中華民國第63屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080414

你比多少人幸運?以機率累積函數破解抽獎次數中位數錯覺

學校名稱： 金門縣金城鎮中正國民小學

作者：	指導老師：
小六 羅可倫	徐瑄廷
小六 莊昊凡	洪曙天
小六 莊詠翔	
小五 許嚴丰	

關鍵詞： 機率累積函數、等比數列、中位數

摘要

本研究旨在探討抽獎活動中，抽中累積人數的分布狀況，想要找出抽取次數的中位數。若花費的抽取次數小於中位數，即比一半的人還幸運。大多數人會認為在抽中率為5%的情況下，花 20 次抽到算是比一半的人幸運，然而，透過人工抽名片卡紙和 Scratch 程式模擬後，發現大家預期的次數皆大於實際中位數。

使用 Excel 函數將公式一般化後，發現「第 n 次抽中的機率」為等比數列，「n 次內抽中的機率」為等比級數。又因為公比小於 1，造成前半部累積項次較少就達到 50%，後半部需較多項次才能累積至 100%，故「運氣差的人花費的次數」拉高整體的抽獎次數，才造成大家預期次數與理論值不同的狀況。最後應用研究發現，探討抽紀念酒的運氣分布和抽齊生肖紀念酒的可能性。

壹、前言

一、研究動機

(一)　轉蛋法通過：

知名遊戲實況主 Dinter 花費百萬元臺幣抽取天堂 M 虛擬寶物，實測抽中機率遠低於官方公告之中獎率，讓廣大玩家們更重視相關法規的訂定。在 2020 年 7 月 15 日，終於通過轉蛋法，規範遊戲公司必須明訂抽獎內容的獲得機率。因此，在知道確切中獎率後，我們可以統計抽獎結果，知道自己大概花多少資源就能抽到指定的寶物，設立停損點。

（二）　同學都能花比預期還少的次數就抽到遊戲寶物，是錯覺？還是數學？

遊戲抽獎機制和預期判斷如下：

遊戲寶物的抽中機率為 5%，因為$5\% \times 20 = 100\%$，大家會預期抽 20 次能「至少抽到 1 次」寶物。因此若在 20 次內抽中 1 次，就算是比一半的人幸運。

但是經過調查，卻有約七成的同學花不到 20 次就抽中寶物了。如果 20 次是所有抽取次數數據分布的中間值，這完全不符合大家的預期與直覺。我們認為可能是樣本數不足的關係造成，於是想用人工抽卡模擬及 Scratch 程式模擬的方式增加樣本數，最後對照 Excel 函數計算出的理論值。

（三）　金門紀念酒的公開抽獎機率資訊是否與實際狀況相同？

金門每年都有紀念酒價購資格的抽籤活動，家中長輩都會互相詢問是否有抽中，就我們的觀察發現抽中率其實不高，甚至有人從來都沒有抽中，感覺抽中率比預期的還要低。金酒的機率公開透明，也會刊登在報章雜誌上，因此，我們想要用數學驗證其公開資訊及說法是否正確無誤。

二、研究目的

(一) 探討中獎率為 p 時，求得「n 次內抽中 1 次」其 n 值中位數的方式及真偽。

(二) 探討「第 n 次抽中的機率」及「n 次內抽中的機率」之意義與關係。

(三) 探討用直覺預期的「抽取次數中位數」與理論值不同的原因。

(四) 探討抽「紀念酒」的運氣分布及抽齊一整套「生肖紀念酒」之可能性。

三、文獻回顧

生日悖論（Birthday Parodox），是一個經典違反直覺的問題。在一個班級中，最少需要多少人，當中兩人相同生日的機率才會過半。答案是 23 人，班上若有 60 人時，有兩人相同生日的機率更高達 99%。大部分的人會將問題理解為「其他人與自己同天生日的機率」，忽略了「班級中的人兩兩之間存在生日相同的機率」。本研究與生日悖論類似，針對生活中「違反直覺」的事件，用不同的方式求證，尋找正確的答案及造成迷思的原因。

貳、研究設備及器材

一、電腦

二、Scratch 程式

三、Excel

四、名片紙

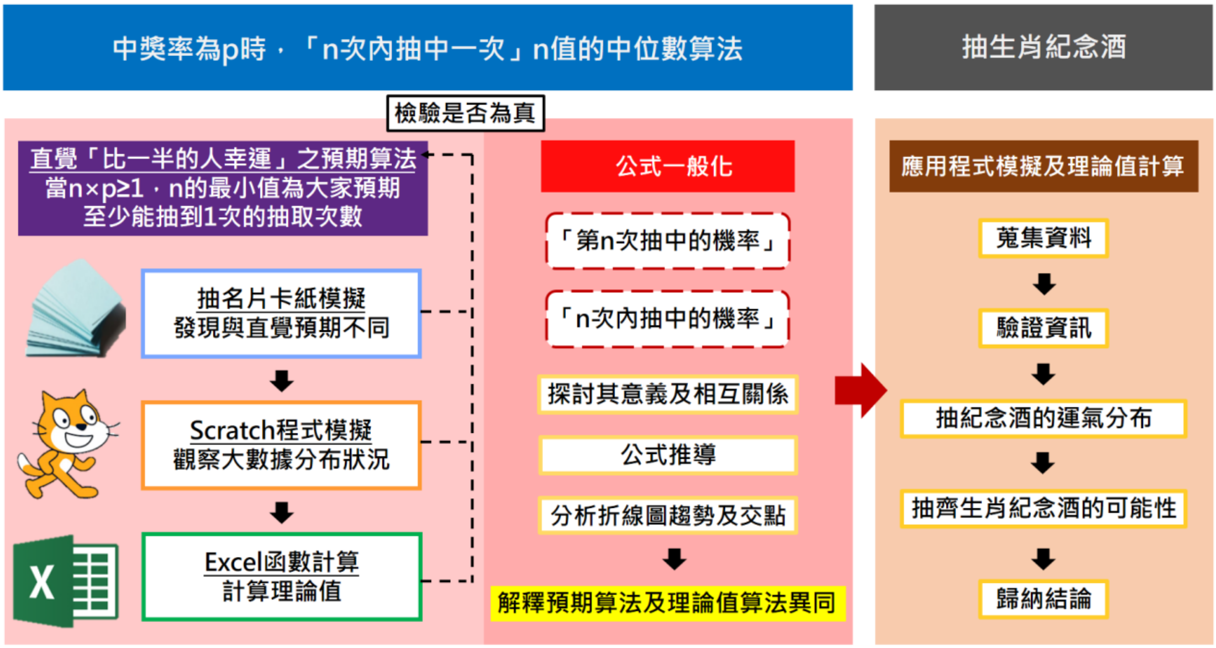
五、紀錄紙

六、紀錄文具

七、計算機

參、研究過程或方法

一、研究架構圖



二、名詞解釋與符號定義

（一）中位數(Md)：將一組數值資料由小到大排列，最中間的數值即為中位數。其中，若有奇數個資料，則取最中間的數值為中位數；若有偶數個資料，則取最中間兩個數值的平均數為中位數。

（二）比一半人還幸運的定義：在抽獎活動中，每個人不斷抽獎**直到抽中一次**，即記錄其花費的抽獎次數。取所有人花費抽獎次數的中位數，若某人花費的抽獎次數小於中位數，即代表比一半的人還幸運。舉例如下(表 3-1、3-2)，n_1、n_3、n_4、n_7、n_{10}共五位實驗者算是比一半的人幸運。

表 3-1

實驗者	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
花費次數	4	10	3	6	9	48	2	8	18	5

表 3-2

數據由小到大排列	中位數
2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 18, 48	(6+8)/2=7

（三）大家會預期比一半人幸運的抽取次數之計算：在中獎率為 5%的情況，因為$5\% \times 20 = 100\%$，大家會預期抽 20 次至少能抽到 1 次寶物，若在 20 次內抽中 1 次，就算是比一半的人幸運；若超過 20 次才抽中，則比一半的人還不幸運。故令中獎率為 p，抽獎次數為 n，當$n \times p \geq 1$，n 的最小值為大家預期（根據經驗判斷）至少能抽到 1 次的抽取次數。

（四）抽了 n 次才抽中的機率：本研究假設之抽獎情境是每個人不斷抽獎直到抽中 1 次，若第 n 次才抽中，代表前幾次全部皆未抽中。**抽中 1 次後，即退出活動**。

（五）n 次內就抽中的機率：若 3 次內就抽中，包含「抽了第 1 次就抽中」、「第 1 次沒中，第 2 次抽中」及「第 1 次和第 2 次都沒中，第 3 次抽中」的情況，將機率累加後，定義為「n 次內抽中的機率」。

三、研究過程

（一）使用名片卡紙人工模擬

1. 模擬中獎率為 5%的情況，在 20 張名片卡紙中有 1 張是獎品，每次抽取後皆須將名片卡紙放回，直到抽中獎品。令抽到獎品花費的次數為 n，模擬 50 組實驗，記錄n_1-n_{50}的數據，如下表(表 3-2)：

表 3-3

實驗	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
次數	5	29	32	12	5	13	15	18	3	8
實驗	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{15}	n_{16}	n_{17}	n_{18}	n_{19}	n_{20}
次數	4	4	8	19	11	1	12	24	13	1
實驗	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}	n_{25}	n_{26}	n_{27}	n_{28}	n_{29}	n_{30}
次數	19	27	4	8	14	12	9	16	18	160
實驗	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}	n_{35}	n_{36}	n_{37}	n_{38}	n_{39}	n_{40}
次數	81	5	8	3	3	3	41	7	99	11
實驗	n_{41}	n_{42}	n_{43}	n_{44}	n_{45}	n_{46}	n_{47}	n_{48}	n_{49}	n_{50}
次數	2	7	1	30	3	4	4	3	13	47

2. 模擬中獎率為 10%的情況，在 10 張名片卡紙中有 1 張是獎品，每次抽取後皆須將名片卡紙放回，直到抽中獎品。令抽到獎品花費的次數為 n，模擬 50 組實驗，記錄m_1-m_{50}的數據，如下表(表 3-4)：

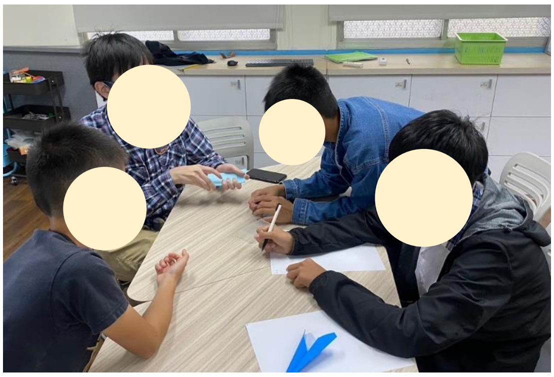
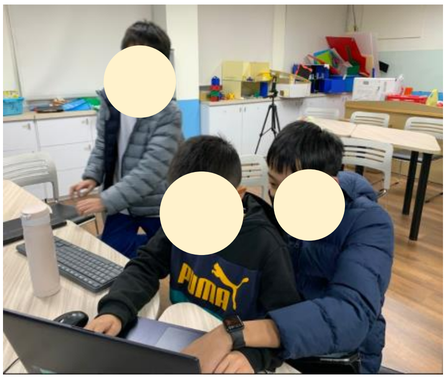
表 3-4

實驗	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
次數	16	16	7	8	6	15	5	7	3	1
實驗	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	m_{17}	m_{18}	m_{19}	m_{20}
次數	4	10	3	6	9	48	2	8	18	5
實驗	m_{21}	m_{22}	m_{23}	m_{24}	m_{25}	m_{26}	m_{27}	m_{28}	m_{29}	m_{30}
次數	1	10	9	7	15	6	9	1	1	9
實驗	m_{31}	m_{32}	m_{33}	m_{34}	m_{35}	m_{36}	m_{37}	m_{38}	m_{39}	m_{40}
次數	9	10	19	4	11	10	3	7	5	9
實驗	m_{41}	m_{42}	m_{43}	m_{44}	m_{45}	m_{46}	m_{47}	m_{48}	m_{49}	m_{50}
次數	17	2	1	5	4	4	4	1	11	8

3. 分析n_1-n_{50}及m_1-m_{50}的分布情況與中位數，如下表(表 3-5)：

表 3-5

抽中率(p)	中位數	數據由小到大排列
5%	10	1,1,1,2,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,7,7,8,8,8,8,**9**,11,11,12,12,12,13,13,13,14,15,16,18,18,19,19,24,27,29,30,32,41,47,81,99,160
10%	7	1,1,1,1,1,1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,7,**7**,**7**,7,8,8,8,9,9,9,9,9,9,10,10,10,10,11,11,15,15,16,16,17,18,19,48

用名片紙模擬抽獎	紀錄花幾次抽中之數據
	

(二)擬定流程圖並使用 Scratch 模擬

1. 模擬大家預期比一半人幸運的抽取次數是否為真：

在 p=5%的情況下，大家會預期 20 次以內抽中算是比一半的人幸運，使用程式模擬 100 萬次，觀察在**「小於 20 次前抽到」**、**「第 20 次抽到」**、**「大於 20 次才抽到」**的人次分布。流程圖及程式設計圖如下(圖 3-1、圖 3-2)：

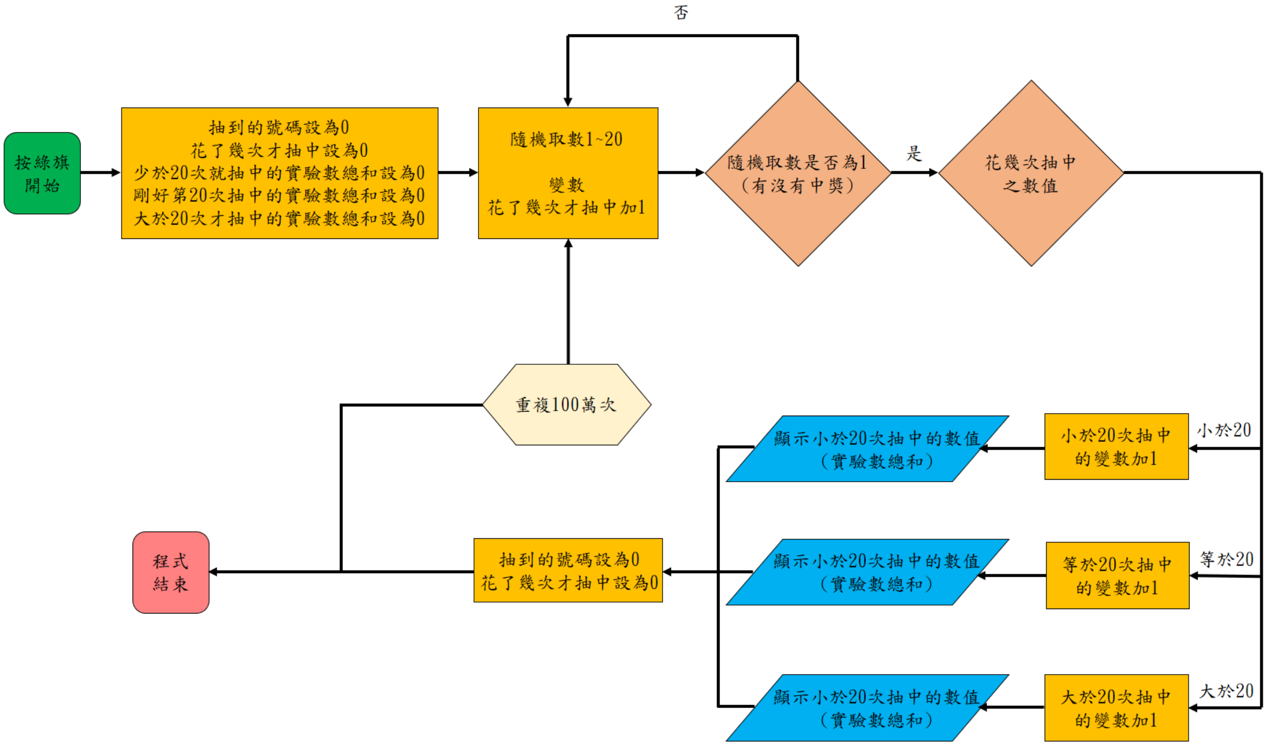


圖 3-1

圖 3-2

2. 增加變數 n，觀察數據分布情況：

設計可以調整變數的程式，輸入不同數字，找出當 n 值為多少時，算是比一半的人還幸運。流程圖及程式設計圖如下(圖 3-3、圖 3-4)：

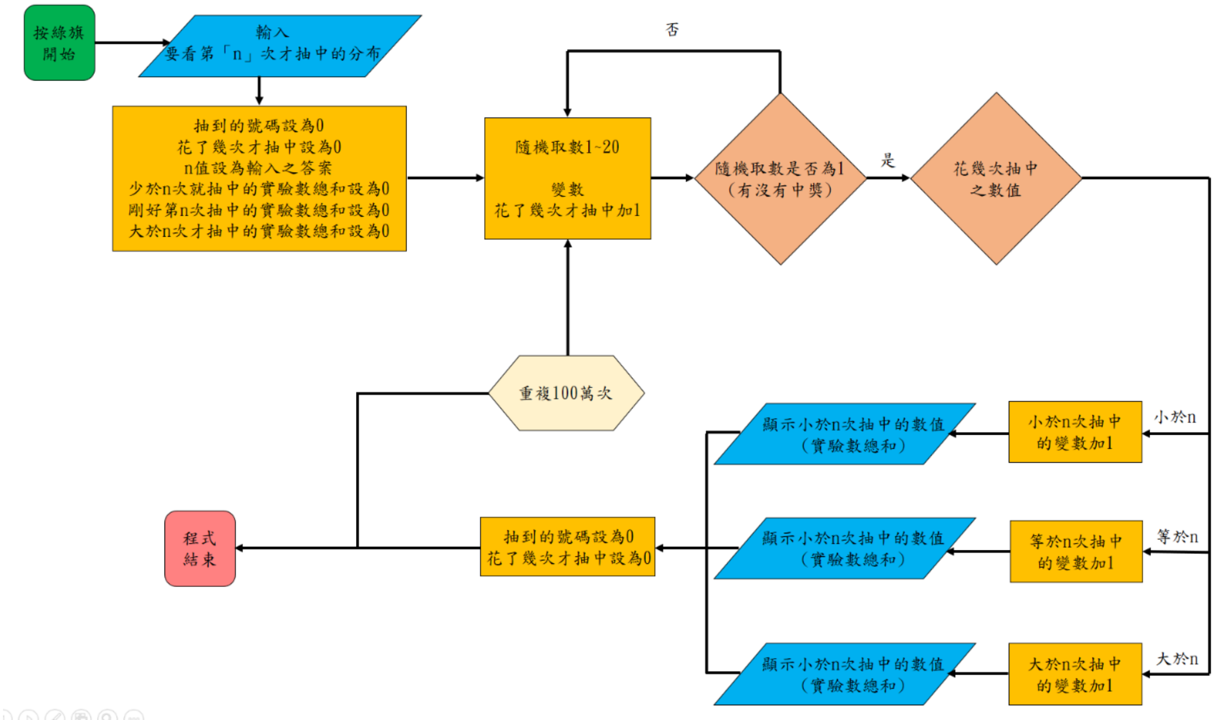


圖 3-3

圖 3-4

（三）使用 Excel 函數記錄及計算理論值

在中獎率為 5%時，第 n 次抽到的機率及機率累積如下表(表 3-6)：

表 3-6

第 n 次抽到	列式過程	機率	機率累積
1	5%	5.000%	5.000%
2	$95\% \times 5\%$	4.750%	9.750%
3	$95\% \times 95\% \times 5\%$	4.513%	14.263%
4	$95\% \times 95\% \times 95\% \times 5\%$	4.287%	18.549%
5	$95\% \times 95\% \times 95\% \times 95\% \times 5\%$	4.073%	22.622%
n	**機率：$5\% \times (95\%)^{n-1}$** **機率累積：$1-(95\%)^{n}$**		

將一般化後的算式輸入 Excel 作為函數，推廣討論不同機率及不同抽到次數的情況。設中獎率為 p，未中獎的機率為 1-p，抽卡次數為 n。我們彙整中獎率 0.5%、1%、2%、4%、5%、10%、20%、25%的資料，如下圖(圖 3-5)：

E3 =95%^(D3-1)*5%

	A	B	C	D	E	F
1				抽卡次數n	抽了n次才抽到SSR的機率	n次內抽到SSR的機率
2	SSR的機率 p	5%		1	5.000%	5.000%
3	非SSR的機率 (1-p)	95%		2	4.750%	9.750%
4				3	4.513%	14.263%
5				4	4.287%	18.549%
6				5	4.073%	22.622%
7				6	3.869%	26.491%
8				7	3.675%	30.166%
9				8	3.492%	33.658%
10				9	3.317%	36.975%
11				10	3.151%	40.126%
12				11	2.994%	43.120%
13				12	2.844%	45.964%
14				13	2.702%	48.666%
15				14	2.567%	51.233%
16				15	2.438%	53.671%
17				16	2.316%	55.987%
18				17	2.201%	58.188%
19				18	2.091%	60.279%
20				19	1.986%	62.265%
21				20	1.887%	64.151%
22				21	1.792%	65.944%
23				22	1.703%	67.647%
24				23	1.618%	69.264%
25				24	1.537%	70.801%
26				25	1.460%	72.261%
27				26	1.387%	73.648%
28				27	1.318%	74.966%
29				28	1.252%	76.217%
30				29	1.189%	77.406%
31				30	1.130%	78.536%

抽卡機率0.5% | 抽卡機率1% | 抽卡機率2% | 抽卡機率4% | 抽中機率5% | 抽中機率10% | 抽卡機率20% | 抽卡機率25%

圖 3-5

（四）對照模擬結果與理論值，並分析結果是否相符及造成錯覺的原因。

（五）將結果及模擬程式應用於判斷金門紀念酒的抽獎情形

1. 參考網路資料及新聞中提到的生肖紀念酒抽中率資訊：

『2023 年「鴻兔大展」兔年玉璽酒，在金門酒廠行政大樓多媒體簡報室進行公開抽籤，網路同步直播，由副縣長李增財率縣政府財政處長孫國智、主計處處長王崑龍、政風處科長葉炳火、金酒董事長黃怡凱、總經理楊篤人等人共同啟動抽籤按鈕，隨即由電腦從 12 萬 3393 名符合資格的金門縣民中抽出 4000 位符合價購資格者。董事長黃怡凱說，根據過去兩年的經驗，4000 名中籤者中，約有 2.575%有重複中籤的機率。他也表示，12 生肖酒還有 3 年就可以湊滿 1 套，請相關部門提早規劃相關銷售方案。』

以自由時報報導中敘述之狀況，可以計算出生肖酒抽中率為 4000/123393，約為 3.24%。為方便計算，程式中的抽中率設定為 3%。

2. 公開資訊的真實性討論：

在搜尋相關資料的過程中，我們對於公開資訊提到的「3 年內重複中籤率為 2.575%」感到疑惑，想要探討其真實性。

3. 應用程式模擬抽生肖紀念酒的策略及抽齊整套紀念酒的可能性：

抽中率為 3%，套用之前的程式並更改部份變數，觀察人次分布狀況。因抽齊生肖紀念酒是以 12 年為單位，故增加使用清單功能，應用清單長度判斷 12 年內抽中幾瓶。流程圖及程式設計圖如下(圖 3-6、圖 3-7)：

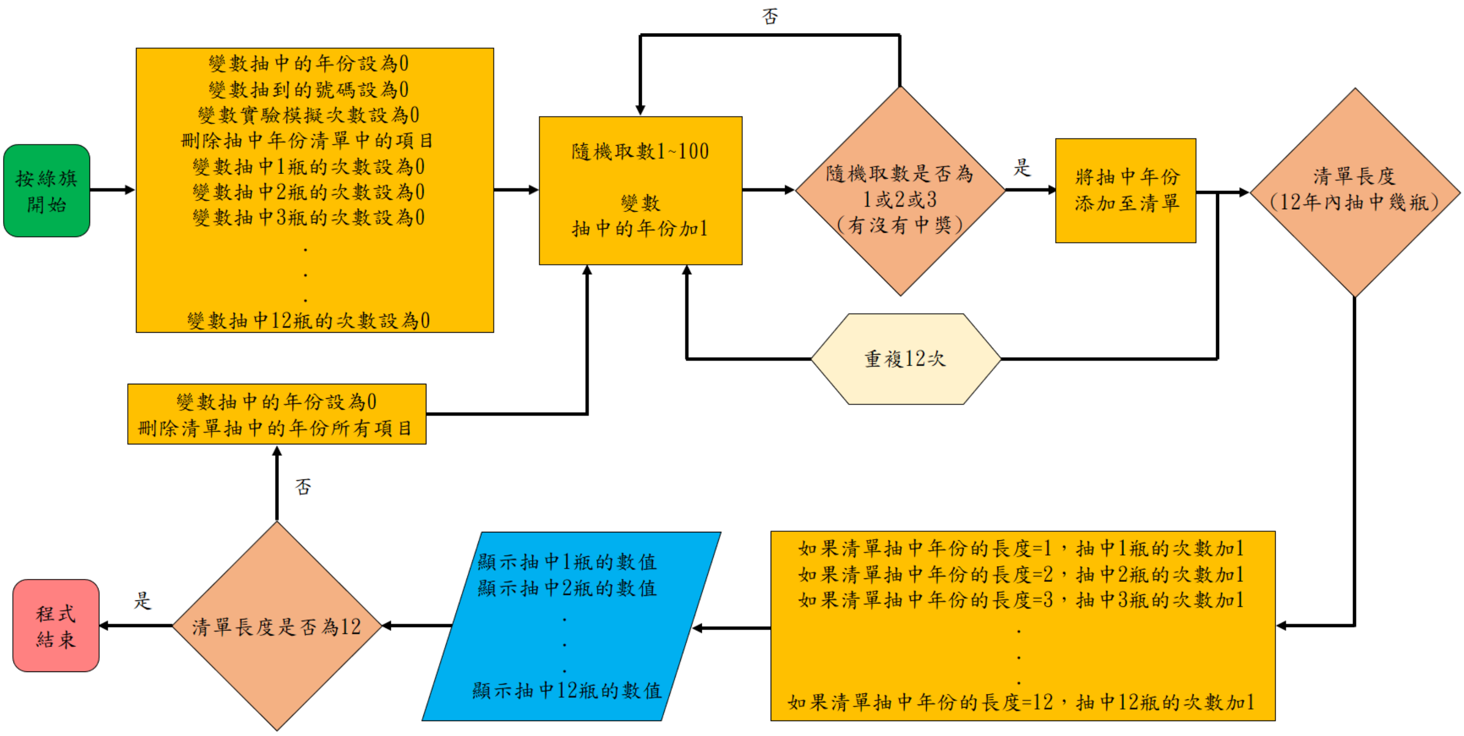


圖 3-6

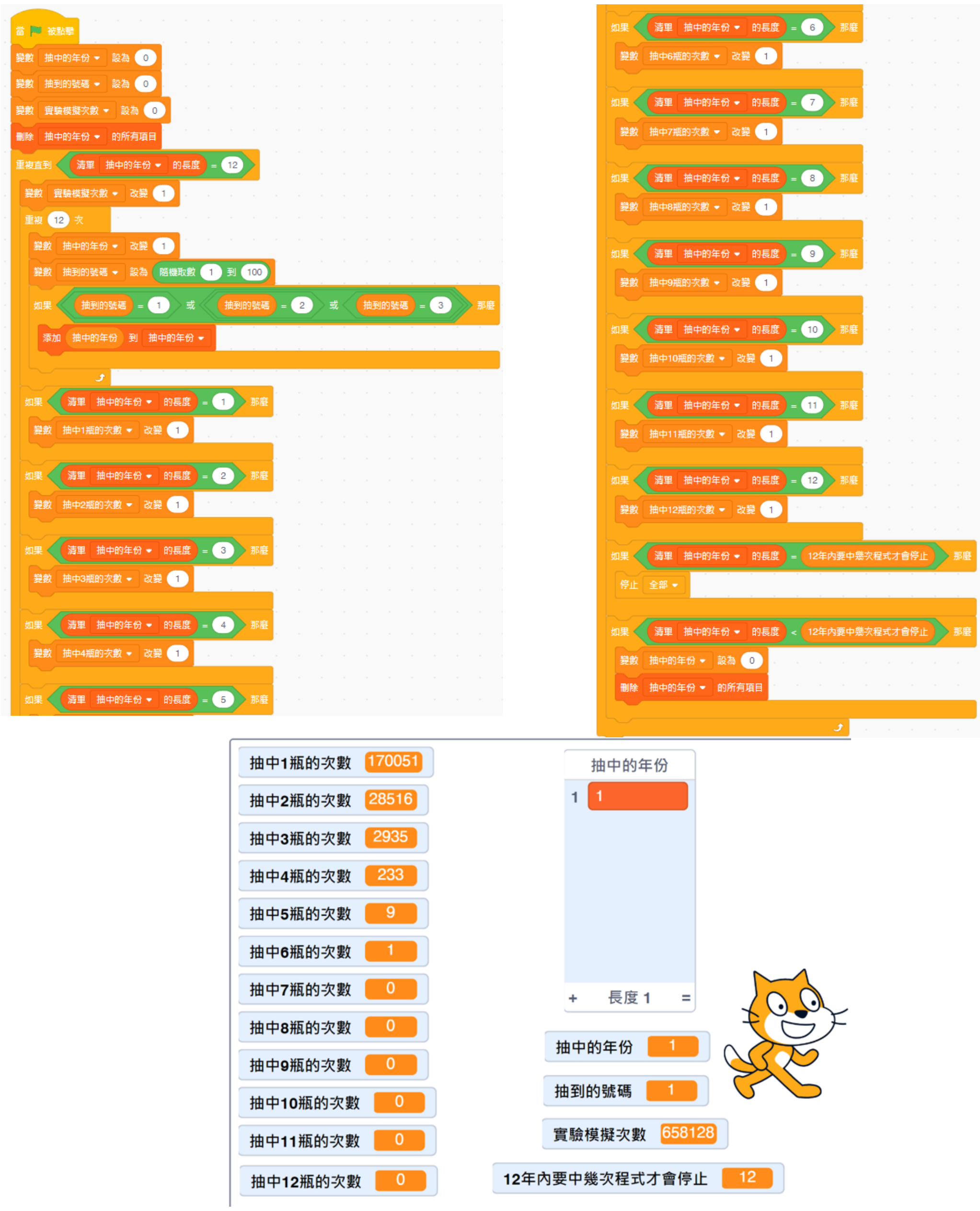
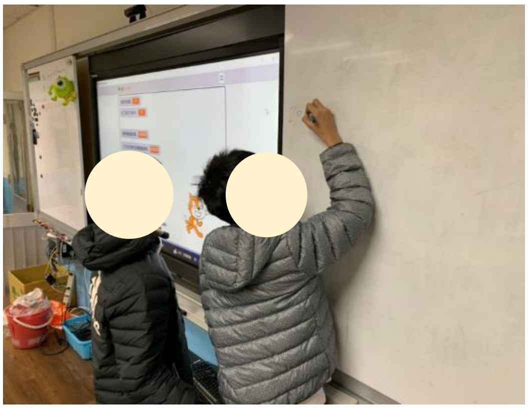


圖 3-7

編寫程式	記錄結果
	

肆、研究結果

一、模擬結果

（一）使用名片卡紙人工模擬，數據如下表(表 4-1)：

表 4-1

抽中率(p)	實驗組數	大家預期比一半的人幸運之抽取次數	實際中位數
5%	50	20	10
10%	50	10	7

1. 在 p=5%及 p=10%的情況中，實際的中位數都與大家預期比一半的人幸運之抽取次數不同。
2. 實際中位數皆小於大家的預期次數，因此，若是用直覺的思考方式，實際上花費的抽取次數已經比一半的人還多。
3. 因為人工模擬較費時，實驗組數受限，所以使用 Scratch 模擬，以獲得更多數據。

（二）Scratch 程式模擬-大家預期比一半的人幸運之抽取次數(p=5%)

共實驗 10 組，每組實驗次數設為 100 萬次。在 p=5%的情況下，大家預期比一半人幸運的抽獎次數為 20 次，各組數據分布如下表(表 4-2)：

表 4-2

	小於 20 次抽中 實驗數總和	第 20 次抽中 實驗數總和	大於 20 次抽中 實驗數總和
實驗 1	623147	18848	358005
實驗 2	623020	18549	358431
實驗 3	623320	18902	357778
實驗 4	623263	18651	358086
實驗 5	623203	18832	357965
實驗 6	622824	18665	358511
實驗 7	623339	18848	357813
實驗 8	622169	18940	358891
實驗 9	622215	18785	359000
實驗 10	622506	18920	358574
平均	**622900.6**	**18794**	**358305.4**

1. 第 20 次抽到，比一半的人還不幸運，約比 62.29%的人還不幸運。
2. 在樣本數充足的情況下，驗證「大家預期比一半人幸運的抽獎次數」不是實際數據分布的中位數，並大於實際的中位數。

(三) Scratch 程式模擬-找出幾次內抽到算是比一半的人還幸運(p=5%)

嘗試輸入不同的 n 值，記錄數據分布狀況，結果如下表表(表 4-3)：

表 4-3

n	小於 n 次抽中 實驗數總和及百分比	第 n 次抽中 實驗數總和及百分比	大於 n 次抽中 實驗數總和及百分比
1	0(0%)	49888 (4.9888%)	950112 (95.0112%)
2	49817 (4.9817%)	47888 (4.7888%)	902295 (9.02295%)
3	97151 (9.7151%)	45299 (4.5299%)	857550 (85.755%)
4	142529(14.2529%)	42640(4.264%)	874831(87.4831%)
5	184493(18.4493%)	40507(4.0507%)	775000(77.5%)
6	225814(22.5814%)	38687(3.8687%)	735499(73.5499%)
7	263649(26.3649%)	37019(3.7019%)	699332(69.9332%)
8	301867(30.1867%)	35189(3.5189%)	662944(66.2944%)
9	336792(33.6792%)	32988(3.2988%)	630220(63.022%)
10	370143(37.0143%)	31322(3.1322%)	598535(59.8535%)
11	401257(40.1257%)	29491(2.9491%)	569252(56.9252%)
12	430330(43.033%)	28525(2.8525%)	541145(54.1145%)
13	**460592(46.0592%)**	**26832(2.6832%)**	512576(51.2576%)
14	486376(48.6376%)	25468(2.5468%)	488156(48.8156%)
15	512698(51.2698%)	24367(2.4367%)	462935(46.2935%)
16	537301(53.7301%)	23163(2.3169%)	439536(43.9536%)
17	559602(55.9602%)	21770(2.177%)	418628(41.8628%)
18	583115(58.3115%)	20958(2.0958%)	395927(39.5927%)
19	602862(60.2862%)	19834(1.9834%)	377304(37.7304%)
20	622497(62.2497%)	18883(1.8883%)	358620(35.862%)

1. 在 p=5%的情況下，第 13 次內抽中約比 51.26%的人幸運。
2. 在此研究假設下，**實際上抽取次數數據的中位數為 13**。

（四）Scratch 程式模擬-各機率抽取次數的數據分布情況及中位數，如下表(表 4-4)：

表 4-4

中獎機率	預期的次數	所有抽取次數的中位數(Md)	程式模擬情況		
			小於 Md 次抽到	第 Md 次抽到	大於 Md 次抽到
0.5%	**200**	**138**	496852	2547	500601
1%	**100**	**68**	490502	5004	504494
2%	**50**	**34**	486497	10079	503424
4%	**25**	**16**	458078	21715	520207
5%	**20**	**13**	460466	26849	512685
10%	**10**	**6**	409635	59087	531278
20%	**5**	**3**	359480	128607	511913
25%	**4**	**2**	250455	186449	563096

1. 不論中獎機率為何，所有抽取次數的**中位數**皆低於**預期的次數**。
2. 依據此模擬結果，若用「$n \times p \geq 1$，n 的最小值」作為大家預期至少能抽到 1 次的抽取次數，**並不是總抽取次數的中位數**。

歸納與小結

經過程式大數據模擬後，其結果與人工模擬相同，我們確定在所有抽獎率的情況下，實際**抽取總數的中位數皆小於大家預期的次數**。因此，我們想透過計算理論值的方式，分析造成此情形之原因，以及大家預期的算法有問題的原因。

二、使用 Excel 函數計算理論值

(一) 將「第 n 次抽中的機率」及「n 次內抽中的機率」一般化

1. 以中獎率 5%時的情況為例，理論值如下表(表 4-5)：

表 4-5

n	列式過程	第 n 次抽中的機率	n 次內抽中的機率(機率累積)
1	5%	5.000%	5.000%
2	$95\% \times 5\%$	4.750%	9.750%
3	$95\% \times 95\% \times 5\%$	4.513%	14.263%
4	$95\% \times 95\% \times 95\% \times 5\%$	4.287%	18.549%
5	$95\% \times 95\% \times 95\% \times 95\% \times 5\%$	4.073%	22.622%
n		$\mathbf{0.05 \times 0.95^{n-1}}$	$\mathbf{1 - 0.95^{n}}$

(1) 第 n 次抽到的機率為**等比數列**，公比為 0.95，$a_n = 0.05 \times 0.95^{n-1}$

(2) 機率累積為**等比級數**，$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{0.05(1-0.95^n)}{0.05} = 1 - 0.95^n$。在 Excel 中我們是使用第 n 項的機率累積數值加上第 n+1 項的機率，算出第 n+1 項的累積機率。

2. 若中獎率為 p

第 n 次抽中的機率：$p \times (1-p)^{n-1}$

n 次內抽中的機率：$1-(1-p)^n$

（二）「第 n 次抽到的機率」折線圖分析

挑選中獎率(p)5%、10%、20%之數據製作折線圖，如下圖(圖 4-1)：

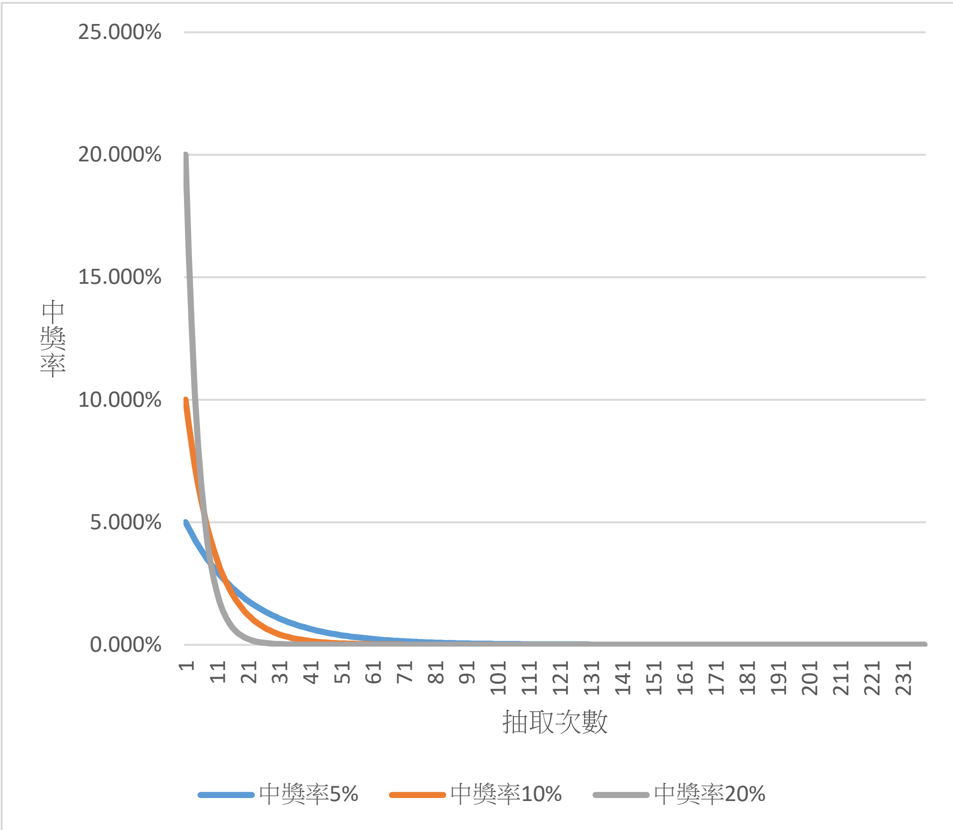


圖 4-1

1. 當 n 為 1 時，p=20%時抽中的機率最大，但隨著 n 值遞增，其抽中機率下降的幅度最大。

2. 當 n 為 1 時，p=5%時抽中的機率最小，但隨著 n 值遞增，其抽中機率下降的幅度最小。

3. 由理論值得知各組數據為等比數列，下降幅度受到公比(1-p)影響，符合折線圖呈現之情況。

4. 各組等比數列首項及公比(1-p)不同，首項較大的數列公比最大，首項較小的數列公比最小，故三組數據之折線圖會相交。

（三）「n 次內抽中的機率」圖表分析

挑選中獎率 5%、10%、20%之數據製作折線圖，如下圖(圖 4-2)：

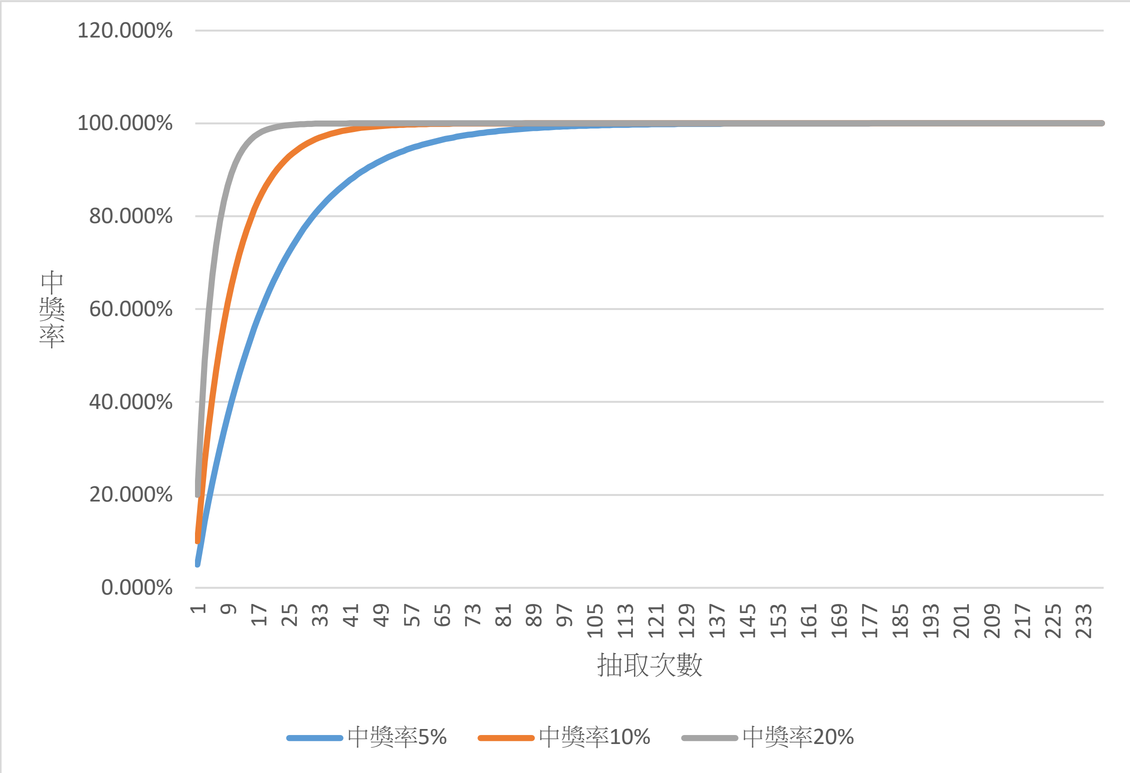


圖 4-2

1. 三組數據中，p=20%的折線圖數值最快趨近於 100%，p=5%的折線圖數值最慢趨近於 100%。

2. 公比最大、各項數值下降幅度最快，累積數據卻還是最快趨近於 100%，此現象不符合直覺。

機率累積函數的累積值與我們想解答的運氣分布相同，若可以解找出造成此現象的原因，就能找出破解迷思的關鍵，因此繼續深入探討此圖表的數據。

（四）為何「等比數列公比較大，數列總和卻較快趨近 100%」？

挑選中獎率 5%、10%、20%之數據前 15 項資料，如下表(表 4-6)：

表 4-6

	n 次內抽中之機率					
抽中機率(p) / 抽卡次數(n)	5%		10%		20%	
1	**5.000%**	5.000%	**10.000%**	10.000%	**20.000%**	20.000%
2	4.750%	9.750%	9.000%	19.000%	16.000%	36.000%
3	4.513%	14.263%	8.100%	27.100%	12.800%	48.800%
4	4.287%	18.549%	7.290%	34.390%	10.240%	59.040%
5	4.073%	22.622%	6.561%	40.951%	8.192%	67.232%
6	3.869%	26.491%	5.905%	46.856%	6.554%	73.786%
7	3.675%	30.166%	**5.314%**	52.170%	**5.243%**	79.028%
8	3.492%	33.658%	4.783%	56.953%	4.194%	83.223%
9	3.317%	36.975%	4.305%	61.258%	3.355%	86.578%
10	**3.151%**	40.126%	3.874%	65.132%	**2.684%**	89.263%
11	2.994%	43.120%	3.487%	68.619%	2.147%	91.410%
12	2.844%	45.964%	3.138%	71.757%	1.718%	93.128%
13	2.702%	48.666%	2.824%	74.581%	1.374%	94.502%
14	**2.567%**	51.233%	**2.542%**	77.123%	1.100%	95.602%
15	2.438%	53.671%	2.288%	79.411%	0.880%	96.482%

1. 在 n=7 時，抽中機率為 10%之值大於抽中機率為 20%之值；在 n=10 時，抽中機率為 5%之值大於抽中機率為 20%之值；在 n=14 時，抽中機率為 5%之值大於抽中機率為 10%之值。
2. 折線圖中有 3 點相交，與表格結果相同。
3. 公比較小的數列即使下降幅度較慢，累加的數值也追不上公比較大的數列。
4. 推測原因是受到各數列的首項影響，讓公比大的數列，很快就累加趨近於 100%。
5. 因為前幾項的數據迅速就累加至超過 50%，所以實際的抽取次數中位數才都小於大家預期的抽取次數。

歸納與小結

計算理論值後，得知：

「第 n 次抽到的機率」為等比數列，能以$p \times (1-p)^{n-1}$表示；

「n 次內抽中的機率」為等比級數，能以$1-(1-p)^{n}$表示。

並由函數圖形中發現的奇特現象，發現數列在前幾項的數值就能快速累加至超過 50%，解釋了**實際的抽取次數中位數都小於大家預期的抽取次數**。

三、分析理論值與直覺不同的原因

（一）「n 次內抽中」之定義

1. 本研究假設之情境為**「只要抽中一次即離開活動」**，並記錄花費的抽取次數，觀察抽取次數數據分布和趨勢，來判斷是否比一半的人幸運。

2. 「第 n 次抽中」的機率建立於「n 次前皆不能抽中」。

大家預期次數的算法：

令中獎率為 p，抽獎次數為 n，當$n \times p \geq 1$，n 的最小值為大家預期至少能抽到 1 次的抽取次數，認為這樣會比一半的人還幸運。

本研究假設情境的算法：

令中獎率為 p，抽獎次數為 n，當$1-(1-p)^{n} \leq 50\%$，n 的最小值才次真正抽取次數的中位數。

（二）「運氣差的人花費的次數」拉高整體的抽獎次數

若 p=5%，花 13 次以內就抽中的機率累積為 50%。因為「抽了 n 次才抽到的機率」為等比數列，公比小於 1，導致各項逐漸變小，變小的幅度又逐漸增加，累積的速度變慢，到第 238 項機率累積才趨近於 100%。

本研究結果參考〔1〕Youtuber 譯人豆奶-陳朕疆之影片觀點，結合先前的發現，歸納如下圖(圖 4-3)。

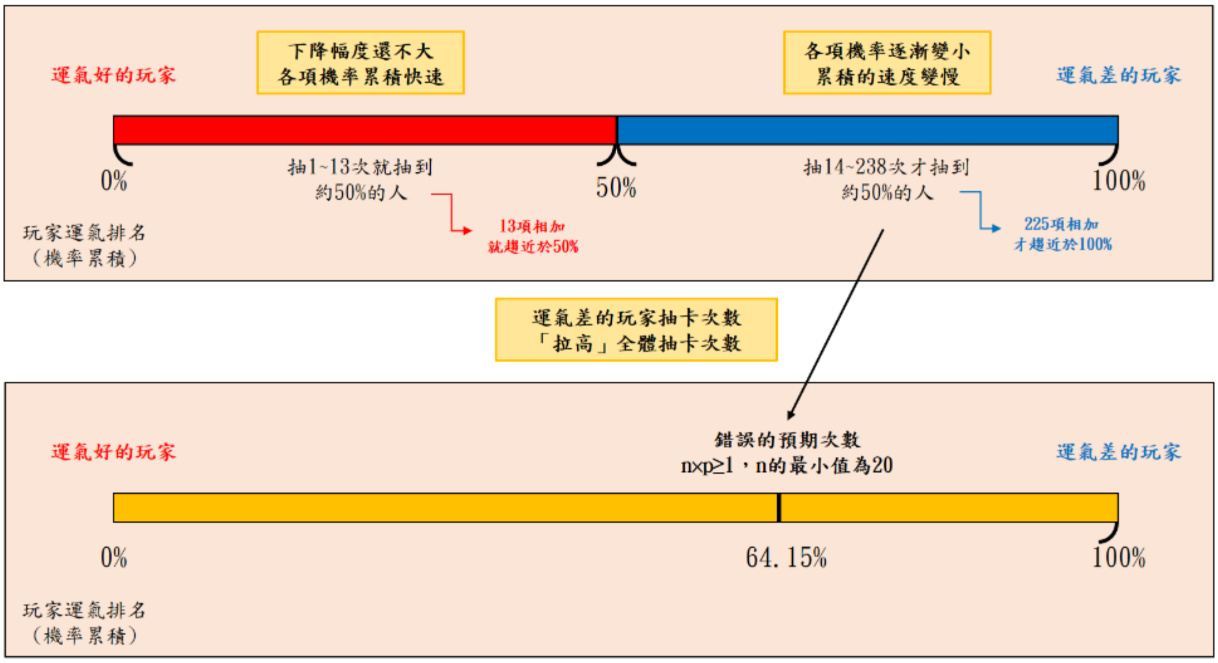


圖 4-3

歸納與小結

大家預期次數的算法	本研究假設情境的算法
令中獎率為 p，抽獎次數為 n： 當n × p ≥ 1，n 的最小值為中位數。 **(與理論值不同)**	令中獎率為 p，抽獎次數為 n： 當$1-(1-p)^n \leq 50\%$，n 的最小值為中位數。

運氣在後 50%的人次較多，故「運氣差的人花費的次數」拉高整體的抽獎次數，才造成大家預期次數與理論值不同的狀況。

四、抽金門生肖紀念酒的狀況

（一）生肖紀念酒抽中率：依照公告資訊，抽籤方式由電腦從 12 萬 3393 名符合資格(金門籍且年滿 20 歲)之居民抽出 4000 位符合價購資格者。以自由時報報導中敘述之狀況，可以計算出生肖紀念酒抽中率為 4000/123393，約為 3.24%，機率很低。

（二）報導中的「重複中籤率」有疑點：

報導中提到：「根據過去兩年經驗，4000 名中籤者中，約有 2.575%有重複中籤的機率。」光是要抽中一年的機率就很低了，重複中籤率直覺上不會這麼高，因此，進入抽紀念酒運氣分布的研究前，我們先釐清是哪部份的資訊有錯誤，並嘗試找出造成資料誤植的原因。

3 年內重複中籤的情況

第一年	第二年	第三年	抽中總數	機率
V	V	V	3	$3.24\%^3$=0.034%
V	V	X	2	$3.24\%^2 \times 96.76\%$=0.101%
V	X	V	2	$3.24\%^2 \times 96.76\%$=0.101%
V	X	X	1	$3.24\% \times 96.76\%^2$=3.033%
X	V	V	2	$3.24\%^2 \times 96.76\%$=0.101%
X	V	X	1	$3.24\% \times 96.76\%^2$=3.033%
X	X	V	1	$3.24\% \times 96.76\%^2$=3.033%
X	X	X	0	$96.76\%^3$=90.591%
(0.034% + 0.101% + 0.101% + 0.101%)=0.308%，**比新聞報導的重複中籤率還低很多**。				

新聞提供重複中籤機率是 2.575%，我們嘗試找出要在什麼情況，重複中籤率才會這麼高?

想法：1-(都沒抽中的機率+只抽中 1 次的機率)=重複中籤率

方法：用 Excel 函數計算重複中籤率

n 年內的狀況	都沒中的機率 p^n	只中一次的機率 $C_1^n \times p \times (1-p)^{n-1}$	沒有重複中籤的機率	重複中籤的機率
3	0.9059	0.0910	0.9969	0.0031
4	0.8765	0.1174	0.9939	0.0060
5	0.8481	0.1420	0.9901	0.0098
6	0.8206	0.1648	0.9855	0.0144
7	0.7940	0.1861	0.9802	0.0197
8	0.7683	0.2058	0.9741	**0.0258**
9	0.7434	0.2240	0.9675	0.0324
10	0.7193	0.2408	0.9602	0.0397

發現：

1.若考慮 8 年內抽生肖紀念酒的情況，重複中籤率才會如新聞報導所述。

2.我們認為是因為報導用字不夠精準，才會讓大家產生誤會。

（三）抽生肖紀念酒的運氣分布情況

依照先前的研究結果與設計的程式，計算幾年內抽中一次，算是比一半的人幸運。模擬 100 萬次，觀察運氣分布如下表(表 4-7)：

表 4-7

n	小於 n 次抽中 實驗數總和及百分比	第 n 次抽中 實驗數總和及百分比	大於 n 次抽中 實驗數總和及百分比
23	488924(48.8924%)	15169(1.5169%)	495907(49.5907%)
22	472301(47.2301%)	15890(1.59%)	**511809(51.1809%)**
21	456687(45.6687%)	16282(1.6282%)	527031(52.7031%)
12	284473(28.4473%)	21565(2.1565%)	693962(69.3962%)

1. 若在 22 年抽到 1 次，就算是比一半的人幸運。
2. 如果每年都參加抽紀念酒的活動，12 年內抽中 1 次，就比將近 70%的人還幸運。

（四）抽齊生肖紀念酒的可能性極低

我們使用程式模擬，判斷清單長度，觀察每一組實驗組抽取 12 次(模擬抽齊十二生肖紀念酒)的結果分布，並且設定重複模擬直到「12 次都抽中」的情況才停止。模擬約 2 億次(Scratch 加速模式約耗時 5 小時)，抽中結果如下圖(圖 4-4)：

12 年內抽中的次數	結果數量
1	54687918
2	9303763
3	9600381
4	67006
5	3213
6	127
7	**4**
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0

圖 4-4

最多只出現 12 年內抽中 7 瓶的情況，且數量極少。我們推測可能是實驗模擬次數不夠多，所以繼續嘗試模擬更多次，看是否會有抽中 8 瓶以上的結果出現。

模擬約 100 億次(Scratch 加速模式約耗時 10 天)，抽中結果如下圖(圖 4-5)：

12 年內抽中的次數	結果數量
1	2576076804
2	438169366
3	45174810
4	3143519
5	155169
6	5754
7	157
8	3
9	0
10	0
11	0
12	0

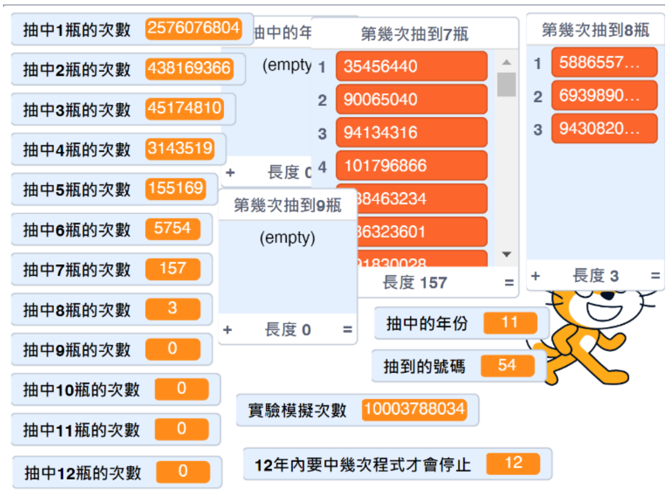


圖 4-5

抽中 8 瓶的情況果真出現了，還出現 3 次，約在第 58 億、69 億、94 億次出現，驗證「增加事件次數就能讓機率極低的狀況發生」。

（五）抽齊一整套生肖紀念酒的策略

從先前的研究結果發現抽中生肖紀念酒的機率極低，即使模擬 100 億次也沒有出現 9 瓶以上的情況，更不用說要抽齊一整套 12 瓶。如果想要蒐集一整套生肖紀念酒，向他人收購自己沒有抽的紀念酒，才是較有效的策略。

歸納與小結

1. 新聞報導文字會讓人誤解，若要修正，應改為「8 年內重複中籤率為 2.58%」，才是正確的資訊。
2. 在本研究的假設中，22 年抽中 1 次紀念酒，就比一半的人幸運；若 12 年抽中一次紀念酒，就比約 70%的人幸運。
3. 模擬 100 億次，最多只有出現 12 年內抽中 8 瓶的情形，要抽齊一整套紀念酒是天方夜譚，向他人收購自己沒有抽到的紀念酒才是上策。

五、研究時發生的特殊情況

（一）「機率累積函數到達 100%」是否代表一定會在 n 次內抽中 1 次?

在機率累積函數的彙整表中，當抽取次數超過某個數值時，皆會發生機率累積函數達到 100%的情況，以中獎率 5%、10%、20%為例，如下表(表 4-8)：

表 4-8

中獎率(p)	5%	10%	20%
抽了 n 次才抽中之機率	$5\% \times 95\%^{n-1}$	$10\% \times 90\%^{n-1}$	$20\% \times 80\%^{n-1}$
n 次內抽中之機率 (機率累積函數)	$1 - 95\%^{n}$	$1 - 90\%^{n}$	$1 - 80\%^{n}$
機率累積函數 達到 100%時之 n 值	238	116	55

然而，每個事件都是獨立發生，不可能保證抽超過幾次一定就會抽到，所以我們反向操作，將達到累積函數 100%時的 n 值，輸入原本設計的程式，看是否會有超過次數還抽不到的情況發生。

在 p=5%，n 為 238 時，機率累積函數會到達 100%，所以程式中的數值輸入 238，並模擬 100 萬次，仍然**有 6 組實驗是花費超過 238 次才抽到**，如下圖(圖 4-6)：

圖 4-6

1. 不論 n 的數值為何，實際上「n 次內抽中之機率」都不可能為 100%。
2. 彙整表中的數值出現到達 100%之情況，是受到 Excel 位值限制自動進位造成。
3. 每次抽獎的機率都互不影響，皆為獨立事件，無法說抽幾次保證一定會抽中，說明了機率的不確定性。

（二）「錯誤預期的抽卡次數」之機率累積函數趨近於 63.21%

彙整各抽中機率的數據時，我們發現「錯誤預期的抽卡次數」之機率累積函數會隨著機率降低，而趨近於 63.21%，圖表如下(表 4-9、圖 4-7)：

抽中機率 (p)	錯誤預期的抽卡次數 (當 $n \times p \geq 1$，n 的最小值)	機率累積函數
0.01%	10000	**63.213%**
0.5%	200	63.304%
1%	100	63.397%
2%	50	63.583%
4%	25	63.960%
5%	20	64.151%
10%	10	65.132%
20%	5	67.232%
25%	4	68.359%

表 4-9

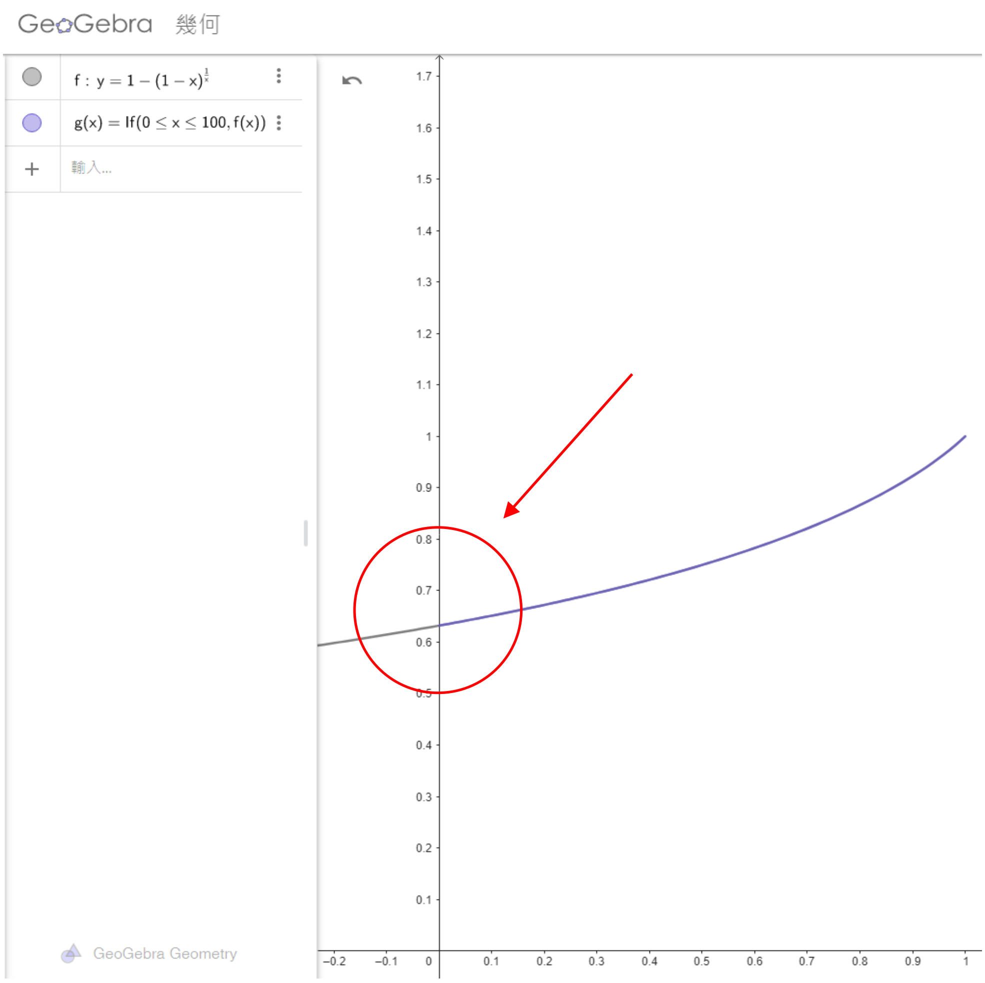


圖 4-7

（三）增加實驗次數確實能讓「機率較低的事件」發生

在模擬生肖紀念酒的抽中情形時，模擬 2 億次僅出現 12 年內抽中 7 瓶的情況，當模擬次數增加至 100 億次後，就出現了抽中 8 瓶的情況。

計算「12 年抽中 n 瓶的情況」之機率及預估需要抽取的次數門檻(抽中率：3.24%)

表 4-10

n	12 年抽中 n 瓶的機率 ($C_n^{12} \times 0.0324^n \times 0.9676^{12-n}$)	預估需要達成此情況的 抽取次數門檻(次)
1	0.2781091855206460000000000000	3
2	0.0510918111956485000000000000	19
3	0.0056885727929175700000000000	175
4	0.0004275226356739080000000000	2339
5	0.0000228482200343664000000000	4 萬 3767
6	0.0000008903739353598450000000	112 萬 3123
7	0.0000000254917073687708000000	3922 萬 8443
8	0.0000000005321722414614530000	18 億 7909 萬 0869
9	0.0000000000079002889454071400	1265 億 7764 萬 8856
10	0.0000000000000791657820096468	12 兆 6317 億 2010 萬 1977
11	0.0000000000000004807818813706	2079 兆 9452 億 6987 萬 8040
12	0.0000000000000000013382588450 52	74 京 7239 兆 5969 億 5618 萬 3000

由上表(表 4-10)發現，若要出現 12 年內抽中 9 瓶的情況，模擬次數至少要到達 1265 億次，難怪我們一直無法觀察到 9 瓶以上的情況發生。若要有全部抽中的情況，需要模擬 74 京次，可惜我們放置一天僅能模擬 10 億次，無法觀察到此情況發生。

歸納與小結

1.機率累積函數不可能為 100%，即使連續很多次都沒抽中，也不代表之後必中。

2.用「錯誤的預期次數」算出的機率累積函數，隨著 p 下降，其值趨近 63.213%。

3.增加實驗次數確實能讓「機率較低的事件」發生。

4.若要 12 年內都抽中紀念酒，預估要模擬 74 京次才有機會出現。

伍、討論

一、用不同角度探討本研究的機率定義

在回顧研究歷程，老師有提出另一種觀點讓大家討論。這些想法與我們的研究結果相符，也更能讓別人了解我們研究中假設的情境與想要破解的迷思。

「n 次內抽中的機率」另一種表示方式

要在「n 次內抽中」，可視為「1(全部)-n 次內都抽不中的機率」。n 次內都抽不中的機率為$(1-p)^n$，所以也可表示為$1-(1-p)^n$，與研究結果中等比級數的公式相同。

二、為什麼看運氣分布要用中位數，而不是用平均數?

在一開始要研究運氣分布時，我們先選擇用中位數，因為其定義比較切合研究假設，完成研究後，大家也好奇如果當初是用平均數，會有什麼差異?

表 5-1

中獎率(p)	中位數	平均數	錯誤的預期次數	研究後發現的理論值
5%	10	887/50=17.74	20	13
10%	7	409/50=8.18	10	6

(一) 平均數因受極端值影響，無法真實呈現數據的分布。

(二) 如果用平均數判斷，其數值會較接近錯誤的預期次數。

(三) 「運氣差的人」之抽獎次數拉高整體抽取次數，造成「錯誤的預期次數」，其成因是受到極端值影響，所以使用平均數也會有同樣的問題。

三、破除迷思後能及時設立停損點

確定理論值及了解造成迷思的原因後，未來在各類型的抽獎活動和遊戲中，就能大概知道自己的運氣狀況，如果已經比一半的人都不幸運了，就能及時設立停損點。

四、研究限制與未來展望

(一) 程式模擬次數受限

模擬紀念酒的程式 1 天只能產生 10 億筆資料，無法確定 12 年內抽中 12 瓶的情況是否會發生，期許之後能再用其他方式，探討「沒有出現的事件」是因為實驗次數不夠造成，還是機率小到不可能發生。

(二) 繼續研究悖論並破除迷思

如同「生日悖論」，我們的研究使用數學來破解迷思，並從模擬過程中找出了造成迷思的原因，非常有成就感，甚至現在跟其他同學分享，大家都會露出不可置信的表情。期許未來能繼續善用數學及程式，探討生活中「違反直覺的事件」。

陸、結論

一、中獎率 p，求得「n 是次內抽中 1 次」其 n 值中位數的方式及真偽

錯誤算法：當$n \times p \geq 1$，n 的最小值為中位數。

正確算法：當$1-(1-p)^n \leq 50\%$，n 的最小值為中位數。

二、「第 n 次抽中的機率」及「n 次內抽中的機率」之意義與關係

第 n 次抽中的機率：$p \times (1-p)^{n-1}$，為等比數列。

n 次內抽中的機率：$1-(1-p)^n$，為等比級數。

三、直覺預期的「抽取次數中位數」與理論值不同的原因

因為「抽了 n 次才抽到的機率」為等比數列，公比小於 1，導致各項逐漸變小，變小的幅度又逐漸增加，前半部累積項次較少就到達 50%，後半部須累積較多項次才能到達 100%。運氣在後 50%的人次較多，故「運氣差的人花費的次數」拉高整體的抽獎次數，才造成大家預期次數與理論值不同的狀況。

四、抽「紀念酒」的運氣分布及抽齊一整套「生肖紀念酒」之可能性。

在本研究的假設中，22 年抽中 1 次紀念酒，就比一半的人幸運；若 12 年抽中一次紀念酒，就比約 70%的人幸運。模擬 100 億次，最多只有出現 12 年內抽中 8 瓶的情形，要抽齊一整套紀念酒是天方夜譚，向他人收購自己沒有抽到的紀念酒才是上策。

柒、參考文獻資料

一、康軒版 五下、六下數學課本。

二、你知道嗎? 你的抽卡運可能比你想像中的還要差喔！ 【譯人說統計】#1 幾何分配
取自 https://www.youtube.com/watch?v=kzez9qyiAk8

三、金門地區第 61 屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《發財夢！SCRATCH 隨機 VS 有跡》。取自 https://science.km.edu.tw/exhibitions

四、金門地區第 62 屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《四色群英傳━探討四色牌「群胡」之奧祕》。取自 https://science.km.edu.tw/exhibitions

【評語】080414

本研究探討抽獎活動中要抽幾次才會抽中。作者從生活中「違反直覺」的事件出發，透過實際操作模擬實驗、Scratch 程式模擬及 EXCEL 函數運算，記錄多次抽中率為 5%的中獎事件之抽中時的抽獎次數，分析有限中獎事件各抽中時的抽獎次數，取得其中位數。研究發現大家預期的次數皆大於實際中位數。作者善於運用程式計算出大量資料，分析直覺預期抽中時的抽獎次數之中位數與理論值之間造成差距的原因，進行說明與討論，獨具見解。機率理論的建構往往無法利用有限的實驗次數表達，常常會隨著不同有限的實驗而有不同結果，因此有限實驗的結果較難有說服力。

作品海報

你比多少人幸運?

以機率累積函數破解抽獎次數中位數錯覺

組別：國小組

科別：數學科

摘要

本研究旨在探討抽獎活動中，抽中累積人數的分布狀況，想要找出抽取次數的中位數。若花費的抽取次數小於中位數，即比一半的人還幸運。大多數人會認為在抽中率為5%的情況下，花20次抽到算是比一半的人幸運，然而，透過人工抽名片卡紙和Scratch程式模擬後，發現大家預期的次數皆大於實際中位數。

使用Excel函數將公式一般化後，發現「第n次抽中的機率」為等比數列，「n次內抽中的機率」為等比級數。又因為公比小於1，造成前半部累積項次較少就達到50%，後半部需較多項次才能累積至100%，故「運氣差的人花費的次數」拉高整體的抽獎次數，才造成大家預期次數與理論值不同的狀況。最後應用研究發現，探討抽紀念酒的運氣分布和抽齊生肖紀念酒的可能性。

壹、前言

一、研究動機

（一）轉蛋法通過

（二）同學都花比預期還少的次數就抽到遊戲寶物，是錯覺?還是數學?

> 遊戲寶物的抽中機率為5%，因為5%×20=100%，大家會預期抽20次能「至少抽到1次」寶物。因此若在20次內抽中1次，就算是比一半的人幸運。

（三）金門紀念酒實際抽獎狀況是否符合公開抽獎機率資訊?

二、研究目的

(一)探討中獎率為p時，求得「n次內抽中1次」其n值中位數的方式及真偽。

(二)探討「第n次抽中的機率」及「n次內抽中的機率」之意義與關係。

(三)探討用直覺預期的「抽取次數中位數」與理論值不同的原因。

(四)探討抽「紀念酒」的運氣分布及抽齊一整套「生肖紀念酒」之可能性。

貳、研究設備及器材

一、電腦

二、Scratch程式

三、Excel

四、名片紙

五、紀錄紙

六、紀錄文具

七、計算機

參、研究過程及方法

中獎率為p時，「n次內抽中一次」n值的中位數算法

檢驗是否為真

直覺「比一半的人幸運」之預期算法
當n×p≥1，n的最小值為大家預期至少能抽到1次的抽取次數

抽名片卡紙模擬
發現與直覺預期不同

↓

Scratch程式模擬
觀察大數據分布狀況

↓

Excel函數計算
計算理論值

公式一般化

「第n次抽中的機率」

「n次內抽中的機率」

探討其意義及相互關係

公式推導

分析折線圖趨勢及交點

↓

解釋預期算法及理論值算法異同

抽生肖紀念酒

應用程式模擬及理論值計算

蒐集資料

↓

驗證資訊

↓

抽紀念酒的運氣分布

↓

抽齊生肖紀念酒的可能性

↓

歸納結論

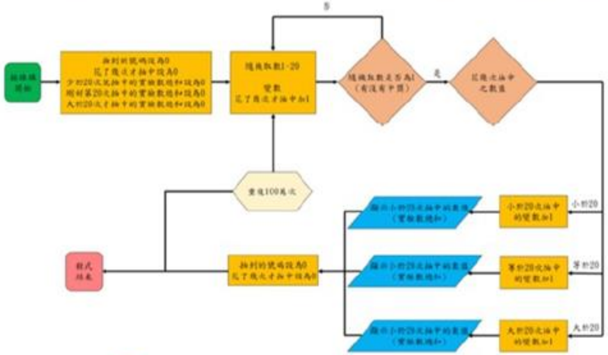
肆、研究結果

一、模擬結果

名片卡紙模擬
發現1.實際中位數與直覺預期的抽取次數不同

抽中率(p)	實驗組數	大家預期比一半的人幸運之抽取次數	實際中位數
5%	50	20	10
10%	50	10	7

用程式模擬
發現2.確定實際抽取的中位數皆小於預期的抽取次數



用程式模擬
發現3. p=5%，實際抽取次數的中位數為13

n	小於 n 次抽中 實驗數總和及百分比	第 n 次抽中 實驗數總和及百分比	大於 n 次抽中 實驗數總和及百分比
1	0(0%)	49888 (4.9888%)	950112 (95.0112%)
2	49817 (4.9817%)	47888 (4.7888%)	902295 (9.02295%)
3	97151 (9.7151%)	45299 (4.5299%)	857550 (85.755%)
4	142529(14.2529%)	42640(4.264%)	874831(87.4831%)
5	184493(18.4493%)	40507(4.0507%)	775000(77.5%)
6	225814(22.5814%)	38687(3.8687%)	735499(73.5499%)
7	263649(26.3649%)	37019(3.7019%)	699332(69.9332%)
8	301867(30.1867%)	35189(3.5189%)	662944(66.2944%)
9	336792(33.6792%)	32988(3.2988%)	630220(63.022%)
10	370143(37.0143%)	31322(3.1322%)	598535(59.8535%)
11	401257(40.1257%)	29491(2.9491%)	569252(56.9252%)
12	430330(43.033%)	28525(2.8525%)	541145(54.1145%)
13	460592(46.0592%)	26832(2.6832%)	512576(51.2576%)
14	486376(48.6376%)	25468(2.5468%)	488156(48.8156%)
15	512698(51.2698%)	24367(2.4367%)	462935(46.2935%)
16	537301(53.7301%)	23163(2.3169%)	439536(43.9536%)
17	559602(55.9602%)	21770(2.177%)	418628(41.8628%)
18	583115(58.3115%)	20958(2.0958%)	395927(39.5927%)
19	602862(60.2862%)	19834(1.9834%)	377304(37.7304%)
20	622497(62.2497%)	18883(1.8883%)	358620(35.862%)

中獎機率	預期的次數	所有抽取次數的中位數(Md)	程式模擬情況		
			小於 Md 次抽到	第 Md 次抽到	大於 Md 次抽到
0.5%	200	138	496852	2547	500601
1%	100	68	490502	5004	504494
2%	50	34	486497	10079	503424
4%	25	16	458078	21715	520207
5%	20	13	460466	26849	512685
10%	10	6	409635	59087	531278
20%	5	3	359480	128607	511913
25%	4	2	250455	186449	563096

二、Excel理論值

E3 =95%^(D3-1)*5%

	A	B	C	D	E	F
1				抽卡次數n	抽了n次才抽到SSR的機率	n次內抽到SSR的機率
2	SSR的機率 p	5%		1	5.000%	5.000%
3	非SSR的機率 (1-p)	95%		2	4.750%	9.750%
4				3	4.513%	14.263%
5				4	4.287%	18.549%
6				5	4.073%	22.622%
7				6	3.869%	26.491%
8				7	3.675%	30.166%
9				8	3.492%	33.658%
10				9	3.317%	36.975%
11				10	3.151%	40.126%
12				11	2.994%	43.120%
13				12	2.844%	45.964%
14				13	2.702%	48.666%
15				14	2.567%	51.233%
16				15	2.438%	53.671%
17				16	2.316%	55.987%
18				17	2.201%	58.188%
19				18	2.091%	60.279%
20				19	1.986%	62.265%
21				20	1.887%	64.151%
22				21	1.792%	65.944%
23				22	1.703%	67.647%
24				23	1.618%	69.264%
25				24	1.537%	70.801%
26				25	1.460%	72.261%
27				26	1.387%	73.648%
28				27	1.318%	74.966%
29				28	1.252%	76.217%
30				29	1.189%	77.406%
31				30	1.130%	78.536%

抽卡機率0.5% | 抽卡機率1% | 抽卡機率2% | 抽卡機率4% | 抽中機率5% | 抽中機率10% | 抽卡機率20% | 抽卡機率25%

n	列式過程	第 n 次抽中的機率	n 次內抽中的機率 (機率累積)
1	5%	5.000%	5.000%
2	95% × 5%	4.750%	9.750%
3	95% × 95% × 5%	4.513%	14.263%
4	95% × 95% × 95% × 5%	4.287%	18.549%
5	95% × 95% × 95% × 95% × 5%	4.073%	22.622%
n		$0.05 \times (0.95)^{n-1}$	$1-(0.95)^{n}$

將公式一般化

發現4. 若中獎率為p

第n次抽中的機率：$p\times(1-p)^{n-1}$，為等比數列

n次內抽中的機率：$1-(1-p)^{n}$，為等比級數

三、理論值與直覺不同的原因

發現5. 數列前幾項的值加總就能快速累積至50%

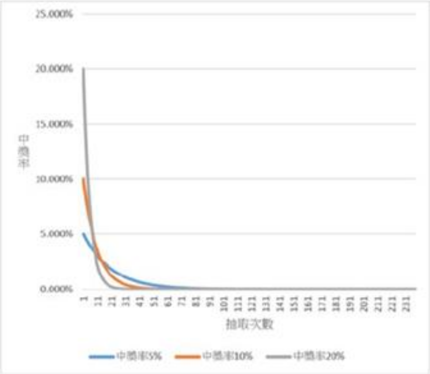


圖1　第n次抽中的機率

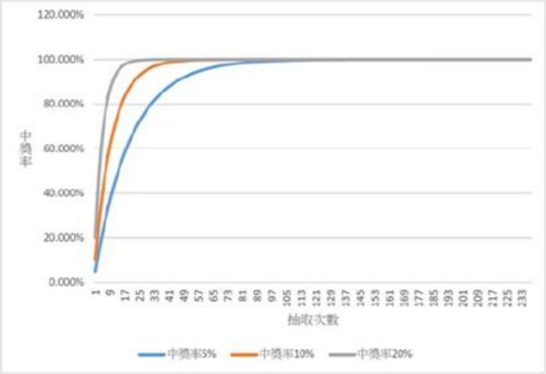
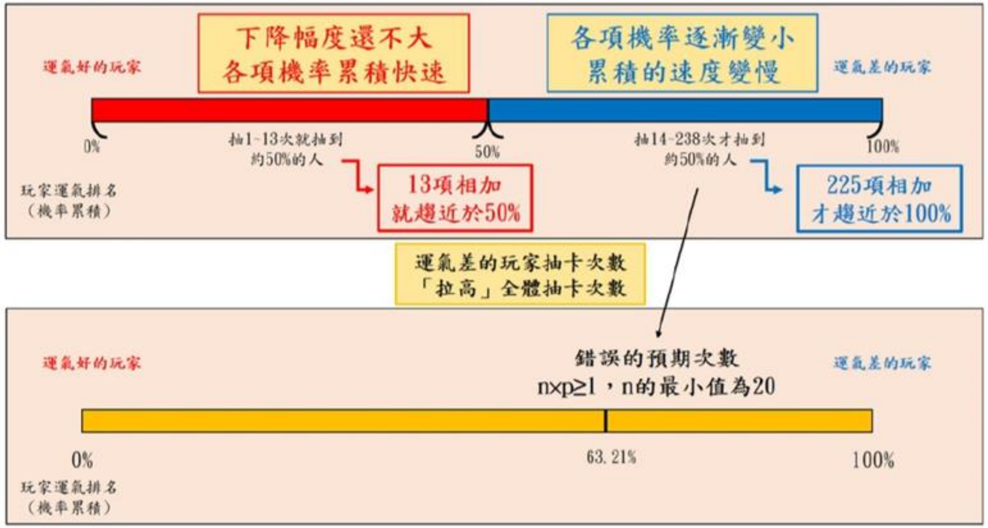


圖2　n次內抽中的機率

發現6. 運氣在後50%的累積人次較多，才造成錯覺

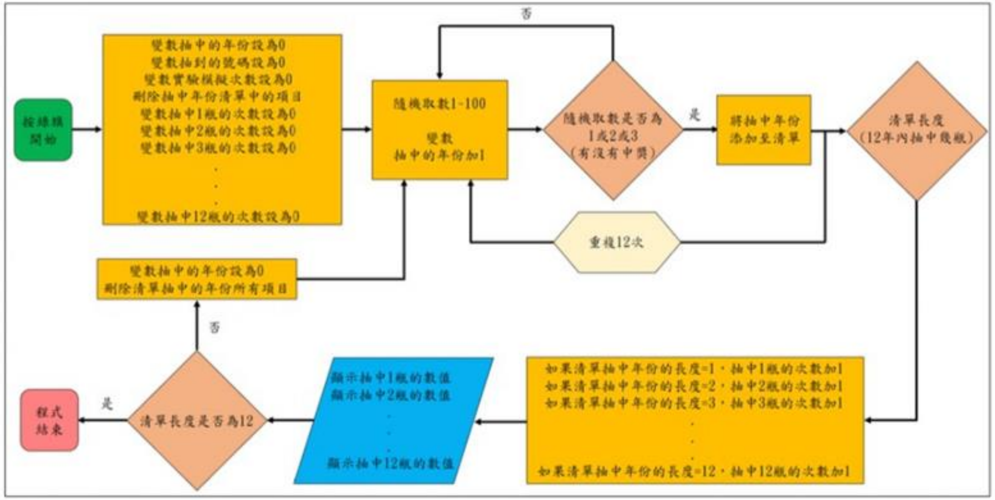


四、抽金門生肖紀念酒的狀況

發現7. 在本研究的假設中，22年抽中1次紀念酒，就比一半的人幸運；若12年抽中1次紀念酒，就比約70%的人幸運。

n	小於 n 次抽中 實驗數總和及百分比	第 n 次抽中 實驗數總和及百分比	大於 n 次抽中 實驗數總和及百分比
22	472301(47.2301%)	15890(1.59%)	511809(51.1809%)
12	284473(28.4473%)	21565(2.1565%)	693962(69.3962%)

發現8. 以程式模擬100億組抽生肖紀念酒的狀況，最多只出現12年內抽中8瓶的情況，非常難憑一己之力抽齊整套紀念酒。

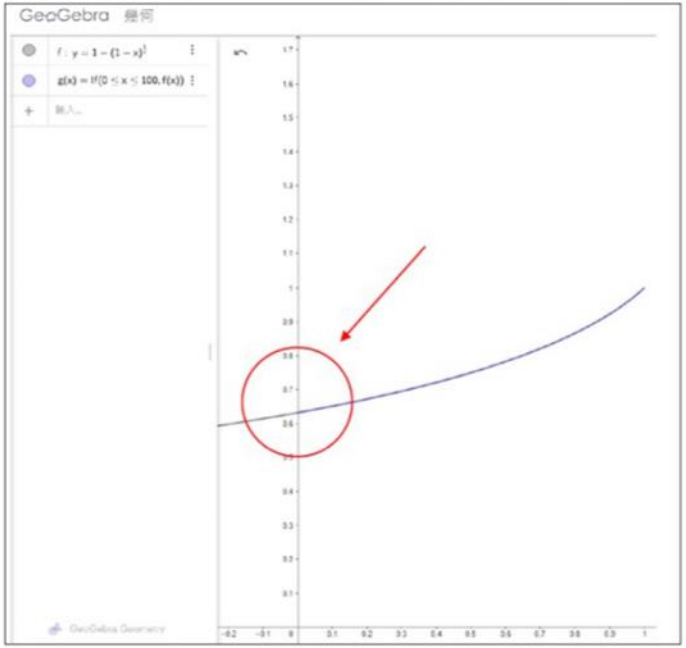


五、研究時發生的特殊情況

（一）「機率累積函數到達100%」不代表一定會在n次內抽中1次。

（二）「錯誤預期的抽卡次數」之機率累積函數趨近於63.21%。

（三） 增加實驗次數確實能讓「機率較低的事件」發生。



n	12 年抽中 n 瓶的機率 ($C_n^{12} \times 0.0324^n \times 0.9676^{12-n}$)	預估需要達成此情況的抽取次數門檻(次)
1	0.2781091855206460000000000000	3
2	0.0510918111956485000000000000	19
3	0.0056885727929175700000000000	175
4	0.0004275226356739080000000000	2339
5	0.0000228482200343664000000000	4 萬 3767
6	0.0000008903739353598450000000	112 萬 3123
7	0.0000000254917073687708000000	3922 萬 8443
8	0.0000000005321722414614530000	18 億 7909 萬 0869
9	0.0000000000079002889454071400	1265 億 7764 萬 8856
10	0.0000000000000791657820096468	12 兆 6317 億 2010 萬 1977
11	0.000000000000000480781881370676	2079 兆 9452 億 6987 萬 8040
12	0.000000000000000001338258845052	74 京 7239 兆 5969 億 5618 萬 3000

伍、討論

一、用「1 (全部) - n次內都抽不中的機率 」探討本研究的機率定義。
二、為什麼看運氣分布要用中位數，而不是用平均數?
三、破除迷思後能及時設立停損點。
四、程式模擬次數受限，未來希望能繼續研究悖論並破除迷思。

陸、結論

一、中獎率p，求得「n次內抽中1次」其n值中位數的方式及真偽

錯誤算法：當$n \times p \geq 1$，n的最小值為中位數。

正確算法：當$1-(1-p)^n \leq 50\%$，n的最大值為中位數。

二、「第n次抽中的機率」及「n次內抽中的機率」之意義與關係

第n次抽中的機率：$p \times (1-p)^{n-1}$，為等比數列。

n次內抽中的機率：$1-(1-p)^n$，為等比級數。

三、直覺預期的「抽取次數中位數」與理論值不同的原因

因為「抽了n次才抽到的機率」為等比數列，公比小於1，導致各項逐漸變小，變小的幅度又逐漸增加，前半部累積項次較少就到達50%，後半部須累積較多項次才能到達100%。運氣在後50%的人次較多，故「運氣差的人花費的次數」拉高整體的抽獎次數，才造成大家預期次數與理論值不同的狀況。

四、抽「紀念酒」的運氣分布及抽齊一整套「生肖紀念酒」之可能性

在本研究的假設中，22年抽中1次紀念酒，就比一半的人幸運；若12年抽中一次紀念酒，就比約70%的人幸運。模擬100億次，最多只有出現12年內抽中8瓶的情形，要抽齊一整套紀念酒是天方夜譚，向他人收購自己沒有抽到的紀念酒才是上策。

柒、參考文獻資料

一、生日悖論（Birthday Parodox）。
二、你知道嗎? 你的抽卡運可能比你想像中的還要差喔！【譯人說統計】#1 幾何分配。
三、金門地區第61屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《發財夢！SCRATCH隨機 VS 有跡》。
四、金門地區第62屆中小學科學展覽會—國小組—數學科《四色群英傳—探討四色牌「群胡」之奧祕》。