錘，並讓它在金屬面附近作擺動，此時在擺動過程中磁鐵與金屬片的相對運動，是否會像空氣一樣地產生一阻力，並影響物理擺的運動，是我們感到好奇且吸引我們做實驗探究的動機所在。

貳、研究目的

- 一、探討有無金屬片對磁鐵物理擺之影響
- 二、探討不同材質金屬片對磁鐵物理擺之影響
- 三、探討不同金屬片厚度對磁鐵物理擺之影響
- 四、探討不同擺與金屬片間距對磁鐵物理擺之影響
- 五、探討不同強度之磁鐵對磁鐵物理擺之影響

- 六、探討有無梳形圖案之金屬片對磁鐵物理擺之影響
- 七、探討不同張數組合之金屬片對磁鐵物理擺之影響
- 八、模擬建築物有無磁鐵物理擺裝置之振盪

參、研究原理

一、物理擺的簡諧振盪

當單擺的擺繩質量不可忽略時，這種情形稱為物理擺或複擺，嚴格來說，所有真實的擺都屬於物理擺，而單擺其實只是一種理想的狀態而已。在不考慮空氣阻力作用下，物理擺擺動行為是簡諧振盪運動，如果物理擺是做小角度的擺動(擺角 θ 小於 5°)，由於 $\sin\theta \approx \theta$ ，其振盪週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + Md^2}{Mgd}} \quad (1)$$

其中， M 是物理擺的總質量， d 是轉軸位置至物理擺質心位置的距離， I 是物理擺通過轉軸轉動的轉動慣量， I_{CM} 是物理擺轉軸為質心位置時的轉動慣量，經由平行軸定理可以獲得 $I = I_{CM} + Md^2$ 。

在本實驗中，我們所使用的物理擺包含兩個物體，分別為長條狀木尺以及圓盤狀磁鐵，並將磁鐵置於木尺中心位置，亦即使木尺質心位置重合於磁鐵質心位置。當考慮長條狀木尺與圓盤狀磁鐵的轉軸皆為質心位置時，木尺轉動慣量 $I_{CM,1}$ 與磁鐵轉動慣量 $I_{CM,2}$ 分別為

$$I_{CM,1} = \frac{1}{12} M_1 b^2 \quad (2)$$

$$I_{CM,2} = \frac{1}{2} M_2 r^2 \quad (3)$$

其中， M_1 是木尺質量($M_1 = 47.1g$)， b 是木尺寬度($b = 2.90\text{ cm}$)， M_2 是磁鐵質量($M_2 = 51.06g$)， r 是磁鐵半徑寬度($r = 10.00\text{ mm}$)。

經由式(2-3)計算，可以獲得木尺轉動慣量 $I_{CM,1} = 3.301 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，以及磁鐵轉動慣量 $I_{CM,2} = 2.553 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。其次，經由平行軸定理計算(其中 $d = 25\text{ cm}$)，可以獲得 $I = (I_{CM,1} + I_{CM,2}) + Md^2 = 6.141 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。最後，透過式(1)計算，可以獲得物理擺無空氣阻尼作用下的振盪週期 $T = 1.004\text{ sec}$ 。

二、物理擺的阻尼振盪

如果物理擺除了張力與重力兩作用力之合力外，同時還受到一個和速率成正比的阻尼

作用力 $F_{damp} = \gamma v$ ，則物理擺擺動行為會由簡諧振盪模式轉為阻尼振盪模式，其運動過程中位移 x 對應時間 t 關係為

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \delta) \quad (4)$$

其中 x_0 為初始振幅， β 為衰減係數 ($\beta = \frac{\gamma}{2M}$)， ω_d 為阻尼振盪頻率 ($\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，

其中 T_d 是阻尼振盪週期， ω_0 是簡諧振盪頻率 ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ，其中 T_0 是簡諧振盪週期))， δ 為起始相位角， δ 大小可以由初始條件決定。

在本實驗中，我們所設計的物理擺受到的阻尼作用包含兩個作用力，分別為空氣阻尼力 $F_{damp,1}$ 以及渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 。一般而言，空氣阻尼作用力 $F_{damp,1}$ 大小與空氣流動速度成正比，亦即 $F_{damp,1} = \gamma_1 v$ ；相較之下，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 的形成較為複雜，其形成過程以原理三作說明。

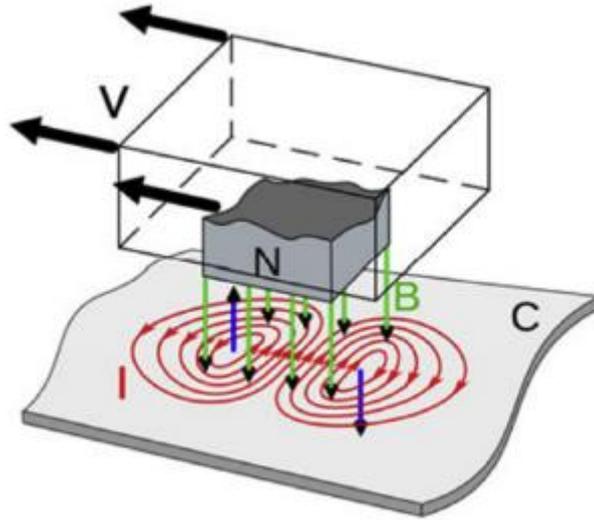
三、電磁感應與渦電流的形成

實驗中利用兩塊圓形磁鐵吸附於長條木尺作為物理擺，並將其靠近金屬片進行擺動；藉由磁鐵與金屬片的相對運動，來產生阻止物理擺運動所需的阻尼。圖一為磁鐵物理擺與金屬片之間的相對運動以及感應渦電流形成之示意圖；從金屬片中渦電流的橫切面圖可以看出磁鐵的磁力線深入金屬板中，當物理擺運動時，磁鐵跟著物理擺一起移動，使得金屬面上產生局部磁通量變化。當磁鐵相對金屬片以向左方向進行運動時，對金屬片左局部區塊而言，會產生一逆時針方向之感應渦電流，並感應出一個與磁鐵相反極性的感應磁場，以反抗局部磁通量的變化；因此感應磁場方向相反於磁鐵磁場，故會排斥磁鐵向左靠近，亦即產生一向右方向的阻尼作用力。另一方面，對金屬片右局部區塊而言，會產生一順時針方向之感應渦電流，並感應出一個與磁鐵相同極性的磁場，以反抗局部磁通量的變化；因此感應磁場方向和磁鐵磁場方向相同，故會吸引磁鐵向右靠近，亦即亦會產生一向右方向的阻尼作用力。

渦電流又叫傅科電流，是法國物理學家萊昂·傅科 (Jean Bernard Léon Foucault) 在 1851 年發現的。渦電流是移動的磁場和導體相交產生的電磁感應的結果，因為導體中產生了圓形的閉合迴路，所以叫做渦電流。渦電流的圓圈和磁場方向垂直。磁場變化越快，渦電流就越強。根據法拉第感應定律，為了彌補磁通量的變化，該局部會產生感應電動勢 ε 及渦電流 i ，以反抗磁鐵的運動。其感應電動勢 ε 可表示為

$$\varepsilon = \frac{i}{R} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{A})}{dt} \quad (5)$$

其中， Φ_B 為磁通量， \vec{B} 為磁鐵在金屬片處建立的磁場強度， \vec{A} 為金屬片有磁場作用的區塊面積。由於金屬片具有電阻 R ，此感應渦電流 i 之阻尼作用力會將物理擺的力學能轉移至金屬片，並以熱能形式 ($E_{dissipate} = i^2 R t$) 耗損至環境中。



圖一、磁鐵物理擺與金屬片之間的相對運動以及感應渦電流形成之示意圖

再者，由於磁通量變化 $\frac{d\Phi_B}{dt}$ 和物理擺的(線)速率 v (或角速率 ω) 成正比，因此渦電流 i 與磁通量變化成正比；亦即：渦電流對物理擺所引起的阻尼作用力與物理擺速率 v 成正比 ($F_{damp,2} = \gamma_2 v$)。其中，阻尼係數 γ_2 的大小，可經由本研究諸多實驗因子來調整(例如：利用磁鐵與金屬片的相對距離來調整，磁鐵越靠近金屬面，阻尼係數越大)。

結合上述原理，在電磁感應作用下物理擺的阻尼振盪行為，其位移 x 對應時間 t 關係，可以下列關係式描述：

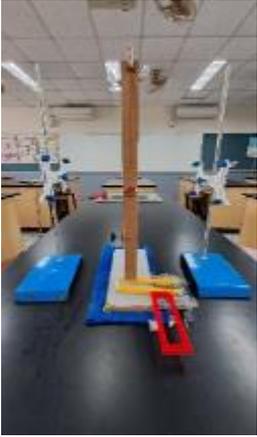
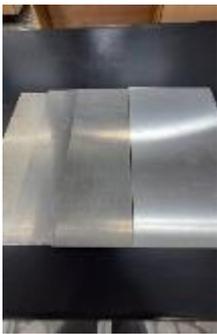
$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \delta) = x_0 e^{-\left(\frac{\gamma}{2M}\right)t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_d} t + \delta\right) \quad (6)$$

其中， γ 為阻尼係數 ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ， γ_1 與 γ_2 分別為空氣阻尼係數以及渦電流阻尼係數)， M 為物理擺總質量， T_d 為阻尼振盪週期。

四、實驗數據分析

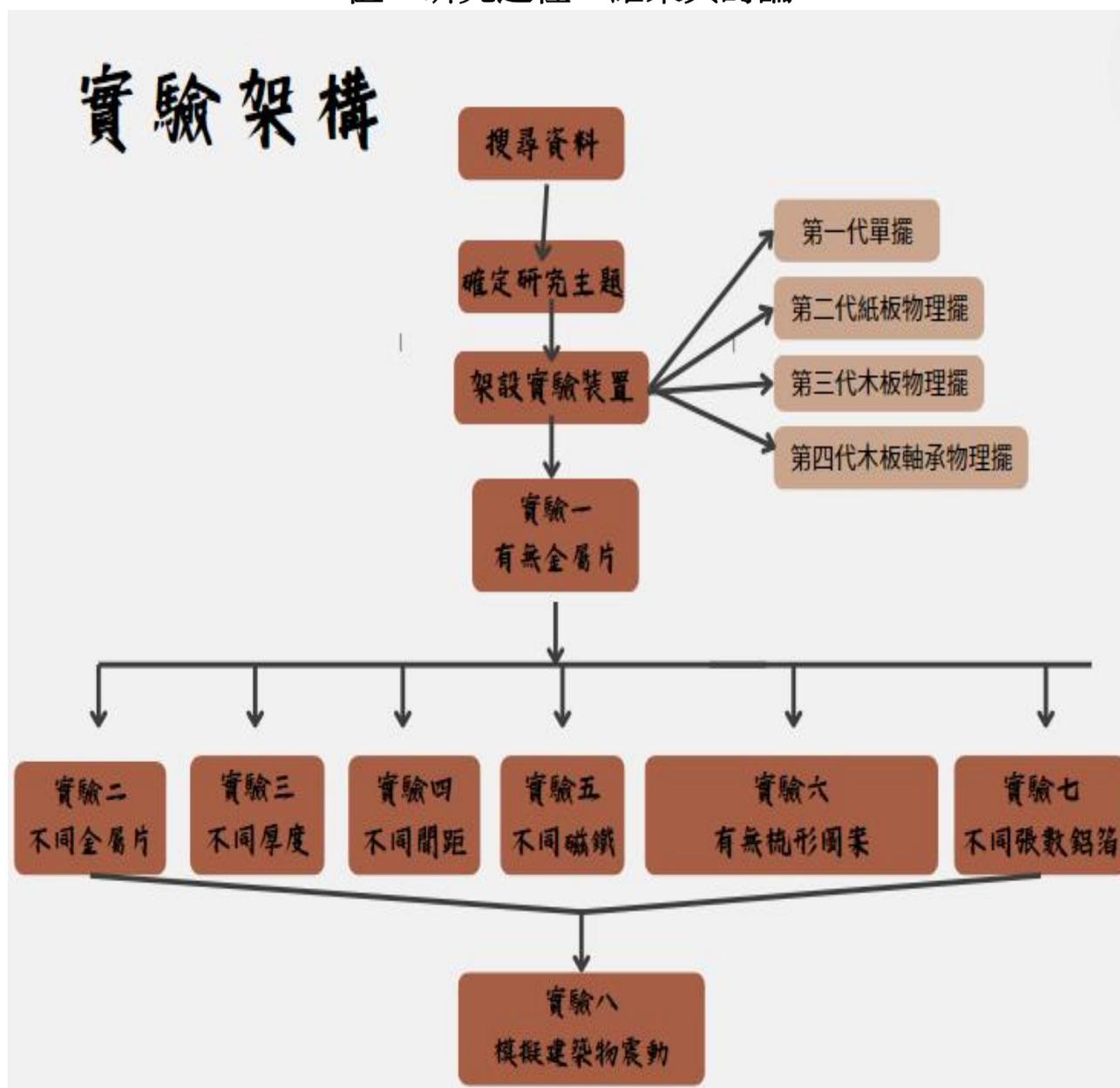
本實驗的數據分析分為二階段：(1) 使用最小平方差法，進行實驗數據與理論模型(式 6)的擬合(fitting)工作；經由高擬合程度 (R_{sq}) 的關係分析，可以獲得初始振幅、阻尼係數、阻尼振盪頻率、阻尼振盪週期、起始相位角等擬合參數。(2) 經由渦電流對物理擺所引起的(最大)阻尼作用力 $F_{damp,2}$ 與(最大)物理擺速率 v ($v = \omega_d \cdot d$) 關係 ($F_{damp,2} = \gamma_2 v$)，可以進一步獲得渦電流阻尼作用力大小。

肆、研究設備與器材

		
<p>物理擺主要裝置</p>	<p>第一代單擺</p>	<p>第二代磁鐵物理擺</p>
		
<p>第三代磁鐵物理擺</p>	<p>第四代磁鐵物理擺</p>	<p>金屬片(銅、鋁、鐵)</p>
		
<p>玻璃與木板夾具</p>	<p>游標尺</p>	<p>鐵片(不同厚度)</p>

		
<p>鋁箔</p>	<p>黃油</p>	<p>平板</p>
		
<p>強力磁鐵</p>	<p>簡單結構建築物模型 I</p>	<p>簡單結構建築物模型 II</p>
		
<p>梳形圖案鋁箔</p>	<p>Tracker 追蹤軌跡軟體</p>	<p>Origin 數據分析軟體</p>

伍、研究過程、結果與討論



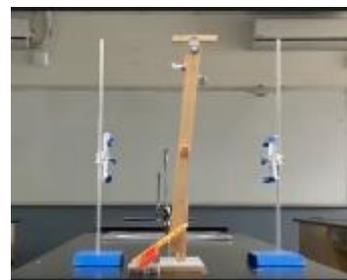
我們以磁鐵做為擺錘，並讓它在金屬面附近作擺動，探究在擺動過程中磁鐵與金屬片的相對運動，是否會像空氣一樣地產生一阻力，並影響單擺的運動。實驗發現單擺的擺動過程中，當其擺幅變小時會同時發生扭轉的情形，於是改用紙板物理擺，但其擺動時紙板仍有前後晃動之情況，故更改成木板物理擺。為了減少轉軸間摩擦力，再加上滾珠軸承，做成在本實驗中所使用的物理擺；它包含兩個物體，分別為長條狀木尺以及圓盤狀磁鐵，並將磁鐵置於木尺中心位置，亦即使木尺質心位置重合於磁鐵質心位置。此物理擺受到張力與重力兩作用力之合力外，同時還受到一個和速率成正比的空氣阻尼作用力 $F_{damp,1}(= \gamma_1 v)$ ，當我們在物理擺側面放置金屬片時，於物理擺擺動過程中，將因電磁感應再多受到一個渦電流阻尼力 $F_{damp,2}(= \gamma_2 v)$ ，使得擺動情況改變，於是進行探討有無金屬片對磁鐵物理擺之影響。

實驗一、探討有無金屬片對磁鐵物理擺之影響

在實驗中，我們分別進行多次磁鐵物理擺之振盪測量，與在磁鐵物理擺距離 6.5 mm 處放置一片鋼鐵金屬片測量其振盪，擺角皆設定為 5 度，磁鐵強度為 4500 高斯。

實驗步驟：

1. 測量擺角為 5 度，將磁鐵物理擺放在自製的推桿器上
2. 利用平板將振盪過程錄影，直到磁鐵物理擺完全停止
3. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺振盪軌跡
4. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
5. 將鐵片固定在玻璃片裡，並將玻璃片放置兩支架上，重複步驟 1、2、3
6. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配



實驗結果與討論：

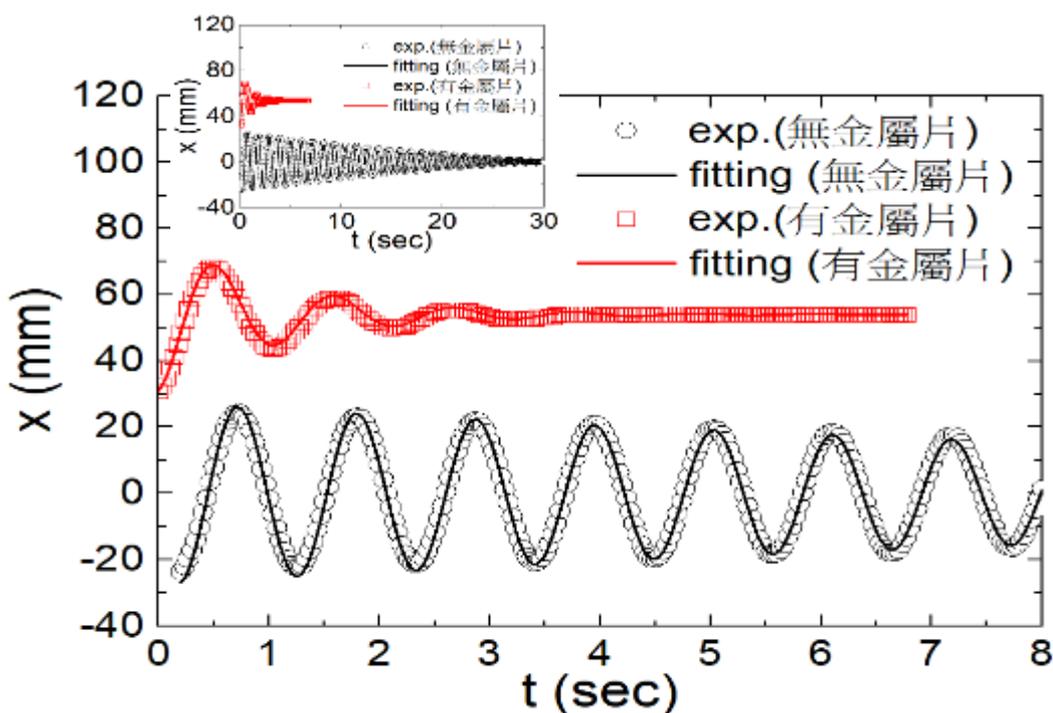
在實驗一，我們比較在有無使用金屬片(鋼鐵，1.2 mm)情況下，進行磁鐵物理擺之阻尼振盪實驗，並以平板錄製振盪軌跡的實驗影片。其次，透過影像分析軟體(Tracker)的使用，獲得磁鐵物理擺之水平位移對應時間關係的資料。最後，使用數據分析軟體(Origin)，獲得磁鐵物理擺阻尼振盪運動的運動學參數以及力學參數。

圖二為有或無使用金屬片(鋼鐵，1.2 mm)之磁鐵物理擺的水平位移-時間關係圖，由圖二可以發現：前者(無使用金屬片)下的磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的周期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而小幅度地減少，符合阻尼作用下的運動模式。相較之下，後者(使用金屬片)的磁鐵物理擺運動和前者相似，但其振盪幅度與振盪次數隨時間增加而大幅度地減少。

首先，我們比較無使用金屬片之磁鐵物理擺的實驗週期與理論週期的差異，可以發現實驗週期值略大於理論週期值($T_{\text{實驗}} = 1.07 \text{ sec}$ vs. $T_{\text{理論}} = 1.004 \text{ sec}$)，且振幅隨時間遞減；此結果說明有空氣阻尼作用力的存在，亦即無使用金屬片之磁鐵物理擺須以阻尼振盪運動來描述。

為分析上述兩者之間力學運動結果的差異，我們進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，由表 1 與表 2 可發現：實驗數據與理論之間成功地達到高度擬合關係($R_{sq} > 98\%$)。再者，透過理論模型進一步所獲得的對應運動學與力

學參數，可以發現：兩者的阻尼係數分別為 8.59 g/s (無金屬片) vs. 168.35 g/s (有金屬片)；兩者的(最大)阻尼作用力分別為 12.52 mN (無金屬片) vs. 243.17 mN (有金屬片)。在無使用金屬片時，阻尼作用力來自於空氣阻力；相較之下，在有使用金屬片時，阻尼作用力大小是空氣阻力以及電磁感應引致渦電流所貢獻的阻力之和。因此，藉由兩種情況下的磁鐵物理擺實驗，我們可以獲得電磁感應引致渦電流所貢獻的阻尼作用力為 230.65 mN；此大小約為空氣阻尼作用力的 18.4 倍。



圖二 有無金屬片之磁鐵物理擺的水平位移-時間(x-t)關係圖

樣本	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
無金屬片	27.47	0.0452	8.59	1.07	8.40	98.20
有金屬片	23.32	0.8855	168.35	1.09	3.29	98.05

表 1 有無金屬片之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
無金屬片	8.59	1.457	12.52	0	12.52
有金屬片	168.35	1.444	243.17	230.65	12.52

表 2 有無金屬片之磁鐵物理擺的力學分析參數

實驗二、不同材質金屬片對磁鐵物理擺之影響

由實驗一得知，使用金屬片時，阻尼作用力大小是空氣阻力以及電磁感應引致渦電流所貢獻的阻力之和，會對磁鐵物理擺的振盪造成影響，於是我們想進一步探討不同材質的金屬片對磁鐵物理擺的振盪是否造成大小不同的影響。在實驗二中，我們固定磁鐵物理擺與金屬片距離為 6.5 mm，擺角為 5 度，磁鐵強度為 4500 高斯，改變金屬片材質。

實驗步驟：

1. 將銅(0.3 mm)、鋁(0.4 mm)及鋼鐵(1.2 mm)片依次固定在玻璃片裡，並將玻璃片放置兩支架上
2. 調整金屬片與磁鐵物理擺的距離為 6.5 mm
3. 測量擺角為 5 度，並將磁鐵物理擺放在自製的推桿器上
4. 利用平板將振盪過程紀錄，直到磁鐵物理擺完全停止
5. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺振盪軌跡
6. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
7. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配



實驗結果與討論：

在實驗二，我們分別使用銅(0.3 mm)、鋁(0.4 mm)、鋼鐵(1.2 mm)等三種不同材質金屬作為電磁阻尼作用之金屬片，進行磁鐵物理擺之阻尼振盪實驗，並以手機錄製振盪軌跡的實驗影片。其次，透過影像分析軟體(Tracker)的使用，獲得磁鐵物理擺之水平位移對應時間關係的資料。最後，使用數據分析軟體(Origin)，獲得磁鐵物理擺阻尼振盪運動的力學參數。

圖三為不同材質金屬片之磁鐵物理擺的水平位移-時間關係圖，由圖三可以發現：所有材質金屬片之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的周期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

為分析上述兩者之間力學運動結果的差異，我們進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，由圖 2 可發現：實驗數據與理論之間成功地達到高度擬合關係。透過理論模型進一步所獲得的對應力學參數，如表 3 與表 4 可以發現：三者的阻尼係數分別為 46.47 (g/s) (銅) vs. 57.13 (g/s) (鋁) vs. 168.35 (g/s) (鋼鐵)；三者的阻尼

作用力分別為 67.34 mN (銅) vs. 83.20 mN (鋁) vs. 243.17 mN (鋼鐵)。由於渦電流的形成與金屬的電導率以及磁導率等材料參數有關；具有較大的電導率 σ 的金屬片會產生較大的渦電流。其中，三種金屬片導電率分別為 59.6×10^6 S/m(銅)、 37.8×10^6 S/m (鋁)、 10.0×10^6 S/m (鋼鐵)。當使用銅金屬片時，由於自身具有最大電導率本質，所以產生最大的感應渦電流，進而提供較大阻尼作用力影響磁鐵物理擺；相較之下，使用鋼鐵金屬片時，由於自身具有較小電導率本質，所以產生較小的渦電流阻尼作用力；但並不符合實驗結果。由三者阻尼作用力的大小趨勢(銅 < 鋁 < 鋼)不同於電導率的大小趨勢(銅 > 鋁 > 鋼)，但相同於金屬片厚度的大小趨勢(銅 < 鋁 < 鋼)可以知道：除考慮金屬片材質外，金屬片厚度因子在渦電流阻尼力貢獻上亦扮演一重要角色。

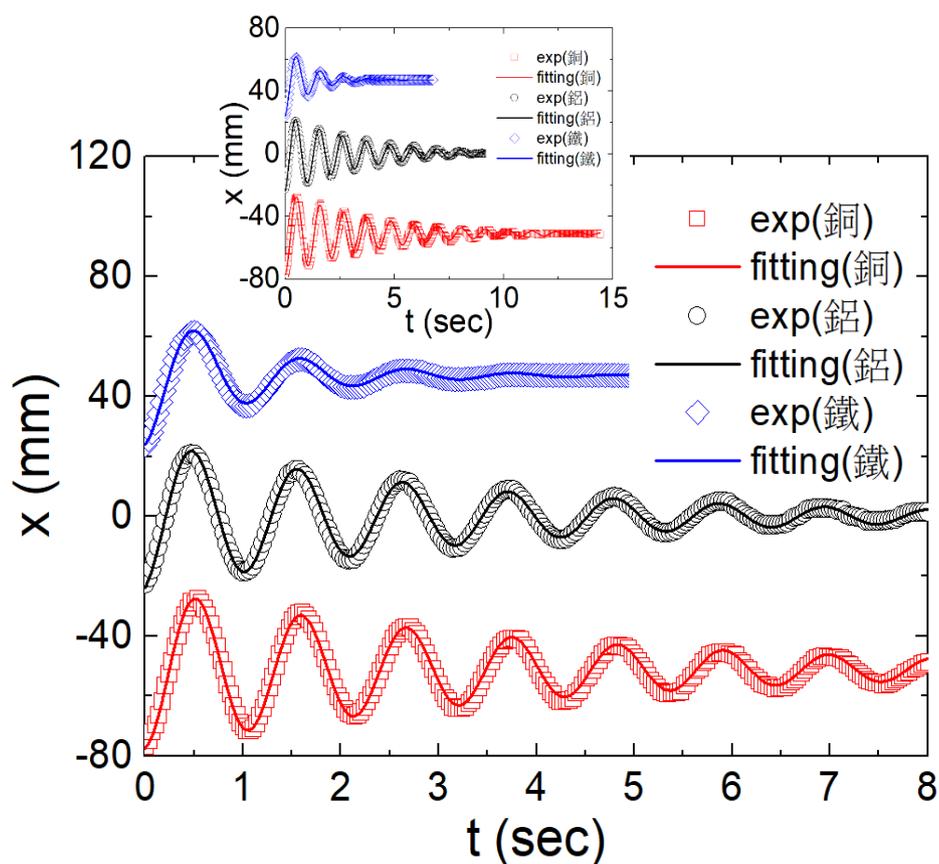


圖 2 不同材質金屬片之磁鐵物理擺的水平位移-時間(x-t)關係圖

樣本	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
鋁	25.21	0.3005	57.13	1.08	16.05	98.94
銅	26.60	0.2444	46.47	1.08	3.27	99.00
鐵	23.32	0.8855	168.35	1.09	3.29	98.05

表 3 不同材質金屬片之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
鋁	57.13	1.456	83.20	70.68	12.52
銅	49.47	1.456	67.64	55.12	12.52
鐵	168.35	1.444	243.17	230.65	12.52

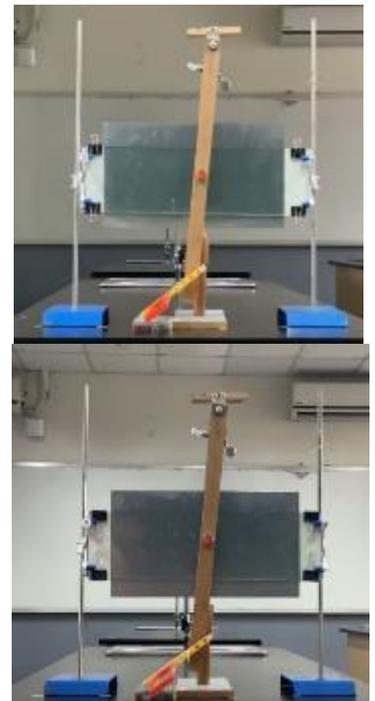
表 4 不同材質金屬片之磁鐵物理擺的力學分析參數

實驗三、探討不同金屬片厚度對磁鐵物理擺之影響

由實驗二得知，不同金屬片厚度對磁鐵物理擺造成的渦電流阻尼作用力不同，使用鐵金屬進行不同厚度的影響探討。在實驗三中，我們固定磁鐵物理擺與金屬片距離為 6.5 mm，擺角為 5 度，磁鐵強度為 4500 高斯，改變鋼鐵金屬片厚度。

實驗步驟：

1. 將厚度 1.2 mm、2.2 mm、3.2 mm、4.4 mm 的鐵片依次固定在玻璃片裡，並將玻璃片放置兩支架上
2. 調整鋼鐵金屬片與磁鐵物理擺的距離為 6.5 mm
3. 測量擺角為 5 度，並將磁鐵物理擺放在自製的推桿器上
4. 利用平板將振盪過程紀錄，直到磁鐵物理擺完全停止
5. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺振盪軌跡
6. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
7. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配



實驗結果與討論：

在實驗三，我們分別使用 1.2 mm、2.2 mm、3.2 mm、4.4 mm 等不同厚度之鋼鐵金屬片作為電磁阻尼作用之金屬片，進行磁鐵物理擺之阻尼振盪實驗，並以平板錄製振盪軌跡的實驗影片。其次，透過影像分析軟體(Tracker)的使用，獲得磁鐵物理擺之水平位移對應時間關係的資料。最後，使用數據分析軟體(Origin)，獲得磁鐵物理擺阻尼振盪運動的力學參數。

圖四為不同厚度鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間(x-t)關係圖與(b)渦電流阻尼力-厚度關係圖，由圖四(a)可以發現：所有厚度下的鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的週期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，

符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

表 5 與表 6 為不同厚度鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺的運動學與力學參數整理表格。由表 5 可發現：當鋼鐵金屬片之厚度增加時，磁鐵物理擺的阻尼係數隨之增加；不同的阻尼係數說明渦電流貢獻的電磁阻尼力大小和金屬片厚度有關；當金屬片厚度愈厚，電磁阻尼力愈大。此結果說明渦電流大小隨金屬片厚度增加而增加；實驗中當厚度由 1.2 mm 逐漸增加至 4.4 mm，磁鐵物理擺的(最大)阻尼作用力由 230.65 mN 逐漸增加至 461.81 mN。

文獻上指出導體中有交流電或者交變電磁場時，導體內部的電流分布呈現不均勻的一種現象，稱為集膚效應（又稱趨膚效應或表皮效應，Skin effect）；亦即隨著與導體表面的距離逐漸增加，導體內的電流密度呈指數衰減，即導體內的電流會集中在導體的表面。因此，在本實驗中渦電流在金屬內的分布是不均勻的；如圖五所示，其渦電流密度 J_{eddy} 對應位置 x 關係為

$$J_{eddy}(x) = J_s \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \quad (7)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega_d \mu}} \quad (8)$$

其中 J_s 為金屬表面的渦電流密度， δ 為集膚深度， ρ 為金屬電阻率($\rho = \frac{1}{\sigma}$)， ω_d 為阻尼振盪頻率($\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$)， μ 為金屬磁導係數。

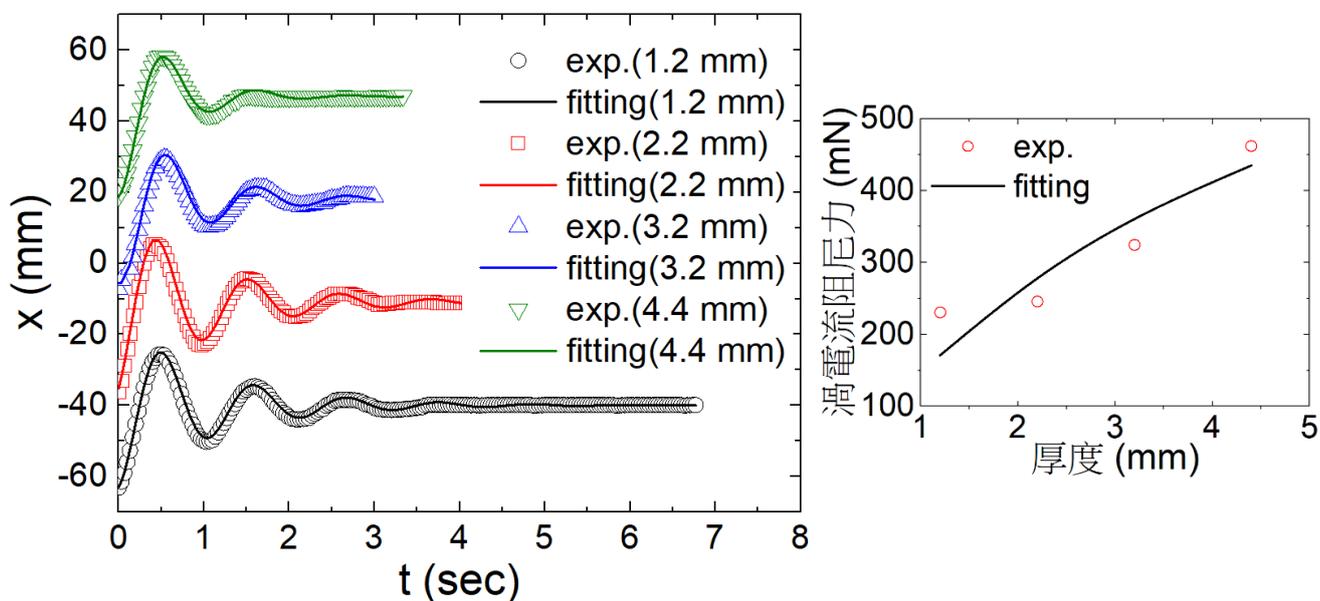
由式(7)可以發現，金屬渦電流密度會隨著金屬深度的增加以指數函數方式作衰減；即距離金屬表面的深度越大，渦電流的密度越小。由於物理擺所引起的阻尼作用力與金屬片厚度 d 呈現正相關；當金屬片厚度 d 愈大，可貢獻的整體渦電流密度 J_{tot} 愈大，進而造成愈大的阻尼作用力($F_{damp,2} \propto J_{tot}$)。其整體渦電流密度 J_{tot} 可表示為

$$J_{tot} = \int_0^d J_{eddy}(x) dx = \int_0^d J_s \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) dx = J_s \delta \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{\delta}\right)\right] \quad (9)$$

$$F_{damp,2} = C J_{tot} = C J_s \delta \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{\delta}\right)\right] = C' \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{\delta}\right)\right] \quad (10)$$

如圖四(b)可以發現，當使用式(10)進行數據擬合時，磁鐵物理擺的阻尼作用力實驗值與金屬片厚度呈現高度相依關係($R_{sq} = 80.28\%$)；其中，渦電流阻尼作用力 $F_{damp,2}$ 與厚度 d 之量化關係為： $F_{damp,2} = 636.61 \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{3.8317}\right)\right]$ ， $\delta(\text{實驗}) = 3.8317 \text{ mm}$ 。另一方面，當使用式(8)並代入阻尼振盪(實驗)週期 $T_d = 1.08 \text{ s}$ ，鋼鐵金屬片(文獻)電導率 $\sigma = 10.0 \times 10^6 \text{ S/m}$ 與(文獻)導磁係數 $\mu = 875 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ ，可獲得 $\delta(\text{理論}) = 6.268 \text{ mm}$ 。當比較數值後可發現，金屬片的實驗集膚深度值略低於理論集膚深度；其原因可能來自於無法確切獲得金屬片電導率

與導磁係數的大小所造成的結果。此外，當使用 δ (實驗)值並進行模擬計算，可獲得鋼鐵金屬片在厚度 0.3 mm(相同於銅金屬片厚度)與 0.4 mm(相同於鋁金屬片厚度)下的 $F_{damp,2}$ 值分別為47.94 mN以及 63.11 mN；其大小皆低於在實驗二中，相同厚度下的銅 50.12 mN與鋁金屬 70.68mN。因此，經由 $F_{damp,2}$ 值大小比較可發現：在厚度相同下，當使用較大電導率材質金屬片，會獲得較大渦電流阻尼作用力的阻尼振動結果。



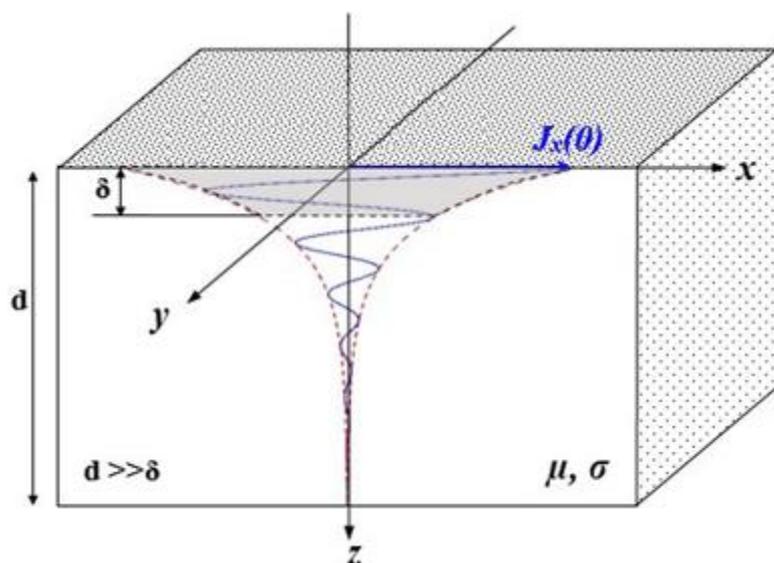
圖四 不同厚度鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間(x-t)關係圖與(b)渦電流阻尼力-厚度關係圖

樣本	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
1.2 mm	23.32	0.8855	168.35	1.09	3.29	98.05
2.2 mm	26.72	0.9298	176.77	1.08	3.57	98.75
3.2 mm	24.61	1.2020	228.52	1.08	28.00	98.18
4.4 mm	28.61	1.7276	328.45	1.09	28.12	99.08

表 5 不同厚度鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
1.2 mm	168.35	1.444	243.17	230.65	12.52
2.2 mm	176.77	1.461	258.35	245.83	12.52
3.2 mm	228.52	1.474	336.90	324.38	12.52
4.4 mm	328.45	1.444	474.33	461.81	12.52

表 6 不同厚度鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺的力學分析參數



圖五 磁鐵物理擺阻尼振盪過程中，金屬內部渦電流密度 J_{eddy} 對應位置 x 關係之示意圖

實驗四、探討不同擺與金屬片間距對磁鐵物理擺之影響

在磁鐵物理擺周圍放置金屬片產生電磁感應，進而使磁鐵物理擺受力增加了一渦電流阻尼作用力，於是我們接著想探討改變磁鐵物理擺和金屬片之間的距離，是否會產生不同大小的渦電流阻尼作用力。在實驗四中，我們固定擺角為 5 度，磁鐵強度為 4500 高斯，改變磁鐵物理擺和金屬片之間的距離。

實驗步驟：

1. 將厚度 1.2 mm 的鋼鐵金屬片固定在玻璃片裡，並將玻璃片放置在兩支架上
2. 調整鋼鐵金屬片與擺錘的距離依次為 6.5 mm、8.5 mm、13.5 mm、18.5 mm、23.5 mm、28.5 mm、33.5 mm、38.5 mm、43.5 mm、53.5 mm
3. 測量擺角為 5 度，並將磁鐵物理擺放在自製的推桿器上
4. 利用平板將振盪過程紀錄，直到磁鐵物理擺完全停止
5. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺振盪軌跡
6. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
7. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配



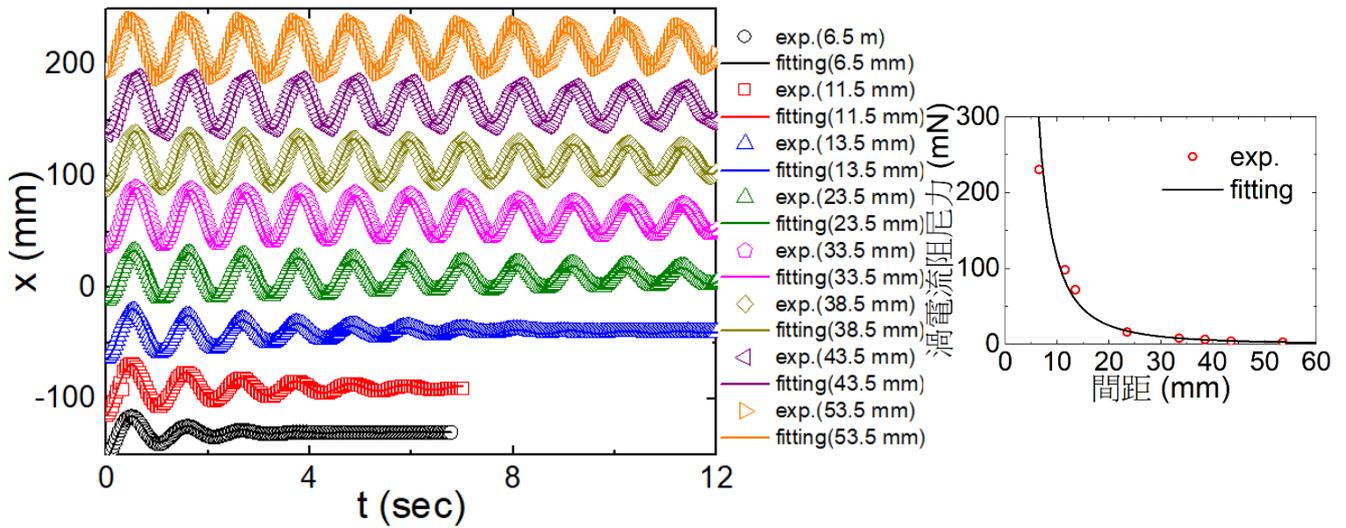
實驗結果與討論:

在實驗四，我們使用鋼鐵金屬片作為電磁阻尼作用之金屬片，分別在 6.5 mm、8.5 mm、13.5 mm、18.5 mm、23.5 mm、28.5 mm、33.5 mm、38.5 mm、43.5 mm、53.5 mm 等不同的擺與金屬片間距下，進行磁鐵物理擺之阻尼振盪實驗，並以平板錄製振盪軌跡的實驗影片。其次，透過影像分析軟體(Tracker)的使用，獲得磁鐵物理擺之水平位移對應時間關係的資料。最後，使用數據分析軟體(Origin)，獲得磁鐵物理擺阻尼振盪運動的力學參數。

圖六為不同擺與金屬片間距下磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間(x-t)關係圖與(b)渦電流阻尼力-間距關係圖，由圖六(a)可以發現：所有間距下的鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的週期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

表 7 與表 8 為不同擺與金屬片間距下，磁鐵物理擺的運動學與力學參數整理表格。由表 7 可發現：當擺與金屬片之間距增加時，磁鐵物理擺的阻尼係數隨之減少；不同的阻尼係數說明渦電流貢獻的電磁阻尼力大小和間距有關；當間距愈大，電磁阻尼力愈小；實驗中當間距由 6.5 mm 逐漸增加至 53.5 mm，磁鐵物理擺的(最大)阻尼作用力由 230.65 mN 逐漸減少至 2.82 mN。此結果說明渦電流大小所造成的阻尼作用力隨擺與金屬片之間距增加而減少。

當磁鐵物理擺運動時，磁鐵跟著物理擺一起移動，使得金屬面上產生局部磁通量變化。根據法拉第感應定律，為了彌補磁通量的變化，該局部會產生感應電動勢及渦電流，以反抗磁鐵的運動。磁通量變化 $d\Phi/dt$ 和磁場強度成正比，渦電流 i 與磁通量變化成正比，因此，渦電流對物理擺所引起的阻尼力與磁場強度成正比；亦即可以利用磁鐵與金屬片的相對距離來調整阻尼作用力的大小，磁鐵越遠離金屬面，阻尼作用力越小。再者，當磁鐵可以看成一載流線圈時，磁鐵在垂直磁鐵面的中心線軸上所建立的磁場強度 B 與距離 r 會呈現 $B \propto r^{-3}$ 關係；亦即磁場強度隨距離呈立方反比關係。因此，磁鐵物理擺的阻尼作用力實驗值與擺與金屬片之間距呈現立方反比關係。如圖六(b)所示，當進行渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與距離 r 之數據分析發現其量化關係為： $F_{damp} = 169966r^{-2.177}$ ($R_{sq} = 99.24\%$)。當比較數值後可發現，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與距離 r 呈現反相依的實驗比例常數(= 2.177)略低於理論比例常數(= 3.0)；其原因可能來自於磁鐵在非垂直磁鐵面中心線軸上的其他位置所建立的磁場強度 B 與距離 r 並無法單純表示為立方反比關係所致。



圖六 不同間距之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間(x-t)關係圖與(b)渦電流阻尼力-間距關係圖

樣本	振幅 x_0 (cm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
6.5 mm	23.32	0.8855	168.35	1.09	3.29	98.05
11.5 mm	25.50	0.4008	76.20	1.08	15.95	98.22
13.5 mm	24.34	0.3053	58.04	1.08	15.77	98.51
23.5 mm	24.66	0.1040	19.77	1.08	3.12	97.90
33.5 mm	28.98	0.0739	14.05	1.08	27.71	96.91
38.5 mm	27.41	0.0686	13.04	1.08	28.19	98.20
43.5 mm	28.50	0.0602	11.45	1.08	9.15	94.92
53.5 mm	29.39	0.055	10.49	1.08	22.17	97.06

表 7 不同擺與金屬片間距之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
6.5 mm	168.35	1.444	243.17	230.65	12.52
11.5 mm	76.20	1.455	110.90	98.38	12.52
13.5 mm	58.04	1.457	84.56	72.04	12.52
23.5 mm	19.77	1.458	28.82	16.30	12.52
33.5 mm	14.05	1.460	20.52	8.00	12.52
38.5 mm	13.04	1.457	19.00	6.48	12.52
43.5 mm	11.45	1.460	16.71	4.19	12.52
53.5 mm	10.49	1.460	15.32	2.82	12.52

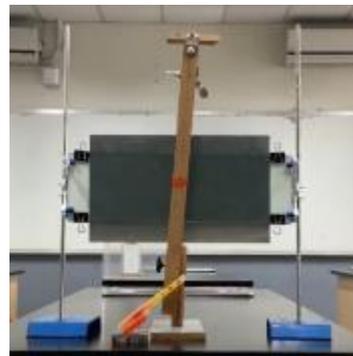
表 8 不同擺與金屬片間距之磁鐵物理擺的力學分析參數

實驗五、探討不同強度之磁鐵對磁鐵物理擺之影響

從實驗四發現，磁鐵越遠離金屬面，渦電流對物理擺所引起的阻尼力越小。根據法拉第感應定律，渦電流 i 與磁通量變化成正比，而磁通量變化 $d\Phi/dt$ 和磁場強度成正比，於是進行不同強度的磁鐵對磁鐵物理擺之影響的探討。在實驗五中，我們固定磁鐵物理擺與鋼鐵金屬片距離為 6.5 mm，鋼鐵金屬片厚度為 1.2 mm，擺角為 5 度，改變磁鐵強度。

實驗步驟:

1. 將厚度 1.2 mm 的鋼鐵金屬片固定在玻璃片裡，並將玻璃片放置在兩支架上
2. 測量擺角為 5 度，並將 4500 高斯的磁鐵物理擺放在自製的推桿器上
3. 利用平板將振盪過程紀錄，直到磁鐵物理擺完全停止
4. 依序改變磁鐵強度為 1250 高斯、2000 高斯、3400 高斯，重複步驟 3
5. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺振盪軌跡
6. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
7. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配



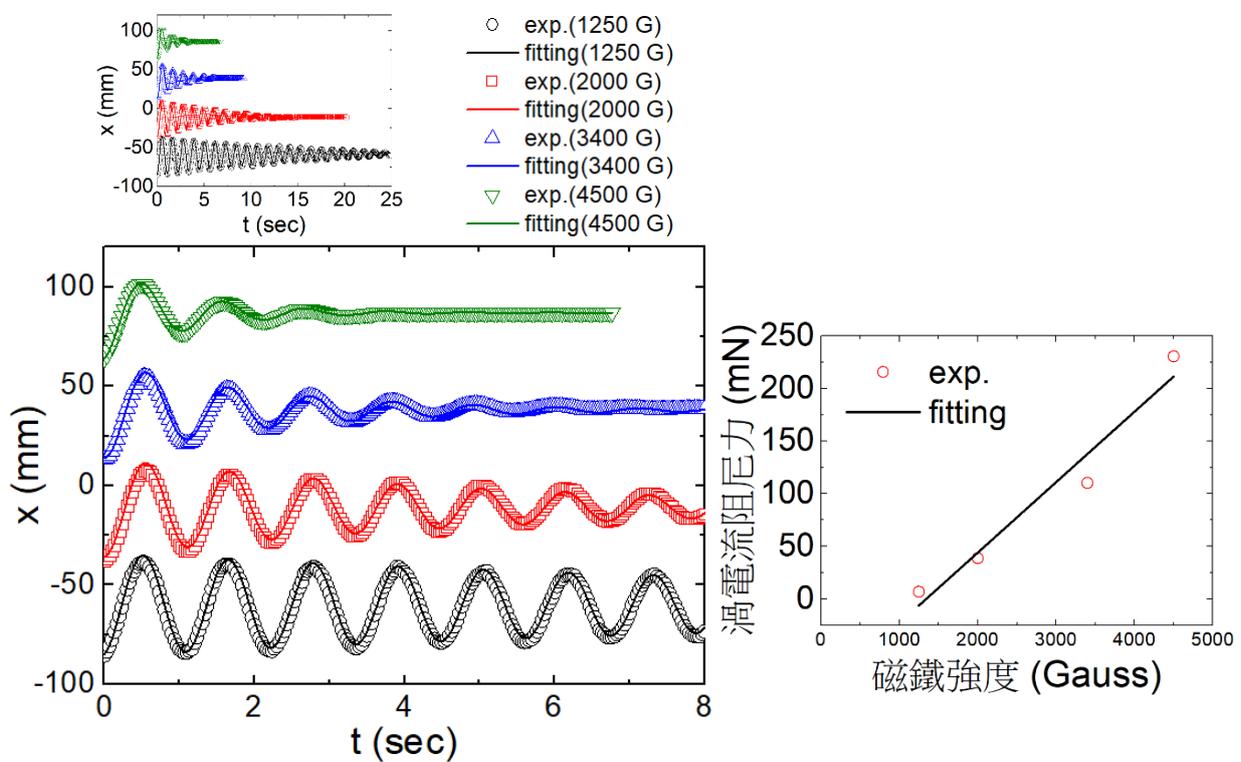
實驗結果與討論:

從實驗四發現，磁鐵越遠離金屬面，渦電流對物理擺所引起的阻尼力越小。根據法拉第感應定律，渦電流 i 與磁通量變化成正比，而磁通量變化 $d\Phi/dt$ 和磁場強度成正比，於是進行不同強度的磁鐵對磁鐵物理擺之影響的探討。在實驗五中，我們固定磁鐵物理擺與鋼鐵金屬片距離為 0.65 公分，鋼鐵金屬片厚度為 1.2 mm，擺角為 5 度，改變磁鐵強度。

圖七為不同磁鐵強度之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間關係圖與(b)渦電流阻尼力-強度關係圖，由圖七(a)可以發現：所有磁鐵強度下的鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的週期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

表 9 與表 10 為不同磁鐵強度下磁鐵物理擺的運動學與力學參數整理表格。由表 9 可發現：當磁鐵強度增加時，磁鐵物理擺的阻尼係數隨之增加；不同的阻尼係數說明渦電流貢獻的電磁阻尼力大小和磁鐵強度有關；當磁鐵強度愈強，電磁阻尼力愈大；實驗中當磁鐵強度

由 1250 G 逐漸增加至 4500 G，磁鐵物理擺的(最大)阻尼作用力由 6.91 mN 逐漸增加至 230.65 mN；此結果說明渦電流大小隨磁鐵強度增加而增加。由實驗四結果可知，渦電流對物理擺所引起的阻尼力與磁場強度成正比；因此，除了可以透過實驗四利用磁鐵與金屬片的相對距離來調整阻尼作用力的大小，亦可透過實驗五直接利用不同強度的磁鐵來調整阻尼作用力的大小，磁鐵強度愈強，渦電流阻尼作用力愈大。如圖七(b)所示，當使用線性函數進行渦電流阻尼力 F_{damp} 與磁鐵強度 B 之數據分析發現其量化關係為： $F_{damp} = 0.067B - 90.1$ ($R_{sq} = 95.52\%$)。其中，負載距值(= -90.1)表示：當磁鐵強度太小時將無法貢獻有效的渦電流阻尼力，其原因可能來自於磁鐵物理擺與鋼鐵金屬片距離(= 6.5 mm)造成磁場強度的衰減所致；因此需一定強度(~1250 G)的磁鐵始能在此距離下使物理擺產生明顯的阻尼振盪行為。



圖七 不同磁鐵強度之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間關係圖與(b)渦電流阻尼力-強度關係圖

樣本	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期 T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
1250 G	25.72	0.0738	14.03	1.13	3.42	97.46
2000 G	24.97	0.1917	36.45	1.12	28.29	97.16
3400 G	24.24	0.4506	85.67	1.10	9.34	97.58
4500 G	23.32	0.8855	168.35	1.09	3.29	99.05

表 9 不同磁鐵強度之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
1250 G	14.03	1.385	19.43	6.91	12.52
2000 G	36.45	1.404	51.18	38.66	12.52
3400 G	97.58	1.434	122.83	110.31	12.52
4500 G	168.35	1.444	243.17	230.65	12.52

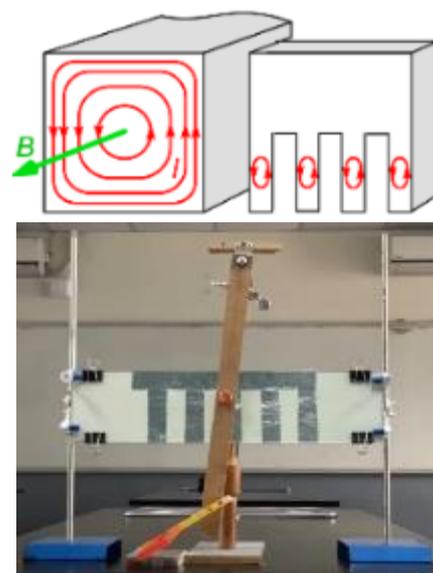
表 10 不同磁鐵強度之磁鐵物理擺的力學分析參數

實驗六、探討有無梳形圖案之金屬片對磁鐵物理擺之影響

另外，我們想知道將鋁箔剪成梳形圖案(如圖示)時對磁鐵物理擺的擺動影響，於是進行梳形圖案對磁鐵物理擺的擺動影響實驗。在實驗中，我們固定磁鐵物理擺與鋁箔片距離為 6.5 mm，擺角為 5 度，磁鐵強度為 4500 高斯，改變梳形圖案之鋁箔指寬與縫寬分別為 20 mm/20 mm。

實驗步驟:

1. 將 15 張鋁箔裁剪成指寬與縫寬為 20 mm/20 mm 的梳形圖案
2. 將 15 張鋁箔疊加並固定在玻璃片裡，再將玻璃片放置在兩支架上
3. 測量擺角為 5 度，並將擺錘放在自製的推桿器上
4. 利用平板將擺盪過程紀錄，直到磁鐵物理擺完全停止
5. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺擺動軌跡
6. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
7. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配
8. 將其與無梳形圖案之 15 張鋁箔的實驗做比較



實驗結果與討論:

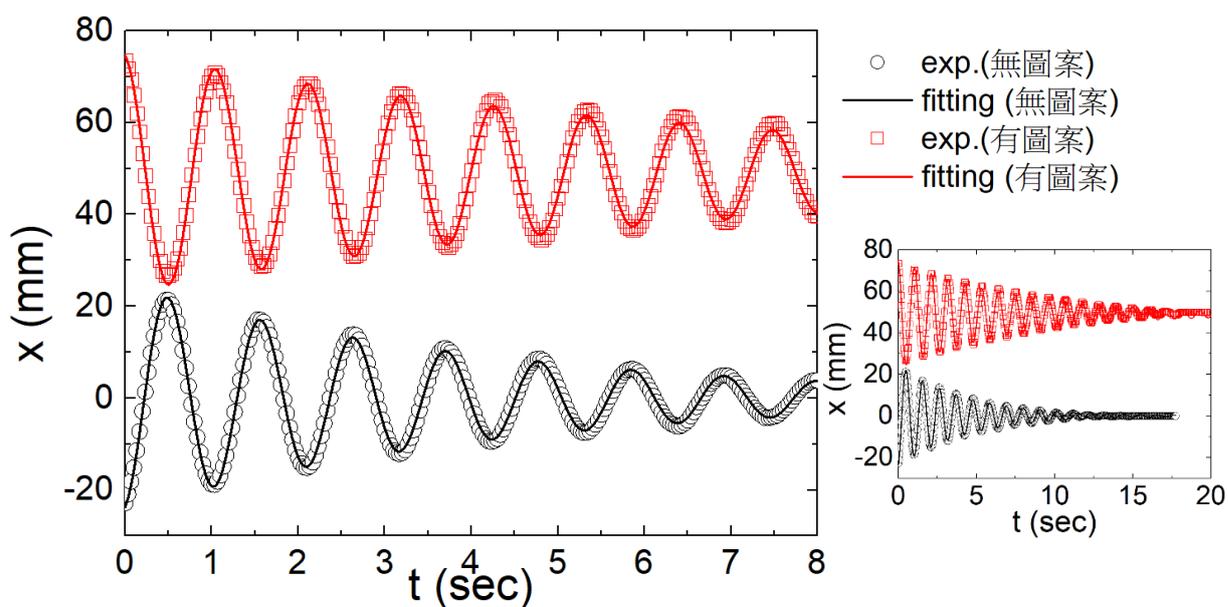
在實驗六，我們使用鋁箔作為電磁阻尼作用之金屬片，並將金屬片切割為梳形圖案，最後以此進行磁鐵物理擺之阻尼振盪實驗，並以平板錄製振盪軌跡的實驗影片。其次，透過影像分析軟體(Tracker)的使用，獲得磁鐵物理擺之水平位移對應時間關係的資料。最後，使用數據分析軟體(Origin)，獲得磁鐵物理擺阻尼振盪運動的力學參數。

圖八為有無梳形圖案金屬片之磁鐵物理擺的水平位移-時間關係圖，由圖八可以發現：有梳形圖案金屬片下之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的週期性

運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

表 11 與表 12 為有無梳形圖案金屬片下磁鐵物理擺的運動學與力學參數整理表格。由表 11 可發現：相較無圖案鋁箔，具梳形圖案鋁箔之磁鐵物理擺的阻尼係數較少；此結果說明渦電流大小所造成的阻尼作用力隨擺與金屬片之有無梳形圖案相關。

當物理擺運動時，磁鐵跟著物理擺一起移動，使得金屬面上產生局部磁通量變化。根據法拉第感應定律，為了彌補磁通量的變化，該局部會產生感應電動勢及渦電流，以反抗磁鐵的運動。在此小節中，由於金屬面設計為梳形圖案，因此其渦電流的形成可分三個階段：(1) 當磁鐵剛通過金屬片的指寬區塊邊緣時，由於局部磁通量逐漸變大而導致渦電流產生；(2) 當磁鐵通過並位於金屬片的指寬區塊中央時，由於局部磁通量不再改變而導致渦電流消失；(3) 當磁鐵已通過金屬片的指寬區塊邊緣時，由於局部磁通量逐漸減少，亦導致渦電流產生，而此電流方向與階段(1)相反。再者，當磁鐵通過金屬片的縫寬區塊時，並無渦電流產生。因此，渦電流對物理擺所引起的阻尼力會因梳形圖案金屬片的設計而被侷限在指寬區塊；而金屬片縫寬區塊重疊之物理擺區塊則無受到渦電流阻尼力之影響；換句話說，可以利用指寬與縫寬的大小調整來決定阻尼作用力的大小，當大小愈小，阻尼作用力越小；實驗中兩者的(最大)阻尼作用力分別為 53.07 mN (無圖案) vs. 25.46 mN (有圖案)。此結果說明梳形圖案金屬片會侷限渦電流的形成，進而降低磁鐵物理擺的阻尼振盪行為。



圖八 有無梳形圖案金屬片之磁鐵物理擺的水平位移-時間(x-t)關係圖

樣本	振幅 x_0 (cm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期 T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
無圖案	24.59	0.2335	44.77	1.07	22.26	99.46
有圖案	26.05	0.1365	25.95	1.07	6.47	98.33

表 11 有無梳形圖案金屬片之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
無圖案	44.77	1.465	65.59	53.07	12.52
有圖案	25.95	1.463	37.98	25.46	12.52

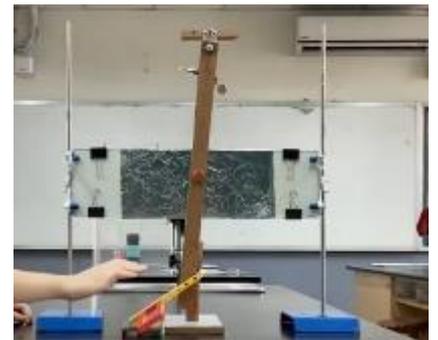
表 12 有無梳形圖案金屬片之磁鐵物理擺的力學分析參數

實驗七、探討不同張數組合之金屬片對磁鐵物理擺之影響

金屬片的存在對磁鐵物理擺的振盪會造成影響，若我們放置厚度極小的鋁箔是否也會產生渦電流阻尼作用力嗎？又若放置不同數量的鋁箔所造成的渦電流阻尼作用力會隨著張數增加而變大嗎？於是我們進行不同張數組合之金屬片對磁鐵物理擺之影響實驗來解答我們的疑惑。在實驗中，我們固定磁鐵物理擺與鋁箔的距離為 6.5 mm，擺角為 5 度，磁鐵強度為 4500 高斯，改變鋁箔張數。

實驗步驟：

1. 將 1、2、3、5、7、9、15、20、25 張的鋁箔依次固定在玻璃片裡，並將玻璃片放置兩支架上
2. 調整鋁箔與磁鐵物理擺的距離為 6.5 mm
3. 測量擺角為 5 度，並將磁鐵物理擺放在自製的推桿器上
4. 利用平板將振盪過程紀錄，直到磁鐵物理擺完全停止
5. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出磁鐵物理擺振盪軌跡
6. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
7. 使用數據分析軟體(Origin)進行實驗數據與理論模型的擬合適配
8. 將 2(或 9)張的鋁箔與 1(或 8)張的 A4 白紙以交錯堆疊方式整理，重複上述步驟



實驗結果與討論:

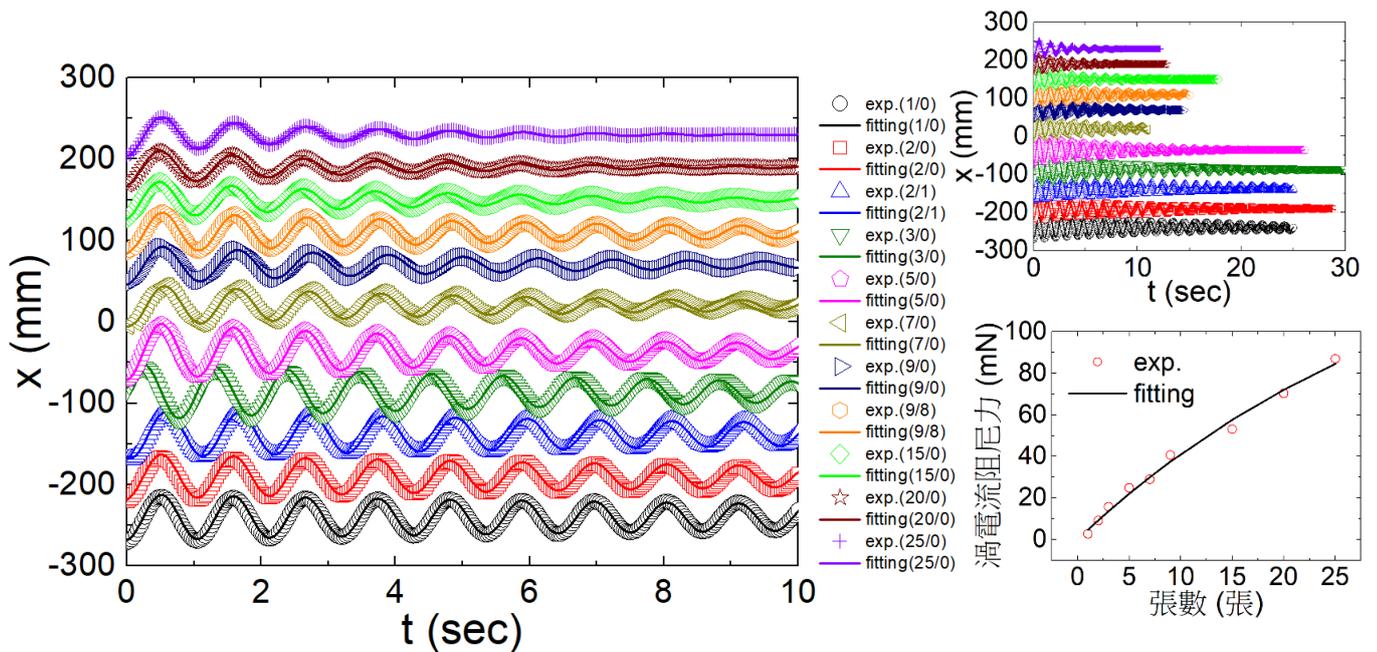
在實驗七，我們使用鋁箔作為電磁阻尼作用之金屬片，並將不同張數鋁箔重疊在一起作為電磁阻尼作用之金屬片，分別在不同張數下(1、2、3、5、7、9、15、20、25 張)，進行磁鐵物理擺之阻尼振盪實驗，並以平板錄製振盪軌跡的實驗影片。其次，透過影像分析軟體(Tracker)的使用，獲得磁鐵物理擺之水平位移對應時間關係的資料。最後，使用數據分析軟體(Origin)，獲得磁鐵物理擺阻尼振盪運動的力學參數。

圖九為不同張數金屬片之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間關係圖與(b)渦電流阻尼力-張數關係圖，由圖九(a)可以發現：所有張數金屬片下的鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的週期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

表 13 與表 14 為不同張數鋁箔下磁鐵物理擺的運動學與力學參數整理表格。由表 13 可發現：當鋁箔張數在 1、2 張時，磁鐵物理擺的渦電流阻尼力並不明顯(鋁箔 1 張 2.67 mN vs. 鋁箔 2 張 9.11 mN)，其大小甚至較空氣阻尼力 12.52 mN 小上許多；此結果令人感到新奇。在未做實驗前，本以為和前述結果相似；亦即只需放置 1 張鋁箔後，磁鐵物理擺的振幅大小即會快速地受到渦電流阻尼力而衰減至零；然而由圖九(a)可發現並非如此。為確定鋁箔的存在是否貢獻渦電流阻尼作用，實驗將張數持續增加至 25 張，可發現磁鐵物理擺的阻尼振盪行為隨著張數的增加而愈趨明顯；實驗中當鋁箔張數增加至 25 張，磁鐵物理擺的(最大)阻尼作用力可增加至 87.05 mN。

由圖九(b)可以發現，當使用式(10)進行數據擬合時，磁鐵物理擺的阻尼作用力實驗值與金屬片張數呈現高度相依關係($R_{sq} = 99.10\%$)；其中，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與厚度 d 之量化關係為： $F_{damp,2} = 166.77 \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{35.35}\right) \right]$ ， $\delta(\text{張數}) = 35.35 \text{ 張}$ 。當考慮鋁箔厚度為 0.75 mm，可進一步獲得 $\delta(\text{實驗}) = 35.35 \times 0.75 = 26.5156 \text{ mm}$ 。此時，比較實驗三(不同金屬片厚度)的數值後可發現，多張鋁箔金屬片的實驗集膚深度值(= 26.5156 mm)明顯大於(~6.92 倍)塊體鋼鐵片的實驗集膚深度值(= 3.8317 mm)。由於金屬片渦電流集膚深度和金屬電導率為反相依關係($\delta \propto \sqrt{\frac{1}{\sigma}}$)，考慮鋁金屬和鋼鐵金屬的電導率差異($37.8 \times 10^6 \text{ (S/m)}$ (鋁) vs. $10.0 \times 10^6 \text{ (S/m)}$ (鋼鐵))對其貢獻，則相較鋼鐵金屬，鋁金屬應具有較小的(理論)集膚深度；但此推論與此結果不符。因此，鋁箔金屬片的(實驗)集膚深度值大於(理論)集膚深度值的原因應來自於：鋁箔層之間的(空氣)間隙影響了鋁箔層渦電流形成所致。

為確認鋁箔層之間的(空氣)間隙影響，實驗進一步進行了不同張數組合下的”鋁箔/白紙/鋁箔...”金屬片結構的磁鐵物理擺實驗。表 13 與表 14 可以發現，在”2/1(鋁箔/白紙)”以及”9/8”張數組合下的實驗結果($F_{damp,2} = 8.14 \text{ mN}$ 與 21.78 mN)，其渦電流阻尼力大小皆分別明顯地小於”2/0”與”9/0”組合(9.11 mN 與 40.68 mN)；且後者渦電流阻尼力大小亦小於”5/0”的組合(24.92 mN)。經由上述結果可說明：金屬層之間的連續性分布程度影響了金屬片渦電流的形成，進而造成磁鐵物理擺振盪阻尼力大小的改變。



圖九 不同張數金屬片之磁鐵物理擺的(a)水平位移-時間關係圖與(b)渦電流阻尼力-張數關係圖

樣本 鋁箔/紙	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期 T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
1/0	28.25	0.0547	10.40	1.08	22.13	98.44
2/0	28.22	0.0779	14.81	1.08	34.70	98.38
2/1	29.48	0.0744	14.14	1.08	15.39	98.93
3/0	34.96	0.1017	19.34	1.07	29.98	98.37
5/0	35.85	0.1344	25.55	1.07	9.54	99.20
7/0	25.90	0.1497	28.40	1.08	21.84	99.36
9/0	24.71	0.1812	34.45	1.08	9.57	99.16
9/8	25.71	0.1240	23.57	1.08	9.48	98.87
15/0	24.59	0.2335	44.77	1.07	22.26	99.46
20/0	23.20	0.2976	56.58	1.07	28.48	98.39
25/0	26.00	0.3584	68.14	1.07	22.01	99.49

表 13 不同張數組合鋁箔片之磁鐵物理擺的運動學分析參數

樣本 鋁箔/紙	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
1/0	10.40	1.461	15.19	2.67	12.52
2/0	14.81	1.460	21.63	9.11	12.52
2/1	14.14	1.461	20.66	8.14	12.52
3/0	19.34	1.464	28.30	15.78	12.52
5/0	25.55	1.465	37.44	24.92	12.52
7/0	28.40	1.461	41.49	28.97	12.52
9/0	34.45	1.460	53.20	40.68	12.52
9/8	23.57	1.458	34.30	21.78	12.52
15/0	44.77	1.465	65.59	53.07	12.52
20/0	56.58	1.464	82.87	70.35	12.52
25/0	68.14	1.461	99.57	87.05	12.52

表 14 不同張數組合鋁箔片之磁鐵物理擺的力學分析參數

實驗八、模擬建築物有無磁鐵物理擺裝置之振盪

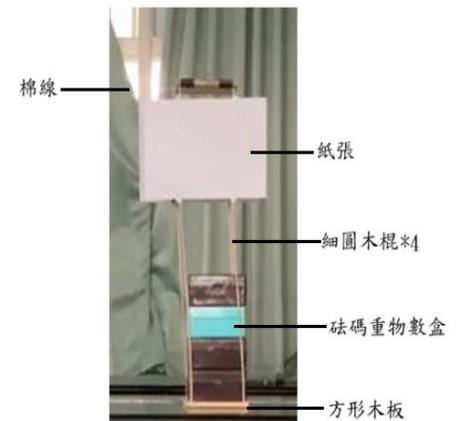
由於台灣剛好位於構成歐洲與亞洲的「歐亞板塊」與「菲律賓海板塊」的兩個板塊之間，只要這兩個板塊一有碰撞，就會造成地震，近期亦在花蓮發生多次規模不小的地震，因而引起民眾恐慌。因此，藉由吸收部分的能量來降低外力對建築物破壞程度的阻尼器在此扮演相當重要的角色；其中，台北 101 大樓的單擺式阻尼器即是一個明顯例子。單擺式阻尼器藉由發揮慣性定律、擺長原理的反作用力，可將結構物所承受之部份振動能量轉移至阻尼器，並由其阻尼耗散消除，藉此達到降低主結構動態反應之目的；其在穩定整個建築物上扮演著重要角色。然而，由於需藉由質量塊與主結構物相反方向擺動來減少主結構物的振動程度，並透過產生反作用力去平衡建築物的緩動，因此阻尼器本體之質量塊佔整體結構物重量比例需足夠大；作為台北 101 阻尼器本體而言，其組成是一重達 660 公噸(佔主建物重量 0.24%)、最大擺幅 15 公分的大型固態鋼鐵球體(由 41 層厚度 12.5 公分的實心鋼板組成)；大質量塊組成的阻尼器不管在工程上或是成本花費上皆有其困難之處。因此，這次的實驗內容應可實現在具較輕質量塊的單擺式阻尼器之有效應用；因其可藉由渦電流的阻尼耗散以消除建築物的部份振動能量。

為驗證此想法，實驗進一步模擬建築物在有無磁鐵物理擺裝置之振盪行為；藉此探討建築物是否因加入渦電流阻尼而減緩振盪行為。首先利用方形木板和細圓木棍製作一簡單結構的建築物模型，將此樣本定義為”無物理擺”建築物(建築物 A)(如下頁照片)。其次，在”無物理擺”建築物模型上加入磁鐵物理擺及木板(質量相同於金屬片)，將此樣本定義為”物理擺”建築物(建築物 B)(因無電磁感應之渦電流形成，磁鐵在此建築物僅扮演質量塊角色)。最後，在”物理擺”建築物模型上以質量相同的金屬片(厚度 1.2 mm 鋼鐵片)替換木板，將此樣本定義為”

磁鐵物理擺”建築物(建築物 C)。在實驗中，我們固定磁鐵物理擺與金屬片(或木板)的距離為 6.5 mm，擺角為 5 度，使用強度為 4500 高斯的磁鐵，探討三種不同組成的建築物之阻尼振盪過程。

實驗步驟:

1. 在建築物模型上方綁上棉繩，利用棉繩將其側向偏移 3cm，剪斷棉繩使建築物模型做側向平行振盪
2. 利用平板將振盪過程錄影紀錄，直到建築物模型完全停止
3. 依序加上磁鐵物理擺和金屬片，重複步驟 1、2
4. 利用軟體 Tracker 追蹤分析出建築物模型振盪軌跡
5. 重複上述步驟進行多次實驗，確認實驗結果具再現性
6. 使用數據分析軟體(Origin) 進行實驗數據與理論模型的擬合適配

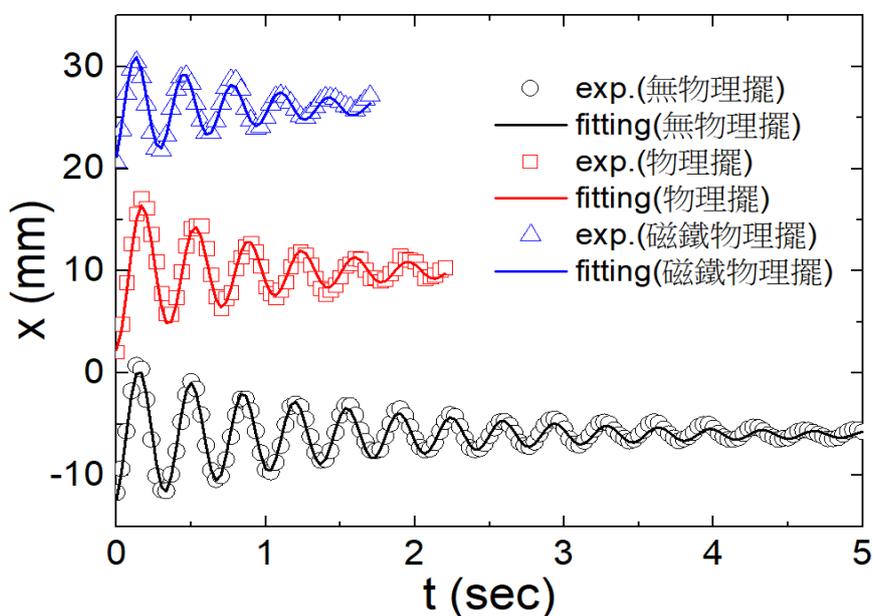


實驗結果與討論:

圖十為三種不同組成建築物的水平位移-時間關係圖，由圖十可以發現：所有磁鐵強度下的鋼鐵金屬片之磁鐵物理擺運動隨時間一方面做週期性的往返運動，符合擺的週期性運動；另一方面其振盪幅度隨時間增加而減少，符合阻尼作用下的運動模式。當進一步以物理擺的阻尼振盪運動方程式，進行實驗數據與理論模型的擬合適配後，可成功地達到彼此間高度擬合關係，並獲得理論模型對應的力學參數。

表 15 與表 16 為不同磁鐵強度下磁鐵物理擺的運動學與力學參數整理表格。由圖 9 可發現：建築物 A 在棉繩剪斷後，其振幅大小需經歷較長時間的平行振盪過程，建築物始能減緩下來；相較之下，建築物 B 與 C 的振幅則進行較快速地衰減行為。由表 15 可進一步發現：當加入物理擺於建築物中時，建築物振動的阻尼係數隨之增加 (119.47 g/s vs. 207.12 g/s)；較大的阻尼係數說明物理擺本體的質量塊可以透過與主結構物相反方向振動的阻尼作用力來減少主結構物的振動程度。其次，當加入磁鐵物理擺於建築物中時，建築物震動的阻尼係數則更進一步地增加(207.12 g/s vs. 235.48 g/s)；更大的阻尼係數說明物理擺本體的質量塊除具有原先慣性運動下的阻尼作用力之外，更可經由感應渦電流的產生提供額外的阻尼作用力來減少主結構物的振動程度。經由數據的擬合分析可獲得三種不同組成建築物的阻尼作用力大小分別為 538.96 mN(建築物 A 無物理擺)、912.85 mN(建築物 B 有物理擺)以及 1143.06 mN(建築物 C 磁鐵物理擺)；相較建築物 A，建築物 B 與 C 的阻尼作用力增益分別為 1.69 倍與 2.12 倍，

經由磁鐵物理擺產生的總阻尼力以消除物體的振動能量增益達 112%，較同質量的物理擺增益亦達 25%，；此結果說明：在相同質量的質量塊下，具感應渦電流效應的「磁鐵物理擺式」阻尼器較傳統「單擺式(或物理擺式)」阻尼器更具明顯的阻尼效果。



圖十 三種不同組成建築物的水平位移-時間關係圖

樣本	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
無物理擺	6.90	0.6284	119.47	0.35	22.38	96.33
物理擺	7.69	1.0894	207.12	0.36	9.51	95.84
磁鐵物理擺	5.81	1.2386	235.48	0.33	3.73	95.90

表 15 不同組成建築物的運動學分析參數

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)
無物理擺	119.47	4.51	538.96
物理擺	207.12	4.41	912.85
磁鐵物理擺	235.48	4.85	1143.06

表 16 不同組成建築物的力學分析參數

陸、結論

本研究在磁鐵物理擺側面放置金屬片，探究不同條件的磁鐵物理擺在其阻尼振盪過程中，因電磁感應產生渦電流阻尼力 $F_{damp,2}(= \gamma_2 v)$ 而影響振盪情況的關係，由實驗結果與討論可以得到以下幾點結論：

1. 從實驗一發現，在有使用金屬片時，阻尼作用力大小是空氣阻力以及電磁感應引致渦電流所貢獻的阻力之和。因此，藉由兩種情況下的磁鐵物理擺實驗，我們可以獲得電磁感應引致渦電流所貢獻的阻尼作用力為 230.65 mN；此大小約為空氣阻尼作用力的 18.4 倍。
2. 從實驗二發現，三種材質金屬片的阻尼作用力分別為 67.34 mN (銅, 0.3 mm) vs. 83.20 mN (鋁, 0.4 mm) vs. 243.17 mN (鋼鐵, 1.2 mm)。由於銅具有最大電導率本質，理應產生最大的感應渦電流，進而提供較大阻尼作用力影響磁鐵物理擺。但由阻尼作用力的大小趨勢(銅 < 鋁 < 鋼)不同於電導率的大小趨勢(銅 > 鋁 > 鋼)，卻相同於金屬片厚度的大小趨勢(銅 < 鋁 < 鋼)可以知道：在渦電流阻尼力貢獻上除考慮金屬片材質外，金屬片厚度因子亦扮演一重要角色。
3. 從實驗三發現，當鋼鐵金屬片之厚度增加時，磁鐵物理擺的阻尼作用力隨之增加(230.65 mN (1.2 mm) vs. 461.81 mN (4.4 mm))；說明渦電流大小隨金屬片厚度增加而增加，但其大小並不與鋼鐵金屬片厚度成正比關係，說明渦電流在金屬內的不均勻分布。此結果可以透過集膚效應做解釋；亦即隨著與導體表面的距離逐漸增加，導體內的電流密度隨距離呈指數衰減關係。經由集膚效應的模型進一步數據擬合分析及討論後發現，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與厚度 d 之量化關係為： $F_{damp,2} = 636.61 \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{3.8317}\right) \right]$ ($R_{sq} = 80.28\%$)，藉此可獲得集膚深度實驗值($\delta(\text{實驗}) = 3.8317 \text{ mm}$)，其大小略低於理論集膚深度($\delta(\text{理論}) = 6.268 \text{ mm}$)。此實驗亦驗證實驗二的金屬材質因子影響，即在厚度相同下，當使用較大電導率材質金屬片，會獲得較大渦電流阻尼作用力的阻尼振盪結果。
4. 從實驗四發現，當擺與金屬片之間距增加時，磁鐵物理擺的阻尼作用力隨之減少(230.65 mN (6.5 mm) vs. 2.82 mN (53.5 mm))；說明渦電流大小所造成的阻尼作用力隨擺與金屬片之間距增加而減少。此結果可以透過磁場強度隨距離呈反相關關係做解釋；當磁鐵可以看成一載流線圈時，磁鐵在垂直磁鐵面的中心線軸上所建立的磁場強度 B 與距離 r 會呈現 $B \propto r^{-3}$ 關係。經由數據擬合分析後發現，電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與距離 r 之數據分析發現其量化關係為： $F_{damp} = 169966r^{-2.177}$ ($R_{sq} = 99.24\%$)，略低於理論比例常數(= 3.0)。
5. 從實驗五發現，當磁鐵強度增加時，磁鐵物理擺的阻尼作用力隨之增加(6.91 mN (1250 G) vs. 230.65 mN (4500 G))；說明渦電流大小隨磁鐵強度增加而增加。此結果可以透過渦電

流對物理擺所引起的阻尼力與磁場強度成正比關係做解釋。經由數據擬合分析後發現，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與磁鐵強度 B 之數據分析發現其量化關係為： $F_{damp,2} = 0.067B - 90.1$ ($R_{sq} = 95.52\%$)；其中，負截距值(= -90.1)表示當磁鐵強度太小時將無法貢獻有效的渦電流阻尼力，其原因可能來自於磁鐵物理擺與鋼鐵金屬片距離(= 6.5 mm)造成磁場強度的衰減所致。

6. 從實驗六發現，當比較有無梳形圖案之金屬片時，有圖案磁鐵物理擺的阻尼作用力明顯小於無圖案磁鐵物理擺(53.07 mN (無圖案) vs. 25.46 mN (有圖案))。由於金屬面設計為梳形圖案，因此其渦電流大小會因磁鐵物理擺處於三種不同狀態(剛通過-通過中-已通過金屬區塊)而有所不同。此結果說明有梳形圖案金屬片會侷限渦電流的形成而減少阻尼作用力貢獻，進而減緩了磁鐵物理擺的阻尼振盪行為。
7. 從實驗七發現，當鋁箔張數在 1、2 張時，磁鐵物理擺的渦電流阻尼力並不明顯(鋁箔 1 張 2.67 mN vs. 鋁箔 2 張 9.11 mN)，其大小甚至較空氣阻尼力 12.52 mN 小上許多，是一新奇結果；說明放置鋁箔後，磁鐵物理擺的振幅大小並無法快速地受到渦電流阻尼力而衰減至零。將鋁箔張數持續增加至 25 張時，渦電流阻尼力達 87.05 mN，此結果可以透過集膚效應做解釋；經由數據擬合分析後發現，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 與厚度 d 之量化關係為： $F_{damp,2} = 166.77 \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{35.35}\right) \right]$ ($R_{sq} = 99.10\%$)，藉此可獲得鋁箔集膚深度實驗值($\delta(\text{實驗}) = 35.35 \text{ 張} = 26.5156 \text{ mm}$)；此大小遠大於塊體型的金屬片。透過”鋁箔/白紙/鋁箔...”金屬片結構的磁鐵物理擺實驗設計，過大的集膚深度表現是來自於鋁箔層之間的(空氣)間隙影響了鋁箔層渦電流形成所致。
8. 從實驗八發現，相較建築物 A(無物理擺)，建築物 B(物理擺)與建築物 C(磁鐵物理擺)在棉繩剪斷後，其振幅大小振幅進行較快速地衰減行為；其阻尼係數分別為 119.47 g/s、207.12 g/s 與 235.48 g/s；建築物 C 具有最大的阻尼係數說明物理擺本體的質量塊除具有原先慣性運動下的阻尼作用力之外，更可經由感應渦電流的產生提供額外的阻尼作用力來減少主結構物的振動程度。經由數據的擬合分析可獲得三種不同組成建築物的阻尼作用力大小分別為 538.96 mN(建築物 A)、912.85 mN(建築物 B)以及 1143.06 mN(建築物 C)；經由磁鐵物理擺產生的總阻尼力以消除物體的振動能量增益高達 112%，較同質量的物理擺增益亦達 25%；此結果說明：在相同質量的質量塊下，具感應渦電流效應的「磁鐵物理擺式」阻尼器較傳統「單擺式(或物理擺式)」阻尼器更具明顯的阻尼制震效果。

經由本研究的相關實驗內容，可了解磁鐵物理擺在阻尼振盪過程的影響因子與其貢獻，並可藉由渦電流的阻尼耗散以消除物體的振動能量，實現在具較輕質量塊的物理擺

(單擺)式阻尼器在建築物防震領域上的有效應用。

柒、參考資料

一、紙本資源：

1. 國民中學自然與生活科技第二、三、四冊，南一出版社
2. 高中物理第二、四冊，南一出版社
3. 普通物理學上、下冊，歐亞出版社

二、網路資源：

1. 張瑜珍、葉玉雯、李君怡、彭郁欣(2004)。單擺週期的疑惑-不同重力下單擺週期的改變。中華民國第 44 屆中小學科學展覽會國中物理組。
 2. 許芳瑜、杜庭儀(2018)。鉛錘擺連。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會國中物理組。
 3. 磁鐵撞擊一塊銅塊，磁鐵剛好在銅板前定住(影片)。檢自
<https://i2.kknews.cc/SL26pnIdBNG79gY6wA-PDpWYy8fyfn0/0.jpg>
 4. 非磁性金屬硬幣自磁鐵上方釋放，硬幣無法平穩掉落(影片)。檢自
https://i1.kknews.cc/o_yNFDTxFNBeVD4WJoZR9KjX9Mk0Ytg/0.jpg
 5. 電磁感應。檢自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%94%B5%E7%A3%81%E6%84%9F%E5%BA%94>
 6. 渦電流(維基百科)。檢自
<https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B8%A6%E9%9B%BB%E6%B5%81>
 7. 阻尼(維基百科)。檢自
<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%98%BB%E5%B0%BC&useFormat=mobile&variant=zh-tw>
 8. 圖一出處：Z. Lu, B. Huang, Q. Zhang, X. Lu, Experimental and analytical study on vibration control effects of eddy-current tuned mass dampers under seismic excitations, J. Sound & Vibration, 421, pp.153-165 (2018).
 9. 圖五出處：A. E. Lakhdari, A. Cheriet, I. N. E.-Ghoul, Skin effect based technique in eddy current non-destructive testing for thickness, IET Sci. Meas. Technol., 13, pp.255-259 (2019)
- 附註：本報告之照片與關係圖皆為研究者自行拍照與分析繪圖所得

【評語】 030110

本作品探討磁鐵物理擺阻尼振盪之探究與應用，研究上設計以磁鐵做為擺錘的物理擺，進行各項物理變因系統化實驗，將得到實驗數據以阻尼振盪物理式分析討論，其實驗設計相當細膩，數據分析方法非常科學且詳盡，是一個需要很深厚物理程度的作品，實驗結果的討論中廣泛地使用高階的數學方程式，如果可以改使用國中數學及理化概念去進行解釋，可以與課程有更緊密的結合會更佳。作品為考量實際物理擺式阻尼器在建築物防震應用，建議思考阻尼係數過大是否更容易造成建築物斷裂及設計出來的阻尼重量佔整體建築物重量的比例，可以更符合動機中所提到輕量化的阻尼振盪器。

作品簡報

磁鐵物理擺阻尼振盪之探究與應用

摘要

當以磁鐵做為擺錘的物理擺，並讓它在金屬面附近作週期振盪，經由實驗量測與理論擬合分析發現，本裝置會因電磁感應而在金屬面上產生渦電流，並對擺產生阻尼作用，**其渦電流阻尼力是空氣阻尼力的18.4倍**，進而使物理擺較快停止。進一步研究，發現渦電流阻尼作用力大小亦與**金屬片材質、厚度、擺與金屬距離、磁鐵強度**等因子相關，再者，因金屬的集膚效應，渦電流大小在金屬內的分布會隨著深度而呈現指數衰減；且此大小會受到金屬層間隙或是金屬面的不完整而進一步劣化。最後針對「減震」研究，**經由磁鐵物理擺產生的總阻尼力以消除物體的振動能量增益達112%，較同質量的物理擺增益亦達25%，可實現較輕質量塊的物理擺式阻尼器在建築物防震領域上的有效應用。**

壹、研究動機

生活中無意間看到一位網紅發布的影片，影片中他用以細線懸掛的磁鐵自高處擺動下來，並欲撞擊一立於桌面的銅板，奇怪的是磁鐵剛好在銅塊前定住，兩者沒有接觸，此現象引發 5 百萬人圍觀，還被搬運到了國內的影片網站上；經學校老師告知磁鐵會在銅塊前定住是因銅塊會因磁鐵靠近而產生一渦電流，並感應出一與磁鐵相反極性的磁場排斥力，使磁鐵定住。另外，有次家裡被告知有高額電費使用，因此去查看電錶後發現會有一金屬片在旋轉；經學校老師告知此感應式電錶是利用渦電流測量用電量的。當用電的時候，電流通過電錶裡的線圈產生磁場，磁場使電錶裡的一個鋁盤產生渦電流並轉動，帶動電錶指數錶盤變化。再者，在科學漫畫和書籍中看到關於單擺的介紹，知道單擺受到空氣阻力影響時，其擺動幅度會愈來愈小。結合上述的學習經驗與生活發現，我們以磁鐵做為擺錘，並讓它在金屬面附近作擺動，此時在擺動過程中磁鐵與金屬片的相對運動，是否會像空氣一樣地產生一阻力，並影響單擺的運動，是我們感到好奇且吸引我們做實驗探究的動機所在。

貳、研究目的

- 一、探討**有無金屬片**對磁鐵物理擺之影響
- 二、探討**不同材質金屬片**對磁鐵物理擺之影響
- 三、探討**不同金屬片厚度**對磁鐵物理擺之影響
- 四、探討**不同擺與金屬片間距**對磁鐵物理擺之影響
- 五、探討**不同強度之磁鐵**對磁鐵物理擺之影響
- 六、探討**有無梳形圖案之金屬片**對磁鐵物理擺之影響
- 七、探討**不同張數組合之金屬片**對磁鐵物理擺之影響
- 八、模擬建築物**有無磁鐵物理擺**裝置之振盪

參、研究原理

一、物理擺的簡諧振盪

當單擺的擺繩質量不可忽略時，這種情形稱為物理擺或複擺，嚴格來說，**所有真實的擺動都屬於物理擺，而單擺其實只是一種理想的狀態而已**。在不考慮空氣阻力作用下，物理擺擺動行為是簡諧振盪運動，如果物理擺是做小角度的擺動(擺角 θ 小於 5°)，由於 $\sin\theta \approx \theta$ ，其振盪週期為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + Md^2}{Mgd}} \quad (1)$$

其中， M 是物理擺的總質量， d 是轉軸位置至物理擺質心位置的距離， I 是物理擺通過轉軸轉動的轉動慣量， I_{CM} 是物理擺轉軸為質心位置時的轉動慣量，經由平行軸定理可以獲得 $I = I_{CM} + Md^2$ 。

在本實驗中，我們所使用的物理擺包含兩個物體，分別為長條狀木尺以及圓盤狀磁鐵，並將磁鐵至於木尺中心位置，亦即使木尺質心位置重合於磁鐵質心位置。當考慮長條狀木尺與圓盤狀磁鐵的轉軸皆為質心位置時，木尺轉動慣量 $I_{CM,1}$ 與磁鐵轉動慣量 $I_{CM,2}$ 分別為

$$I_{CM,1} = \frac{1}{12} M_1 b^2 \quad (2)$$

$$I_{CM,2} = \frac{1}{2} M_2 r^2 \quad (3)$$

其中， M_1 是木尺質量($M_1 = 47.10g$)， b 是木尺寬度($b = 2.90 \text{ cm}$)， M_2 是磁鐵質量($M_2 = 51.06g$)， r 是磁鐵半徑寬度($r = 10.00 \text{ mm}$)。

經由式(2-3)計算，可以獲得木尺轉動慣量 $I_{CM,1} = 3.301 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，以及磁鐵轉動慣量 $I_{CM,2} = 2.553 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。其次，經由平行軸定理計算，可以獲得 $I = (I_{CM,1} + I_{CM,2}) + Md^2 = 6.141 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。最後，透過式(1)計算，可以獲得物理擺**無空氣阻力作用下的振盪週期 $T = 1.004 \text{ sec}$** 。

二、物理擺的阻尼振盪

如果物理擺除了張力與重力兩作用力之合力外，同時還受到一個和速率成正比的**阻尼作用力**，則物理擺擺動行為會由簡諧振盪模式轉為**阻尼振盪模式**，其運動過程中位移 x 對應時間 t 關係為

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \delta) \quad (4)$$

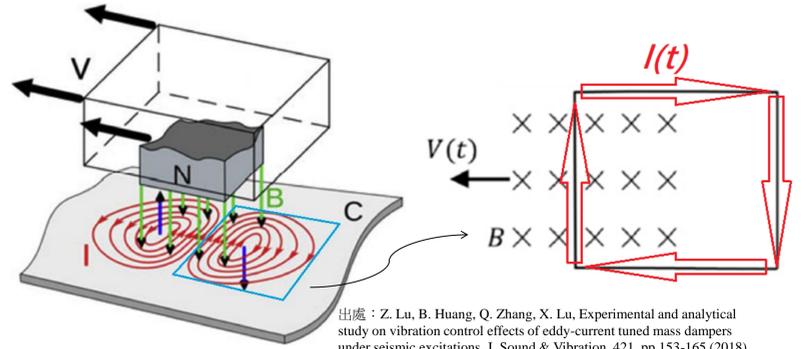
其中 x_0 為初始振幅， β 為衰減係數($\beta = \frac{\gamma}{2M}$)， ω_d 為阻尼振盪頻

率($\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ ，其中 T_d 是阻尼振盪週期， ω_0 是簡諧振盪頻率($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ，其中 T_0 是簡諧振盪週期))， δ 為起始相位角， δ 大小可以由初始條件決定。

在本實驗中，我們所設計的物理擺受到的阻尼作用包含兩個作用力，分別為空氣阻尼力 $F_{damp,1}$ 以及渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 。一般而言，空氣阻尼作用力 $F_{damp,1}$ 大小與空氣流動速度成正比，亦即 $F_{damp,1} = \gamma_1 v$ ；相較之下，渦電流阻尼力 $F_{damp,2}$ 的形成較為複雜。

三、電磁感應與渦電流的形成

實驗中利用兩塊圓形磁鐵吸附於長條木尺作為物理擺，並將其靠近金屬片進行擺動；藉由磁鐵與金屬片的相對運動，來產生阻止物理擺運動所需的阻尼。下圖為磁鐵物理擺與金屬片之間的相對運動以及感應渦電流形成之示意圖：



出處：Z. Lu, B. Huang, Q. Zhang, X. Lu, Experimental and analytical study on vibration control effects of eddy-current tuned mass dampers under seismic excitations, J. Sound & Vibration, 421, pp.153-165 (2018)

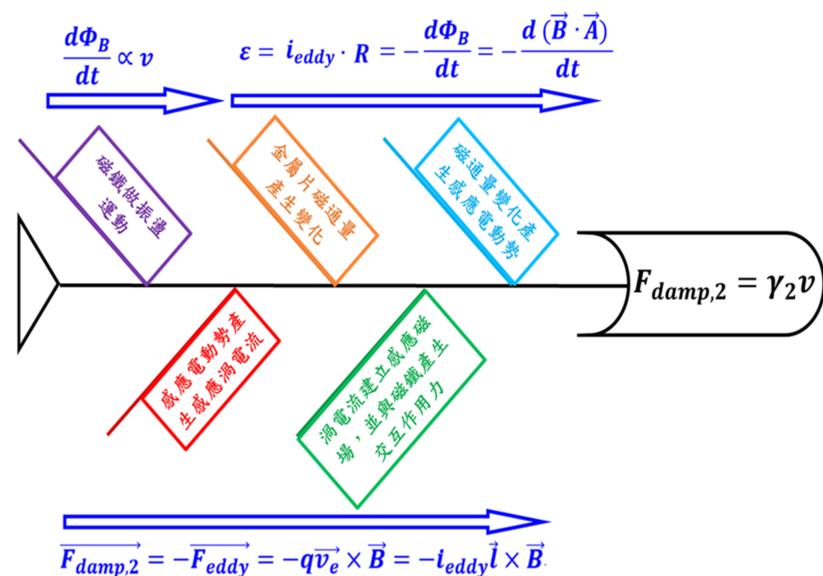
從金屬片中渦電流的橫切面圖可以看出磁鐵的磁力線深入金屬板中，當物理擺運動時，磁鐵跟著物理擺一起移動，使得金屬面上產生局部磁通量變化。當磁鐵相對金屬片以向左方向進行運動時，對金屬片左局部區塊而言，會產生一逆時針方向之感應渦電流，並感應出一個與磁鐵相同極性的感應磁場，以反抗局部磁通量的變化；因此感應磁場方向和磁鐵磁場方向相反，故會排斥磁鐵向左運動，亦即產生一向右方向的阻尼作用力。另一方面，對金屬片右局部區塊而言，會產生一順時針方向之感應渦電流，並感應出一個與磁鐵相反極性的磁場，以反抗局部磁通量的變化；因此感應磁場方向和磁鐵磁場方向相同，故會排斥磁鐵向左靠近，亦即亦會產生一向右方向的阻尼作用力。

渦電流又叫傅科電流，是法國物理學家萊昂·傅科 (Jean Bernard Léon Foucault) 在1851年發現的。渦電流是移動的磁場和導體相交產生的電磁感應的結果，因為導體中產生了圓形的閉合迴路，所以叫做渦電流。渦電流的圓圈和磁場方向垂直。磁場變化越快，渦電流就越強。由於磁通量變化率 $\frac{d\Phi_B}{dt}$ 和物理擺的(線)速率 v (或角速率 ω) 成正比，因此渦電流 i 與磁通量變化率成正比；亦即：渦電流對物理擺所引起的阻尼作用力與物理擺速率 v 成正比 ($F_{damp,2} = \gamma_2 v$)，如下圖所示。其中，阻尼係數 γ_2 的大小，可經由本研究諸多實驗因子來調整 (例如：利用磁鐵與金屬片的相對距離來調整，磁鐵越靠近金屬面，阻尼係數越大)。

結合上述原理，在電磁感應作用下物理擺的阻尼振盪行為，其位移 x 對應時間 t 關係，可以下列關係式(5)描述：

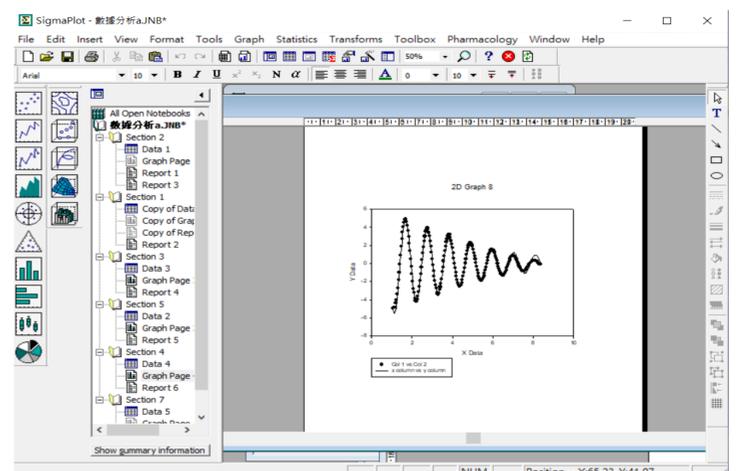
$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_d t + \delta) = x_0 e^{-\left(\frac{\gamma}{2M}\right)t} \cos\left(\frac{2\pi}{T_d} t + \delta\right) \quad (5)$$

其中， γ 為阻尼係數 ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ， γ_1 與 γ_2 分別為空氣阻尼係數以及渦電流阻尼係數)， M 為物理擺總質量， T_d 為阻尼振盪週期。

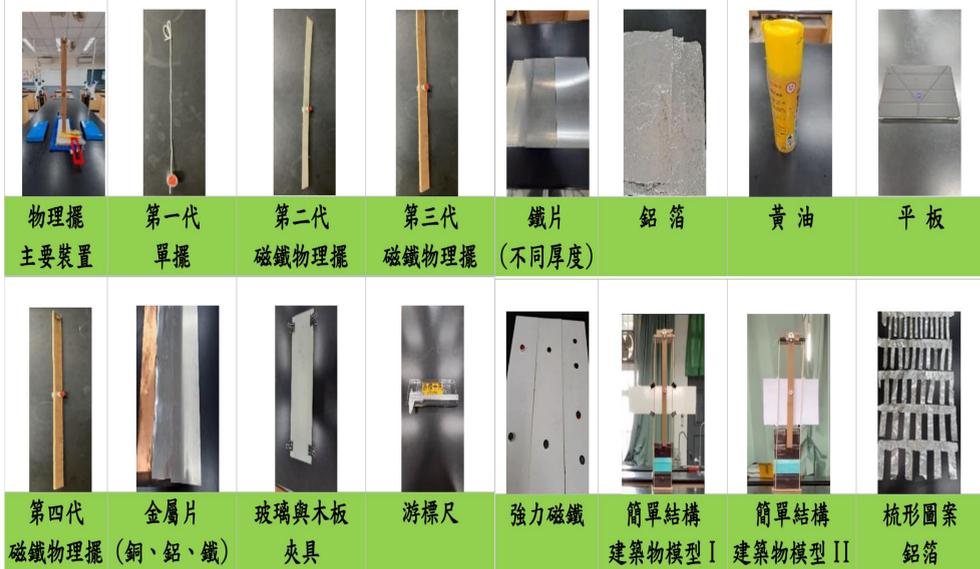


四、實驗數據分析

本實驗的數據分析分為二階段：(1)使用**最小平方差法**，進行實驗數據與理論模型(式5)的**擬合(fitting)**工作；經由高擬合程度 (R_{sq}) 的關係分析，可以獲得**初始振幅、阻尼係數、阻尼振盪頻率、阻尼振盪週期、起始相位角**等擬合參數。(2)經由**渦電流對物理擺所引起的阻尼作用力 $F_{damp,2}$ 與物理擺速率 v ($v = \omega_d \cdot d$) 關係 ($F_{damp,2} = \gamma_2 v$)**，可以進一步獲得渦電流阻尼作用力大小。

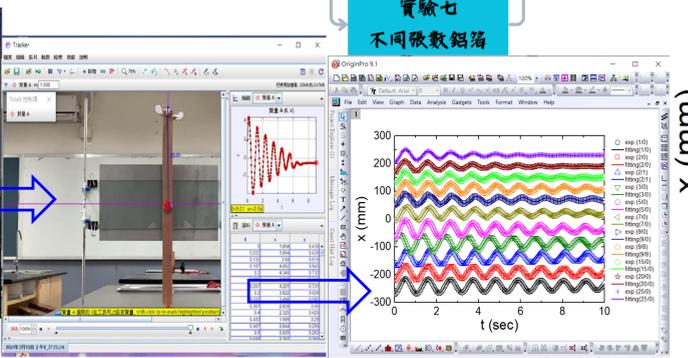
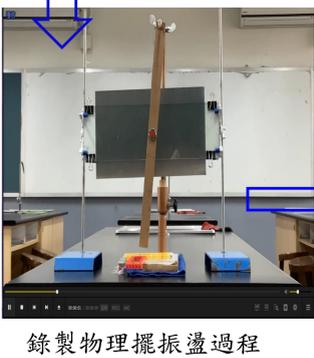
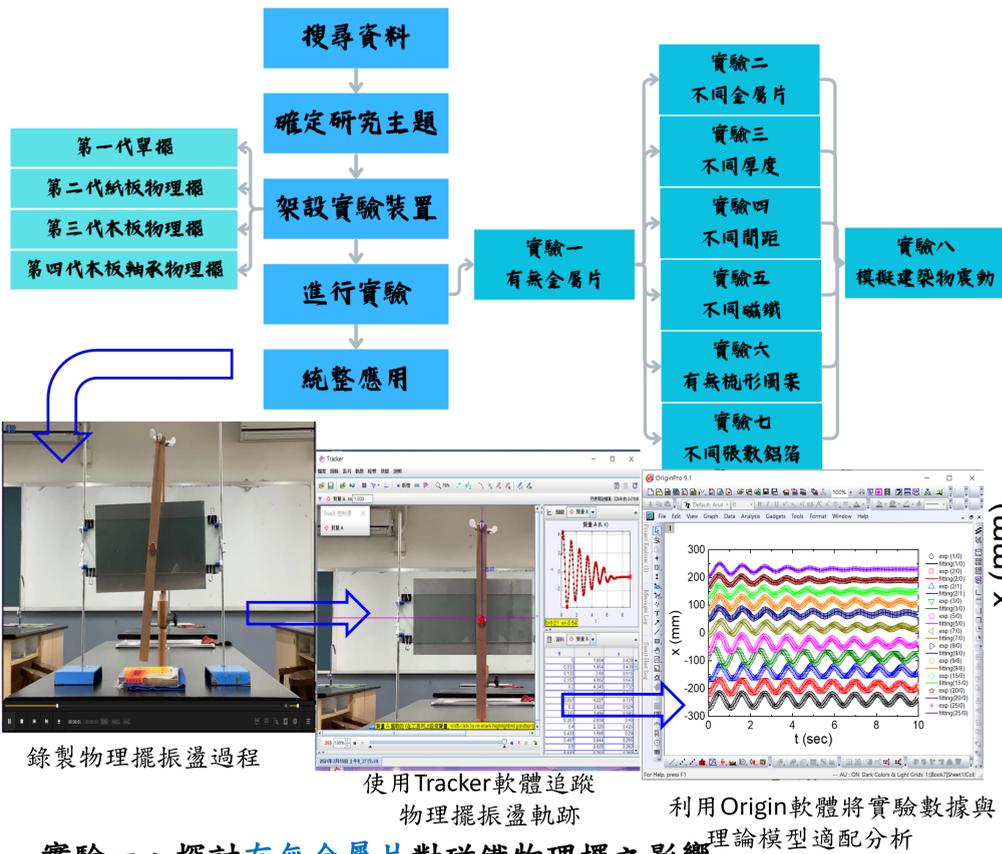


肆、研究設備與器材



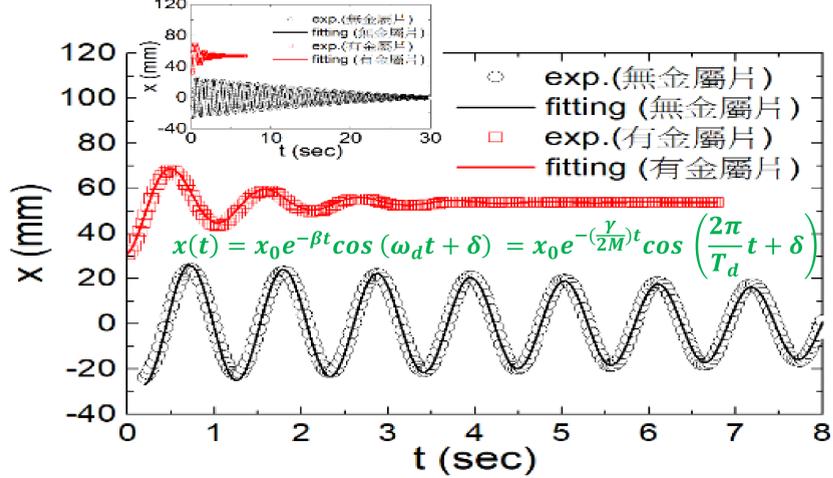
伍、研究過程、結果與討論

實驗架構



錄製物理擺振盪過程
使用Tracker軟體追蹤物理擺振盪軌跡
利用Origin軟體將實驗數據與理論模型適配分析

實驗一、探討有無金屬片對磁鐵物理擺之影響

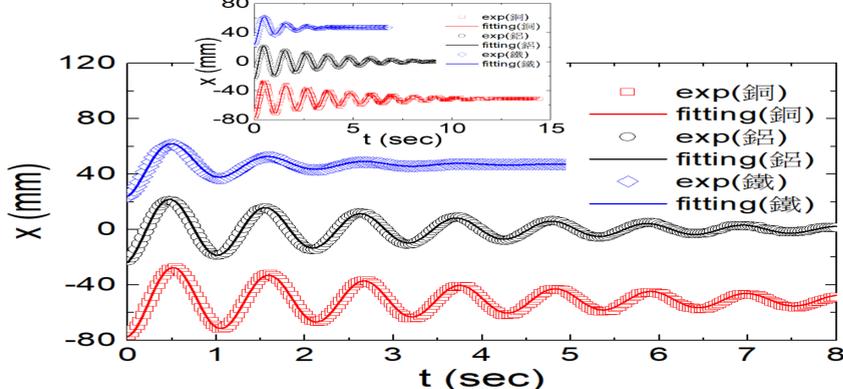


樣本	振幅 x_0 (mm)	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	相位常數 δ	擬合程度 R_{sq} (%)
無金屬片	27.47	0.0452	8.59	1.07	8.40	98.20
有金屬片	23.32	0.8855	168.35	1.09	3.29	98.05

樣本	阻尼係數 γ (g/s)	線速率 v (m/s)	總阻尼力 (mN)	渦電流阻尼力 (mN)	空氣阻尼力 (mN)
無金屬片	8.59	1.457	12.52	0	12.52
有金屬片	168.35	1.444	243.17	230.65	12.52

藉由有無金屬片的實驗，可以獲得渦電流的阻尼作用力為230.65 mN；此大小約為空氣阻尼作用力的18.4倍

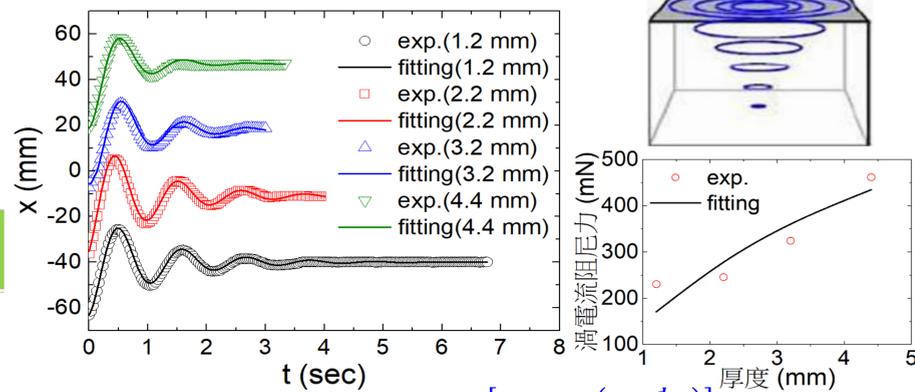
實驗二、不同材質金屬片對磁鐵物理擺之影響



樣本	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	擬合程度 R_{sq} (%)	渦電流阻尼力 (mN)
銅	0.2444	46.47	1.08	99.00	55.12
鋁	0.3005	57.13	1.08	98.94	70.68
鐵	0.8855	168.35	1.09	98.05	230.65

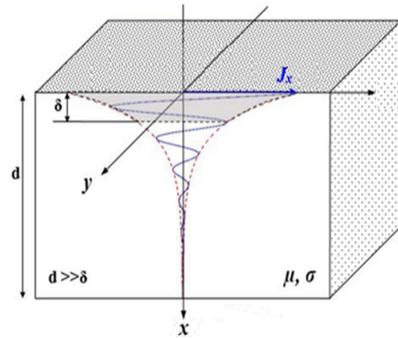
三種材質金屬片下，由阻力的趨勢(銅 < 鋁 < 鐵)不同於電導率趨勢(銅 > 鋁 > 鐵)，卻相同於金屬片厚度趨勢(銅 < 鋁 < 鐵)可以知道：在渦電流阻尼力貢獻上除考慮金屬片材質外，金屬片厚度因子亦扮演一重要角色

實驗三、探討不同金屬片厚度對磁鐵物理擺之影響



$$F_{damp,2} = 636.61 \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{3.8317}\right) \right] \quad (R_{sq} = 80.28\%)$$

樣本	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	擬合程度 R_{sq} (%)	渦電流阻尼力 (mN)
1.2 mm	0.8855	168.35	1.09	98.05	230.65
2.2 mm	0.9298	176.77	1.08	98.75	245.83
3.2 mm	1.2020	228.52	1.08	98.18	324.38
4.4 mm	1.7276	328.45	1.09	99.08	461.81



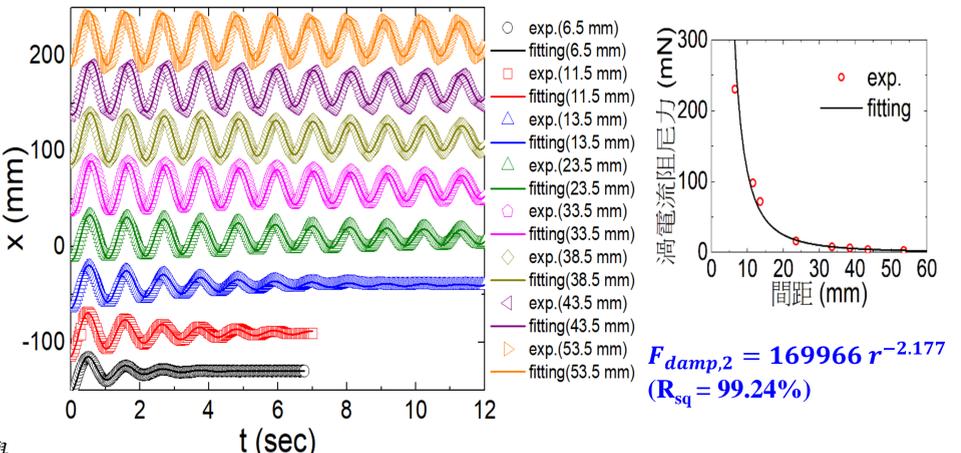
1. 渦電流密度 J_{eddy} 對應位置 x 關係為
 $J_{eddy}(x) = J_s \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$; $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$
 其中 J_s 為金屬表面的渦電流密度， δ 為集膚深度， ρ 為金屬電阻率($\rho = \frac{1}{\sigma}$)， ω 為角頻率($\omega = \frac{2\pi}{T_d}$)， μ 為金屬磁導係數。
 2. 整體渦電流密度 J_{tot} 與對應整體渦電流阻力可分別表示為

$$J_{tot} = 2 \int_0^d J_{eddy}(x) dx = 2 J_s \delta [1 - \exp\left(-\frac{d}{\delta}\right)]$$

$$F_{damp,2} = C J_{tot} = C' \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{\delta}\right) \right]$$

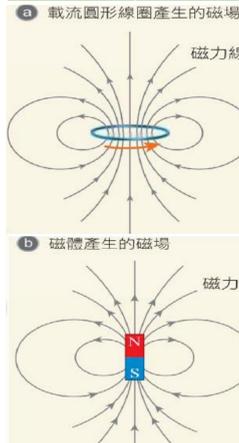
出處：A. E. Lakhdari, A. Chriet, I. N. E.-Ghoul, Skin effect based technique in eddy current non-destructive testing for thickness, IET Sci. Meas. Technol., 13, pp.255-259 (2019)

實驗四、探討不同擺與金屬片間距對磁鐵物理擺之影響



$$F_{damp,2} = 169966 r^{-2.177} \quad (R_{sq} = 99.24\%)$$

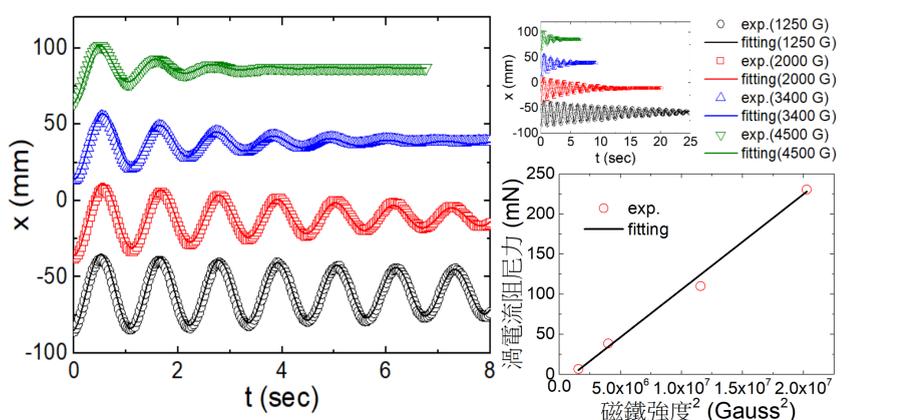
樣本	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	擬合程度 R_{sq} (%)	渦電流阻尼力 (mN)
6.5 mm	0.8855	168.35	1.09	98.05	230.65
11.5 mm	0.4008	76.20	1.08	98.22	98.38
13.5 mm	0.3053	58.04	1.08	98.51	72.04
23.5 mm	0.1040	19.77	1.08	97.90	16.30
33.5 mm	0.0739	14.05	1.08	96.91	8.00
38.5 mm	0.0686	13.04	1.08	98.20	6.48
43.5 mm	0.0602	11.45	1.08	94.92	4.19
53.5 mm	0.055	10.49	1.08	97.06	2.82



- 當間距由6.5 mm逐漸增加至53.5 mm，磁鐵物理擺的(最大)阻尼作用力由230.65 mN逐漸減少至2.82 mN。此結果說明渦電流大小所造成的阻尼作用力隨擺與金屬片之間距增加而減少。
- 當磁鐵可以看成一載流線圈時，磁鐵在垂直磁鐵面的中心線軸上所建立的磁場強度 B 與距離 r 會呈現 $B \propto r^{-3}$ 關係；亦即磁場強度隨距離呈立方反比關係，磁鐵物理擺的阻尼作用力與擺與金屬片之間距呈現六次方反比關係。
- 渦電流阻力 $F_{damp,2}$ 與距離 r 之數據分析發現其量化關係為： $F_{damp,2} = 169966 r^{-2.177}$ ($R_{sq} = 99.24\%$)。其原因可能來自於磁鐵在非垂直磁鐵面中心線軸上的其他位置所建立的磁場強度 B 與距離 r 並無法單純表示為立方反比關係所致。

出處：https://images.app.goo.gl/GAD65cK4rkHgF3CM8

實驗五、探討不同強度之磁鐵對磁鐵物理擺之影響

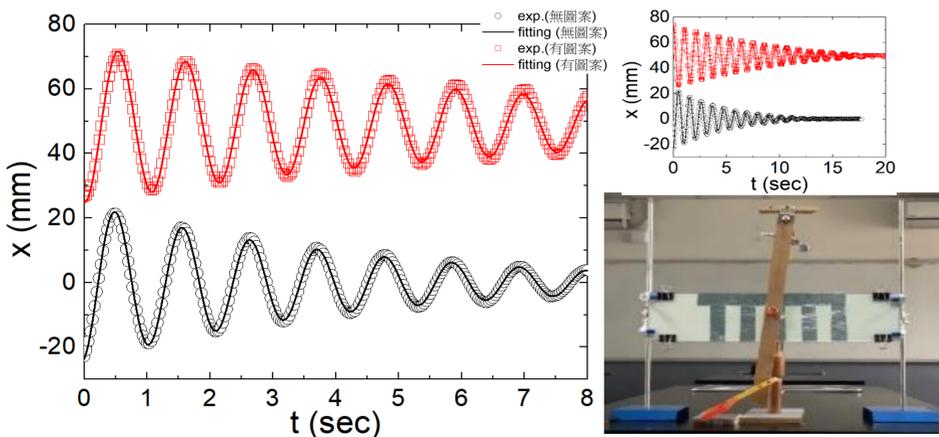


$$F_{damp,2} = 1.19 \times 10^{-5} B^2 - 13.043 \quad (R_{sq} = 99.28\%)$$

樣本	衰減係數 β (1/s)	阻尼係數 γ (g/s)	週期T (s)	擬合程度 R_{sq} (%)	渦電流阻尼力 (mN)
1250 G	0.0738	14.03	1.13	97.46	6.91
2000 G	0.1917	36.45	1.12	97.16	38.66
3400 G	0.4506	85.67	1.10	97.58	110.31
4500 G	0.8855	168.35	1.09	99.05	230.65

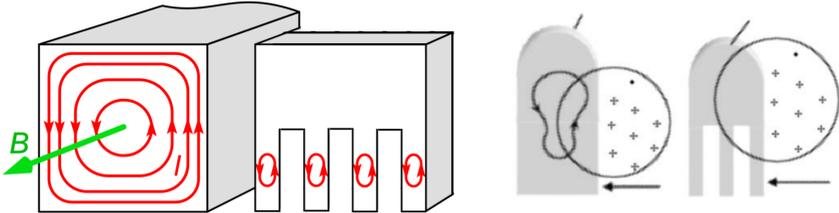
當磁鐵強度增加時，擺的阻力力隨之增加；說明渦電流大小隨磁鐵強度增加而增加。此結果可以透過渦電流對物理擺所引起的阻力力與磁場強度平方成正相關($F_{damp,2} = 1.19 \times 10^{-5} B^2 - 13.043$)關係做解釋

實驗六、探討有無梳形圖案之金屬片對磁鐵物理擺之影響



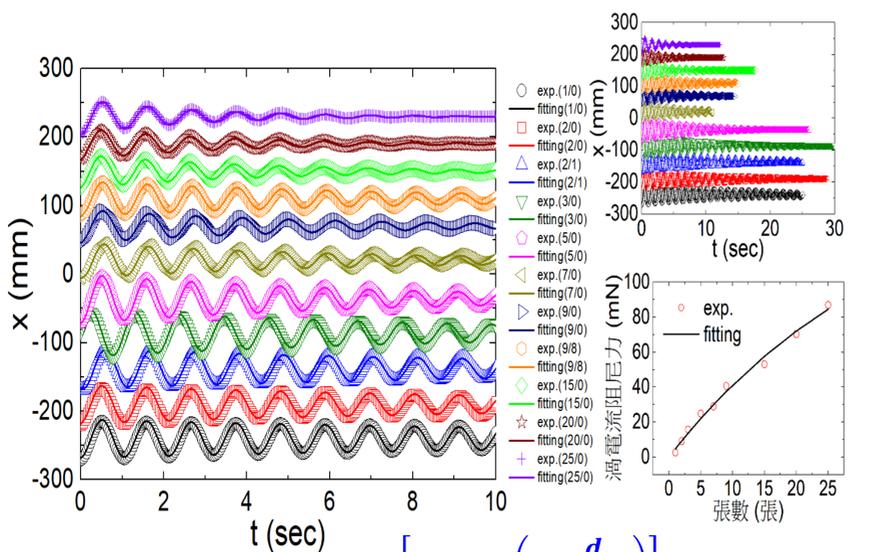
樣本	衰減係數β (1/s)	阻尼係數γ (g/s)	週期T (s)	擬合程度R _{sq} (%)	渦電流阻尼力 (mN)
無圖案	0.2335	44.77	1.07	99.46	53.07
有圖案	0.1365	25.95	1.07	98.33	25.46

比較有無梳形圖案之金屬片，有圖案之阻尼力明顯小於無圖案之阻尼力。此結果可以透過有梳形圖案金屬片會侷限渦電流的形成而減少阻尼作用力貢獻做解釋



金屬面設計為梳形圖案，其渦電流的形成可分三個階段：(1)當磁鐵剛通過金屬片的指寬區域邊緣時，由於局部磁通量逐漸變大而導致渦電流產生；(2)當磁鐵通過並位於金屬片的指寬區域中央時，由於局部磁通量不再改變而導致渦電流消失；(3)當磁鐵已通過金屬片的指寬區域邊緣時，由於局部磁通量逐漸減少，亦導致渦電流產生，而此電流方向與階段(1)相反。再者，當磁鐵通過金屬片的縫寬區域時，並無渦電流產生。

實驗七、探討不同張數組合之金屬片對磁鐵物理擺之影響

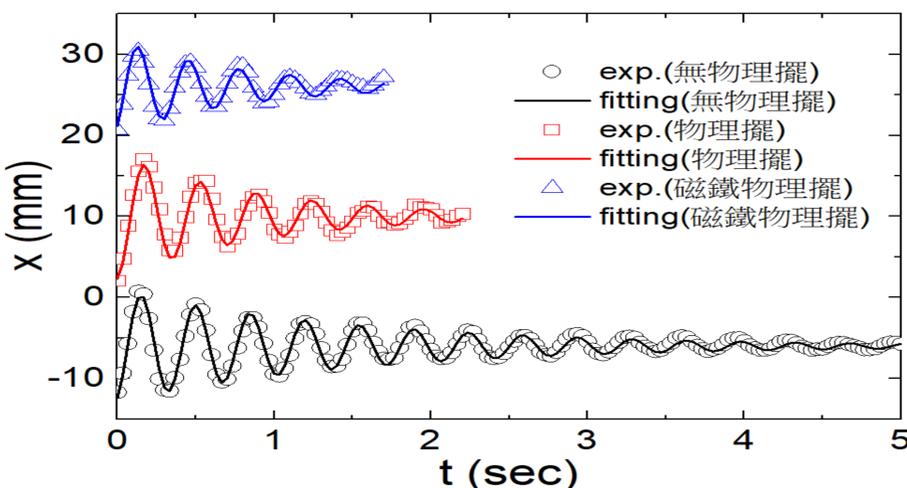
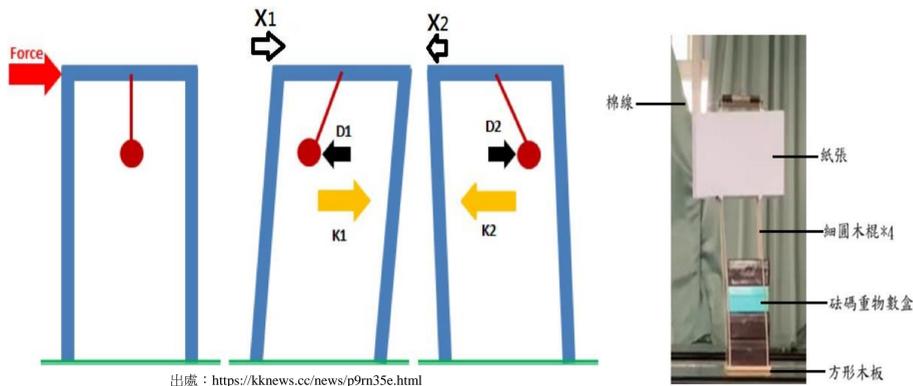


$$F_{damp,2} = 166.77 \left[1 - \exp\left(-\frac{d}{35.35}\right) \right] \quad (R_{sq} = 99.10\%)$$

樣本	衰減係數β (1/s)	阻尼係數γ (g/s)	週期T (s)	擬合程度R _{sq} (%)	渦電流阻尼力 (mN)
鋁箔/紙					
1/0	0.0547	10.40	1.08	98.44	2.67
2/0	0.0779	14.81	1.08	98.38	9.11
2/1	0.0744	14.14	1.08	98.93	8.14
3/0	0.1017	19.34	1.07	98.37	15.78
5/0	0.1344	25.55	1.07	99.20	24.92
7/0	0.1497	28.40	1.08	99.36	28.97
9/0	0.1812	34.45	1.08	99.16	40.68
9/8	0.1240	23.57	1.08	98.87	21.78
15/0	0.2335	44.77	1.07	99.46	53.07
20/0	0.2976	56.58	1.07	98.39	70.35
25/0	0.3584	68.14	1.07	99.49	87.05

- 當鋁箔張數在1、2張時，擺的阻尼力並不明顯是一新奇結果；說明有無放置(單張)鋁箔，並不影響擺的振盪
- 將張數持續增加後，擺的阻尼力始明顯增加。此結果可以透過集膚效應做解釋，並獲得集膚深度實驗值(δ(實驗)) = 35.35張 = 2.65 mm；此大小遠小於塊體型的鋁金屬片δ(理論) = 85.07 mm
- 當透過"鋁箔/白紙/鋁箔..."結構的實驗設計，過小的集膚深度表現是來自於鋁箔層之間的(空氣)間隙影響了鋁箔層渦電流形成，造成渦電流的快速衰減

實驗八、模擬建築物有無磁鐵物理擺裝置之振盪



樣本	衰減係數β(1/s)	阻尼係數γ(g/s)	週期T(s)	擬合程度R _{sq} (%)	總阻尼力(mN)
無物理擺	0.6284	119.47	0.35	96.33	538.96
物理擺	1.0894	207.12	0.36	95.84	912.85
磁鐵物理擺	1.2386	235.48	0.33	95.90	1143.06

陸、結論

本研究在磁鐵物理擺側面放置金屬片，探究不同條件下擺在其阻尼振盪過程中，因電磁感應產生渦電流阻尼力 $F_{damp}(=\gamma v)$ 而影響振盪情況的關係，由實驗結果與討論可以得到以下幾點結論：

- 藉由有無金屬片的實驗，可以獲得渦電流的阻尼作用力為230.65 mN；此大小約為空氣阻尼作用力的18.4倍。
- 三種材質金屬片下，擺的阻尼力分別為67.34 mN (銅, 0.3 mm) vs. 83.20 mN (鋁, 0.4 mm) vs. 243.17 mN (鋼鐵, 1.2 mm)。由阻力的大小趨勢(銅 < 鋁 < 鋼)不同於電導率趨勢(銅 > 鋁 > 鋼)，卻相同於金屬片厚度趨勢(銅 < 鋁 < 鋼)可以知道：在渦電流阻尼力貢獻上除考慮金屬片材質外，金屬片厚度因子亦扮演一重要角色。
- 當鋼鐵金屬片之厚度增加時，擺的阻尼力隨之增加(230.65 mN (1.2 mm) vs. 461.81 mN (4.4 mm))；其大小與金屬片厚度不成正比關係，說明渦電流在金屬內的不均勻分布。此結果可以透過集膚效應做解釋；經數據分析可獲得集膚深度數值(δ(實驗)) = 3.8317 mm；δ(理論) = 6.268 mm)。
- 當擺與金屬片之間距增加時，擺的阻尼力隨之減少(230.65 mN (6.5 mm) vs. 2.82 mN (53.5 mm))；此結果可以透過磁場強度隨距離立方呈反相關關係($B \propto r^{-3}$)做解釋。
- 當磁鐵強度增加時，擺的阻尼力隨之增加(6.91 mN (1250 G) vs. 230.65 mN (4500 G))；說明渦電流大小隨磁鐵強度增加而增加。此結果可以透過渦電流對物理擺所引起的阻尼力與磁場強度平方成正相關($F_{damp,2} = 1.19 \times 10^{-5} B^2 - 13.043$)關係做解釋。
- 當比較有無梳形圖案之金屬片時，前者阻尼力明顯小於後者(25.46 mN (有圖案) vs. 53.07 mN (無圖案))。此結果可以透過有梳形圖案金屬片會侷限渦電流的形成而減少阻尼作用力貢獻做解釋。
- 當鋁箔張數在1、2張時，擺的阻尼力並不明顯(2.67 mN (1張) vs. 9.11 mN (2張))，是一新奇結果；說明有無放置(單張)鋁箔，並不影響擺的振盪。將張數持續增加後，擺的阻尼力始明顯增加。此結果可以透過集膚效應做解釋，並獲得集膚深度實驗值(δ(實驗)) = 35.35張 = 2.65156 mm；此大小遠小於塊體型的鋁金屬片δ(理論) = 85.07 mm)。當透過"鋁箔/白紙/鋁箔..."結構的實驗設計，過小的集膚深度表現是來自於鋁箔層之間的(空氣)間隙影響了鋁箔層渦電流形成，造成渦電流的快速衰減。
- 相較建築物A(無物理擺)，建築物B(物理擺)與建築物C(磁鐵物理擺)在棉繩剪斷後，其振幅進行較快速地衰減行為；建築物C具有最大的阻尼係數說明物理擺本體的質量塊除具有原先慣性運動下的阻尼作用力之外，更可經由感應渦電流的產生提供額外的阻尼作用力來減少主結構物的振動程度。結果顯示，經由磁鐵物理擺產生的總阻尼力以消除物體的振動能量增益高達112%，較同質量的物理擺增益亦達25%；此結果說明：在相同質量的質量塊下，具感應渦電流效應的「磁鐵物理擺式」阻尼器較傳統「單擺式(或物理擺式)」阻尼器更具明顯的阻尼制震效果。

經由本研究的相關實驗內容，可了解磁鐵物理擺在阻尼振盪過程的影響因子與其貢獻，並可藉由渦電流的阻尼耗散以消除物體的振動能量，實現在具較輕質量塊的物理擺(單擺)式阻尼器在建築物防震領域上的有效應用。

柒、未來展望

- 希望能藉由較高強力磁鐵與更精確的實驗裝置設計，觀察並量測磁鐵物理擺由次阻尼振盪行為，過渡到臨界阻尼振盪，並轉換為過阻尼振盪行為的三種實驗情境。
- 希望透過渦電流的能量消散，實現此電磁物理擺在力學工程的相關應用，例如：在遭受地震或暴風等相關震動或搖晃下，使用此裝置以降低震動對橋墩或高建築結構等物體的傷害；或在遇到突發狀況下，使用此裝置以非接觸方式、迅速且有效地進行運輸工具的電磁煞車動作等。

捌、參考資料

- 紙本資源：
 - 國民中學自然與生活科技第二、三、四冊，南一出版社
 - 高中物理第二、四冊，南一出版社
 - 普通物理學上、下冊，歐亞出版社
- 網路資源：
 - 張瑜珍、葉玉雯、李君怡、彭郁欣(2004)。單擺週期的疑惑-不同重力下單擺週期的改變。中華民國第44屆中小學科學展覽會國中物理組。
 - 許芳瑜、杜庭儀(2018)。鉛錘擺連。中華民國第58屆中小學科學展覽會國中物理組。
 - 磁鐵撞擊一塊銅塊，磁鐵剛好在銅板前定住(影片)。檢自 <https://i2.kknews.cc/SL26pnIdBNG79gY6wA-PDpWYy8fypn0/0.jpg>
 - 金屬硬幣自磁鐵上方釋放，硬幣無法平穩掉落(影片)。檢自 https://i1.kknews.cc/o_yNFDTxFNBeVD4WJoZR9KjX9Mk0Ytg/0.jpg
 - 電磁感應。檢自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%94%B5%E7%A3%81%E6%84%9F%E5%BA%94>
 - 渦電流(維基百科)。檢自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B8%A6%E9%9B%BB%E6%B5%81>
 - 阻尼(維基百科)。檢自 <https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E9%98%BB%E5%B0%BC&useFormat=mobile&variant=zh-tw>

本報告之照片與關係圖皆為作者自行拍照與分析繪圖所得