中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

佳作

080413

「視」不可擋

學校名稱：基隆市仁愛區信義國民小學

作者：	指導老師：
小六 林雨蓁	蔡佳甄
小六 葉子睿	潘可瑩
小六 李廷宥	
小六 黃沁滕	
小六 詹崋堯	
小六 徐子傑	

關鍵詞：三視圖、 貼盒法、樹狀圖

「視」不可擋

摘要

本研究旨透過「三視圖」的認識與研究，利用「貼盒法」進行其反向思考，找到多生三視圖的種類與樣式、規律性及積木塊的極值，並推廣到$4\times4\times4$的方塊，甚至$n\times n\times n$。最後由顏色、數字的介入，使三視圖產生獨一性，並加以延伸其概念，發展出「數獨積木」的玩法。

在研究「三視圖」的過程發現到前視圖與右視圖的視角交會處的個數≤($\textit{前視圖視角個數}\cap\textit{右視圖視角個數}$)就會產生多生三視圖，極值也會隨著三同圖或二同圖等，規律有所變化。過程中不僅助於培養學生觀察能力、空間想像能力、形象思維能力和幾何直觀能力，對於發展空間概念，更是有一定增強作用，希冀透過我們發明的「數獨積木」可以讓這些概念更能夠被大家廣泛接受。

壹、 前言

一、研究動機

操作 3D 列印的過程中，同學發現機器是由一層一層的建構起圖樣，這和遊戲「麥塊」及「樂高」有著異曲同工之妙。我們處在 3D 空間當中，現在又正流行元宇宙，大家對此建構法都很好奇，想知道這是如何建構起的。老師告訴我們，整個建構的概念是立體空間的概念，而視角則是由 108 課綱中新增的「三視圖」概念。大家都是第一次聽到三視圖，於是老師在講解的過程中，結合積木的操作，帶領大家一起了解三視圖。我們在操作過程中，發現到如果從既有的積木模型去畫出三視圖，是不會有爭議，然在讀圖的時候，卻找到了許多例外實例—出現三視圖相同，但積木排列組合的方式不盡相同，這時候老師說我們可以進一步討論這樣的三視圖所有可能的產生情況，並且提議要我們思考如何讓此三視圖產生唯一的積木排列。

二、目的

(一)找出三視圖皆相同，但其排列方式不同的相關性。

(二)討論如何能確保三視圖產生唯一結果的方法。

(三)發展出「數獨積木」及其裝置與規則。

三、文獻回顧

(一)三視圖

初見三視圖概念乃在我國明代著名科學家宋應星所著的「天工開物」中，而德國人迪勒做出了一個創造性的運用—將人或物體放在一個長方體的空間，三個方向（從前往後、從左往右、從上往下）來觀察並做正投影。而這觀念直到十八世紀，蒙日發表了關於畫法幾何的巨著「畫法幾何」，文中在「投影」的基礎上是利用二維平面圖形來呈現三維空間中的立體圖形，需要觀測者分別從該物體的正面、左面、上面三個不同角度進行觀察。此與現今的「正視圖」、「側視圖」、「俯視圖」的概念雷同。我們在本研究中乃採用「上視圖」、「前視圖」及「右視圖」。

(二)貼盒法

在三視圖的讀圖思考中，貼盒法是將已知視圖貼在一個長方體或正方體上，根據共面無線的原理對物體進行切割構形的合併方法。於本研究中，用以檢驗三視圖反向思考。

(三)樹狀圖

在數量分類學上用於表型分類的樹狀圖，稱為表型樹狀圖；在系統的推論的稱為系統樹狀圖。表型樹狀圖是根據群析描繪，而系統樹狀圖則是根據一種模擬的假定的性狀進化方向而進行描繪的。在本研究用系統樹狀圖的方式進行討論「數獨積木」的運思模式。

貳、 研究設備及器材

GeoGebra、線上三視圖互動程式（翰林版）、樂高積木、數學連接積木及手機

參、研究過程

一、統一條件及驗證法

(一)基本條件：

因討論的變數較多，需進行界定操控變因，因此在積木的堆積方式有下列幾點限制：

1. 整個立體模型排列於長、寬、高皆$\leq n$ 的正立方體空間中。

2. 採用實心排列，對於懸空的情形皆不予討論。

3. 上視圖經由轉置、映射後為相同圖形者，不列入討論範圍內。

(二)組合的步驟採用下列順序。

1. 決定類型：從三方位圖圖樣進行類型分析。

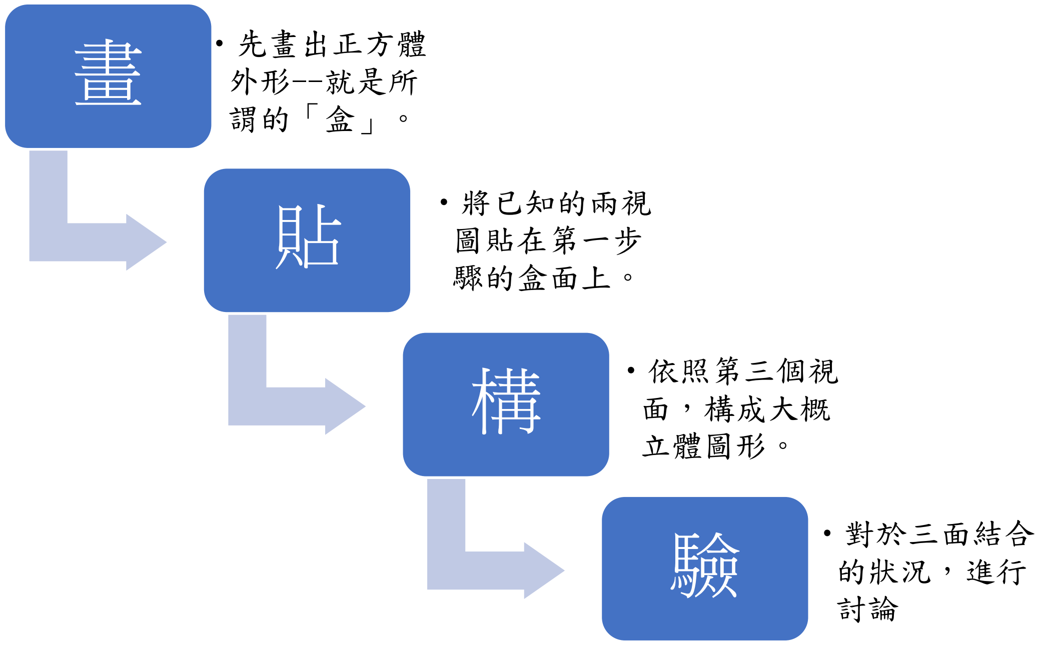
2. 樣式的可能性討論：搭配前視圖及右視圖進行細節討論進行細分樣式，並進行各種可能性的討論。

3. 名詞定義—多生三視圖：

擁有相同的三視圖，卻實體排列方式不同的組合，稱之為多生三視圖。

(三)驗證方法—貼盒法

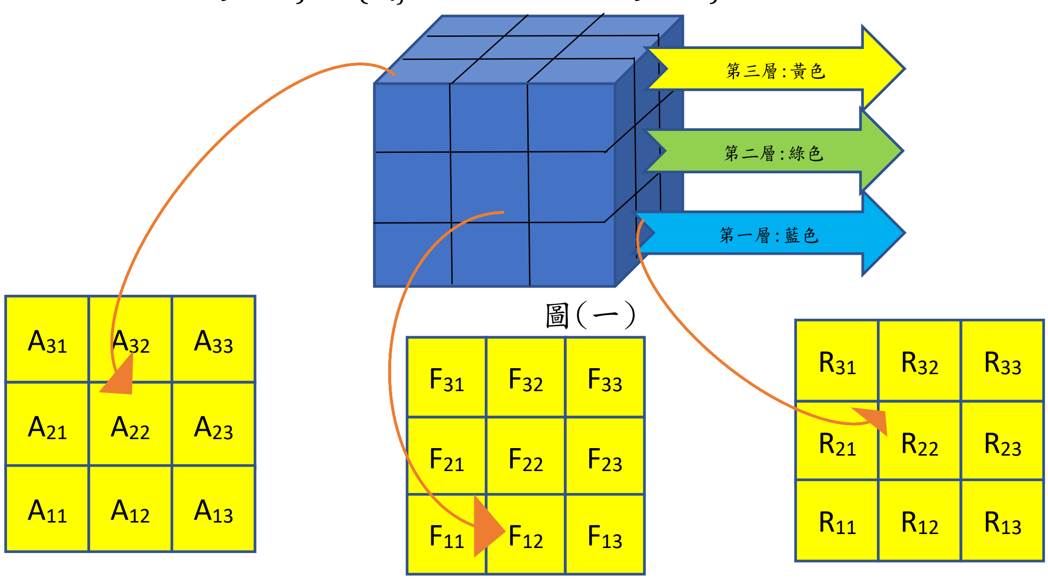
構形的基本步驟如下：



二、尋找多生三視圖

(一)編序

進行討論之前，我們先將模型由下至上分成三層，並在積木上分別使用藍色、綠色及黃色做為區別層數，見圖(一)；再者，將上視圖的九宮格分別標示為$\{A_{ij}，1 \le i \le 3,1 \le j \le 3\}$見圖(二) ；次之，將前視圖、右視圖中的各格分別編序為$\{F_{ij}，1 \le i \le 3,1 \le j \le 3\}$及 $\{R_{ij}，1 \le i \le 3,1 \le j \le 3\}$。



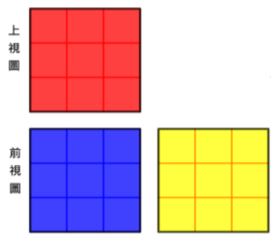
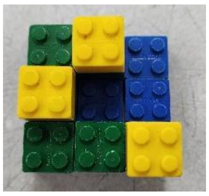
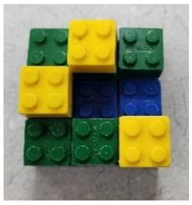
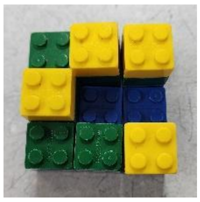
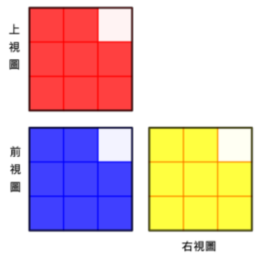
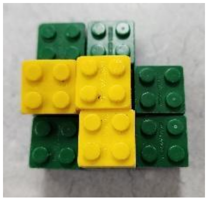
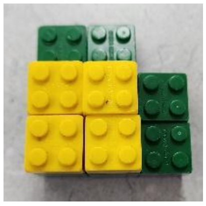
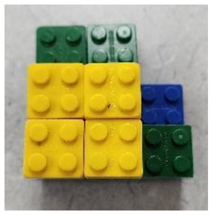
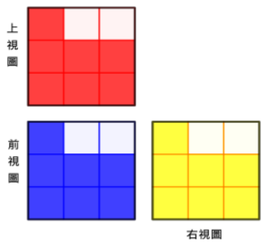
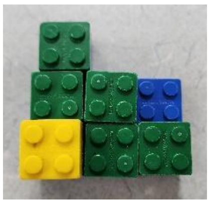
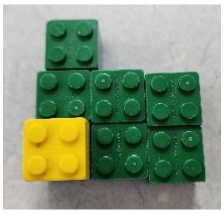
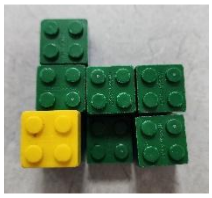
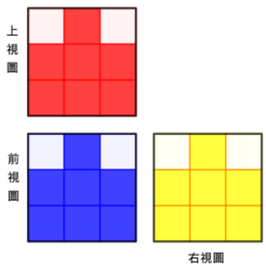
圖(一)

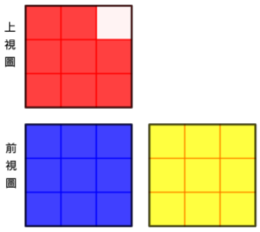
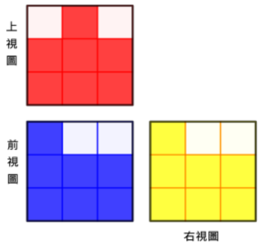
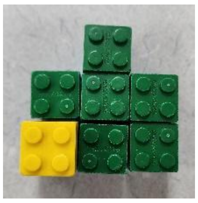
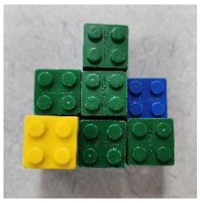
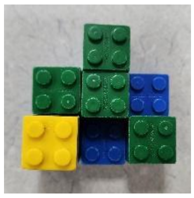
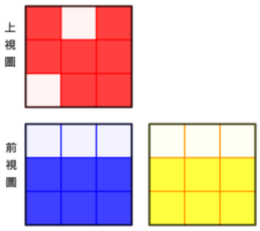
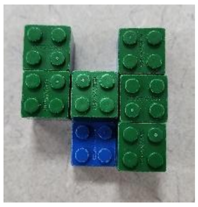
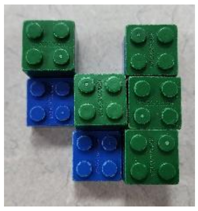
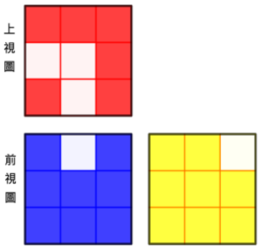
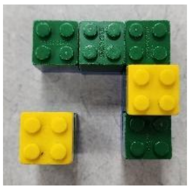
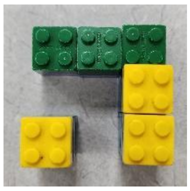
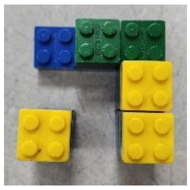
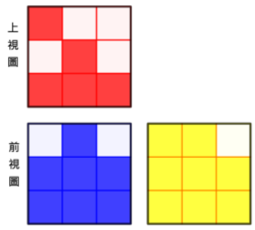
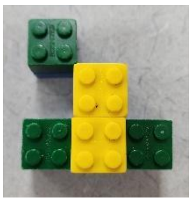
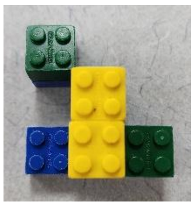
圖(二)

(二)實例：

了解三視圖的操作過後，我們使用 GeoGebra 結合積木進行三視圖的反向推理練習，在全為實心堆疊的前提下，找到許多實例擁有相同的上視圖、前視圖及右視圖，但是在積木表現卻出現多種組合。以下表 1 中則是列出幾組實例及挑選幾個可能排列的方式。

表 1 三視圖實例

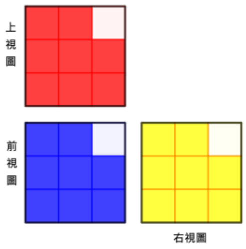
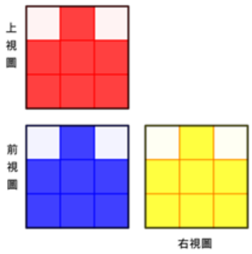
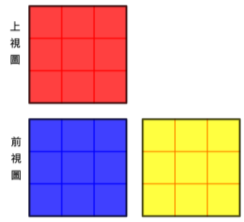
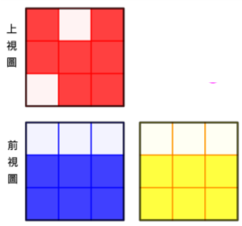
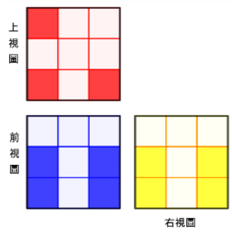
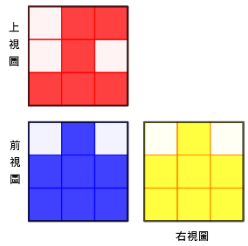
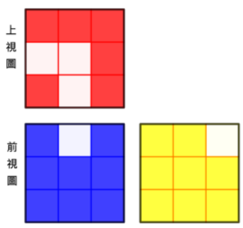
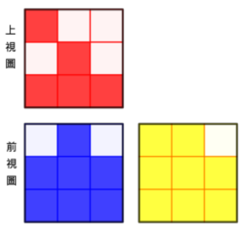
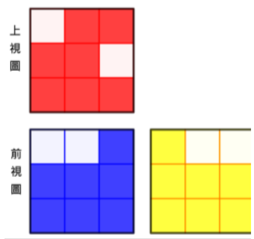
三視圖	可能樣式(一)	可能樣式(二)	可能樣式(三)
			
			
			
			

(三)整理：

我們經過多次的檢驗、分析與資料整理，發現到這幾種例子可歸納為三大類型，如表 2。分別是三個方位視圖皆相同的（以下簡稱為三同圖）、僅前視圖與右視圖相同（以下簡稱為二同圖）及三方位視圖皆不相同（以下簡稱為三不同圖）。之後再各別針對這些類型進行細節分類，並加以討論可能會造成的先決條件。

表 2 三視圖整理樣式

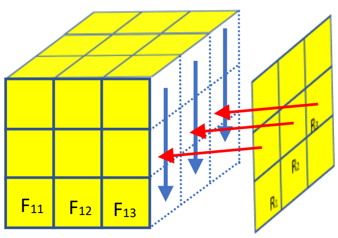
類型 樣式	樣式(一)	樣式(二)	樣式(三)
三同圖			
二同圖			
三不同圖			

1. 三同圖的規律

(1)田立方圖：

為了找到所有田立方圖的類別，我們猜想三視圖所呈現的樣式可能為邊長格數為 n，滿足n^2，$n \in \{2,3 \dots\dots n\}$：

表 3 三同圖中的田立方圖驗證

樣式	驗證	
	理由： 1. 設$n=3$，即上視圖、前視圖及右視圖為3×3的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現上視圖中每行個數或每列的格數滿足$1 \le A_{ij} \le 3$， $A_{11} \vee A_{12} \vee A_{13} = 3$， $A_{21} \vee A_{22} \vee A_{23} = 3$，	成立 ○

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

$A_{31} \vee A_{32} \vee A_{33} = 3$，

$A_{11} \vee A_{21} \vee A_{31} = 3$，

$A_{12} \vee A_{22} \vee A_{32} = 3$，

$A_{13} \vee A_{23} \vee A_{33} = 3$，

$A_{11} \vee A_{22} \vee A_{33} = 3$，

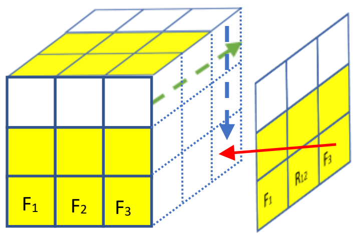
3. 舉例排列方式：

$A_{11} = A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = A_{33} = 3$；

$A_{22} = 1 \vee 2 \vee 3$

<table>
<tr><th>n 值</th><th>max</th><th>min</th></tr>
<tr><td>3</td><td>$3 \times 3 \times 3$</td><td>$3 \times (3+2)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2 \times 2 \times 2$</td><td>$2 \times (2+1)$</td></tr>
</table>

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

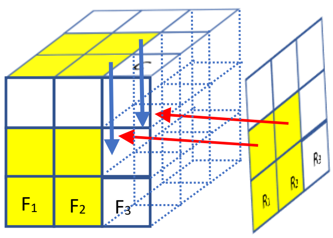
理由：

1. 假設不為n^2的其中一種，設可減少一列$A_{31} - A_{32} - A_{33}$，則前視圖及右視圖亦成為每行僅有 2 格的圖形。

2. 將此三圖使用貼盒法結合成立體圖，發現$A_{31} - A_{32} - A_{33}$，(左圖藍色粗虛線)與 R_{13}(左圖紅實線)的交接處會產生矛盾。故圖形不成立

3. 同理可證，亦不會出現少行或列的圖式。

</td>
<td>不成立X</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

理由：

1. 設$n = 2$，即上視圖、前視圖及右視圖為 2× 2的圖形。

2. 將此三圖結合成立體圖，發現A_{11}、A_{12}、A_{21}、A_{22}，每行個數或每列的格數滿足

$1 \leq A_{11}$、A_{12}、A_{21}、$A_{22} \leq 2$，

$A_{11} \vee A_{12} = 2$，$A_{21} \vee A_{22} = 2$，

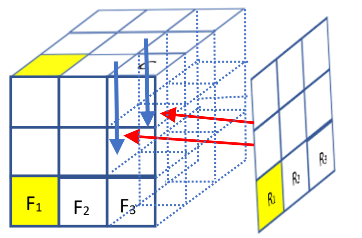
$A_{12} \vee A_{22} = 2$，$A_{11} \vee A_{21} = 2$。

3. 舉例排列方式：

$A_{11} = A_{12} = A_{21} = 2$；

$A_{22} = 1 \vee 2$

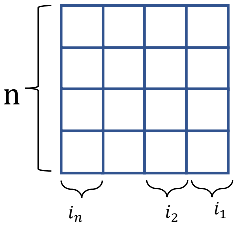
</td>
<td>成立◯</td>
</tr>
</table>

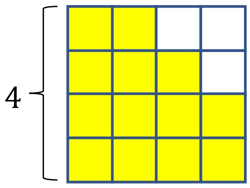
	理由： 1. 設$n=1$，即上視圖、前視圖及右視圖為 1× 1的圖形。 2. 將此三圖結合成立體圖，發現僅有一格，與我們的前提—需為多生三視圖矛盾，故不合。	不成立 X
綜上所述：當$n=k$時，亦成立。其$max=k\times k\times k$；$min=k\times(k+k-1)$		

根據上列驗證，我們確定三視圖為**田立方圖**，符合N^2，$N\in\{2,3\ldots\ldots n\}$格數必有多生三視圖。

極值—$max=n\times n\times n$；$min=n\times(n+n-1)$

為了找到所有凸字圖的類別，在不懸空的前提下，我們猜想三視圖所呈現的樣式可能為滿足$(i_n\ ，i_{n-1}\ ，i_j\ldots\ldots i_2\ ，i_1)$，$i_j\in(1\ ，2\ ，3\ ，\ \ldots\ldots\ ，n)$，其中必有一個$i_j=n$，但其他元素不能同時為 1，必能產生多生三視圖。



舉例：(4，4，3，2)➔ 

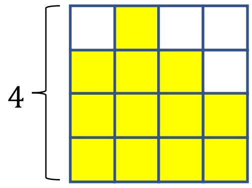
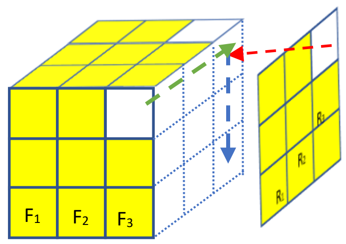
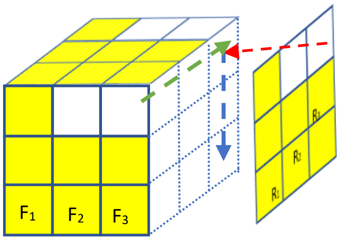
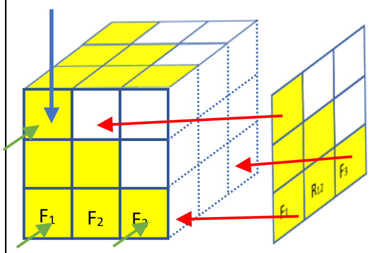
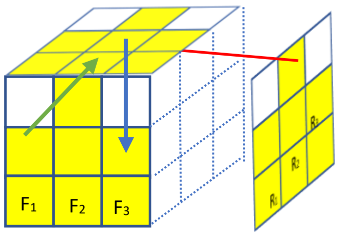
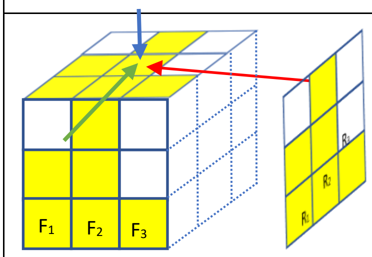
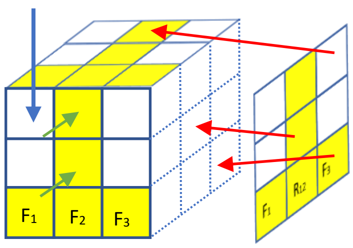
(3，4，3，2)➔ 

表 4 三同圖中凸字圖的驗證

樣式	驗證	
	理由： 1. 設圖形為(3，3，2)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-1$的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現A_{33}、F_{33}、R_{33}每排的格數皆為 0 個，且滿足 $1\le A_{31}$、A_{32}、A_{13}、$A_{23}\le2$， $A_{31}\vee A_{32}=2$， $A_{13}\vee A_{23}=2$。 3. 舉例排列方式： $A_{12}=A_{21}=A_{22}=3$ $,A_{13}=A_{23}=A_{31}=A_{32}=2$； $A_{11}=1\vee2\vee3$	成立 ○

	理由： 1. 設圖形為(3，2，2)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-2$的圖形。 2. 使用貼盒法，發現A_{11}必有 3 個、A_{31}必有 2 個，A_{12}、A_{13}、A_{21}、A_{22}、$A_{23}\in\{1，2\}$， $A_{12}\vee A_{13}=2$，$A_{12}\vee A_{22}=2$， $A_{13}\vee A_{23}=2$，$A_{22}\vee A_{23}=2$。 3. 舉例排列方式： $A_{11}=3,A_{31}=A_{12}=A_{13}=A_{22}=A_{23}=2$； $A_{21}=1\vee2$。	成立 ◯
	理由： 1. 設(3，2，1)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為左下三角圖形。 2. 經由貼盒法，發現A_{11}必有 3 個、A_{31}和A_{13}必有 1 個，A_{12}、A_{21}、$A_{22}\in\{1，2\}$， $A_{12}\vee A_{22}=2$，$A_{21}\vee A_{22}=2$， 3. 舉例排列方式： $A_{11}=3$，$A_{13}=A_{31}=1$，$A_{22}=A_{12}=2$； $A_{21}=1\vee2$	成立 ◯
	理由： 1. 設圖形為(2，3，2)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-2$的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現A_{22}排的格數必為 3 個，A_{32}必為 2 個，且滿足 $1\le A_{11}$、A_{12}、A_{13}、A_{21}、$A_{23}\le2$， $A_{11}\vee A_{12}\vee A_{13}=2,$ $A_{13}\vee A_{23}=2$ $A_{21}\vee A_{23}=2,$ $A_{11}\vee A_{21}=2$。 3. 舉例排列方式：	成立 ◯

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$$A_{22} = 3,$$
$$A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{23} = A_{32} = 2；$$
$$A_{11} = 1 \vee 2$$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>理由：
1. 設圖形為(2，3，1)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-3$的圖形。
2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現A_{22}排的格數必為 3 個，A_{32}、A_{13}必為 1 個，且滿足
$$1 \le A_{11}、A_{12}、A_{21} \le 2，$$
$$A_{11} \vee A_{12} \vee A_{13} = 2,$$
$$A_{13} \vee A_{23} = 2$$
$$A_{11} \vee A_{21} = 2。$$
3. 舉例排列方式：
$$A_{22} = 3,$$
$$A_{13} = A_{32} = 1,$$
$$A_{21} = A_{22} = 2；$$
$$A_{11} = 1 \vee 2。$$
4. 同理，同樣圖形經由鏡射亦可成為多生三視圖。</td>
<td>成立
○</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>理由：
1. 設圖形為(1，3，1)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-4$的圖形。
2. 經由貼盒法，發現A_{22}必有 3 個、A_{11}、A_{12}、A_{13}、A_{32}必有 1 個。和我們要找的多生三視圖矛盾，是故不合。</td>
<td>不成立
X</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">綜上所述：同理，當$n=4$，圖形為(4，4，4，3)、(4，4，4，2)、(4，4，4，1)、(4，4，3，3)、(4，4，3，2)、(4，4，3，1)、(4，4，2，2)、(4，3，3，3)、(4，3，3，2)、(4，3，3，1)、 (4，3，2，2)、(4，3，2，1)； (4，4，2，2)、(4，4，2，1)、(4，2，2，2)、(4，2，2，1)、(4，2，1，1)，及其排列組合，乃至延伸至$n=n$時，亦可成為多生三視圖。</td>
</tr>
</table>

為了進一步討論凸字圖所有情況的極值，我們將各種情形於下方表格中討論：

表 5 凸字圖的極值討論

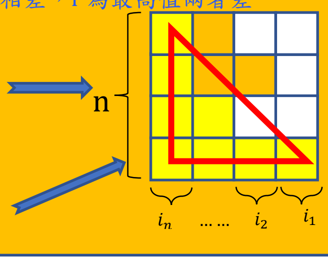
組合		極大值	極小值
(3，3，2)及其排列		$(3+3+2)\times 2+2^2$	$(3+3+2)\times 1+2^2+2$
(3，2，2)及其排列		$(3+2+2)\times 2+1^2$	$(3+2+2)\times 1+2^2+1$
(2，3，1)及其排列		$(2+3+1)\times 1+2^2+1^2$	$(2+3+1)\times 1+2+1$
$(4，\overset{0}{4}，\overset{0}{4}，\overset{a}{k})$	k=3	$(4+4+4+3)\times 3+3^2\times 1+2^2\times 0+1^2\times 0$	$(4+4+4+3)\times 1+2\times(3+3)+1$
	k=2	$(4+4+4+2)\times 2+3^2\times 2+2^2\times 0+1^2\times 0$	$(4+4+4+2)\times 1+2\times(3+2)+1$
	k=1	$(4+4+4+1)\times 1+3^2\times 3+2^2\times 0+1^2\times 0$	$(4+4+4+1)\times 1+2\times(3+1)+1$
$(4，\overset{0}{4}，\overset{1}{3}，\overset{a}{k})$	k=3	$(4+4+3+3)\times 3+3^2\times 0+2^2\times 1+1^2\times 0$	$(4+4+3+3)\times 1+2\times(3+3)$
	k=2	$(4+4+3+2)\times 2+3^2\times 1+2^2\times 1+1^2\times 0$	$(4+4+3+2)\times 1+2\times(3+2)$
	k=1	$(4+4+3+1)\times 1+3^2\times 2+2^2\times 1+1^2\times 0$	$(4+4+3+1)\times 1+2\times(3+1)$
(4，3，3，k)	k=3	$(4+3+3+3)\times 3+3^2\times 0+2^2\times 0+1^2\times 1$	$(4+3+3+3)\times 1+2\times(2+3)+1$
	k=2	$(4+3+3+2)\times 2+3^2\times 1+2^2\times 0+1^2\times 1$	$(4+3+3+2)\times 1+2\times(2+2)+1$
	k=1	$(4+3+3+1)\times 1+3^2\times 2+2^2\times 0+1^2\times 1$	$(4+3+3+1)\times 1+2\times(2+1)+1$
(4，3，2，k)	k=2	$(4+3+2+2)\times 2+3^2\times 0+2^2\times 1+1^2\times 1$	$(4+3+2+2)\times 1+2\times(2+2)+1$
	k=1	$(4+3+2+1)\times 1+3^2\times 1+2^2\times 1+1^2\times 0$	$(4+3+2+1)\times 1+2\times(2+1)+1$
(4，4，2，k)	k=2	$(4+4+2+2)\times 2+3^2\times 0+2^2\times 2+1^2\times 0$	$(4+4+2+2)\times 1+2\times(3+2)$
	k=1	$(4+4+2+1)\times 1+3^2\times 0+2^2\times 2^2+1^2\times 0$	$(4+4+2+1)\times 1+2\times(3+1)$
(4，2，k，k)	k=2	$(4+2+2+2)\times 2+2^1$	$(4+2+2+2)\times 1+2\times(2+2)$
	k=1	$(4+2+1+1)\times 1+2^2+2^1$	$(4+2+1+1)\times 1+2\times(1+1)$
(4，2，2，1)		$(4+2+2+1)\times 1+3^2\times 1+2^2\times 0+1^2\times 0$	$(4+2+2+1)\times 1+2\times(2+1)$

根據上列驗證，我們確定**凸字圖三視圖**所呈現的樣式可能為滿足$(i_n，i_{n-1}，i_j\dots\dots i_2，i_1)$，$i_j\in(1，2，3，\dots\dots，n)$，**其中必有一個$i_j=n$，但其他元素不能同時為1**，必能產生多生三視圖。

極值發生：f為$(i_n，i_{n-1}，i_j\dots\dots i_2，i_1)$中最低值兩者差，g 為中間值相差，f 為最高值兩者差

$$max=\begin{cases}\sum_1^n i_j\times(i_j\text{最小值})+3^2\times f+2^2\times g+1^2\times h，\\ \sum_1^n i_j\times(i_j\text{最小值})+\text{各項規律，當圖形為下三角形}\end{cases}$$

$$min=\begin{cases}\sum_1^n i_j\times 1+2\,(i_{n-1}-1+k)\begin{cases}1，\text{有奇數個}\,n\\0，\text{有偶數個}\,n\end{cases}\\ \sum_1^n i_j\times(i_j\text{最小值})+\text{各項規律，當圖形為下三角形}\end{cases}$$



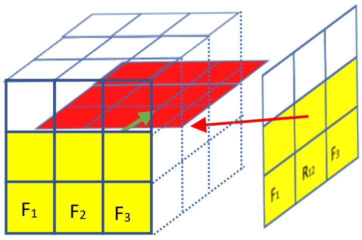
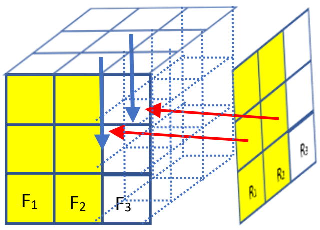
2. 二同圖的規律

(1)長方圖：

猜想可能滿足$\begin{cases}(a，a，a\dots\dots a，a)，a\in(2，\dots\dots，(n-1))\\(a，a，\dots\dots，0，0)，a\in(2，\dots\dots，n)，0\text{ 的個數 }1\sim(n-2)\text{個}\end{cases}$

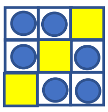
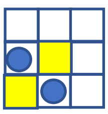
，必能產生多生三視圖。

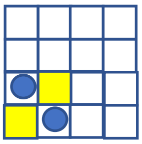
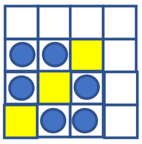
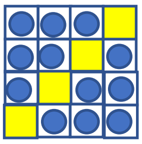
表 6 二同圖中的長方圖驗證

	理由： 1. 假設圖形為(2，2，2)，則前視圖及右視圖為每行3×2的長方形圖形。 2. 先使用貼盒法結合成立體圖，發現可形成一個$3\times3\times2$的長方塊，但須滿足A_{11}—A_{12}—A_{13}、A_{13}—A_{21}—A_{32}、A_{12}—A_{23}—A_{31}、A_{13}—A_{22}—A_{31}、A_{12}—A_{21}—A_{33}、A_{11}—A_{23}—A_{32}這六組中至少一組的每格必須排有 2 格，而其他格數則可以任意排，其格數a，*僅須滿足* $0\le a\le2$。 3. 舉例排列方式：$A_{11}=A_{22}=A_{33}=2$；$A_{21}=1\vee2$	成立 ◯
	理由： 1. 假設圖形為(3，3，0)則前視圖及右視圖為每行3×2的長方形圖形。 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現可形成一個$2\times2\times3$的長方塊，但須滿足A_{11}—A_{22}、A_{12}—A_{21}這兩組中至少一組的每格必須排有 3 格而其他格數則可以任意排，其格數a，*僅須滿足* $0\le a\le3$。 3. 舉例排列方式：$A_{11}=A_{22}=3$；$A_{21}=1\vee2$	成立 ◯
同理，當$n=4$，圖形為(4，4，4，0)、(4，4，0，0)、(3，3，3，3)、(2，2，2，2)亦可成為多生三視圖。(在之前時已討論 (2，2，0，0)、(3，3，3，0)的組合方式)		

為了進一步討論長方圖所有情況的極值，我們將各種情形於下方表格中討論：

表 7 長方圖的極值討論

組合	上視圖最小值可能情形	極大值	極小值
(2，2，2)		未增加●：$2\times3+2\times0$ 增加 1 個●：$2\times3+2\times1$ 再加 1 個●：$2\times3+2\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$2\times3+2\times6$	未增加●：$2\times3+1\times0$ 增加 1 個●：$2\times3+1\times1$ 再加 1 個●：$2\times3+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$2\times3+1\times6$
(3，3，0)		未增加●：$3\times2+3\times0$ 增加 1 個●：$3\times2+3\times1$	未增加●：$3\times2+1\times0$ 增加 1 個●：$3\times2+1\times1$

		再加 1 個●：3×2＋3×2	再加 1 個●：3×2＋1×2
(k，k，0，0) k=4，3，2		未增加●：$k\times2+k\times0$ 增加 1 個●：$k\times2+k\times1$ 再加 1 個●：$k\times2+k\times2$	未增加●：$k\times2+1\times0$ 增加 1 個●：$k\times2+1\times1$ 再加 1 個●：$k\times2+1\times2$
(k，k，k，0) k=4，3，2		未增加●：$k\times3+k\times0$ 增加 1 個●：$k\times3+k\times1$ 再加 1 個●：$k\times3+k\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times3+k\times6$	未增加●：$k\times3+1\times0$ 增加 1 個●：$k\times3+1\times1$ 再加 1 個●：$k\times3+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times3+1\times6$
(k，k，k，k) k=3，2		未增加●：$k\times4+k\times0$ 增加 1 個●：$k\times4+k\times1$ 再加 1 個●：$k\times4+k\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times4+k\times12$	未增加●：$k\times4+1\times0$ 增加 1 個●：$k\times4+1\times1$ 再加 1 個●：$k\times4+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times4+1\times12$

由上可知，**長方圖*滿足*** $\begin{cases} (a，a，a\ldots\ldots a，a)，a\in(2，\ldots\ldots，(n-1)) \\ (a，a，\ldots\ldots，0，0)，a\in(2，\ldots\ldots，n)，0\text{的個數}1\sim(n-2)\text{個} \end{cases}$

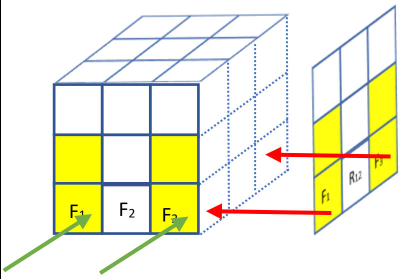
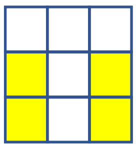
，必能產生多生三視圖。

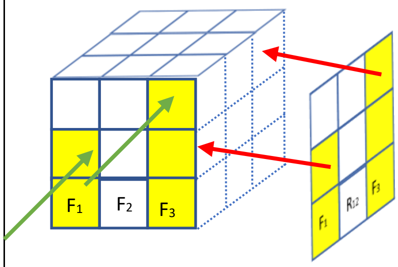
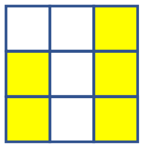
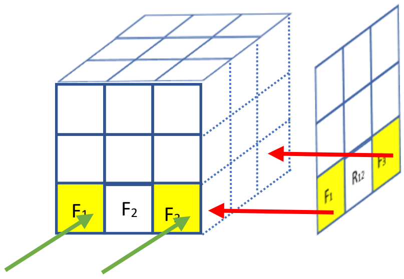
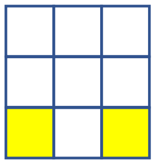
極值發生—max=$(a\text{的個數})^2\times a$；min=$a\text{的個數}\times a+1\times(a\text{的個數}^2-a\text{的個數})+1$

(2)雙子星圖：

猜想是否可能前視圖與右視圖存在滿足$(i_n，i_{n-1}，\ldots\ldots i_2，i_1)$，$i_j\in(0，1，\ldots\ldots，n-1)$，$i_n\wedge i_1\neq0$，必有多生三視圖。

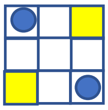
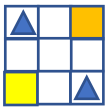
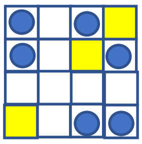
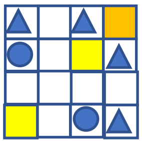
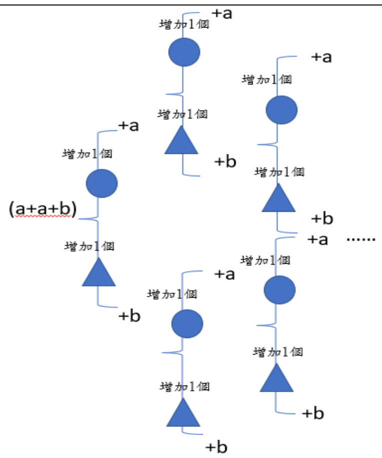
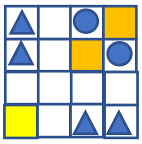
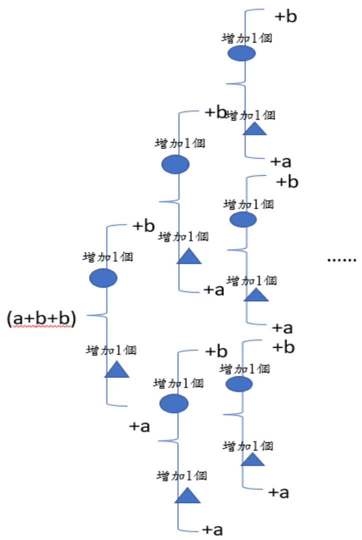
表 8 二同圖中的雙子星圖驗證

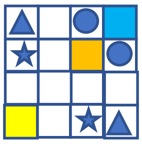
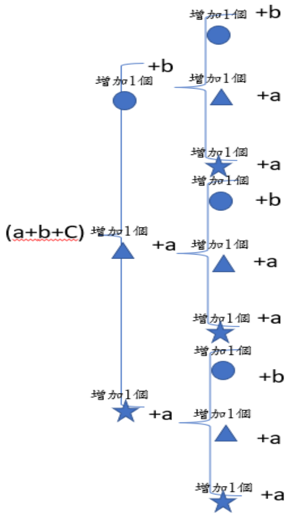
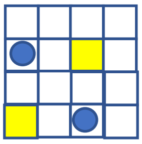
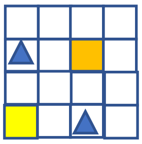
	理由： 1. 假設圖形為(2，0，2)，前視圖及右視圖則為。 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現 A_{11}—A_{33}、A_{13}—A_{31} 兩組中至少一組的每格必須有 2 格，另一組格數a，*須滿足* $1\le a\le2$，而其他格數必須為 0 格。 3. 舉例排列方式：	成立 ○

<table>
<tr><td></td><td>$A_{11}=A_{13}=A_{33}=2$；$A_{31}=1\vee 2$
4. 同理(3，0，3)，亦可找到多生三視圖。</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>理由：
1. 設圖形為(2，0，3)，則前視圖與右視圖為  。
2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現 A_{11}—A_{33}、A_{13}—A_{31} 兩組中至少一組的為 2-3 格，另一組格數a，*須滿足* $1\le a\le 2$，而其他格數必須為 0 格。
3. 舉例排列方式： $A_{11}=2$，$A_{33}=3$；$A_{31}=1\vee 2$
4. 同理$(i_1，i_2，i_3)$*為其排列組合的模式*，亦可找到多生三視圖。</td><td>成立◯</td></tr>
<tr><td></td><td>理由：
1. 設圖形為(1，0，1)，前視圖及右視圖則為  。
2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現 A_{11}—A_{33}、A_{13}—A_{31} 兩組中至少一組的每格必須有 1 格，另一組格數a，*須滿足* $0\le a\le 1$，而其他格數必須為 0 格。但在上視圖固定的情況下，另一組格數則不能刪減其位置格數，舉例來說:$A_{11}=A_{33}=1$ ，上視圖要求A_{31}亦要有格數時，則A_{31}只能有 1 格的選擇，就不會出現多生三視圖。</td><td>不成立X</td></tr>
<tr><td colspan="3">同理，當$n=4$，圖形為(a，0，a，a) (a，a，0，a) (a，0，a，b) (a，0，b，a) (a，a，0，b) (a，b，0，a) (b，0，a，a) (b，a，0，a) (a，0，b，b) (a，b，0，b) (b，a，0，b) (b，0，a，b) (b，0，b，a) (b，b，0，a) (a，0，b，c) (a，b，0，c)(a，c，0，b) (a，0，c，b) (b，0，a，c) (b，a，0，c) (b，c，0，a) (b，0，c，a) (c，0，a，b) (c，a，0，b) (c，b，0，a) (c，0，b，a) (a，0，a，0) (a，0，0，a) (a，0，b，0) (a，0，0，b) (b，0，a，0) (b，0，0，a)，$1\le a<b<c\le 4$，*b或c不能單獨為* 1，及推廣至 n 時亦可成為多生三視圖。</td></tr>
</table>

為了進一步討論雙子星圖所有情況的極值，我們將各種情形於下方表格中討論：

表 9 雙子星圖的極值討論(c>b>a)

組合	上視圖最小值可能情形	極大值	極小值
(2，0，2)		未增加●：$(2+2)+2\times 0$ 增加 1 個●：$(2+2)+2\times 1$ 再加 1 個●：$(2+2)+2\times 2$	未增加●：$(2+2)+1\times 0$ 增加 1 個●：$(2+2)+1\times 1$ 再加 1 個●：$(2+2)+1\times 2$
(2，0，3)		未增加▲：$(2+3)+2\times 0$ 增加 1 個▲：$(2+3)+2\times 1$ 再加 1 個▲：$(2+3)+2\times 2$	未增加▲：$(2+3)+1\times 0$ 增加 1 個▲：$(2+3)+1\times 1$ 再加 1 個▲：$(2+3)+1\times 2$
(a，0，a，a) (a，a，0，a)		未增加●：$(a+a+a)+a\times 0$ 增加 1 個●：$(a+a+a)+a\times 1$ 再加 1 個●：$(a+a+a)+a\times 2$ ⋮ 再加 1 個●：$(a+a+a)+a\times 6$	未增加●：$(a+a+a)+1\times 0$ 增加 1 個●：$(a+a+a)+1\times 1$ 再加 1 個●：$(a+a+a)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 個●：$(a+a+a)+1\times 6$
(a，0，a，b) (a，0，b，a) (a，a，0，b) (a，b，0，a) (b，0，a，a) (b，a，0，a)	 ▲=min(a ，b) ●=min(a ，a)		未增加格：$(a+a+b)+1\times 0$ 增加 1 格：$(a+a+b)+1\times 1$ 再加 1 格：$(a+a+b)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+a+b)+1\times 6$
(a，0，b，b) (a，b，0，b) (b，a，0，b) (b，0，a，b) (b，0，b，a) (b，b，0，a)	 ▲=min(a ，b) ●=min(b ，b)		未增加格：$(a+b+b)+1\times 0$ 增加 1 格：$(a+b+b)+1\times 1$ 再加 1 格：$(a+b+b)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+b+b)+1\times 6$

(a，0，b，c) (a，b，0，c) (a，c，0，b) (a，0，c，b) (b，0，a，c) (b，a，0，c) (b，c，0，a) (b，0，c，a) (c，0，a，b) (c，a，0，b) (c，b，0，a) (c，0，b，a)	 ★=min(a，b) ●=min(b，c) ▲=min(a，c)		未增加格：$(a+b+c)+1\times 0$ 增加 1 格：$(a+b+c)+1\times 1$ 再加 1 格：$(a+b+c)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+b+c)+1\times 6$
(a，0，a，0) (a，0，0，a)		未增加●：$(a+a)+a\times 0$ 增加 1 個●：$(a+a)+a\times 1$ 再加 1 個●：$(a+a)+a\times 2$	未增加●：$(a+a)+1\times 0$ 增加 1 個●：$(a+a)+1\times 1$ 再加 1 個●：$(a+a)+1\times 2$
(a，0，b，0) (a，0，0，b) (b，0，a，0) (b，0，0，a)	 ▲=min(a，b)	未增加▲：$(a+b)+a\times 0$ 增加 1 個▲：$(a+b)+a\times 1$ 再加 1 個▲：$(a+b)+a\times 2$	未增加▲：$(a+b)+1\times 0$ 增加 1 個▲：$(a+b)+1\times 1$ 再加 1 個▲：$(a+b)+1\times 2$

由上可知，**雙子星**滿足$\left(i_n，i_{n-1}，\dots\dots i_2，i_1\right)$，$i_j\in\left(0，1，\dots\dots，n-1\right)$，$i_n\wedge i_1\neq 0$，必有多生三視圖。

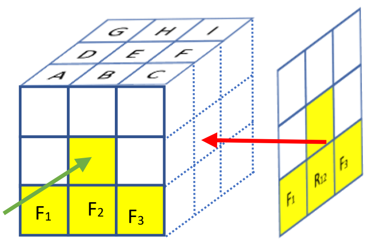
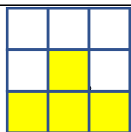
極值發生—max=$\sum_1^n i_j$＋(直線交會格數最小值)×(直線交會個數)，

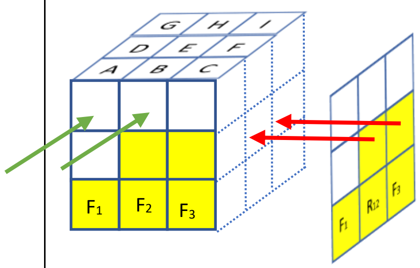
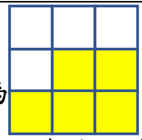
min=$\sum_1^n i_j\times a+1\times$(直線交會總個數)

(3)峰谷圖：

猜想是否可能前視圖與右視圖存在滿足$\left(i_n，i_{n-1}，\dots\dots i_2，i_1\right)$，$i_j\in$ $\left(k\middle|1\leq k<n，i_j>i_1\vee i_n \text{ 或} i_j<i_1\vee i_n\right)$，必有多生三視圖。

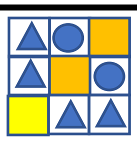
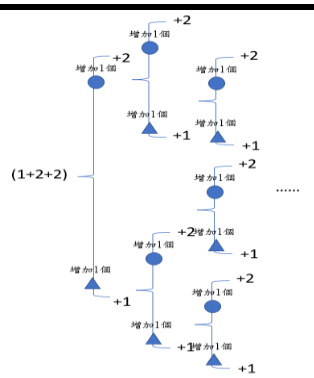
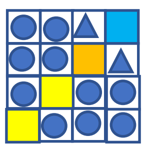
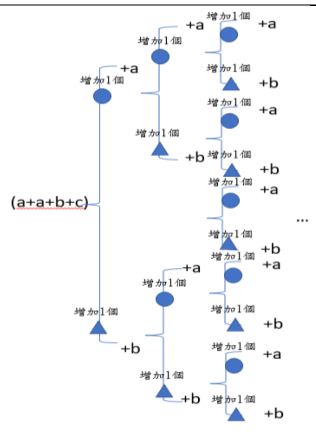
表 10 二同圖中的峰谷圖驗證

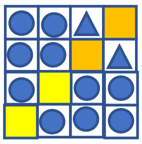
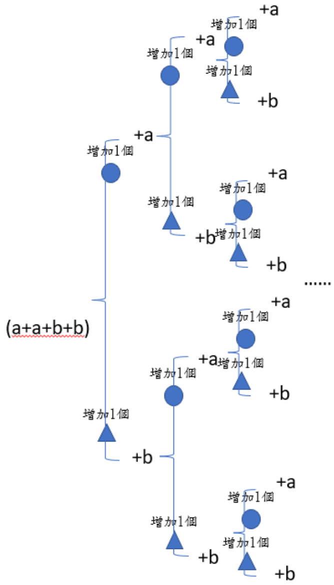
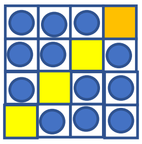
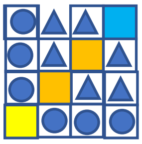
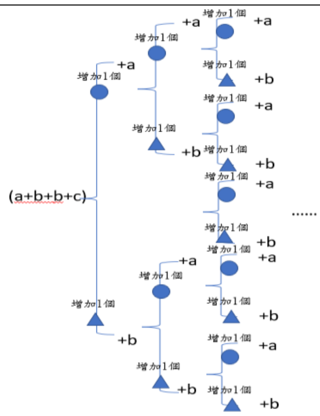
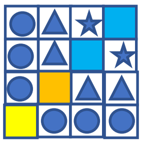
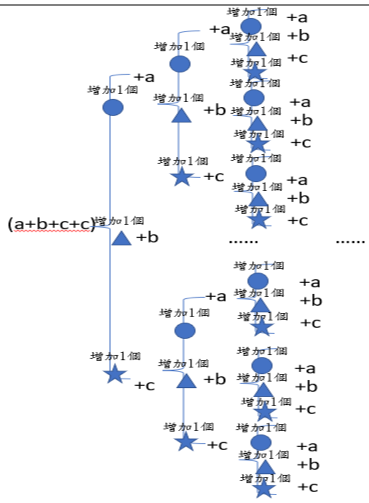
 	理由： 1. 設圖形為(1，2，1)，前視圖及右視圖則為  2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現A_{22}必須有 2 格；A_{11}—A_{33}、A_{13}—A_{31}兩組中至少一組的每格必須有 1 格，另一組格數a，須為 0 ≤ a ≤ 1，而其他格數需為 0 格。 3. 但在上視圖固定的情況之下，另一組格數則不能刪減其位置的格數，舉例來說:$A_{11}=A_{33}=1$，$A_{22}=2$ ，上視圖要求A_{31}	不成立X

	亦要有格數時，則A_{31}只能有 1 格，就不會出現多生三視圖。 4. 同理，(1，3，1)的模式，亦不會出現多生三視圖	
	理由： 1. 設圖形為(1，2，2)，前視圖及右視圖則為。 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現A_{11}必須有 1 格，$A_{22}—A_{33}$、$A_{32}—A_{23}$兩組中至少一組的每格必須有 2 格，而A_{12}、A_{13}、A_{21}、A_{31}的格數為$0 \vee 1$，而其他無限制。 3. 舉例排列方式：$A_{11}=1$，$A_{22}=A_{33}=2$；$A_{32}=1 \vee 2$ 4. 同理，(2，3，3)*及其排列組合的樣式*，亦可找到多生三視圖。	成立 ○
同理，當$n=4$，圖形為(a，a，b，c)、(a，a，b，b)、(a，a，a，b)、(a，b，b，c)、(a，b，c，c)與其排列組合，其中 $1 \le a \le b \le c < 4$，且當(a，a，a，b)時，$a \neq 1$，乃至推廣為 n 時亦可成為多生三視圖。		

為了進一步討論峰谷圖所有情況的極值，我們將各種情形於下方表格中討論：

表 11 峰谷圖的極值討論(c>b>a)

組合	上視圖最小值可能情形	極大值	極小值
(a，a，b) 及其排列組合	 ●=min(a，a) ▲=min(a，b) ▲=min(a，c)		未增加格：$(2+2+1)+1\times0$ 增加 1 格：$(2+2+1)+1\times1$ 再加 1 格：$(2+2+1)+1\times2$
(a，a，b，c) 及其排列組合	 ●=min(a，a) ●=min(a，b) ▲=min(b，c)		未增加格：$(a+a+b+c)+1\times0$ 增加 1 格：$(a+a+b+c)+1\times1$ 再加 1 格：$(a+a+b+c)+1\times2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+a+b+c)+1\times12$

(a，a，b，b) 及其排列組合	 ●$=\min(a，a)$ ●$=\min(a，b)$ ▲$=\min(a，\mathrm{b})$		未增加●：$(2a+2b)+1\times 0$ 增加 1 個●：$(2a+2b)+1\times 1$ 再加 1 個●：$(2a+2b)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 個●：$(2a+2b)+1\times 12$
(a，a，a，b) 及其排列組合 <a，b，c 可互 換數字>	 ●$=\min(a，a)$ ●$=\min(a，b)$	未增加●：$(3a+b)+a\times 0$ 增加 1 個●：$(3a+b)+a\times 1$ 再加 1 個●：$(3a+b)+a\times 2$ ⋮ 再加 1 個●：$(3a+b)+a\times 12$	未增加●：$(3a+b)+1\times 0$ 增加 1 個●：$(3a+b)+1\times 1$ 再加 1 個●：$(3a+b)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 個●：$(3a+b)+1\times 12$
(a，b，b，c) 及其排列組合	 ●$=\min(a，b)$ ▲$=\min(b，b)$ ▲$=\min(b，\mathrm{c})$		未增加格：$(a+2b+c)+1\times 0$ 增加 1 格：$(a+2b+c)+1\times 1$ 再加 1 格：$(a+2b+c)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+2b+c)+1\times 12$
(a，b，c，c) 及其排列組合	 ●$=\min(a，b)$ ●$=\min(a，c)$ ▲$=\min(b，c)$ ★$=\min(c，\mathrm{c})$		未增加格：$(a+b+c)+1\times 0$ 增加 1 格：$(a+b+c)+1\times 1$ 再加 1 格：$(a+b+c)+1\times 2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+b+c)+1\times 12$

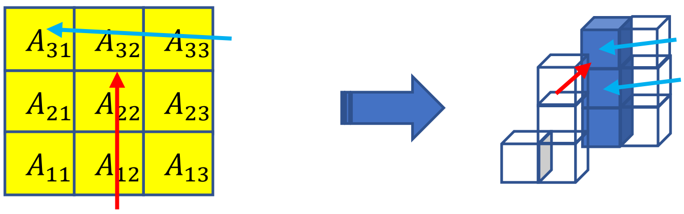
綜合上列所述，得知**峰谷圖**的前視圖與右視圖滿足$\left(i_n，i_{n-1}，\ldots\ldots i_2，i_1\right)$，$i_j \in \left(k \middle| 1 \le k < n，i_j > i_1 \vee i_n \text{ 或 } i_j < i_1 \vee i_n\right)$，必有多生三視圖。

極值發生—max=$\sum_1^n i_j$ ＋(直線交會格數最小值)×(直線交會個數)，

min=$\sum_1^n i_j \times a + 1 \times$(直線交會總個數)

3.三不同圖的規律

在眾多的三不同圖中，我們發現到只要上視圖符合前視圖方向和右視圖方向的交會處所擁有的格數$N \le$ *前視圖格數* $\cap$ *右視圖格數*。



圖(三)

舉例來說，從前視圖A_{12}與右視圖A_{33}的視覺方向看過去，因為我們擺放的個數比A_{32}還要多，就會無法明確地看見它的個數，因而造成多生三視圖的樣式。

同樣的道理，只要在上視圖中，在前視圖方向與右視圖方向的交會處，所擺放的格數小於等於前視圖方向格數與右視圖方向格數的最小值，即可擁有多生三視圖

三、多生圖的奧秘

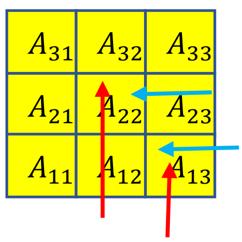
(一)產生多生三視圖的充分條件

綜合上列各種樣式，我們將上視圖轉變為矩陣$A = \begin{bmatrix} A_{n1} & \cdots & A_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11} & \cdots & A_{1n} \end{bmatrix}$，$C \in \{0，1\}$，$1 \le i \le n$，$1 \le j \le n$。綜合上述多種條件，能造成多生三視圖，它們的充分條件如下：

1. 須矩陣 A 中A_{ij}*與*A_{mn}，*且*$i \ne m$，$j \ne n$須同時存在，且擺放的積木個數≥ 2。
2. 需含括其兩個元素所在的前視圖A_{ij}視角與右視圖A_{mn}視角的交會處，且其積木個數需小於或等於 2 個元素中的最小值。

舉例來說：

現在選定A_{12}、A_{33}作為擺放積木的位置，皆放 2 個以上，則A_{32}則可以揀選 1 個或者是 2 個。



（二）產生多生三視圖的必要條件

表 12 驗證多生三視圖的必要條件

驗證：多生三視圖的產生，積木會落在A_{ij}與A_{mn}，且$i \neq m$，$j \neq n$ ，且擺放個數≥ 2

證明：

1. 當$\mathrm{A_{ij}}$與$\mathrm{A_{mn}}$，且$\mathrm{i} = \mathrm{m}$，$\mathrm{j} \neq \mathrm{n}$時 A_{ij}與A_{mn}為同行或者同列上的元素，必定在從前視圖或者右視圖其中一個方位能見到兩者會合處的格數。便不會產生多生三視圖的出現，與其矛盾，因此前提假設錯誤

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

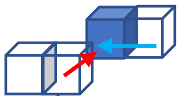
$\Rightarrow A_{\mathrm{ij}}$與$A_{\mathrm{mn}}$，且$i \neq m$，$j \neq n$

2. 假設上視圖選擇A_{ij}、A_{mn}作為擺放積木的位置，則在兩者交會處會產生從前視圖與右視圖皆無法看見的視覺死角處，因此先以擺放積木個數進行討論A_{ij}與A_{mn}，且$i \neq m$，$j \neq n$ 的前提下，令個數為 1 個，則前視圖與右視圖應為—

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

$(a，1，b)$、$(c，1，d)$及兩者排列組合，$0 \leq a$、b、c、$d \leq 3$。

由圖可知，在兩者交會處僅能擋住 1 個，但因上視圖須包含其會合處的格數，因此並不會有多生三視圖的產生，與之矛盾，故其個數應≥ 2。



3. 由上述得知，多生三視圖的產生，積木會落在A_{ij}與A_{mn}，且$i \neq m$，$j \neq n$ ，且擺放個數≥ 2

（三）產生多生三視圖的充要條件

由（一）跟（二）得知，產生多生三視圖的充要條件有兩個條件，如下：

充要條件

1. 須矩陣 A 中A_{ij}與A_{mn}，且$i \neq m$，$j \neq n$須同時存在，且擺放的積木個數≥ 2。
2. 需含括其兩個元素所在的前視圖A_{ij}視角與右視圖A_{mn}視角的交會處，且其積木個數需小於或等於 2 個元素中的最小值。

四、獨一性的產生

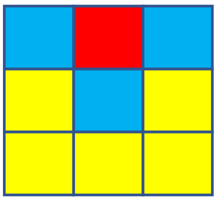
我們發現既然有這麼多的多生三視圖，不禁讓我們開始思索，是否有別的方法可以讓這些多生三視圖有獨一性的產生，於是我們開始著手討論各種不同的方式，最後我們採用最有趣也最好玩的方式。

在為了確保多生三視圖能夠出現獨一性，於是，我們想透過下列各種方式進行實驗，看看是否能夠使多生三視圖能夠變成擁有唯一答案的三視圖。我們將對「顏色」、「數字」來試試看。

(一)決定控制變因

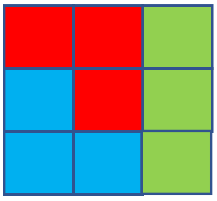
因如果上視圖用顏色或數字做為表示，會導致整個積木的擺設方式就已經呈現出來，所以在討論的時候，我們採用「貼盒法」的方式，僅使用前視圖與右視圖進行。然顏色與數字的操作模式相同，因此以顏色的方式做為主要操作模式。

首先，我們將前視圖與右視圖中擁有 3 個的顏色以黃色表示、2 個的以藍色、1 個的以綠色及沒有的則為紅色。所以可能呈現的樣式為圖(四)兩組圖片，每組的右邊為數字版，左邊為顏色版。



2	0	2
3	2	3
3	3	3

第一組



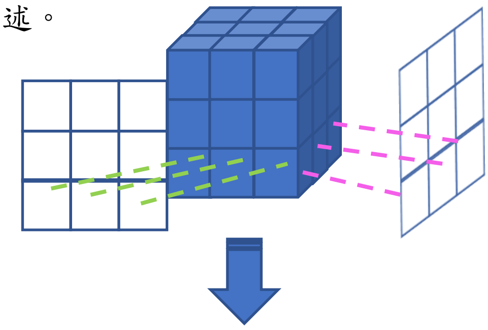
0	0	1
2	0	1
2	2	1

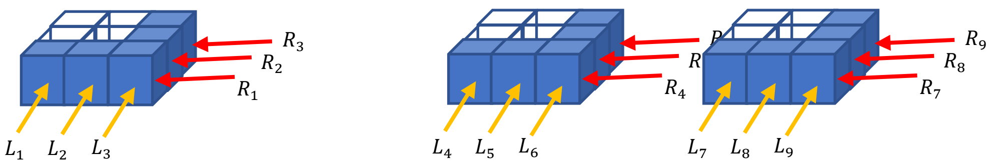
第二組

圖(四)

(二)驗證分析

我們使用「樹狀圖」進行驗證，先把前視圖和右視圖結合後，水平分成三大區塊，針對L_1~L_9及R_1~R_9進行論述。





第一層

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

第二層

B_{31}	B_{32}	B_{33}
B_{21}	B_{22}	B_{23}
B_{11}	B_{12}	B_{13}

第三層

C_{31}	C_{32}	C_{33}
C_{21}	C_{22}	C_{23}
C_{11}	C_{12}	C_{13}

1. 思考流程：

第一層的討論方式是從L_i，$i \in (1，2，3)$開始進行判斷，並搭配R_j，$j \in (1，2，3)$再做推論。

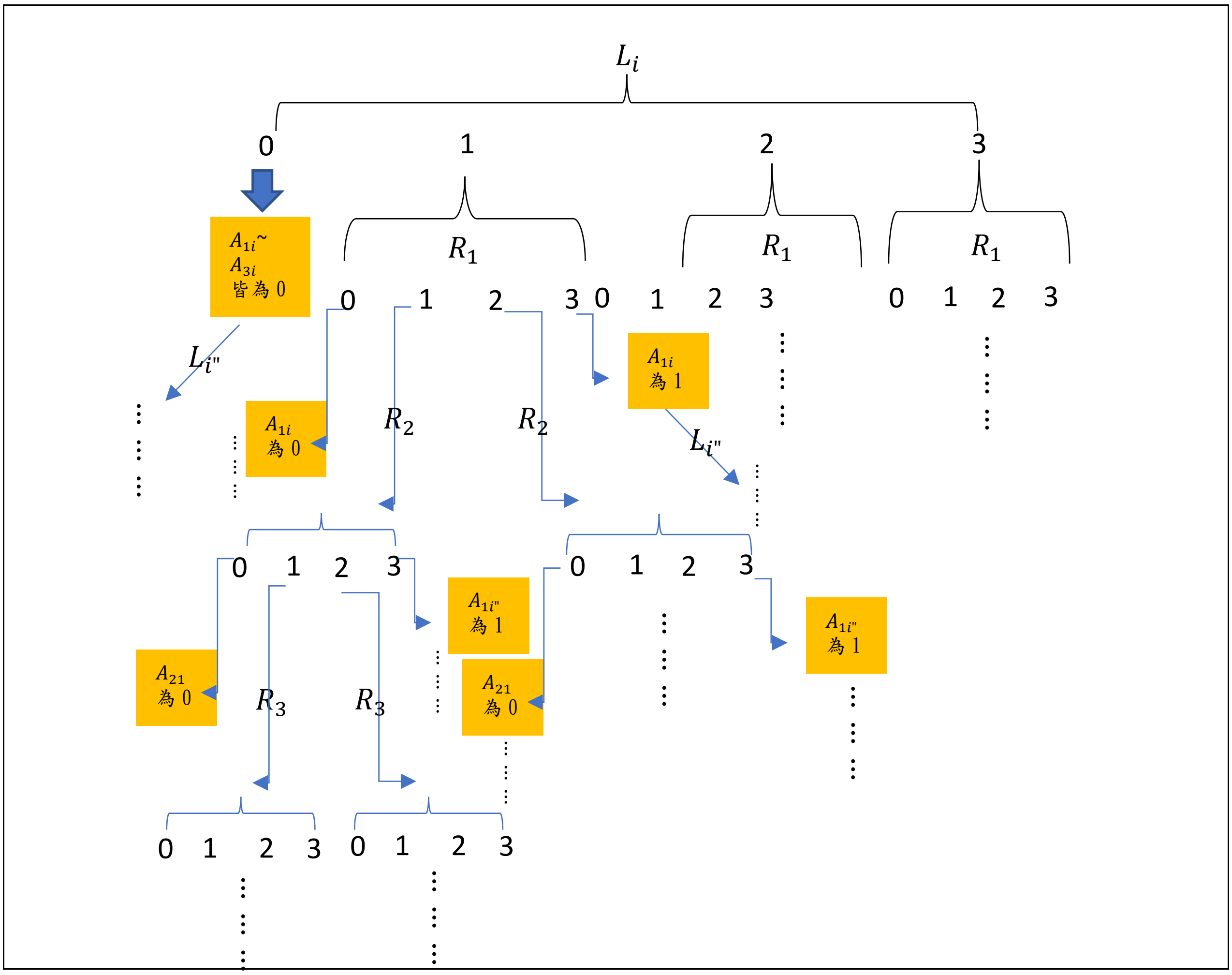
i. 設L_i為 0 個的時候，我們可以推斷出$A_{1i} \sim A_{3i}$皆為 0 個。此時，就可以繼續使用$L_{i''}$配合R_1、R_2、R_3推斷的放置方法。

ii. 設L_i為 1 個的時候，我們可以知道出$A_{1i} \sim A_{3i}$僅能只有 1 個，需配合R_1、R_2、R_3推斷的放置位置。後再繼續使用$L_{i''}$討論$A_{1i''} \sim A_{3i''}$推斷的放置方法，以此類推。

iii. 設L_i為 2 個的時候，我們可以知道出$A_{1i} \sim A_{3i}$可安放 2 個，需配合R_1、R_2、R_3猜想其放置的位置。再繼續使用$L_{i''}$討論$A_{1i''} \sim A_{3i''}$是否影響$A_{11} \sim A_{31}$的擺設方法，進行位置修正，後以此類推討論。

iv. 設L_i為 3 個的時候，我們可以推斷出$A_{1i} \sim A_{3i}$皆有 1 個。此時，就可以繼續使用$L_{i''}$配合R_1、R_2、R_3推斷的放置方法。

表 13 數獨積木思考流程



接著，以同樣的方式進行第二層，判斷第二層的擺放，考慮是否有基層能夠支撐第二層去確定第一層的擺放方式。緊接著，討論第三層的積木擺放，便能夠排出整個積木模型。

2. 發現：

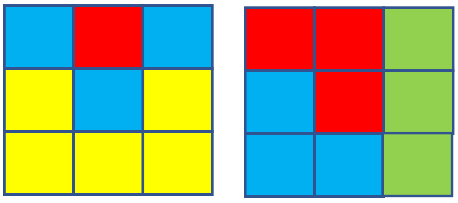
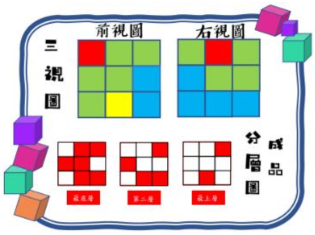
在經由實際操作過後，我們發現整個操作模式與數獨的討論方法很相似，而且我們僅用了兩面視圖就能夠拼湊出整個積木模型，並能確保其獨一性。

（三)發展：

在操作整個實驗的過程中，我們覺得討論模式跟數獨很像，需要多重的旁敲側擊，才能找到整個答案。感覺這個模式可以發展成積木和數獨的綜合版—「數獨積木」。透過「遊戲式思考」讓幾何課程變得更加有趣好玩。

以下是我們將三視圖與數獨結合發展成的「數獨積木」的設備與規則：

表 14 數獨積木的設備與規則

<table>
<tr><th>遊戲裝置</th><th>遊戲規則</th></tr>
<tr><td>1. 各種顏色數學連接積木
2. 前視圖與右視圖圖卡
顏色版

數字版
2 0 2   0 0 1
3 2 3   2 0 1
3 3 3   2 2 1</td><td>1. 黃色表示此排有 3 格，藍色為 2 格，綠色為 1 格，而紅色則是為 0 格。
同樣數字版的則是直接以數字做為表示。
2. 先選定遊戲卡


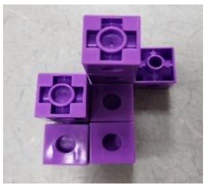
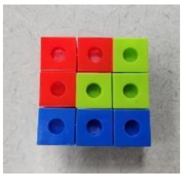
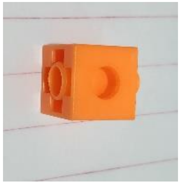

3. 再使用數學連接積木排出。</td></tr>
</table>

（四)實際操作：

在了解整個規則之後，我們將實際操作的整個流程說明圖分別陳述於下表中。

表 15 數獨積木實體操作流程

實體	前視圖	右視圖

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">實體操作流程圖</td></tr>
<tr><td colspan="3">
第一層 → 第二層 → 第三層 → 組合 → 結尾
 由前視圖與右視圖判斷第一層擺放位置，可確定第二排為 3 個。
 由前視圖與右視圖判斷第二層擺放位置。
 由前視圖與右視圖判斷第三層僅有一個格子，與第二層搭結合，確定在A_{32}的位置擺放 3 個。
 由已確定圖為基準，去進行其他格數的驗證。
 最後組合出正確的模式。
</td></tr>
</table>

肆、研究結果

以下為我們所找出來的多生三視圖的樣式、其規律性及其極值規則：

<table>
<tr><td colspan="2">類型
樣式</td><td colspan="2">樣式</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三同圖</td><td>田立方圖</td><td>符合N^2，$N \in \{2,3 \ldots\ldots n\}$格數必有多生三視圖。</td><td>**極值**—
$max = n \times n \times n$；
$min = n \times (n + n - 1)$</td></tr>
<tr><td>凸字圖</td><td>$(i_n\ ，i_{n-1}\ ，i_j \ldots\ldots i_2\ ，i_1)$，$i_j \in (1，2，3，\ldots\ldots，n)$，其中必有一個$i_j = n$，但其他元素不能同時為 1，必能產生</td><td>**極值**—
$max = \begin{cases} \Sigma_1^n i_j \times (i_j\text{最小值}) + 3^2 \times f + 2^2 \times g + 1^2 \times h， \\ \Sigma_1^n i_j \times (i_j\text{最小值}) + \text{各項規律} \text{，當圖形為下三角形} \end{cases}$</td></tr>
</table>

		多生三視圖。	$min =$ $\begin{cases} \sum_1^n i_j \times 1 + 2\,(i_{n-1} - 1 + \mathrm{k})\begin{cases} 1\text{，有奇數個}n \\ 0\text{，有偶數個}n \end{cases} \\ \sum_1^n i_j \times (i_j\text{最小值}) + \text{各項規律，當圖形為下三角形} \end{cases}$
二同圖	長方圖	滿足 $\begin{cases} (a，a，a\ldots\ldots a，a)，a \in (2，\ldots\ldots，(n-1)) \\ (a，a，\ldots\ldots，0，0)，a \in (2，\ldots\ldots，n)，0\text{ 的個數 }1\sim(\mathrm{n}-2)\text{個} \end{cases}$ ，必能產生多生三視圖。	**極值發生**— max=$(a\text{的個數})^2 \times a$， min=a的個數 $\times a + 1 \times$ (a 的個數^2 − a 的個數)+1
	雙子星圖	滿足$(i_n，i_{n-1}，\ldots\ldots i_2，i_1)$，$i_j \in (0，1，\ldots\ldots，n-1)$，$i_n \wedge i_1 \neq 0$，必有多生三視圖。	**極值發生**— max=$\sum_1^n i_j$ +(直線交會格數最小值)×(直線交會個數)， min=$\sum_1^n i_j \times a + 1 \times$(直線交會總個數)
	峰谷圖	滿足$(i_n，i_{n-1}，\ldots\ldots i_2，i_1)$，$i_j \in (k \mid 1 \le k < n，i_j > i_1 \vee i_n$ 或$i_j < i_1 \vee i_n)$，必有多生三視圖。	**極值發生**— max=$\sum_1^n i_j$ +(直線交會格數最小值)×(直線交會個數)， min=$\sum_1^n i_j \times a + 1 \times$(直線交會總個數)
三不同圖		只要上視圖符合前視圖方向和右視圖方向的交會處所擁有的格數$N \le$ *前視圖格數* $\cap$ *右視圖格數*。	

我們也找到以上擁有多生三視圖的充要條件有兩點。

第一點，必須同時存在行與列的元素；

第二點，行與列所擁有的格數需大於等於 2。

為了解決這多生三視圖的產生，我們加入顏色與數字到三視圖中，試著讓三視圖的反向思考能夠有獨一性的產生。而後經由樹狀圖，我們確定加入顏色與數字之後，能夠讓三

視圖擁有獨一性，不僅如此，我們在整個操作的過程中，僅提供兩視圖及其顏色或數字，便能夠讓其擁有獨一性。然在分析的過程中，我們覺得這樣模式與數獨很相似，因此發展出立體數獨—「數獨積木」。

伍、結論

看到 3D 列印表之後，開始萌生立體的構想，又在老師的說明下，我們以體積的概念為出發點，去認識三視圖與反向思考，進而發現到原來多生三視圖有很多種。我們也將其分類為三大類型，並做細分與找出其特性。在這繁複的過程中，或許我們的分類還未能其齊全，但這些細分中都有其特性在，相信這是值得後續繼續發掘或挑戰的。

接著，我們為了解決多生三視圖的問題，一開始我們選用旋轉角度，但是會因為積木的大小不同，而無法找到它們的共同點。之後，有同學提議加入數字或顏色。我們一開始以為加入顏色或數字之後會直接讓三視圖的答案產生，之後想到在每次建構三視圖的反向思考時，我們是先透過上視圖固定擺放的位置，為了不讓固定擺放位置的產生，於是我們試著把上視圖去除，僅用前視圖與右視圖去進行試驗，沒想到居然成功了，讓多生三視圖產生了獨一性，並且透過與「數獨」的相同思維，發展出「數獨積木」的玩法。

陸、未來展望

我們透過對於三視圖的了解，進而推廣到更多有關於 3D 空間的認識，甚至到現在最夯的元世界，都足以顯得立體空間概念的重要性。這次科展，我們想到使用顏色和數字的方式解決了三視圖反向思考的獨一性之外，我們讓整個視圖的使用降到為僅使用兩視圖就能夠架構出整個積木模式，這讓我們非常開心。除此之外，還設計出「數獨積木」的遊戲方式，讓積木發揮學習「空間概念」、「創造力」等能力，又再多增添邏輯思考及推理的能力，這是我們這次研究的過程中，意外的美麗，希望這個美麗可以讓更多的學生藉此跟我們一樣也從操作中學習到應有的能力。

柒、參考文獻資料

齊邦交（2010）。**立體幾何中的三視圖**。北京：北京師範大學。

貼盒法（2018 年 11 月 13 日）。每日頭條。取自
https://kknews.cc/education/p9kegvp.htmlhttps://kknews.cc/education/p9kegvp.html

劉麗芸（2012），化抽象為具體—枚舉法在古典概型中的應用。**新高考**。4 期，8~10 頁。

【評語】080413

本研究以「三視圖」的概念為基底，利用貼盒法進行反向思考，找出 3×3×3「堆疊物體」的多生三視圖之種類、樣式、規律性及積木塊的極值。並推廣到 4×4×4 的方塊。將顏色、數字介入「堆疊物體」的三視圖中，發展出「數讀積木」遊戲。研究「堆疊物體」的三視圖，因其三視圖呈現堆疊物與堆疊物之間的縫隙線條，而混淆正常三視圖原本的功能。由於對於懸空的情形皆不予討論，因此相對地將問題簡單化了，不過經過多次檢驗與分析，進行歸納後，先將問題分為三大類型（三同圖、二同圖及三不同圖）進行討論，使得探究的過程更具結構性。用三視圖呈現立體物，雖不能說是完美，但已趨近完美，若能將堆疊物與堆疊物之間的縫隙線條省略，將其視為一體，則三視圖不再混淆，運用實線、虛線呈現正常三視圖，應可清晰呈現原「堆疊物體」的真實面貌。

作品海報

序幕 —— 研究動機

觀察

提問與探究

尋找答案

訂定目的

第一幕 —— 研究目的

(一)在各種不同的三視圖中探討其方塊排列方式的相關性及其極值關係。

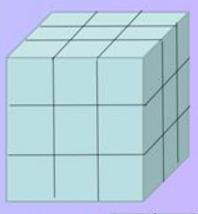
(二)討論如何能確保三視圖產生唯一結果的方法。

(三)發展出「***數獨積木***」及其裝置與規則。

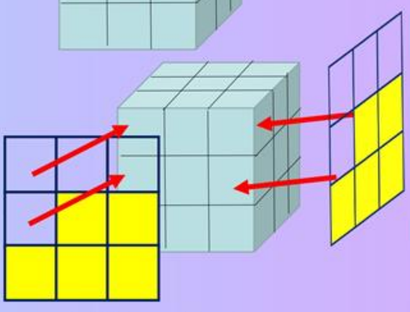
第二幕 —— 研究方法

貼盒法

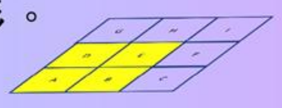
畫 先畫出正方體外形--就是所謂的「盒」。



貼 將已知的兩視圖貼在第一步驟的盒面上。



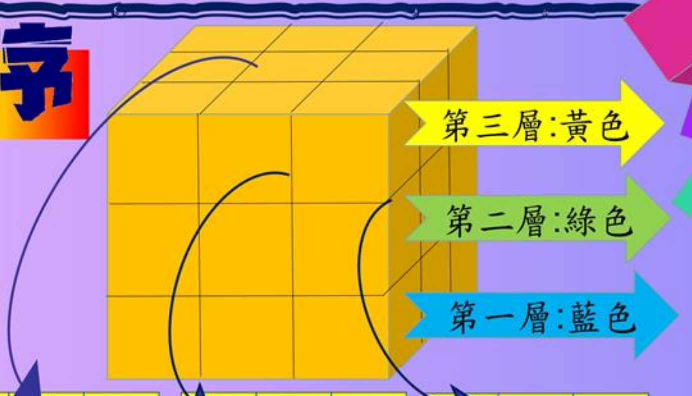
構 依照第三個視面，構成大概立體圖形。



驗 對於三面結合的狀況，進行討論。

第三幕 —— 研究過程

編序



A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

R_{31}	R_{32}	R_{33}
R_{21}	R_{22}	R_{23}
R_{11}	R_{12}	R_{13}

F_{31}	F_{32}	F_{33}
F_{21}	F_{22}	F_{23}
F_{11}	F_{12}	F_{13}

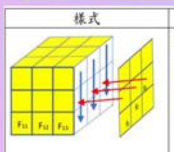
實例

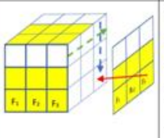
類型 / 樣式	樣式(一)	樣式(二)	樣式(三)
三同圖			
二同圖			
三不同圖			

發現

三同圖

田立方圖

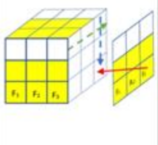


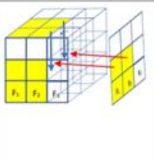


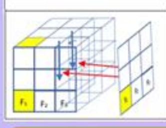
樣式	驗證	
	理由： 1. 設$n=3$，即上視圖、前視圖及右視圖為3×3的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現上視圖中每行個數或每列的格數滿足$1\le n(A_{ij})\le 3$， $n(A_{11})\vee n(A_{12})\vee n(A_{13})=3$， $n(A_{21})\vee n(A_{22})\vee n(A_{23})=3$， $n(A_{31})\vee n(A_{32})\vee n(A_{33})=3$， $n(A_{11})\vee n(A_{21})\vee n(A_{31})=3$， $n(A_{12})\vee n(A_{22})\vee n(A_{32})=3$， $n(A_{13})\vee n(A_{23})\vee n(A_{33})=3$， $n(A_{11})\vee n(A_{22})\vee n(A_{33})=3$， 3. 舉例排列方式： $n(A_{11})=n(A_{12})=n(A_{13})=n(A_{21})=n(A_{23})=n(A_{31})=n(A_{32})=n(A_{33})=3$； $n(A_{22})=1\vee2\vee3$	成立 ○
	理由： 1. 假設不為n^2的其中一種，設可減少一列$A_{31}-A_{32}-A_{33}$，則前視圖及右視圖亦成為每行僅有2格的圖形。 2. 將此三圖使用貼盒法結合成立體圖，發現$A_{31}-A_{32}-A_{33}$，(左圖藍色粗虛線)與R_{11}(左圖紅實線)的交接處會產生矛盾。故圖形不成立 3. 同理可證，亦不會出現少行或列的圖式。	不成立 X

方塊個數	n值	max	min
	3	$3\times3\times3$	$3\times(3+2)$
	2	$2\times2\times2$	$2\times(2+1)$

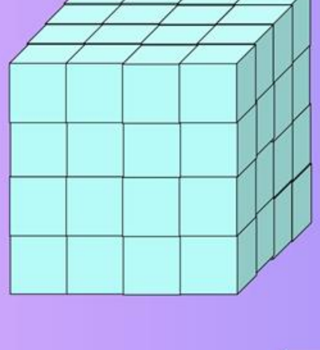
驗證與極值探討



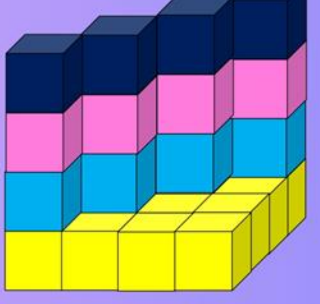




	理由： 1. 假設不為n^2的其中一種，設可減少一列$A_{31}-A_{32}-A_{33}$，則前視圖及右視圖亦成為每行僅有2格的圖形。 2. 將此三圖使用貼盒法結合成立體圖，發現$A_{31}-A_{32}-A_{33}$，(左圖藍色粗虛線)與R_{11}(左圖紅實線)的交接處會產生矛盾。故圖形不成立 3. 同理可證，亦不會出現少行或列的圖式。	不成立 X
	理由： 1. 設$n=2$，即上視圖、前視圖及右視圖為2×2的圖形。 2. 將此三圖結合成立體圖，發現A_{11}、A_{12}、A_{21}、A_{22}，每行個數或每列的格數滿足 $1\le n(A_{11}、A_{12}、A_{21}、A_{22})\le 2$， $n(A_{11})\vee n(A_{12})=2$，$n(A_{21})\vee n(A_{22})=2$， $n(A_{12})\vee n(A_{22})=2$，$n(A_{11})\vee n(A_{21})=2$。 3. 舉例排列方式： $n(A_{11})=n(A_{12})=n(A_{21})=2$； $n(A_{22})=1\vee2$	成立 ○
	理由： 1. 設$n=1$，即上視圖、前視圖及右視圖為1×1的圖形。 2. 將此三圖結合成立體圖，發現僅有一格，與我們的前提—需為多生三視圖矛盾，故不合。	不成立 X



極大值:
$n\times n\times n$



極小值:
$n\times n+n(n-1)$
$=n\times(n+n-1)$

根據上列驗證，我們確定三視圖為田立方圖，符合N^2，$N\in\{2,3\ldots\ldots n\}$格數必有多生三視圖。

方塊的極值—$max=n\times n\times n$；$min=n\times(n+n-1)$

三同圖

凸字圖 驗證與極值

樣式	驗證	
	理由： 1. 設圖形為(3，3，2)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-1$的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現A_{33}、F_{11}、R_{11}每排的格數皆為 0 個，且滿足 $1\le n(A_{31},A_{32},A_{13},A_{23})\le 2$， $n(A_{31})\vee n(A_{32})=2$， $n(A_{13})\vee n(A_{23})=2$。 3. 舉例排列方式： $n(A_{12})=n(A_{21})=n(A_{22})=3$ $,n(A_{13})=n(A_{23})=n(A_{31})=n(A_{32})=2$； $n(A_{11})=1\vee2\vee3$	成立 ○
	理由： 1. 設圖形為(3，2，2)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-2$的圖形。 2. 使用貼盒法，發現A_{11}必有 3 個，A_{31}必有 2 個，A_{12}、A_{13}、A_{21}、A_{22}、A_{23}可能有一至兩個， $n(A_{12})\vee n(A_{13})=2$，$n(A_{12})\vee n(A_{22})=2$， $n(A_{13})\vee n(A_{23})=2$，$n(A_{22})\vee n(A_{23})=2$。 3. 舉例排列方式： $n(A_{11})=3,n(A_{31})=n(A_{12})=n(A_{13})=n(A_{22})=n(A_{23})=2$； $n(A_{21})=1\vee2$。	成立 ○
	理由： 1. 設(3，2，1)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為左下三角圖形。 2. 經由貼盒法，發現A_{11}必有 3 個、A_{31}和A_{13}必有 1 個，A_{12}、A_{21}、A_{22}可能有一至兩個， $n(A_{12})\vee n(A_{22})=2$，$n(A_{21})\vee n(A_{22})=2$， 3. 舉例排列方式： $n(A_{11})=3$，$n(A_{13})=n(A_{31})=1$， $n(A_{22})=n(A_{12})=2$；$n(A_{21})=1\vee2$	成立 ○
	理由： 1. 設圖形為(2，3，2)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-2$的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現A_{22}排的格數必為 3 個，A_{32}必為 2 個，且滿足 $1\le n(A_{11},A_{12},A_{13},A_{21},A_{23})\le2$， $n(A_{11})\vee n(A_{12})\vee n(A_{13})=2,$ $n(A_{13})\vee n(A_{23})=2$ $n(A_{21})\vee n(A_{23})=2,$ $n(A_{11})\vee n(A_{21})=2$。 3. 舉例排列方式： $n(A_{22})=3,$ $n(A_{12})=n(A_{13})=n(A_{21})=n(A_{23})=n(A_{32})=2$； $n(A_{11})=1\vee2$	成立 ○
	理由： 1. 設圖形為(2，3，1)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-3$的圖形。 2. 用貼盒法將此三圖結合成立體圖，發現A_{22}排的格數必為 3 個，A_{32}、A_{13}必為 1 個，且滿足 $1\le n(A_{11},A_{12},A_{21})\le2$， $n(A_{11})\vee n(A_{12})\vee n(A_{13})=2,$ $n(A_{13})\vee n(A_{23})=2$ $n(A_{11})\vee n(A_{21})=2$。 3. 舉例排列方式： $n(A_{22})=3,$ $n(A_{13})=n(A_{32})=1,$ $n(A_{21})=n(A_{22})=2$； $n(A_{11})=1\vee2$。 4. 同理，同樣圖形經由鏡射亦可成為多生三視圖。	成立 ○
	理由： 1. 設圖形為(1，3，1)，則上視圖、前視圖及右視圖皆為$3\times3-4$的圖形。 2. 經由貼盒法，發現A_{22}必有 3 個、A_{11}、A_{12}、A_{13}、A_{32}必有 1 個。和我們要找的多生三視圖矛盾，是故不合。	不成立 X

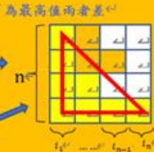
組合		極大值	極小值
(3，3，2)及其排列		$(3+3+2)\times2+2^2$	$(3+3+2)\times1+2^2+2$
(3，2，2)及其排列		$(3+2+2)\times2+1^2$	$(3+2+2)\times1+2^2+1$
(2，3，1)及其排列		$(2+3+1)\times1+2^2+1^2$	$(2+3+1)\times1+2+1$
(4，4，4，k)	k=3	$(4+4+4+3)\times3+3^2\times1+2^2\times0+1^2\times0$	$(4+4+4+3)\times1+2\times(3+3)+1$
	k=2	$(4+4+4+2)\times2+3^2\times2+2^2\times0+1^2\times0$	$(4+4+4+2)\times1+2\times(3+2)+1$
	k=1	$(4+4+4+1)\times1+3^2\times3+2^2\times0+1^2\times0$	$(4+4+4+1)\times1+2\times(3+1)+1$
(4，4，3，k)	k=3	$(4+4+3+3)\times3+3^2\times0+2^2\times1+1^2\times0$	$(4+4+3+3)\times1+2\times(3+3)$
	k=2	$(4+4+3+2)\times2+3^2\times1+2^2\times1+1^2\times0$	$(4+4+3+2)\times1+2\times(3+2)$
	k=1	$(4+4+3+1)\times1+3^2\times2+2^2\times1+1^2\times0$	$(4+4+3+1)\times1+2\times(3+1)$
(4，3，3，k)	k=3	$(4+3+3+3)\times3+3^2\times0+2^2\times0+1^2\times1$	$(4+3+3+3)\times1+2\times(2+3)+1$
	k=2	$(4+3+3+2)\times2+3^2\times1+2^2\times0+1^2\times1$	$(4+3+3+2)\times1+2\times(2+2)+1$
	k=1	$(4+3+3+1)\times1+3^2\times2+2^2\times0+1^2\times1$	$(4+3+3+1)\times1+2\times(2+1)+1$
(4，3，2，k)	k=2	$(4+3+2+2)\times2+3^2\times0+2^2\times1+1^2\times1$	$(4+3+2+2)\times1+2\times(2+2)+1$
	k=1	$(4+3+2+1)\times1+3^2\times1+2^2\times1+1^2\times0$	$(4+3+2+1)\times1+2\times(2+1)+1$
(4，4，2，k)	k=2	$(4+4+2+2)\times2+3^2\times0+2^2\times2+1^2\times0$	$(4+4+2+2)\times1+2\times(3+2)$
	k=1	$(4+4+2+1)\times1+3^2\times0+2^2\times2^2+1^2\times0$	$(4+4+2+1)\times1+2\times(3+1)$
(4，2，k，k)	k=2	$(4+2+2+2)\times2+2^1$	$(4+2+2+2)\times1+2\times(2+2)$
	k=1	$(4+2+1+1)\times1+2^2+2^1$	$(4+2+1+1)\times1+2\times(1+1)$
(4，2，2，1)		$(4+2+2+1)\times1+3^2\times1+2^2\times0+1^2\times0$	$(4+2+2+1)\times1+2\times(2+1)$

根據上列驗證，我們確定**凸字圖三視圖**所呈現的樣式可能為滿足$(i_1,i_2,i_j\ldots\ldots i_{n-1},i_n)$，$i_j\in\{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$，其中必有一個$i_j=n$，但其他元素不能同時為1，必能產生多生三視圖。

極值發生：f為$(i_1,i_2,i_j\ldots\ldots i_{n-1},i_n)$中最低值兩者差，g 為中間值相差，f 為最高值兩者差

$$max=\begin{cases}\Sigma_1^n i_j\times(i_j\text{最小值})+3^2\times f+2^2\times g+1^2\times h，\\ \Sigma_1^n i_j\times(i_j\text{最小值})+\text{各項規律，當圖形為下三角形}\end{cases}$$

$$min=\begin{cases}\Sigma_1^n i_j\times1+2(i_{n-1}-1+k)，k=\begin{cases}1，\text{有奇數個}n\\0，\text{有偶數個}n\end{cases}\\ \Sigma_1^n i_j\times(i_j\text{最小值})+\text{各項規律，當圖形為下三角形}\end{cases}$$



二同圖

長方圖 驗證與極值探討

	理由： 1. 假設圖形為(2，2，2)，則前視圖及右視圖為每行3×2的長方形圖形。 2. 先使用貼盒法結合成立體圖，發現可形成一個$3\times3\times2$的長方塊，但須滿足$A_{11}-A_{12}-A_{13}$、$A_{13}-A_{21}-A_{32}$、$A_{12}-A_{23}-A_{31}$、$A_{13}-A_{22}-A_{31}$、$A_{12}-A_{21}-A_{33}$、$A_{11}-A_{23}-A_{32}$這六組中至少一組的每格必須排有 2 格，而其他格數則可以任意排，其格數a，僅須滿足$0\le a\le2$。 3. 舉例排列方式：$n(A_{11})=n(A_{22})=n(A_{33})=2$；$n(A_{21})=1\vee2$	成立 ○
	理由： 1. 假設圖形為(3，3，0)則前視圖及右視圖為每行3×2的長方形圖形。 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現可形成一個$2\times2\times3$的長方塊，但須滿足$A_{11}-A_{22}$、$A_{12}-A_{21}$這兩組中至少一組的每格必須排有 3 格而其他格數則可以任意排，其格數a，僅須滿足$0\le a\le3$。 3. 舉例排列方式：$A_{11}=A_{22}=3$；$A_{21}=1\vee2$	成立 ○

組合	上視圖最小值可能情形	極大值	極小值
(2，2，2)		未增加●：$2\times3+2\times0$ 增加 1 個●：$2\times3+2\times1$ 再加 1 個●：$2\times3+2\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$2\times3+2\times6$	未增加●：$2\times3+1\times0$ 增加 1 個●：$2\times3+1\times1$ 再加 1 個●：$2\times3+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$2\times3+1\times6$
(3，3，0)		未增加●：$3\times2+3\times0$ 增加 1 個●：$3\times2+3\times1$ 再加 1 個●：$3\times2+3\times2$	未增加●：$3\times2+1\times0$ 增加 1 個●：$3\times2+1\times1$ 再加 1 個●：$3\times2+1\times2$
(k，k，0，0) k=4，3，2		未增加●：$k\times2+k\times0$ 增加 1 個●：$k\times2+k\times1$ 再加 1 個●：$k\times2+k\times2$	未增加●：$k\times2+1\times0$ 增加 1 個●：$k\times2+1\times1$ 再加 1 個●：$k\times2+1\times2$
(k，k，k，0) k=4，3，2		未增加●：$k\times3+k\times0$ 增加 1 個●：$k\times3+k\times1$ 再加 1 個●：$k\times3+k\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times3+k\times6$	未增加●：$k\times3+1\times0$ 增加 1 個●：$k\times3+1\times1$ 再加 1 個●：$k\times3+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times3+1\times6$
(k，k，k，k) k=3，2		未增加●：$k\times4+k\times0$ 增加 1 個●：$k\times4+k\times1$ 再加 1 個●：$k\times4+k\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times4+k\times12$	未增加●：$k\times4+1\times0$ 增加 1 個●：$k\times4+1\times1$ 再加 1 個●：$k\times4+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$k\times4+1\times12$

長方圖滿足$\begin{cases}(k,k,k\ldots\ldots k,k)，k\in\{2,\ldots\ldots,(n-1)\}\\((k,k,\ldots\ldots,0,0)，k\in\{2,\ldots\ldots,n\}，0\text{的個數}1\sim(n-2)\text{個}\end{cases}$，必能產生多生三視圖。

方塊極值—max=$(k\text{的個數})^2\times k$；

min=$k\text{的個數}\times k+1\times(k\text{的個數}^2-k\text{的個數})+1$

雙子星圖 驗證與極值探討

	理由： 1. 假設圖形為(2，0，2)，前視圖及右視圖則為 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現$A_{11}-A_{33}$、$A_{13}-A_{31}$兩組中至少一組的每格必須有 2 格，另一組格數a，須滿足$1\le a\le2$，而其他格數必須為 0 格。 3. 舉例排列方式： $n(A_{11})=n(A_{13})=n(A_{33})=2$；$n(A_{31})=1\vee2$ 4. 同理(3，0，3)，亦可找到多生三視圖。	成立 ○
	理由： 1. 設圖形為(2，0，3)，則前視圖與右視圖為 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現$A_{11}-A_{33}$、$A_{13}-A_{31}$兩組中至少一組的為 2-3 格，另一組格數a，須滿足$1\le a\le2$，而其他格數必須為 0 格。 3. 舉例排列方式：$n(A_{11})=2$，$n(A_{33})=3$；$n(A_{31})=1\vee2$ 4. 同理(i_1,i_2,i_3)為其排列組合的模式，亦可找到多生三視圖。	成立 ○
	理由： 1. 設圖形為(1，0，1)，前視圖及右視圖則為 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現$A_{11}-A_{33}$、$A_{13}-A_{31}$兩組中至少一組的每格必須有 1 格，另一組格數a，須滿足$0\le a\le1$，而其他格數必須為 0 格。但在上視圖固定的情況下，另一組格數則不能刪減其位置格數，舉例來說:$n(A_{11})=n(A_{33})=1$，上視圖要求A_{31}亦要有格數時，則A_{31}只能有 1 格的選擇，就不會出現多生三視圖。	不成立 X

雙子星滿足$(i_1,i_2,\ldots\ldots i_{n-1},i_n)$，$i_j\in\{0,1,\ldots\ldots,n-1\}$，$i_n\wedge i_1\neq0$，必有多生三視圖。

方塊極值—max=$\sum_1^n i_j$＋(直線交會格數最小值)×(直線交會個數)，

min=$\sum_1^n i_j\times a+1\times$(直線交會總個數)

組合	上視圖最小值可能情形	極大值	極小值
(2，0，2)		未增加●：$(2+2)+2\times0$ 增加 1 個●：$(2+2)+2\times1$ 再加 1 個●：$(2+2)+2\times2$	未增加●：$(2+2)+1\times0$ 增加 1 個●：$(2+2)+1\times1$ 再加 1 個●：$(2+2)+1\times2$
(2，0，3)		未增加▲：$(2+3)+2\times0$ 增加 1 個▲：$(2+3)+2\times1$ 再加 1 個▲：$(2+3)+2\times2$	未增加▲：$(2+3)+1\times0$ 增加 1 個▲：$(2+3)+1\times1$ 再加 1 個▲：$(2+3)+1\times2$
(a，0，a，a) (a，a，0，a)		未增加●：$(a+a+a)+a\times0$ 增加 1 個●：$(a+a+a)+a\times1$ 再加 1 個●：$(a+a+a)+a\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$(a+a+a)+a\times6$	未增加●：$(a+a+a)+1\times0$ 增加 1 個●：$(a+a+a)+1\times1$ 再加 1 個●：$(a+a+a)+1\times2$ ⋮ 再加 1 個●：$(a+a+a)+1\times6$
(a，0，a，b) (a，0，b，a) (a，a，0，b) (a，b，0，a) (b，0，a，a) (b，a，0，a)	▲=min(a，b) ●=min(a，a)	[illegible]	未增加格：$(a+a+b)+1\times0$ 增加 1 格：$(a+a+b)+1\times1$ 再加 1 格：$(a+a+b)+1\times2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+a+b)+1\times6$
(a，0，b，b) (a，b，0，b) (b，a，0，b) (b，0，a，b) (b，0，b，a) (b，b，0，a)	▲=min(a，b) ●=min(b，b)	[illegible]	未增加格：$(a+b+b)+1\times0$ 增加 1 格：$(a+b+b)+1\times1$ 再加 1 格：$(a+b+b)+1\times2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+b+b)+1\times6$
(a，0，b，c) (a，b，0，c) (a，c，0，b) (a，0，c，b) (b，0，a，c) (b，a，0，c) (b，c，0，a) (b，0，c，a) (c，0，a，b) (c，a，0，b) (c，b，0，a) (c，0，b，a)	★=min(a，b) ●=min(b，c) ▲=min(a，c)	[illegible]	未增加格：$(a+b+c)+1\times0$ 增加 1 格：$(a+b+c)+1\times1$ 再加 1 格：$(a+b+c)+1\times2$ ⋮ 再加 1 格：$(a+b+c)+1\times6$
(a，0，a，0) (a，0，0，a)		未增加●：$(a+a)+a\times0$ 增加 1 個●：$(a+a)+a\times1$ 再加 1 個●：$(a+a)+a\times2$	未增加●：$(a+a)+1\times0$ 增加 1 個●：$(a+a)+1\times1$ 再加 1 個●：$(a+a)+1\times2$
(a，0，b，0) (a，0，0，b) (b，0，a，0) (b，0，0，a)	▲=min(a，b)	未增加▲：$(a+b)+a\times0$ 增加 1 個▲：$(a+b)+a\times1$ 再加 1 個▲：$(a+b)+a\times2$	未增加▲：$(a+b)+1\times0$ 增加 1 個▲：$(a+b)+1\times1$ 再加 1 個▲：$(a+b)+1\times2$

峰谷圖 驗證與極值探討

	理由： 1. 設圖形為(1，2，1)，前視圖及右視圖則為 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現A_{22}必須有 2 格：$A_{11}-A_{33}$、$A_{13}-A_{31}$兩組中至少一組的每格必須有 1 格，另一組格數a，須為$0\le a\le1$，而其他格數需為 0 格。 3. 但在上視圖固定的情況之下，另一組格數則不能刪減其位置的格數，舉例來說:$n(A_{11})=n(A_{33})=1$，$n(A_{22})=2$，上視圖要求A_{31}亦要有格數時，則A_{31}只能有 1 格，就不會出現多生三視圖。 4. 同理，(1，3，1)的模式，亦不會出現多生三視圖	不成立 X
	理由： 1. 設圖形為(1，2，2)，前視圖及右視圖則為 2. 先使用貼盒法中的「貼」、「構」結合成立體圖，發現A_{11}必須有 1 格，$A_{22}-A_{33}$、$A_{32}-A_{23}$兩組中至少一組的每格必須有 2 格，而A_{12}、A_{13}、A_{21}、A_{31}的格數為$0\vee1$，而其他無限制。 3. 舉例排列方式：$n(A_{11})=1$，$n(A_{22})=n(A_{33})=2$；$n(A_{32})=1\vee2$ 4. 同理，$(2,3,3)$及其排列組合的模式，亦可找到多生三視圖。	成立 ○

組合	上視圖最小值可能情形	極大值	極小值
(a，a，b)及其排列組合	●=min(a，a) ▲=min(a，b) ▲=min(a，c)	[illegible]	未增加格：$(2+2+1)+1\times0$ 增加 1 格：$(2+2+1)+1\times1$ 再加 1 格：$(2+2+1)+1\times2$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	未增加格：$(a+a+b+c)+1\times0$ 增加 1 格：$(a+a+b+c)+1\times1$ [illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
(a，b，c，c)及其排列組合	[illegible]	[illegible]	再加 1 格：$(a+b+c)+1\times12$

總結

綜合上列所述，得知**峰谷圖**的前視圖與右視圖滿足

$(i_1,i_2,\ldots\ldots i_{n-1},i_n)$，$i_j\in\left\{k\,\middle|\,\begin{matrix}1\le k<n，i_j>i_1\vee i_n\\ \text{或}i_j<i_1\vee i_n\end{matrix}\right\}$

，必有多生三視圖。

方塊極值—max=$\sum_1^n i_j$＋(直線交會格數最小值)×(直線交會個數)

min=$\sum_1^n i_j\times a+1\times$(直線交會總個數)

三不同圖

共同點

發現到只要上視圖符合前視圖方向和右視圖方向的交會處所擁有的格數$N\le$前視圖格數∩右視圖格數。

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

第四幕——充要條件

矩陣$A=\begin{bmatrix}A_{n1}&\cdots&A_{nn}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{11}&\cdots&A_{1n}\end{bmatrix}$

1. 須矩陣 A 中A_{ij}與A_{mn}，且$i\neq m$，$j\neq n$須同時存在，且擺放的積木個數≥2。
2. 需含括其兩個元素所在的前視圖A_{ij}視角與右視圖A_{mn}視角的交會處，且其積木個數需小於或等於 2 個元素中的最小值。

充要 ⟺ 產生多生三視圖

充分

上視圖轉換

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

由上述各種多生三視圖推得其共同點，只要符合下列兩點必有多生三視圖。
1. 擺放在不同行且不同列，且交會處必放有方塊。
2. 兩者交會處的方塊數不得大於兩者方塊數的最小值。

必要

證明：

1. 當A_{ij}與A_{mn}，且$i=m$，$j\neq n$時 A_{ij}與A_{mn}為同行或者同列上的元素，必定在從前視圖或者右視圖其中一個方位能見到兩者會合處的格數。便不會產生多生三視圖的出現，與其矛盾，因此前提假設錯誤

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

$\Rightarrow A_{ij}$與A_{mn}，且$i\neq m$，$j\neq n$

2. 假設上視圖選擇A_{ij}、A_{mn}作為擺放積木的位置，則在兩者交會處會產生從前視圖與右視圖皆無法看見的視覺死角處，因此先以擺放積木個數進行討論A_{ij}與A_{mn}，且$i\neq m$，$j\neq n$ 的前提下，令個數為 1 個，則前視圖與右視圖應為—

A_{31}	A_{32}	A_{33}
A_{21}	A_{22}	A_{23}
A_{11}	A_{12}	A_{13}

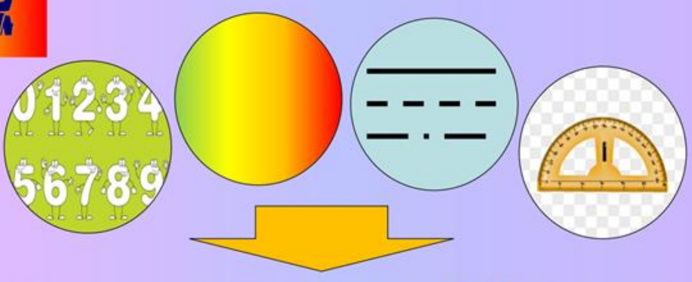
$(a,1,b)$、$(c,1,d)$及兩者排列組合，$0\le a、b、c、d\le3$。

由圖可知，在兩者交會處僅能擋住 1 個，但因上視圖須包含其會合處的格數，因此並不會有多生三視圖的產生，與之矛盾，故其個數應≥2。

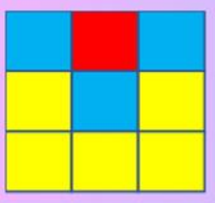
3. 由上述得知，多生三視圖的產生，積木會落在A_{ij}與A_{mn}，且$i\neq m$，$j\neq n$，且擺放個數≥2

第五幕 —— 獨一性的產生

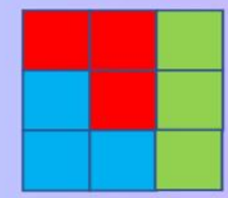
試驗



前視圖與右視圖中擁有3個的顏色以黃色表示、2個的以藍色、1個的以綠色及沒有的則為紅色。所以可能呈現的樣式為以下兩組圖片，每組的右邊為數字版，左邊為顏色版。

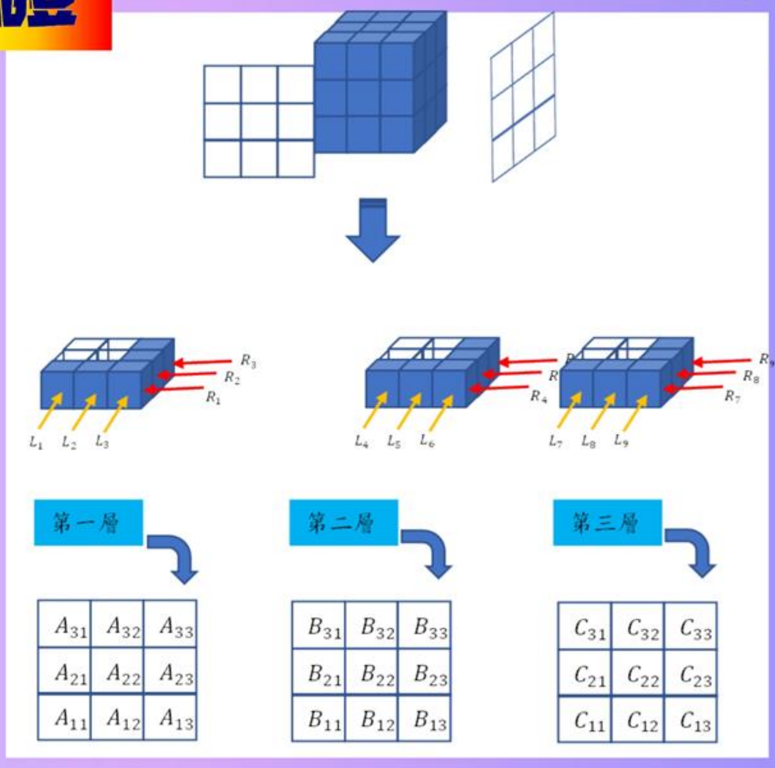


2	0	2
3	2	3
3	3	3



0	0	1
2	0	1
2	2	1

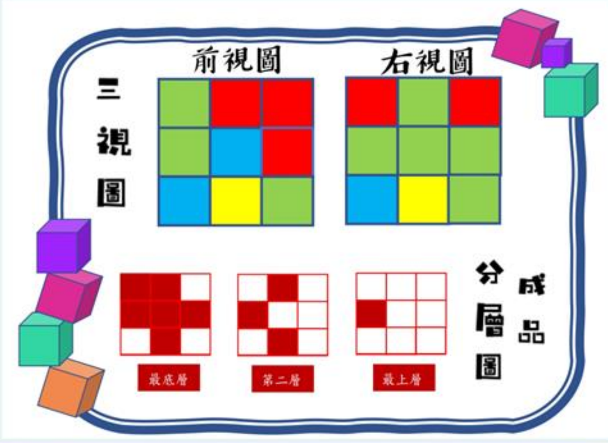
驗證



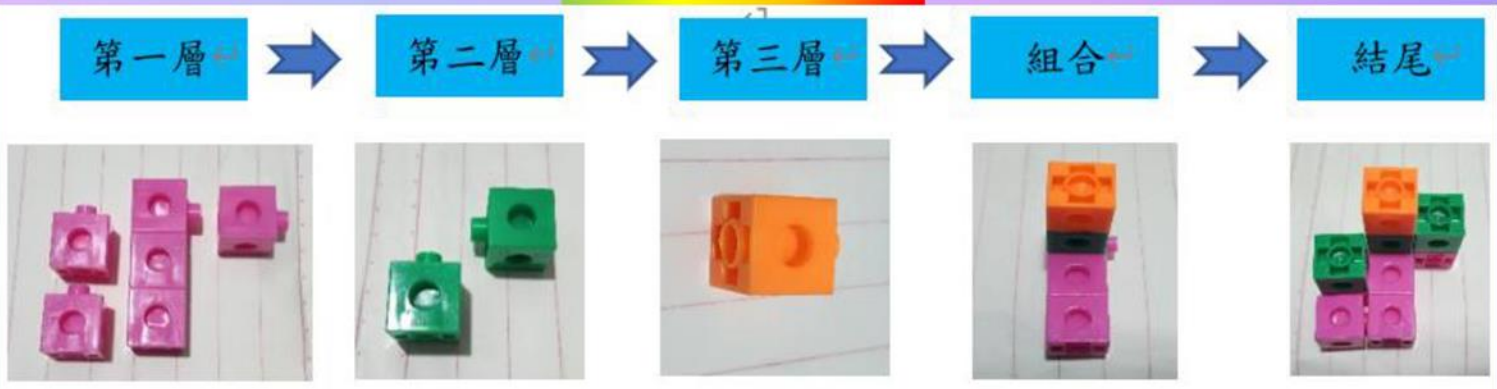
使用「樹狀圖」進行驗證，先把前視圖和右視圖結合後，水平分成三大區塊，針對$L_1 \sim L_9$及$R_1 \sim R_9$進行論述。

第六幕 —— 數獨積木

設備與規則

遊戲裝置	遊戲規則
1. 各種顏色學習連接積木。 2. 前視圖與右視圖圖卡。 	1. 黃色表示此排有3格，藍色為2格綠色為1格，而紅色則是為0格。同樣數字版的則是直接以數字做為表示。 2. 先選定前視圖與右視圖的圖卡。 3. 再使用數學連接積木排出。

實際操作



第一層	第二層	第三層	組合	結尾
由前視圖與右視圖判斷第一層擺放位置，可確定第二排為3個。	由前視圖與右視圖判斷第二層擺放位置。	由前視圖與右視圖判斷第三層僅有一個格子，與第二層搭結合，確定在A_{32}的位置擺放3個。	由已確定圖為基準，去進行其他格數的驗證。	最後組合出正確的模式。

終幕 —— 感想

我們透過對於三視圖的了解，進而推廣到更多有關於3D空間的認識，甚至到現在最夯的元宇宙，都足以顯得立體空間概念的重要性。這次科展，我們想到使用顏色和數字的方式解決了三視圖反向思考的獨一性之外，我們讓整個視圖的使用降到為僅使用兩視圖就能夠架構出整個積木模式，這讓我們非常開心。希望能夠藉此結合VR科技，運用在元宇宙或相關等能有所幫助。除此之外，還設計出「數獨積木」的遊戲方式，讓積木發揮學習「空間概念」、「創造性」等能力，又再多增添邏輯思考及推理的能力，這是我們這次研究的過程中，意外的美麗，希望這個美麗可以讓更多的學生藉此跟我們一樣從中學習到更多，覺得數學也是可以用玩的，玩出更多新花樣。