中華民國第63屆中小學科學展覽會作品說明書

國小組 數學科

080412

同花相聚

學校名稱: 嘉義縣布袋鎮布新國民小學

作者:

小六 林語芊

小六 蔡泱妮

小六 蔡承煒

指導老師:

翁雅玲

關鍵詞: 離散動態系統、硬幣、國際數學奧林匹亞

摘要

本作品取自國際數學奧林匹亞 2022 年第一題,我們給出完整的解答,不需要使用中學以上的數學知識,而且利用本作品的方法,將原題探討的兩種硬幣,推廣到 m≥3 種。

壹、問題

問題 1 (國際數學與林匹亞 2022 年第 1 題,[1]). 與斯陸銀行發行兩種硬幣:鋁幣(記做 A)以及銅幣(記做 B)。<u>瑪麗</u>有 n 枚鋁幣n n 枚銅幣,她任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 $k \le 2n$,<u>瑪麗</u>重複下列的操作:找出包含由左數來第 k 枚硬幣的最長同花段,然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說,當 n=4 且 k=4 時,從 AABBBABA 這個起始狀態開始操作,過程會是

 $AABBBABA o BBBAAABA o AAABBBBA o BBBBAAAA o BBBBAAAA o \cdots \circ$

找出符合 $1 \leq k \leq 2n$ 的所有數對(n, k),使得不管是什麼起始狀態,在操作過程的某個時刻,最左邊的n 枚硬幣都是同一種材質的。

貳、研究動機

老師介紹有名的數學競賽:國際數學奧林匹亞,表示題目易懂,但是解題過程很費心思,我們好奇便請老師提供例子,她就拿了今年(2022年)的第一題同學們見識。經過一百個以上的數據試算,觀察後本小組有了解題思路,想要進一步探討,所以請老師指導,因而踏上科展之旅。

參、研究目的

- 一、解決國際數學奧林匹亞 2022 年第1題。
- 二、研究硬幣為3種以上的情形。

肆、研究工具

一、計算紙、筆。

伍、研究過程與討論

一、解決國際數學奧林匹亞 2022 年第1題

(-) $1 \le n \le 5$ 的計算

 $1.\,n=1.\,$ 有 AB 和 BA 兩種排列,但只要算 AB 即可,BA 和 AB 僅是 A 和 B 的身份互换。 k=1 ,

$AB \rightarrow AB \rightarrow AB \rightarrow \cdots$	√
k=2,	
$AB \rightarrow BA \rightarrow AB \rightarrow \cdots$	✓

「√」表示操作過程中,能出現最左邊的 n 枚硬幣是同一材質,「×」在操作過程中,未 出現最左邊 n 枚是同一材質。

2. n=2. 有 AABB、ABAB、ABBA、BAAB、BABA、BBAA 等 6 種排列,但只要算前 3 種即可, 後 3 種和前 3 種相比,僅是 A 和 B 的身份互換。

k=1,

AABB→AABB→····	√
ABAB→ABAB→ABAB→···	X
ABBA→ABBA→ABBA→···	X

k=2,

AABB→AABB→···	✓
ABAB→BAAB→AABB→···	✓
ABBA→BBAA→BBAA→···	√

k=3,

AABB→BBAA→AABB→···	✓
ABAB→AABB→BBAA→···	✓
$ABBA \rightarrow BBAA \rightarrow AABB \rightarrow \cdots$	✓

k=4,

AABB→BBAA→AABB→···	✓
ABAB→BABA→ABAB→···	×
ABBA→AABB→BBAA→···	✓

3. n=3. 同理,原有 20 種排列,但只要算其中 10 種即可。

k=1,

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→AABABB→···	×
AABBAB→AABBAB→···	×
AABBBA→AABBBA→···	×
ABAABB→ABAABB→···	×
ABBAAB→ABBAAB→···	×
ABBBAA→ABBBAA→···	×
ABABAB→ABABAB→···	×
ABABBA→ABABBA→···	×
ABBABA→ABBABA→···	×

k=2,

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→AABABB→···	×
AABBAB→AABBAB→···	×
AABBBA→AABBBA→···	×
ABAABB→BAAABB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→BBAAAB→···	×
ABBBAA→BBBAAA→BBBAAA→···	✓
ABABAB→BAABAB→AABBAB→···	×
ABABBA→BAABBA→AABBBA→···	×
ABBABA→BBAABA→···	×

k=3,

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→BAAABB→AAABBB→···	√
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→···	√
AABBBA→BBBAAA→…	√
ABAABB→AAABBB→···	\checkmark
ABBAAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
ABBBAA→BBBAAA→···	✓
ABABAB→AABBAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
ABABBA→AABBBA→BBBAAA→···	✓
ABBABA→BBAABA→AABBBA→BBBAAA→···	✓

$\underline{\mathbf{k}} = 4$,

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	√
AABABB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→BBBAAA→···	√
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	√
ABAABB→AAABBB→BBBAAA→…	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABBBAA→BBBAAA→AAABBB→···	√
ABABAB→BABAAB→AABABB→AAABBB→···	√
ABABBA→BBABAA→BBBAAA→AAABBB→···	√
ABBABA→AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	√

k=5,

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	✓
AABABB→BBAABA→BBBAAA→AAABBB→···	√
AABBAB→AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	√
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABAABB→BBABAA→AABBAB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→…	✓
ABBBAA→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABABAB→AABABB→BBAABA→BBBAAA→···	✓
ABABBA→BBABAA→AABBAB→AAABBB→···	✓
ABBABA→BABBAA→AABABB→BBAABA→BBBAAA→···	✓

$\underline{\mathbf{k}} = \mathbf{6}$,

AAABBB→BBBAAA→…	✓
AABABB→BBAABA→ABBAAB→BABBAA→···	×
$AABBAB \rightarrow BAABBA \rightarrow ABAABB \rightarrow BBABAA \rightarrow AABBAB \rightarrow \cdots$	×
AABBBA→AAABBB→···	√
ABAABB→BBABAA→AABBAB→BAABBA→···	×
ABBAAB→BABBAA→AABABB→BBAABA→···	×
ABBBAA→AAABBB→···	√
ABABAB→BABABA→···	×
ABABBA→AABABB→BBAABA→···	×
ABBABA→AABBAB→BAABBA→···	×

$4.\,n{=}4.$ 同理,原有 70 種排列,但只要算其中 35 種即可。 $k{=}1$,

AAAABBBB → AAABBBB → · · · · · · · · · · · · · · · · ·		
AAABBABBA → AAABBABB → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AAAABBBB→AAAABBBB→···	✓
AAABBBAB→AAABBBAB→ × AABBBBA→AABBBBA→ × AABAABBB→AABABBB→ × AABABBBA→AABBBAB→ × AABBBBB→AABBBBA→ × AABBBBA→AABBBABB→ × AABBBAB→AABBBABB→ × AABBBAB→AABBBABA→ × AABBBAB→AABBBABA→ × AABBBAB→AABBBABA→ × AABBBBAA→AABBBBABA→ × AABBBBAA→AABBBBABA→ × ABBABBB→ABAABBBAB→ × ABBABBB→ABAABBB→ × ABBABBB→ABAABBB→ × ABBABBB→ABABABBA→ × ABBABBB→ABABBBA→ × ABBABBB→ABABBBA→ × ABBABBB→ABABBBA→ × ABBABBB→ABABBBA→ × ABBABBB→ABABBBA→ × ABBABBBA→ABABBBA→ × ABBABBBA→ABBABBA→ × ABBABBBA→ABBABBA	AAABABBB→AAABABBB→···	×
AAABBBBBA→AAABBBBA→··· × AABAABBB→AABAABBB→··· × AABAABBB→AABABBBA→··· × AABABBBA→AABABBBA→··· × AABBBBA→AABBABBA→··· × AABBBBA→AABBBAAB→··· × AABBBBA→AABBBAAB→··· × AABBBBA→AABBBAA→··· × AABBBBAA→AABBBAA→··· × ABBABBA→ABAABBB→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABABBBA→ABABABBA→··· × ABABBBA→ABABABBA→··· × ABABBBA→ABABABBA→··· × ABABBBA→ABABABBA→··· × ABABBBA→ABBABBAA→··· × ABABBBA→ABBABBAA→··· × ABABBBA→ABBABBAA→··· × ABABBBA→ABBABBAA→··· × ABBBABBA→ABBBABBA→··· ×	AAABBABB→AAABBABB→···	×
AABAABBB→AABAABBB→··· × AABAABBB→AABAABBB→··· × AABABBBA→AABABBBA→··· × AABABBBA→AABBABBA→··· × AABBBBA→AABBBAAB→··· × AABBBBA→AABBBAAB→··· × AABBBBA→AABBBBAA→··· × AABBBBA→AABBBBAA→··· × ABBABB→ABAABBB→··· × ABBABB→ABAABBB→··· × ABBABB→ABABBBA→··· × ABBABB→ABABBBA→··· × ABBABB→ABABBBA→··· × ABBBBAA→ABABBBA→··· × ABBBBAA→ABABBBA→··· × ABBBBAA→ABABBBAA→··· × ABBBBAA→ABBBBAA→··· × ABBBBBA→ABBBAAB→··· × ABBBBBA→ABBBABA→··· × ABBBBBA→ABBBBAAB→··· × ABBBBBA→ABBBBAAB→··· × ABBBBBAA→ABBBBAAB→··· × ABBBBBAA→ABBBBAAB→··· × ABBBBBAA→ABBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBAA	AAABBBAB→AAABBBAB→···	×
AABABABB⇒ AABABABB⇒ ··· × AABABBBA⇒ AABABBBA⇒ ··· × AABABBBA⇒ AABBABBA⇒ ··· × AABBABB⇒ AABBABBA⇒ ··· × AABBBBAB⇒ AABBBABB⇒ ··· × AABBBBAB⇒ AABBBBAB⇒ ··· × ABBBBBA⇒ ABABABBB⇒ ··· × ABBABB⇒ ABABABBB⇒ ··· × ABBABB⇒ ABABBBB⇒ ··· × ABABBB⇒ ABABABBB⇒ ··· × ABABBB⇒ ABABABBB⇒ ··· × ABABBB⇒ ABABABBB⇒ ··· × ABABBB⇒ ABABABBB⇒ ··· × ABABBBB⇒ ABABBBB⇒ ··· × ABABBBB⇒ ABABBBB⇒ ··· × ABABBBB⇒ ABABBBB⇒ ··· × ABABBBB⇒ ABABBBB⇒ ··· × ABBBBBA⇒ ABABBBBB⇒ ··· × ABBBBBA⇒ ABABBBBB⇒ ··· × ABBBBBB⇒ ABBBBBB⇒ ··· × ABBBBBB⇒ ABBBBB⇒ ··· × ABBBBBB⇒ ABBBBB⇒ ··· × ABBBBBB⇒ ···<	AAABBBBA→AAABBBBA→…	×
AABABBBA→AABABBBA→··· × AABABBBA→AABBABBA→··· × AABBBBA→AABBABBA→··· × AABBABBA→AABBABBA→··· × AABBBBAA→AABBBABBA→··· × AABBBBAA→AABBBABA→··· × AABBBBAA→AABBBBAAA→··· × ABBABBB→ABAAABBB→··· × ABAABBB→ABAABBB→··· × ABAABBB→ABAABBB→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABBABBA→ABABBBA→··· × ABBABBA→ABABBBA→··· × ABBABBA→ABABBBA→··· × ABBBBAA→ABABBBAA→··· × ABBBBAA→ABABBBAA→··· × ABBBBAA→ABABBBAA→··· × ABBBBAA→ABBBABBA→··· × ABBBBAA→ABBBABAB→··· × ABBBBAA→ABBBABBA→··· × ABBBABBA→ABBBABBA→··· × <tr< td=""><td>AABAABBB→AABAABBB→···</td><td>×</td></tr<>	AABAABBB→AABAABBB→···	×
AABABBBA→AABABBBA→··· × AABBAABB→AABBABBA→··· × AABBABBA→AABBABBA→··· × AABBBABA→AABBBBAAB→··· × AABBBBAA→AABBBBAA→··· × AABBBBAA→AABBBBAA→··· × ABBABBBA→ABABBBA→··· × ABBABBB→ABABABBBA→··· × ABBABBB→ABABABBBA→··· × ABBABBB→ABABBBA→··· × ABBABBB→ABABBBA→··· × ABBABBB→ABABBBA→··· × ABBABBA→ABABBBA→··· × ABBABBA→ABABBBAA→··· × ABBBBAA→ABBBBAA→··· × ABBBBBAA→ABBBBAA→··· × ABBBBBAA→ABBBBAAA × ABBBBBAA→ABBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBABA × ABBBBBAA→ABBBBABA × ABBBBBAA→ABBBBBAA × ABBBBBAA→ABBBBBAB × ABBBBBAA→ABBBBBABA × ABBBBBAA→ABBBBBABA × ABBBBBABA→ABBBBBBAB × ABBBBBBABA→ABBBBBBAB × ABBBBBBABA→ABBBBBBABA × ABBBBBBABA→ABBBBBBBAB × ABBBBBBABA→ABBBB	AABABABB→AABABABB→···	×
AABBAABB → AABBAABB → × AABBABBA → AABBABBA → × AABBABBA → AABBBABBA → × AABBBBAB → AABBBBAB → × ABBBBBA → AABBBBBA → × ABBABBB → ABAABBB → × ABBABBB → ABABBBA → × ABBABBB → ABABBBA → × ABABBB → ABABBBB → × ABABBB → ABABBBB → × ABABBBA → ABBBABBA → × ABABBBA → ABBBABBA → × ABBBABB → ABBBABBA → × ABBBABBA → ABBBABBAA → × ABBBABBA → ABBBABBA →	AABABBAB→AABABBAB→···	×
AABBABBA → AABBABAB → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AABABBBA→AABABBBA→···	×
AABBABBA → AABBABBA → · · · · × AABBBBAAB → AABBBABAB → · · · · × AABBBBAAB → AABBBBAAB → · · · · × ABBABBB → ABABBBBA → · · · · × ABAABBB → ABAABBB → · · · · × ABABBBA → ABABBBA → · · · · × ABABBBA → ABABBBA → · · · · × ABABBBA → ABABABBB → · · · · × ABABBBA → ABABBBAB → · · · · × ABABBBA → ABABBBAB → · · · · × ABABBBA → ABBBBABA → · · · · × ABBABBB → ABBBABBA → · · · · × ABBABBB → ABBBABBA → · · · · × ABBABBB → ABBBABBA → · · · · × ABBABBA → ABBBABBA → · · · · × ABBABBA → ABBBBBAAB → · · · · × ABBABBA → ABBBBBAAB → · · · · × ABBBABBA → ABBBBBAAB → · · · · × ABBBABBA → ABBBBABAB → · · · · × ABBBABBA → ABBBBABAB → · · · · × ABBBABBA → ABBBBABBA → · · · · × ABBBABBA → ABBBBABAB → · · · · × ABBBABBA → ABBBBABAB → · · · · × ABBBABBA → ABBBBABAB → · · · · × ABBBBABA → ABBBBABAB → · · · · ×	AABBAABB→AABBAABB→···	×
AABBBAAB → AABBBAAB → · · · × AABBBBABA → AABBBBAA → · · · · × ABBBBBAA → AABBBBAA → · · · · × ABBAABBB → ABAABBB → · · · · × ABAABBB → ABAABBBB → · · · · · × ABABBBA → ABABBBB → · · · · · × ABABBBA → ABABBBB → · · · · · · · × ABABBBA → ABABBBBA → · · · · · · · · · · × ABABBBA → ABABBBBA → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AABBABAB→AABBABAB→···	×
AABBBABA→AABBBBABA→··· × AABBBBBAA→AABBBBAA→··· × ABBABBB→ABAABBB→··· × ABABABBB→ABABABBB→··· × ABABBBA→ABBABBBA→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABABBBA→ABABBBA→··· × ABABBBA→ABABBBAA→··· × ABABBBA→ABABBBAA→··· × ABBBBAA→ABABBBAA→··· × ABBAABB→ABBAABB→··· × ABBAABB→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBABBAB→··· × ABBABBA→ABBABBAA→··· × ABBBABA→ABBABBAA→··· × ABBBBAAA→ABBBBAAA→··· × ABBBBAAA→ABBBBAAA→··· × ABBBAAA→ABBBBAAA→··· ×	AABBABBA→AABBABBA→···	×
AABBBBAA → AABBBBAA → · · · · × ABAAABBB → ABAAABBB → · · · · × ABAABBB → ABAABBBA → · · · · × ABAABBB → ABABABBB → · · · · × ABABABB → ABABABBB → · · · · × ABABABBA → ABABABBA → · · · · × ABABBBA → ABABBBAB → · · · · × ABBBBABA → ABABBBABA → · · · · × ABBBAABB → ABBABBAB → · · · · × ABBABBA → ABBABBAB → · · · · × ABBABBA → ABBABBABA → · · · · × ABBABBA → ABBBABAB → · · · · × ABBABBA → ABBBABAB → · · · · × ABBABBA → ABBBABAB → · · · · × ABBBABA → ABBBBABA → · · · · × ABBBAAB → ABBBABAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBABAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBAAB → · · · · × ABBBAAB → ABBBA	AABBBAAB→AABBBAAB→···	×
ABAAABBB→ABAAABBB→··· × ABAABBB→ABAABABB→··· × ABAABBB→ABAABBBA→··· × ABAABBBA→ABAABBBA→··· × ABABABBA→ABABABBA→··· × ABABBBA→ABABBABA→··· × ABABBBAA→ABABBABA→··· × ABABBBAA→ABABBBAA→··· × ABBBAABB→ABBAABB→··· × ABBAABB→ABBAABB→··· × ABBAABBA→ABBABABA→··· × ABBABABA→ABBABABA→··· × ABBABABA→ABBABABA→··· × ABBABABA→ABBABABA→··· × ABBBAABA→ABBBABAA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAAA→··· × ABBBAAAA→ABBBAAA→··· ×	AABBBABA→AABBBABA→···	×
ABAABABB→ABAABABB→··· × ABAABBBA→ABAABBBA→··· × ABAABBBA→ABAABBBA→··· × ABABABBA→ABABABBA→··· × ABABBBA→ABABBABA→··· × ABABBBAA→ABABBABA→··· × ABABBBAA→ABABBBAA→··· × ABBAABB→ABBAABB→··· × ABBAABB→ABBAABB→··· × ABBABBA→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBABBAA × ABBABBA→ABBBABAB→··· × ABBBABAA→ABBBABAB→··· × ABBBABAA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	AABBBBAA→AABBBBAA→…	×
ABAABBAB→ABAABBAB→ × ABAABBBA→ABAABBBA→ × ABABABBB→ABABABBA→ × ABABABBA→ABABBABA→ × ABABBABA→ABABBABA→ × ABABBBAA→ABABBBAA→ × ABABBBAA→ABABBBAA→ × ABBAABB→ABBAABB→ × ABBAABB→ABBABABA→ × ABBABBA→ABBABABA→ × ABBABBA→ABBABABA→ × ABBABBA→ABBABBAA→ × ABBABBA→ABBBABAB→ × ABBBABAA→ABBBBAABA→ × ABBBAABA→ABBBAABA→ × ABBBAABA→ABBBABAA→ ×	ABAAABBB→ABAAABBB→···	×
ABAABBBA → ABAABBBA → · · · · × ABABAABB → ABABABB → · · · · × ABABABBA → ABABABBA → · · · · × ABABBABA → ABABBABA → · · · · × ABABBBAA → ABABBBAA → · · · · × ABBAABB → ABBAABB → · · · · × ABBAABB → ABBAABB → · · · · × ABBABBAA → ABBABBAA → · · · · × ABBABBA → ABBABBAA → · · · · × ABBABBA → ABBBABA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · · × ABBBABAA → ABBBABAA → · · · · · × ABBBABAA → ABBBABAA → · · · · · × ABBBABAA → ABBBABAA → · · · · · × ABBBABAA → ABBBABAA → · · · · · × ABBBABAA → ABBBABAA → · · · · · · ×	ABAABABB→ABAABABB→···	×
ABABAABB→ABABABB→··· × ABABABBB→ABABABBA→··· × ABABBBAAB→ABABBBAAB→··· × ABABBBABA→ABABBBABA→··· × ABABBBABA→ABBBABAB→··· × ABBAAABB→ABBAAABB→··· × ABBAABBA→ABBAABBA→··· × ABBABBAA→ABBABBAABA→··· × ABBABBAA→ABBABBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	ABAABBAB→ABAABBAB→···	×
ABABABABA→ABABABAB→··· × ABABABBA→ABABABBA→··· × ABABBABA→ABABBABA→··· × ABABBBAA→ABABBBAA→··· × ABBBABA→ABBAABB→··· × ABBAABB→ABBAABB→··· × ABBABBA→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBBABAA→··· × ABBAABA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	ABAABBBA→ABAABBBA→···	×
ABABABBA→ABABABBA→··· × ABABBAAB→ABABBBAAB→··· × ABABBBAA→ABABBBAA→··· × ABABBBAA→ABBBAAABB→··· × ABBAABB→ABBAABBA→··· × ABBABBA→ABBABABA→··· × ABBABBA→ABBABBAA→··· × ABBABBA→ABBBABAA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	ABABAABB→ABABAABB→···	×
ABABBAAB→ABABBAAB→… × ABABBABA→ABABBBAAA→… × ABBAAABB→ABBAAABB→… × ABBAABBA→ABBAABBA→… × ABBABBA→ABBABBA→… × ABBABBA→ABBABBAA→… × ABBABBAA→ABBABBAA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… ×	ABABABAB→ABABABAB→···	×
ABABBABA → ABABBABA → · · · · × ABABBBAA → ABABBBAA → · · · · × ABBAAABB → ABBAABB → · · · · × ABBAABBA → ABBABBABA → · · · · × ABBABBA → ABBABBABA → · · · · × ABBABBAA → ABBABBAA → · · · · × ABBBAABA → ABBBAABA → · · · · × ABBBABA → ABBBAABA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · × ABBBABA → ABBBABAA → · · · · ×	ABABABA→ABABABBA→···	×
ABABBBAA→ABABBBAA→··· × ABBAAABB→ABBAABB→··· × ABBAABBA→ABBAABBA→··· × ABBABBA→ABBABBA→··· × ABBABBA→ABBABBAA→··· × ABBABBAA→ABBABBAA→··· × ABBBABA→ABBBAAB→··· × ABBBABA→ABBBAABA→··· × ABBBABA→ABBBAABA→··· × ABBBABA→ABBBABAA→··· ×	ABABBAAB→ABABBAAB→···	×
ABBAAABB→ABBAAABB→… × ABBAABBA→ABBAABBA→… × ABBABBA→ABBABBA→… × ABBABBAA→ABBABBAA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… ×	ABABBABA→ABABBABA→···	×
ABBAABAB→ABBAABAB→… × ABBAABBA→ABBAABBA→… × ABBABABA→ABBABABA→… × ABBABABA→ABBABABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… ×	ABABBBAA→ABABBBAA→···	×
ABBAABBA→ABBAABBA→… × ABBABABA→ABBABABA→… × ABBABBAA→ABBABBAA→… × ABBBAABA→ABBBAAAB→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… ×	ABBAAABB→ABBAAABB→···	×
ABBABAAB→ABBABAAB→… × ABBABABA→ABBABABA→… × ABBABBAA→ABBABABA→… × ABBBAABA→ABBBAABA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… × ABBBABAA→ABBBABAA→… ×	ABBAABAB→ABBAABAB→···	×
ABBABABA→ABBABABA→··· × ABBABBAA→ABBABBAA→··· × ABBBAAAB→ABBBAAAB→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	ABBAABBA→ABBAABBA→···	×
ABBABAA→ABBABBAA→··· ABBBAAAB→ABBBAAAB→··· ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × × × × × × × × × × × ×	ABBABAAB→ABBABAAB→···	×
ABBBAAAB→ABBBAAAB→··· ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· × ×	ABBABABA→ABBABABA→···	×
ABBBAABA→ABBBAABA→··· × ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	ABBABBAA→ABBABBAA→···	×
ABBBABAA→ABBBABAA→··· ×	ABBBAAAB→ABBBAAAB→···	×
	ABBBAABA→ABBBAABA→···	×
ABBBBAAA→ABBBBAAA→···· ×	ABBBABAA→ABBBABAA→···	×
	ABBBBAAA→ABBBBAAA→···	×

k=2,

AAAABBBB → AAAABBBB → · · · × AAABBBB → AAAABBBB → · · · × AAABBBB → AAAABBBB → · · · × AAABBBB → AAAABBBB → · · · × AABBBB → AABABBB → · · · × AABABBB → AABABBB → · · · × AABABBB → AABABBB → · · · × AABBBAB → AABBBBA → · · · × AABBBAB → AABBBBA → · · · × AABBBAB → AABBBBA → · · · × AABBBBA → AABBBBA → · · · × AABBBBA → AABBBBA → · · · × AABBBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBBA → BAABBBB → AAABBBB → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AAABBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAABBBB → AABBBBBA → · · · × <tr< th=""><th></th><th></th></tr<>		
AAABBABB → AAABBABB → ··· × AAABBBBA → AAABBBBA → ··· × AABBBBB → AABBABB → ··· × AABBABB → AABABBB → ··· × AABBABB → AABABBB → ··· × AABBBBA → AABBBBA → ··· × AABBBBA → AABBBBA → ··· × AABBBAB → AABBBBA → ··· × AABBBAB → AABBBBA → ··· × AABBBAB → AABBBBA → ··· × AABBBBA → AABBBBA → ··· × AABBBBA → AABBBBA → ··· × AABBBBA → AABBBBA → ··· × ABBABBB → BAAABBBB → ··· × ABBABBB → BAAABBBB → AAABBBBB → ··· × ABABBBB → BAAABBB → AAABBBBA → ··· × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBA → ··· × ABBABBBA → BAABBBA → AABBBBA → ··· × ABBBBBA → BBAABB	AAAABBBB→AAAABBBB→···	✓
AAABBBAB → AAABBBAB → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AAABABBB→AAABABBB→···	X
AAABBBBA → AAABBBBA → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AAABBABB→AAABBABB→···	X
AABAABBB→AABABBB→… × ABBABBB→AABABBB→… × ABBABBB→AABBBBA→… × ABBBBA→BABBBA→ × ABBBBABB→AABBBBA→… × ABBBBAB→AABBBBA→ × ABBBBBA→AABBBBA→ × ABBBBBA→AABBBBA→ × ABBBBBA→AABBBBA→ × ABBBBBA→AABBBBA→ × ABBBBBA→AABBBBA→ × ABBABBB→BAAABBB→AAABBBB→ × ABBABBB→BAAABBB→AAABBBB→ × ABBABBB→BAABBB→AABBBA→AABBBBA→ × ABBABB→BABABBA→AABBBBA→ × ABBABBB→BABABBA→AABBBBA→ × ABBABBA→BABBBA→AABBBBA→ × ABBBBAA→BABBBAA→AABBBBA→ × ABBBBAA→BABBBAA→AABBBBAA→ × ABBBBAA→BABBBAA→AABBBBAA→ × ABBBBAA→BABBBAA→AABBBBAA→ × ABBBBAA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBAA	AAABBBAB→AAABBBAB→···	X
AABABABB → AABABABB → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AAABBBBA→AAABBBBA→···	×
AABABBBA→AABABBAB→AABBBBA→··· × AABABBBA→AABABBBA→··· × AABBBBA→AABBABBA→··· × AABBBBA→AABBBABBA→··· × AABBBBAA→AABBBBABA→··· × AABBBBAA→AABBBBABA→··· × AABBBBAA→AABBBBABA→··· × ABBABBBA→AAABBBBA→AAABBBB→··· × ABAABBB→BAAABBB→AAABBBBA→··· × ABAABBB→BAAABBB→AAABBBBA→··· × ABBABBB→BAAABBB→AABBBBA→··· × ABBABBB→BAABBB→AABBBBA→··· × ABBABBB→BAABBBA→AABBBBA→··· × ABBABBB→BABABBA→AABBBBBA→··· × ABBABBA→BABBBA→AABBBBA→··· × ABBBBAABBA→BABBBAAABBBBA→··· × ABBBBBAA→BABBBBAAABBBA→··· × ABBBBBAA→BABBBBAA→ABBBBAA→··· × ABBBBBAA→BABBBBAA→ABBBBAA→··· × ABBBBBAABBA→BABBBBAA→ABBBBBAA→··· × ABBBBBAABBBAAABBBAA→··· × ABBBBBAABBBAAABBBAA→··· × ABBBBBAABBAABBAA→··· × ABBBBBBAABBAA→··· × ABBBBBBAABBAA<···	AABAABBB→AABAABBB→···	X
AABABBBA→AABABBBA→··· × AABBAABB→AABBABBA→··· × AABBABBA→AABBBABA→··· × AABBABBA→AABBBBAA→··· × AABBBBAA→AABBBBAA→··· × AABBBBAA→AABBBBAA→··· × ABBBBAA→AABBBBAA→··· × ABBABBB→BAAABBB→AAABBBB→··· × ABAABBB→BAAABBB→AAABBBB→··· × ABABBBA→BAABBBA→AAABBBBA→··· × ABABBBA→BAABBBA→AABBBBA→··· × ABABBBA→BAABBBA→AABBBBA→··· × ABABBBA→BAABBBA→AABBBBA→··· × ABABBBA→BABABBA→AABBBBAA→··· × ABABBBA→BAABBBA→AABBBBAA→··· × ABABBBA→BAABBBA→AABBBBAA→··· × ABABBBAA→BAABBBA→AABBBBAA→··· × ABABBBAA→BAABBBA→AABBBBAA→··· × ABABBBAA→BAABBBA→AABBBBAA→··· × ABABBBAA→BAABBBA→AABBBBAA→··· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBBAA→··· × ABABBBAA→BABBBAA→AABBBBBAA→··· × ABABBBAA→BABBBAA→AABBBBBAA→··· × ABBBAABB→BAABBBA→··· × ABBBAABB→BBAABBA→··· × ABBBAABBA→BBAABBA→··· × A	AABABABB→AABABABB→···	X
AABBAABB→AABBAABB→ × AABBABBA→AABBABBA→ × AABBABBA→AABBBABBA→ × AABBBBABA→AABBBABB→ × AABBBBABA→AABBBBAA→ × ABBBBBAA→ABBBBAA→AABBBB→ × ABBABBB→BAAABBB→AAAABBBB→ × ABABBBB→BAABBBA→AABBBBA→ × ABABBBA→BABABB→AABBBBA→ × ABABBBA→BABABBA→AABBBBA→ × ABABBBA→BABABBA→AABBBABA→ × ABABBBA→BABBBA→AABBBBAA→ × ABABBBA→BABBBAA→ABBBBAA→ × ABABBBAA→BABBBAA→ABBBBAA→ × ABBBBAABA→BABBBAA→ABBBBAA→ × ABBBBBAA→BABBBAA→ABBBBAA→ × ABBBBBAA→BABBBAA→ABBBBBAA→ × ABBBBBAABBA→BBAABBA→ × ABBBABBA→BBBAABBA→ × ABBBABBA→BBBAABBA→ × ABBBBBAABBBAAABBA→ × ABBBBBAAABBAABBA→ × ABBBBBAABBBBAAABA→ × ABBBBBAAABBAA→ × ABBBBBAAABBAA→ × ABBBBBAAABBBBBAABAA × ABBBBBBAAABBBBBBBAABA ×	AABABBAB→AABABBAB→···	×
AABBABBA → AABBABBA → AABBABBA → · · · × AABBBABA → AABBBABB → · · · × AABBBBAB → AABBBBAB → · · · × ABBBBBA → AABBBBBA → · · · × ABBABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · × ABBABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · × ABAABBB → BAAABBB → AAABBBBA → · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBAB → · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · × ABBBBBA → BAABBBBA → AABBBBBA → · · · × ABBBBBA → BAABBBA → AABBBBBA → · · · × ABBBBBBA → BAABBBBA → · · · × ABBBABB → BBAABBB → · · · × ABBBABB → BBAABBB → · · · × ABBBABB → BBAABBB → · · · × ABBBABBA → BBAABBB → · · · × ABBABBA → BBAABBB → · · · × ABBABBA → BBAABBA → · · · × ABBABBA → BBBAABBA → · · · × ABBBABBA → BBBAABBA	AABABBBA→AABABBBA→···	X
AABBABBA → AABBABBA → AABBBABB → · · · × AABBBAAB → AABBBABAB → · · · · × AABBBBAA → AABBBBAA → · · · · × ABBABBB → BAAABBBB → AAABBBB → · · · · × ABAABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · · × ABAABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · · × ABABBBA → BAABBB → AAABBBB → · · · · × ABABBBA → BAABBB → AABBABB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBABB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBAB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBAB → · · · · × ABBBBBA → BAABBBA → AABBBBAB → · · · · × ABBBBBA → BAABBBA → AABBBBBA → · · · · × ABBBABB → BBAABBBA → AABBBBBA → · · · · × ABBBABBA → BBAABBBA → · · · · × ABBABBBA → BBAABBB → · · · · × ABBABBA → BBAABBB → · · · · × ABBABBA → BBBAABBA → · · · · × ABBABBA → BBBAABBA → · · · · × ABBABBA → BBBAABBA → · · · · × ABBBABBA → BBBAABBA → · · · · × ABBBABBA → BBBAABBA → · · · · × ABBBABBA → BBBAABBA → · · · · × ABBBABBA → BBBAABBA → · · · · ×	AABBAABB→AABBAABB→···	X
AABBBAAB → AABBBAAB → · · · · × AABBBBABA → AABBBBABA → · · · · · × ABBBBBAA → AABBBBAA → · · · · · · × ABBABBB → BAAABBBB → AAABBBB → · · · · · × ABAABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · · · · · · × ABAABBBA → BAAABBBA → AAABBBBA → · · · · · · · · · · × ABABABB → BAABABB → AABBBBA → · · · · · · · · · · · · · · × ABABABB → BAABBB → AABBBABB → · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	AABBABAB→AABBABAB→···	×
AABBBABA → AABBBABA → · · · × AABBBBAA → AABBBBAA → · · · · × ABBABBB → BAAABBBB → AAABBBBB → · · · · × ABAABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · · × ABAABBBA → BAAABBB → AAABBBBA → · · · · × ABABABB → BAAABBB → AAABBBBA → · · · · × ABABABB → BAABBB → AABBBAB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBABB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · · × ABBBABA → BAABBBA → AABBBBA → · · · · × ABBBABA → BBAABBB → · · · · × ABBBABA → BBAABBA → · · · · × ABBBBAA → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAA → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAA → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBAAB → BBBAABB → · · · · × ABBBAAB → BBBAABB → · · · · × ABBBAAB → BBBAABB → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABB → ·	AABBABBA→AABBABBA→···	X
AABBBBAA → AABBBBAA → · · · × ABAAABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · · × ABAABBB → BAAABBB → AAABBBB → · · · · × ABAABBBA → BAAABBBA → AAABBBBA → · · · · × ABABABBA → BAABBBA → AABBBBA → · · · · × ABABABB → BAABABB → AABBABB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBAB → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBAA → · · · · × ABABBBA → BAABBBA → AABBBBAA → · · · · × ABBBAABB → BBAAABB → · · · · × ABBBABA → BBAABBA → · · · · × ABBBABA → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBAAB → BBBAABBA → · · · · × ABBBBABA → BBBAABBA → · · · · × ABBBBABA → BBBAABBA → · · · · × ABBB	AABBBAAB→AABBBAAB→···	×
ABAAABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→···· ✓ ABAABABB→BAAABBB→AAABBBB→···· × ABAABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→···· × ABAABBBA→BAAABBBA→AABBBBA→···· × ABABABB→BAABABB→AABBABB→···· × ABABABBA→BAABABB→AABBABBA→···· × ABABBABA→BAABBBA→AABBBABA→···· × ABABBABA→BAABBBAA→AABBBABA→···· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→···· × ABBBAABB→BBAAABB→···· × ABBAABB→BBAAABBA→···· × ABBAABBA→BBAABBA→···· × ABBABABA→BBAABBA→···· × ABBABABA→BBAABBA→···· × ABBBABAA→BBAABBA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→··· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABA→···· <td>AABBBABA→AABBBABA→···</td> <td>×</td>	AABBBABA→AABBBABA→···	×
ABAAABBB→BAAABBB→AAABBABB→···· × ABAABBB→BAAABBBB→AAABBBBB→···· × ABAABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→···· × ABABBBA→BAABABB→AABBBABB→···· × ABABABBB→BAABABB→AABBABB→···· × ABABABBA→BAABBBA→AABBABBA→···· × ABABBABA→BAABBBAB→AABBBABA→···· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBABA→···· × ABBBAABB→BBAAABB→···· × ABBBAABB→BBAAABBA→···· × ABBABBAB→BBAABBA→···· × ABBABBAB→BBAABBA→···· × ABBABBAB→BBAABBA→···· × ABBBABAA→BBAABBA→···· × ABBBABAA→BBAABBA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBBAAABA→···· × ABBBBAAA→BBBBAABA→···· × ABBBBAAA→BBBBAABA→···· × ABBBBAAA→BBBBAABA→···· × ABBBBAAA→BBBBAABA→···· × ABBBBAAA→BBBBAABA→···· ×	AABBBBAA→AABBBBAA→···	X
ABAABBAB→BAAABBBA→AAABBBAB→··· × ABAABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→··· × ABABAABB→BAABABB→AABBABB→··· × ABABABBA→BAABABB→AABBABBA→··· × ABABBABB→BAABBBA→AABBBABA→··· × ABABBABA→BAABBABA→AABBBABA→··· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→··· × ABBBAABB→BBAAABB→··· × ABBAABB→BBAAABB→··· × ABBAABB→BBAABBA→··· × ABBABBA→BBAABBA→··· × ABBABBAA→BBAABBA→··· × ABBBABAA→BBAABBA→··· × ABBBABAA→BBBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAABAA→··· ×	ABAAABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→···	✓
ABAABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→··· × ABABAABB→BAABBB→AABBBAABB→··· × ABABABBA→BAABBBA→AABBABBA→··· × ABABBBA→BAABBBA→AABBBABBA→··· × ABABBABB→BAABBABA→AABBBABA→··· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→··· × ABBBAABB→BBAAABB→··· × ABBAABB→BBAAABBA→··· × ABBABBA→BBAABBA→··· × ABBABBA→BBAABBA→··· × ABBABBA→BBAABBA→··· × ABBBAABB→BBBAABBA→··· × ABBBAABB→BBBAABBA→··· × ABBBAABB→BBBAABBA→··· × ABBBAABB→BBBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAABAA→··· × ABBBAABA→BBBAABAA→··· × ABBBAABA→BBBAABAA→··· ×	ABAABABB→BAAABABB→AAABBABB→···	X
ABABAABB→BAABAABB→AABBAABB→… × ABABABBB→BAABABB→AABBABBA→… × ABABBABBA→BAABBBAAB→AABBBABBA→… × ABABBABBA→BAABBBAAB→AABBBABA→… × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBABA→… × ABBAABB→BBAAABBA→… × ABBABBABA→BBAABABA→… × ABBABBABA→BBAABBAA→… × ABBABBAA→BBBAABBA→… × ABBBABBA→BBBAABBA→… × ABBBABBA→BBBAABBA→… × ABBBBAABA→BBBAABBA→… × ABBBBAABA→BBBAABBA→… × ABBBBAABA→BBBBAABA→… × ABBBBAABA→BBBBAABA→… × ABBBBABA→BBBBAABA→… × ABBBBABA→BBBBAABA→… × ABBBBABA→BBBAABA→… × ABBBBABA→BBBAABA→… ×	ABAABBAB→BAAABBAB→AAABBBAB→···	X
ABABABAB→BAABABAB→AABBABB→···· × ABABABBA→BAABABBA→AABBABBA→···· × ABABBBAAB→BAABBABA→AABBBABA→···· × ABABBBAA→BAABBBABA→AABBBBABA→···· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→···· × ABBAABB→BBAAABB→···· × ABBABBA→BBAABBA→···· × ABBABBA→BBAABBA→···· × ABBABBAA→BBBAABBA→···· × ABBBAABA→BBBAABBA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· ×	ABAABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→…	X
ABABABBA→BAABBBA→AABBABBA→···· × ABABBAAB→BAABBAAB→AABBBABA→···· × ABABBBAA→BAABBBABA→AABBBBABA→···· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→···· × ABBAAABB→BBAAABBA→···· × ABBAABBA→BBAAABBA→···· × ABBABBA→BBAABABA→···· × ABBABBA→BBAABBA→···· × ABBBAABA→BBBAABBA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAAABA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· × ABBBAABA→BBBAABAA→···· ×	ABABAABB→BAABAABB→AABBAABB→···	X
ABABBAAB→BAABBAAB→AABBBAAB→ × ABABBABA→BAABBBAAA→AABBBBAAA→ × ABBBAAABB→BBAAABBB→ × ABBAABBA→BBAAABBA→ × ABBABBA→BBAABBA→ × ABBABBA→BBAABBA→ × ABBABBAA→BBBAABBA→ × ABBBAABA→BBBAABBA→ × ABBBAABA→BBBAAABA→ × ABBBAABA→BBBAAABA→ × ABBBAABA→BBBAABAA→ × ABBBAABA→BBBAABAA→ × ABBBABAA→BBBBAABAA→ ×	ABABABAB→BAABABAB→AABBABAB→···	X
ABABBABA→BAABBABA→AABBBABA→··· × ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBBAA→··· × ABBAAABB→BBAAABBA→··· × ABBABBA→BBAAABBA→··· × ABBABBA→BBAABABA→··· × ABBABBAA→BBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAABA→··· × ABBBAABA→BBBAABA→··· × ABBBAABA→BBBAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABA→··· ×	ABABABBA→BAABABBA→AABBABBA→···	X
ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→··· × ABBAAABB→BBAAAABB→··· × ABBAABBA→BBAAABBA→··· × ABBABBA→BBAABABA→··· × ABBABBAA→BBAABBA→··· × ABBBABAA→BBBAABBA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBABAA→BBBAAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABAA→··· ×	ABABBAAB→BAABBAAB→AABBBAAB→···	X
ABBAAABB→BBAAAABB→… × ABBAABBA→BBAAABBA→… × ABBABBA→BBAABBA→… × ABBABBA→BBAABBA→… × ABBBAAB→BBBAABBA→… × ABBBAAB→BBBAABA→… × ABBBAABA→BBBAABA→… × ABBBABA→BBBAABA→… × ABBBABA→BBBAABA→… × ABBBABA→BBBAABA→… ×	ABABBABA→BAABBABA→AABBBABA→···	X
ABBAABAB→BBAAABAB→··· × ABBAABBA→BBAAABBA→··· × ABBABABA→BBAABABA→··· × ABBBABAA→BBAABBAA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAABAA→··· × ABBBABA→BBBAABAA→··· × ABBBABA→BBBAABA→··· ×	ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→···	X
ABBAABBA→BBAAABBA→··· × ABBABAAB→BBAABAAB→··· × ABBABBAA→BBAABBAA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABAA→··· × ABBBABAA→BBBAABAA→··· ×	ABBAAABB→BBAAAABB→···	X
ABBABAAB→BBAABAAB→··· × ABBABBABA→BBAABBAA→··· × ABBABBAA→BBBAABBAA→··· × ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBABA→BBBAABAA→··· × ABBBABA→BBBAABAA→··· ×	ABBAABAB→BBAAABAB→···	X
ABBABAA→BBAABAA→··· ABBABAAAB→BBAABAA→··· ABBBAAAB→BBBAAAAB→··· ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABA→··· × × × × × × × × × × × ×	ABBAABBA→BBAAABBA→···	X
ABBABAA→BBAABBAA→··· ABBBAABA→BBBAAAAB→··· ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABA→··· × × × × × × × × × × × ×	ABBABAAB→BBAABAAB→···	X
ABBBAAAB→BBBAAABA→··· ABBBAABA→BBBAAABA→··· × ABBBABAA→BBBAABA→··· × ×	ABBABABA→BBAABABA→···	X
ABBBAABA→BBBAABA→···· ABBBABAA→BBBBAABAA→···· ×	ABBABBAA→BBAABBAA→···	X
ABBBABAA→BBBBAABAA→···· ×	ABBBAAAB→BBBAAAAB→···	X
	ABBBAABA→BBBAAABA→···	X
ABBBBAAA→BBBBBAAAA→···	ABBBABAA→BBBAABAA→···	
	ABBBBAAA→BBBBBAAAA→···	√

k=3,

K=3,	
AAAABBBB→AAAABBBB→…	✓
AAABABBB→AAABABBB→···	×
AAABBABB→AAABBABB→···	×
AAABBBAB→AAABBBAB→…	×
AAABBBBA→AAABBBBA→…	×
AABAABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→···	✓
AABABABB→BAAABABB→AAABBABB→···	×
AABABBAB→BAAABBAB→AAABBBAB→···	×
AABABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→···	×
AABBAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	√
AABBABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→···	×
AABBABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→···	×
AABBBAAB→BBBAAAAB→…	×
AABBBABA→BBBAAABA→···	×
AABBBBAA→BBBBBAAAA→…	√
ABAAABBB→AAAABBBB→···	✓
ABAABABB→AAABBABB→···	×
ABAABBAB→AAABBBAB→···	×
ABAABBBA→AAABBBBA→···	×
ABABAABB→AABBAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	√
ABABABAB→AABBABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→…	×
ABABABBA→AABBABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→…	×
ABABBAAB→AABBBAAB→BBBAAAAB→···	×
ABABBABA→AABBBABA→BBBBAAABA→···	×
ABABBBAA→AABBBBBAA→BBBBBAAAA→···	✓
ABBAAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	✓
ABBAABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→···	×
ABBAABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→···	×
ABBABAAB→BBAABAAB→AABBBAAB→BBBAAAAB→…	X
ABBABABA→BBAABABA→AABBBABA→BBBAAABA→…	X
ABBABBAA→BBAABBAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→···	√
ABBBAAAB→BBBAAAAB→…	X
ABBBAABA→BBBAAABA→…	×
ABBBABAA→BBBBAABAA→…	X
ABBBBAAA→BBBBAAAA→···	√

k=4,

K T	
AAAABBBB→AAAABBBB→…	√
AAABABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→···	✓
AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	√
AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
AABAABBB→AAAABBBB→···	✓
AABABABB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	✓
AABABBAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
AABABBBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
AABBAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	✓
AABBABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
AABBABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
AABBBAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
AABBBBAA→BBBBBAAAA→…	✓
ABAAABBB→AAAABBBB→···	√
ABAABABB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→···	√
ABAABBAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
ABAABBBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
ABABAABB→BABAAABB→AAABABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→	√
$ABABABAB {\rightarrow} BABAABAB {\rightarrow} AABABBAB {\rightarrow} AAABBBAB {\rightarrow} BBBAAAAB {\rightarrow} AAAABBBB {\rightarrow} \cdots$	√
ABABABBA→BABAABBA→AABABBBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
ABABBAAB→BBABAAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
ABABBABA→BBABAABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
ABABBBAA→BBBBAAA→ABBBBAAA→BBBBAAAA→···	√
ABBAAABB→AAAABBBB→···	√
ABBAABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
ABBAABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
ABBABAAB→AABBBAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
ABBABABA→AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
ABBABBAA→AABBBBAAA→BBBBAAAA→···	✓
ABBBAAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
ABBBAABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
ABBBABAA→BBBBAABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→···	√
ABBBBAAA→BBBBAAAA→···	√
J	

k=5,

AAAABBBB→BBBBAAAA→…	
AAABABBB→AAAABBBB→BBBBAAAA→…	√
AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→BBBBAAAA→…	√
AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
AAABBBBA→BBBBAAAA→AAAABBBB→···	√
AABAABBB→AAAABBBB→BBBBAAAA→…	√
AABABABB→BAABAABB→AABAABBB→AAAABBBB→···	√
AABABBAB→BBAABAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBBAA→BBBBBAAAA→…	✓
AABBAABB→AAAABBBB→···	✓
AABBABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
AABBABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
AABBBAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
AABBBBAA→BBBBAAAA→…	√
ABAAABBB→AAAABBBB→···	√
ABAABABB→BABAAABB→AAABABBB→AAAABBBB→···	√
ABAABBAB→BBABAAAB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→…	✓
ABAABBBA→BBBAAAA→BBBBBAAAA→···	√
ABABAABB→AAAABBBB→AAAABBBB→···	√
ABABABAB→AABABBAB→BBAABAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
ABABABBA→AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBBAA→BBBBAAAA→…	✓
ABABBAAB→BBABAAAB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→…	√
ABABBABA→BBABAABA→AABBABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
ABABBBAA→BBBBAAAA→BBBBBAAAA→···	✓
ABBAAABB→AAAABBBB→···	√
ABBAABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
ABBAABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	√
ABBABAAB→BABBAAAB→AAABABBB→AAAABBBB→···	√
ABBABABA→BABBAABA→AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBBAA→BBBBAAAA→···	√
ABBABBAA→BBABBAAA→BBBBAAAA→···	√
ABBBAAAB→AAAABBBB→···	√
ABBBAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
ABBBABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→···	✓
ABBBBAAA→BBBBAAAA→…	✓
י אוואושששע אוואוושששע אוואוושששעע אוואווששששעו אוואוששששעוו	

k=6,

AAAABBBB→BBBBAAAA→···	√
AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
AAABBABB→AAAABBBB→···	✓
AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
AAABBBBA→BBBBAAAA→…	✓
AABAABBB→BBBAABAA→BBBBBAAAA→···	✓
AABABABB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…	✓
AABABBAB → BBAABAAB → AABBAABB → AAAABBBB → · · ·	✓
AABABBBA→BBBAABAA→BBBBBAAAA→···	· ·
AABBAABB→AAAABBBB→···	· ·
AABBABAB→BAABBAAB→AABAABBB→BBBAABAA→BBBBBAAAA→···	
AABBABBA→BBAABBAA→BBBBAAAA→…	
AABBBAAB→AAAABBBB→···	
AABBBABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
AABBBBAA→BBBBAAAA→…	√
ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
ABAABABB→AABAABBB→BBBAABAA→BBBBBAAAA→…	√
ABAABBAB→BBABAAAB→AAABBABB→AAAABBBB→…	√
ABAABBBA→BBBABAAA→AAABBBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→…	√
ABABAABB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
ABABABAB→BABABAAB→AABABABB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA	✓
→BBBBAAAA→···	
ABABABBA→BBABABAA→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	✓
ABABBAAB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBAA→BBBBBAAAA→···	√
ABABBABA→AABABBBA→BBBBAABAA→BBBBBAAAA→…	✓
ABABBBAA→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→···	√
ABBAAABB→AAAABBBB→···	√
ABBAABAB→BABBAAAB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
ABBAABBA→BBABBAAA→AAABBABB→AAAABBBB→···	✓
ABBABAAB→AAABBABB→AAAABBBB→···	√
ABBABABA→AABBABBA→BBAABBAA→BBBBBAAAA→···	√
ABBABBAA→BBABBAAA→AAABBABB→AAAABBBB→···	✓
ABBBAAAB→AAAABBBB→···	√
ABBBAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
ABBBABAA→BABBBAAA→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···	✓
ABBBBAAA→AAAABBBB→···	√

k=7,

AAAABBBB→BBBBAAAA→…	√
AAABABBB→BBBAAABA→BBBBBAAAA→···	√
AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→···	✓
AAABBBAB→AAAABBBB→···	√
AAABBBBA→BBBBAAAA→…	√
AABAABBB→BBBAABAA→AABBBBAAB→AAAABBBB→···	√
AABABABB→BBAABAA→BBBBAABAA→AABBBBAAB→AAAABBBB→···	√
AABABBAB→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBBAAAA→···	√
AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBAAB→AAAABBBB→···	√
AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→···	×
AABBABAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→···	√
AABBABBA→BBAABBAA→AABBAABB→···	×
AABBBAAB→AAAABBBB→···	√
AABBBABA→BAABBBAA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBBAAB→AAAABBBB→…	√
AABBBBAA→AAAABBBB→···	√
ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→AAAABBBB→···	√
ABAABABB→BBABAABA→BBBABAAA→AAABBBBB→AAAABBBB→…	√
ABAABBAB→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBBAAB→AAAABBBB→···	√
ABAABBBA→BBBABAAA→AAABBBAB→AAAABBBB→···	√
ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBBAAAA→…	✓
ABABABAB→AABABABB→BBAABABA→BBBAABAA→AABBBBAAB→AAAABBBB→···	✓
ABABABBA→BBABABAA→AABBABAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBBAAAA→…	√
ABABBAAB→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBBAAAA→···	✓
ABABBABA→BABABBAA→AABABABB→BBAABABA→BBBAABAA	✓
AAAABBBB→···	
ABABBBAA→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBBAAAA→···	√
ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→…	√
ABBAABAB→AABBAABB→BBAABBAA→···	×
ABBAABBA→BBABBAAA→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→···	√
ABBABAAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→···	✓
ABBABABA→BABBABAA→AABABBAB→AAABABBB→BBBAAABA→BBBAAAA→…	✓
ABBABBAA→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→···	√
ABBBAAAB→AAAABBBB→···	√
ABBBAABA→BABBBAAA→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBBAAAA→···	√
ABBBABAA→AAABBBAB→AAAABBBB→···	√
ABBBBAAA→AAAABBBB→···	√

k=8,

K-0'	
AAAABBBB→BBBBAAAA→…	√
AAABABBB→BBBAAABA→ABBBAAAB→BABBBAAA→AAABABBB→···	X
AAABBABB→BBAAABBA→ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB	X
AAABBBAB→BAAABBBA→ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→···	×
AAABBBBA→AAAABBBB→···	✓
AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→BAABBBAA→AABAAB	X
AABABABB→BBAABABA→ABBAABAB→BABBAABA→ABABBAAB→BABABBAA→···	X
AABABBAB→BAABABBA→ABAABABB→BBABAABA→ABBABAAB→BABBAB	X
$AABABBBA \rightarrow AAABABBB \rightarrow BBBAAABA \rightarrow ABBBAAAB \rightarrow BABBBAAA \rightarrow AAABABBB \rightarrow \cdots$	×
AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→···	X
AABBABAB→BAABBABA→ABAABBAB→BABAABBA→ABABAABB→BBABABAA→···	X
$AABBABBA \rightarrow AAABBABB \rightarrow BBAAABBA \rightarrow ABBAAABB \rightarrow BBABBAAA \rightarrow AAABBABB \rightarrow \cdots$	X
AABBBAAB→BAABBBAA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→···	X
$AABBBABA \rightarrow AAABBBAB \rightarrow BAAABBBA \rightarrow ABAAABBB \rightarrow BBBABAAA \rightarrow AAABBBAB \rightarrow \cdots$	X
AABBBBAA→AAAABBBB→···	√
ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→BAAABBBA→ABAAABBB→···	X
ABAABABB→BBABAABA→ABBABAAB→BABBABAA→AABABBAB	X
ABAABBAB→BABAABBA→ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→BAABBABA→···	X
ABAABBBA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→BAABBBAA→AABAAB	X
ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→BAABBABA→ABAABBAB→BABAABBA→···	X
ABABABAB→BABABABA→ABABABAB→···	X
$ABABABA \rightarrow AABABABB \rightarrow BBAABABA \rightarrow ABBAABAB \rightarrow BABBAABA \rightarrow ABABBAAB \rightarrow BABABBAA \rightarrow$	X
ABABABBA→···	
$ABABBAAB {\rightarrow} BABABBAA {\rightarrow} AABABABB {\rightarrow} BBAABABA {\rightarrow} ABBBAABAB {\rightarrow} BABBAABA {\rightarrow} ABABBAAB {\rightarrow}$	X
$ABABBABA {\rightarrow} AABABBAB {\rightarrow} BAABABBA {\rightarrow} ABAABABB {\rightarrow} BBABAABA {\rightarrow} ABBABAAB {\rightarrow} BABBABAA {\rightarrow}$	X
AABABBAB→···	
ABABBBAA→AAABABBB→BBBAAABA→ABBBAAAB→BABBBAAA→AAABABBB→···	X
ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→BBAAABBA→ABBAAABB→···	X
ABBAABAB→BABBAABA→ABABBAAB→BABABBAA→BBAABABA→ABBAABAB→···	X
ABBAABBA→AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→···	X
$ABBABAAB {\rightarrow} BABBABAA {\rightarrow} AABABBAB {\rightarrow} BAABABBA {\rightarrow} ABBABAABA {\rightarrow} ABBABAAB {\rightarrow}$	X
$ABBABABA {\rightarrow} AABBABAB {\rightarrow} BAABBABA {\rightarrow} ABAABBAB {\rightarrow} BABAABBA {\rightarrow} ABABAABB {\rightarrow} BBABABAA {\rightarrow}$	X
AABBABAB→···	
$ABBABBAA {\rightarrow} AAABBABB {\rightarrow} BBAAABBA {\rightarrow} ABBAAABB {\rightarrow} BBABBAAA {\rightarrow} AAABBABB {\rightarrow} \cdots$	X

$ABBBAABA {\rightarrow} AABBBAAB {\rightarrow} BAABBBAA {\rightarrow} AABAABBB {\rightarrow} BBBAABAA {\rightarrow} AABBBAAB {\rightarrow} \cdots$	×
$ABBBABAA {\rightarrow} AAABBBAB {\rightarrow} BAAABBBA {\rightarrow} ABAAABBB {\rightarrow} BBBABAAA {\rightarrow} AAABBBAB {\rightarrow} \cdots$	×
ABBBBAAA→AAAABBBB→···	√

5. n=5. 同理,原有 252 種排列,但只要算其中 126 種即可,因篇幅繁多,請參考解題紀錄本。

(二)、觀察.

表 1. $1 \le n \le 5$,可以/不能 達成國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的 k 值

	k 的值	
n	可以達成問題1的要求	不能達成問題1的要求
1	1,2	無
2	2 , 3	1 , 4
3	3,4,5	1,2,6
4	4,5,6	1,2,3,7,8
5	5,6,7,8	1,2,3,4,9,10

(三)、分析

1. 可以/不可 達成國際數學奧林匹亞 2022 年第1 題要求的 k 值範圍表 2. 將表 1 的 k 值用範圍表示

	k 的值	
n	可以達成問題1的要求	不能達成問題 1 的要求
1	$1 \leq k \leq 2$	無
2	$2 \leq k \leq 4 - 1$	k=1,4
3	$3 \leq k \leq 6 - 1$	$1 \leq k \leq 2$, $k = 6$
4	$4 \leq k \leq 8 - 2$	$1 \leq k \leq 3$, $7 \leq k \leq 8$
5	$5 \leq k \leq 10 - 2$	$1 \leq k \leq 4$, $9 \leq k \leq 10$

2. 猜測. 觀察表 2 可以達成國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的 k 值範圍,發現:

$$1. k \ge n$$
, $1 \le n \le 5$ 。 式 (1)

先討論 式(1):

例1. n=6,以下狀態使得當 $1 \le k \le 5$,無論操作幾次,最左邊 6 枚不會是同一材質

AAAABABBBBB •

由例 1 可知道對於一般的 n,k≥n。

接著討論 式(2):

例2. 以下狀態為 n=6,如果 k=10、11、12,則持續操作會回復成起始狀態,期間不會發生6枚同材質硬幣集中到最左邊。

AAABBBAAABBB

例 3. 以下狀態為 n=7,如果 $k=12 \times 13 \times 14$,則持續操作會回復成起始狀態,期間不會發生 7 枚同材質硬幣集中到最左邊。

AAAABBBBAAA<mark>BBB</mark>

由例 2 和例 3 看來,如果 k 選整列硬幣的最末段——最末段長度大約是 n 的一半的那些位置,則存在一種狀態,當 n 是偶數 6 時,k 在最末端的 $\frac{6}{2}$ 個數,當 n 是奇數 7 時,k 在最末端的 $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}$ = 3 . 5 取整數為 3 個數時,無論如何操作,最左側 n 枚不會同一材質。經討論後老師告訴我們一個更方便的表示方式: 高斯符號 [x] 。在數學領域中,有時需要略去一個數的小數部分,只研究它的整數部分,可用高斯符號來表示。高斯符號 [x] 是指取「小於或等於 x 的最大整數」,例如:[3.6] = 3 ,[1] = 1 。因而推測

$$k \le 2xn - \left[\frac{n}{2}\right]$$
,其中[]為高斯符號。

統整起來,對於一般化的(n,k),猜測如下:

$$n \le k \le 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

3. 驗證猜測成立

驗證過程是本小組試算一百個以上數據後,所發現的討論和敘述。

- 1. 如果一列硬幣恰有 2 段同花段,則已使得最左邊 n 枚為同一種材質。
- 2. 承1,如果恰有3段,则必有一段為同一材質,操作1次即可達成。
- 3. 承 2 ,如果段數 ≥ 4 ,持續操作下去,總有某材質同花段長度加長。以 n=6 為例,全部 12 枚,依猜測,令 $6 \le k \le 12 \frac{6}{2} = 9$ 。

假如每次操作都不會改變每一段同花的長度,表示每次操作,包含第 k 枚的同花段包含到第 12 枚—也就是最後 1 枚,因為如果沒有包含,則操作 1 次後會使兩段同材質同花段結合,得到一長度更長的同花段。若包含第 12 枚,則該段硬幣數<u>最少</u>有 12-9+1=4。注意到已假設每次操作都不會改變同花段的長度,由於段數 ≥ 4 ,推得全體硬幣數量 $\ge 4 \times 4 = 16$,和全部原有 12 枚矛盾!

所以只要一列硬幣同花**段數**≧4,便會一直發生某材質硬幣同花段變長,直到6枚都聚 集在一起,就可達成最左邊n枚同一材質。

(四)國際數學奧林匹亞 2022 年第1 題的解答.

1. 所求之數對如下:

$$n=1$$
, $k=1$, 2 , \sharp (3)

$$n \ge 2$$
, $n \le k \le 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 。 式 (4)

以下先說明:不能出現最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的 k 之範圍,再說明能出現的 k 之範圍。

n≥2. 將說明下列範圍,存在一種起始狀態無法操作至最左 n 枚均為同一材質。
 證.

$(1)1 \leq k \leq n-1$

令左起第 1 枚至第 k 枚均為 A ,第 k+1 枚為 B 。可知尚有 n-k 枚鋁幣在左起第 k+1 枚之後,此狀態依題意操作將使得每一步的硬幣列狀態均和起始狀態相同,表示不會出現左邊為 n 枚相同材質硬幣的狀態。例 n=3 , $1 \le k \le 3-1$,k=1 、2 ,在 AABABB 的狀況下,都沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

- $(2)2n \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 2n$.
 - ① n 為偶數,第 1 枚至第 $\frac{n}{2}$ 枚為 A 同花段,右接長度 $\frac{n}{2}$ 枚 B 同花段,再右接長度 $\frac{n}{2}$ 枚 A 同花段,最後接長度 $\frac{n}{2}$ 枚 B 同花段,持續操作所得狀態和起始同。例 n=4, $2\times4-\left[\frac{4}{2}\right]$ $+1\leq k\leq 2\times4$, $7\leq k\leq 8$,k=7、8,在 AABBAABB 的狀況下,都沒有辦法讓左邊都是 同一個材質。
 - ② n 為奇數 ,第 1 枚至第 $\left[\frac{n}{2}\right]$ +1 枚為 A 同花段 ,右接長度 $\left[\frac{n}{2}\right]$ +1 枚 B 同花段 ,再右接長度 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 枚 A 同花段 ,最後接長度 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 枚 B 同花段 ,持續操作所得狀態和起始同。例 如:n=3,2×3 $-\left[\frac{3}{2}\right]$ +1 \leq k \leq 2×3 ,k=6 ,在 AABBAB 的狀況下,沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

上述①和②主要說明當 $2n-\left[\frac{n}{2}\right]+1\le k\le 2n$,我們能找到一種起始狀態使得在操作過程中,都不會出現國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的狀態。

- 3. 式(3)式(4)就是國際數學奧林匹亞 2022 年第1題所求證.
 - (1) n=1, k=1, 2. 只要看 AB 這一種即可:

$$k=1$$
 , $AB \rightarrow AB$,

$$k=2$$
, $AB \rightarrow BA$

(2) $n \ge 2$, $n \le k \le 2n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

不失一般性,設第 k 枚為 A。如果該同花段含最後一枚,則操作 1 次後全數同花段長度不變;若不包含,操作 1 次後會使得兩段 B 同花段結合,得到一條加長的 B 同花段。注意到不可能每次要移到最左的同花段總能包含最後一枚,利用反證法:假如可以,先看總同花段數:若是 2 段或 3 段,必可完成題意要求;若是 ≥ 4 段,則有

硬幣列長度
$$\leq 4 \times \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) > 4 \times \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) = 2n + 2$$
,

_-

與給定條件矛盾!故經過若干次操作後,只要總段數 ≥ 4 ,必得長度漸增的 A 同花段或 B 同花段,直到某材質同花段長度為 n 枚。

二、硬幣為3種以上的情形

推廣至 m≥3 的發想來源,思考國際數學奧林匹亞 2022 年第1 題時,曾想過用黑和白來區別兩種材質的硬幣,一旦解決國際數學奧林匹亞 2022 年第1 題,我們聯想到如果顏色不限黑白,而是彩色,也就是硬幣種類數≥3,那麼推廣原題條件的結果會是什麼?

問題 2(國際數學與林匹亞 2022 年第 1 題的 m 種硬幣版本). 與斯陸銀行發行 m 種硬幣:分別 記作:A,B,C,D,…,等。<u>喬治</u>分別有 n 枚,他任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同 材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 $k \leq m \times n$,<u>喬治</u>重複下列的操作:找出 包含由左數來第 k 枚硬幣的最長同花段,然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最 左邊。舉例來說,

AABCBABCC → BAABCBACC → ABAABCBCC → BABAABCCC → CCCBABAAB → AACCCBABB → AAACCCBBB → BBBAAACCC → · · · ·

找出符合 $1 \le k \le m \times n$ 的所有數對(n,k),使得不管是什麼起始狀態,在操作過程的某個時刻,會形成恰好m 個同花段。

先從無法達成問題2要求的 k 值找起。

(-)m=3

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k

例 4. n=4,m=3,以下狀態使得當 $\underline{1 \leq k \leq 7}$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AAABBBBCACCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例 5. n=4,m=3,以下狀態使得當 7≤k≤8 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AABBAABBCCCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例 6. n=4,m=3,以下狀態當 $11 \le k \le 12$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AABBCCAABBCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態A、B、C同花段長度不變。

 $\mathbf{M7}$. n=5, m=3, 以下狀態當 $1 \leq k \leq 9$ 時, 一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AAAABBBBBCACCCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例 8. n=5,m=3,以下狀態當 $9 \le k \le 10$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AAABBBAABBCCCCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態A、B、C同花段長度不變。

例 9. n=5,m=3,以下狀態當 $14 \le k \le 15$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AAABBBCCCAABBCC。

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態A、B、C同花段長度不變。

觀察上面的例子,猜測當

$$1 \le k \le 2xn, 3xn - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 3xn, \qquad \qquad \sharp (5)$$

無法達成問題2的要求。

2. m=3, 問題2要求的k值. 由式(5), 推測當

$$2n+1 \le k \le 3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

就是 m=3 時,問題 2 所要求的 k,以下為證明過程。

證. 以下(1)、(2)說明無法達成要求的 k 值範圍,(3)說明可以達成要求的 k 值範圍。

(1) 如果 n 是偶數:

①下列狀態使得當 $1 \le k \le 2xn - 1$ 時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

其中左起 A 有 n-1 枚,接著 B 有 n 枚,然後接 C A C \cdots C ,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當 2xn-1≤k≤2xn 時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

 $A \rightarrow B$ 各連續 $\frac{n}{2}$ 枚,交替排列,最末 n 枚排 C,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 $A \rightarrow B$ 的同花段長度不變。

③下列狀態使得當 $3xn-\left[\frac{n}{2}\right]+1 \le k \le 3xn$,時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

$$AA \cdots BB \cdots CC \cdots AA \cdots BB \cdots CC \cdots$$

其中左起各有 $\frac{n}{2}$ 枚 $A \times \frac{n}{2}$ 枚 $B \times \frac{n}{2}$ 枚 C 依序排列,最後再接 $\frac{n}{2}$ 枚 $A \times \frac{n}{2}$ 枚 $B \times \frac{n}{2}$ 枚 C,上面狀態,持續操作,每一次的狀態 $A \times B \times C$ 同花段長度不變。

(2) 如果 n 是奇數:

①下列狀態使得當 $1 \le k \le 2 \times n - 1$ 時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 n 個同花段

其中左起 A 有 n-1 枚,接著 B 有 n 枚,然後接 C A C \cdots C ,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當 $2xn-1 \le k \le 2xn$ 時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

左起 A 和 B 分別有連續 $\frac{n+1}{2}$ 枚 ,再右接 $\frac{n-1}{2}$ 枚 A 及 $\frac{n-1}{2}$ 枚 B ,最後接 n 枚 C ,上面的狀態 ,持續操作,每一次的狀態 A 、B 、C 同花段長度不變。

③下列狀態使得當 $3xn - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 3xn$ 時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同

花段

$$AA \cdots BB \cdots CC \cdots AA \cdots BB \cdots CC \cdots$$

(3) 問題 2, m=3 時, 題目要求的 k 之範圍

$$n=1$$
, $1 \le k \le 3$,
 $ABC \rightarrow ABC$
 $ABC \rightarrow BAC$
 $ABC \rightarrow CAB$

$$n \ge 2$$
, $2n+1 \le k \le 3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 式 (7)

- ①當一列硬幣恰有3個同花段,則已達成題意要求。
- ②當一列硬幣有>3個同花段:
 - (i)如果要移至最左邊的同花段長度=n,則可看作2種硬幣的題目。
 - (ii) 承 (i),如果長度 < n,接著設要操作的包含第 k 枚之同花段最右端為第 k + j 枚, $0 \le j \le n-1$,假若第 k + j +1 枚起至第 3 x n 枚同花段組成的一組狀態不變,表示將要移至最左邊的同花段材質和第 k + j +1 不同,但上述情形不會一直發生,因為第 k + j +1 枚起至第 3 x n 枚至多有 n-1 枚,表示至少有 1 枚在第 k + j +1 枚左邊,持續操作下去,左邊的若干枚總會和第 k + j +1 枚相鄰,相鄰後由 2 條同花段結合成 1 條,然後有兩種情況:當結合後的同花段包含第 k 枚則移到最左邊;不包含則留在第 k +1 枚之後的同花段組中。無論如何,總會得到某材質硬幣的同花段長度加長,一直到長度為 n 為止。
 - 一旦得到長度為 Π 的同花段,該同花段在操作過程中不會影響其它種類硬幣的操作,可以當作它不存在,則可看作2種硬幣的題目,此時k的範圍在2種硬幣的問題裡可以達成要求,因此當m=3,問題2所要求的k值範圍為式(6)、式(7)。

(=)m=4

1. 例子觀察

不能達成問題2要求的 k.

例 10. n=4,m=4,以下狀態當 $1 \le k \le 11$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AAABBBBCCCCDADDD,

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例 11. n=4,m=4,以下狀態當 $11 \le k \le 12$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AABBCCAABBCCDDDD,

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態,各材質的同花段長度不變。

例 12. n=4,m=4,以下狀態當 $15 \le k \le 16$ 時,一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AABBCCDDAABBCCDD •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態,各材質的同花段長度不變。

根據例 10—例 12,提出 m=n=4,可達成問題 2要求,能得到恰有 4 段同花的 k 的範圍:

$$3n+1 \leq k \leq 4 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$
,

2. 問題 2, m=4 時, 題目所要求的 k 之範圍.

$$n=1$$
 , $1 \le k \le 4$,
 $ABCD \rightarrow ABCD$
 $ABCD \rightarrow BACD$

AB<u>C</u>D→CABD

 $ABC\underline{D} \rightarrow DABC$

$$n \ge 2$$
, $3 \times n + 1 \le k \le 4 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 。 式(9)

- (1)當一列硬幣恰有4個同花段,則已達成題意要求。
- (2)當一列硬幣有>4個同花段:
 - ①如果要移至最左邊的同花段長度=n,則可看作3種硬幣的題目。
 - ②承①,如果長度<n,接著設要操作的包含第 k 枚之同花段最右端為第 k+j 枚, $0 \le j$ \le n-1,假若第 k+j+1 枚起至第 4xn 枚同花段組成的一組狀態不變, 表示將要移 至最左邊的同花段材質和第 k+j+1 不同,但上述情形不會一直發生,因為第 k+j+1 枚起至第 3xn 枚至多有 n-1 枚,表示至少有 1 枚在第 k+j+1 枚左邊,持續操作下去,左邊的若干枚總會和第 k+j+1 枚相鄰,相鄰後由 2 條同花段結合成 1 條,

然後有兩種情況:當結合後的同花段包含第 k 枚則移到最左邊;不包含則留在第 k+1 枚之後的同花段組中。無論如何,總會得到某材質硬幣的同花段長度加長,一直到長度為 n 為止。

一旦得到長度為 n 的同花段,該同花段在操作過程中不會影響其它種類硬幣的操作,可以當作它不存在,則可看作 3 種硬幣的題目,此時 k 的範圍在 3 種硬幣的問題裡可以達成要求,因此問題 2 , m=4 時所要求的 k 值為式 (8) 和式 (9)。

(三)一般化的 m

- 1. 不能達成題目 2 要求的 k
 - (1) n 為偶數: $1 \le k \le m \times n$. C_i 表示第 i 種硬幣;前(m-1)×n-1 枚安排如下 AA…ABB…BCC…CDD…D… $C_{m-1}C_{m-1}\dots C_{m-1}C_mAC_mC_m\cdots C_m$
 - ①A 為長度 n-1 枚的同花段,右接第 n 枚到第 (m-1) $\times n-1$ 枚排各材質硬幣全集合的同花段,末 n+1 枚排 $C_m A C_m C_m \cdots C_m$

當 $1 \leq k \leq (m-1) \times m-1$,持續操作不會出現恰有 m 段同花,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

- ②當(m-1)×n-1 ≤ k ≤ (m-1) ×n,前(m-1) ×n 枚安排如下: $AA\cdots BB\cdots CC\cdots DD\cdots C_{m-1}C_{m-1}\cdots AA\cdots BB\cdots CC\cdots DD\cdots C_{m-1}C_{m-1}\cdots C_m C_m C_m \cdots C_m$ $A \cdot B \cdot C\cdots C_{m-1}$ 各連續 $\frac{n}{2}$ 枚同花段,再右接 $A \cdot B \cdot C\cdots C_{m-1}$ 各連續 $\frac{n}{2}$ 枚同花段,最末 n 枚排 C_m ,上面狀態持續操作,每一次的狀態 $A \cdot B \cdot C\cdots C_{m-1}C_m$ 同花段長度不 變。
 - ③當 $mxn \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le mxn$ 時,下列狀態持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

 $AA...ABB...BCC...CDD...D...C_m C_m \cdots C_m$ $AA...ABB...BCC...CDD...D...C_m C_m \cdots C_m$ 分別排每種材質長度為 $\frac{n}{2}$ 枚的同花段,自第 $\frac{m \times n}{2}$ + 1格起重覆此排列,可知當 $m \times n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le m \times n$,經過若干次操作後會回復原來的狀態,期間**不會**產生形成 恰好 m 個同花段。

(2)n 為奇數:

①如果n 是奇數:下列狀態使得當 $1 \le k \le (m-1) \times n - 1$,時,持續操作不會有某個時刻形成恰好m 個同花段。

$$\mathsf{AA}...\mathsf{ABB}...\mathsf{BCC}...\mathsf{CDD}...\mathsf{D}...\mathsf{C}_{m-1}\mathsf{C}_{m-1}\dots\mathsf{C}_{m-1}\mathsf{C}_m\mathsf{AC}_m\mathsf{C}_m\dots\mathsf{C}_m$$

其中左起 A 有 n-1 枚,右接第 n 枚到第(m-1)×n-1 枚排各材質硬幣全集合的同花段,末 n+1 枚排 C_m A C_m C_m · · · · Cm ,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當 (m-1) $\times n-1 \le k \le (m-1)$ $\times n$ 時,持續操作不會有某個時刻形成 恰好 m 個同花段。

$$AA\cdots BB\cdots CC\cdots DD\cdots C_{m-1}C_{m-1}\cdots AA\cdots BB\cdots CC\cdots DD\cdots C_{m-1}C_{m-1}\cdots C_m C_m C_m \cdots C_m$$

 左起 $A \times B \times \cdots \times C_{m-1}$ 分別有連續 $\frac{n+1}{2}$ 枚,接著 $A \times B \times \cdots \times C_{m-1}$ 分別有連續 $\frac{n-1}{2}$ 枚,最末 n 枚排 C_m 。

③下列狀態使得當 $\max n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le \max n$ 時,下列狀態持續操作,不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

$$AA\cdots BB\cdots CC\cdots C_{m-1}\dots C_{m-1}C_m C_m\cdots C_m AA\cdots BB\cdots CC\cdots C_{m-1}\dots C_{m-1}C_m C_m\cdots C_m$$
 其中左起 $A \cdot B \cdot C \cdot D\cdots C_{m-1}C_m$ 各有 $\frac{n+1}{2}$ 枚,最後再接 $A \cdot B \cdot C \cdot D\cdots C_{m-1}C_m$ 各 $\frac{n-1}{2}$ 枚。

2. 可以達成問題 2 要求的 k.

$$n=1$$
 , $1 \le k \le n$,
 $\underline{ABC} \cdots N \to ABC \cdots N$
 $\underline{ABC} \cdots N \to BAC \cdots N$
 $\underline{ABC} \cdots N \to CAB \cdots N$
 \vdots
 $\underline{ABC} \cdots \underline{N} \to NAB \cdots M$
 $(m-1) \times n+1 \le k \le m \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$,
式 (11)

(1) 若一列硬幣恰有 m 個同花段,則已達成題意要求。

- (2) 若一列硬幣有>m個同花段:
 - ①如果要移至最左邊的同花段長度=n,則可看作m-1種硬幣的題目。
 - ②承①,如果長度<n,接著設要操作的包含第 k 枚之同花段最右端為第 k+j 枚,0 \leq j \leq n-1,假若第 k+j+1 枚起至第 mxn 枚同花段組成的一組狀態不變, 表示將要移 至最左邊的同花段材質和第 k+j+1 不同,但上述情形不會一直發生,因為第 k+j+1 枚起至第 mxn 枚至多有 n-1 枚,表示至少有 1 枚在第 k+j+1 枚左邊,持續操作下去,左邊的若干枚總會和第 k+j+1 枚相鄰,相鄰後由 2 條同花段結合成 1 條,然後有兩種情況:當結合後的同花段包含第 k 枚則移到最左邊;不包含則留在第 k+1 枚之後的同花段組中。無論如何,總會得到某材質硬幣的同花段長度加長,一直到長度為 n 為止。

一旦得到長度為n的同花段,該同花段在操作過程中不會影響其它種類硬幣的操作,則可看作m-1種硬幣的題目,同時k值也在可以產生恰有m-1個同花段的範圍中,問題2要求的k值為式(10)和式(11)。

陸、結論

一、給出數學奧林匹亞 2022 年第1 題的解答。

$$n=1$$
, $k=1$, 2,

$$n \ge 2$$
, $n \le k \le 2n - \left[\frac{n}{2}\right] \circ$

二、推廣原題,研究 m≥3 種硬幣的情形,給出能符合原題要求的 k 值。

$$n=1$$
 , $1 \leq k \leq n$,

$$n \ge 2$$
, $(m-1) \times n + 1 \le k \le m \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$

柒、引用文獻

- 、[1]International Mathematical Olympiad。IMO2022 Problems。2022/07/31。取自https://www.imo-official.org/problems.aspx。
- 二、南一文教事業教科書編輯委員會(民 112 年 2 月三版 2 刷)怎樣解題(一)(二)。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。

【評語】080412

從數學競賽中取材,將兩種等量的硬幣隨意排成一列,由給定 K 點的 位置移動相連的同種硬幣到最左端,如此重複操作到同種硬幣完全排 在一起,找出符合的(n,K)數對。作者透過有系統的分類逐一解出部 分規模範例的解與無解,經由這些例子的觀察獲得初步研究結果的猜 測,再經由檢驗得到一般化結果。最後進一步修改考題使得問題更具 挑戰性。當硬幣的種類增加到三種時,重複操作後卻只能有一種硬幣 排在一起,另兩種硬幣依舊混再一起,可考慮其他方式操作。若能將 該問題應用於具體的生活情境會讓結果更有意涵。 作品簡報



摘虫

本作品取自國際數學奧林匹亞2022年第一題,我們給出完整的解答,不需要使用中學以上的數學知識,而且利用本作品的方法,將原題探討的兩種硬幣,推廣到 m≥3 種。

青、問題

問題1(國際數學奧林匹亞2022年第1題,[1]). 奧斯陸銀行發行兩種硬幣:鋁幣(記做 A)以及銅幣(記做 B)。瑪麗有 n 枚鋁幣和 n 枚銅幣,她任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 k≤2n,瑪麗重複下列的操作:找出包含由左數來第 k枚硬幣的最長同花段,然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說,當 n=4且 k=4 時,從 AABBBABA 這個起始狀態開始操作,過程會是

AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→…。 找出符合 1≦k≦2n 的所有數對(n,k),使得不管是什麼起始狀態,在操作過程的某個時刻,最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的。

貳、研究動機

老師介紹有名的數學競賽:國際數學奧林匹亞,表示題目 易懂,但是解題過程很費心思,我們好奇便請老師提供例子, 她就拿了今年(2022年)的第一題同學們見識。經過一百個以上 的數據試算,觀察後本小組有了解題思路,想要進一步探討, 所以請老師指導,因而踏上科展之旅。

參、研究目的

- 一、解決國際數學奧林匹亞2022年第1題。
- 二、研究硬幣為3種以上的情形。

肆、研究工具

一、計算紙、筆。

位、研究過程與討論

- 一、解決國際數學奧林匹亞2022年第 1 題
 - (一) 1≦n≦5 的計算
 - 1.n=1,有AB和BA兩種排列,但只要算AB即可,BA和AB僅是A和B的身份互換。

k=1

_/	AB→AB→AB→···	✓
k	=2,	

 $AB \rightarrow BA \rightarrow AB \rightarrow \cdots$

「✓」表示操作過程中,能出現最左邊的 n 枚硬幣是同一材質,「×」在操作過程中,未出現最左邊 n 枚是同一材質。

2. n=2,有AABB、ABAB、ABBA、BAAB、BABA、BBAA等 6種排列,但只要算前3種即可,後3種和前3種相比,僅是A和B的身份互換。

k=1,

AABBAABB	✓
ABAB→ABAB→ABAB→···	×
ABBA→ABBA→ABBA→···	×

k=2,

AABBAABB	✓
ABAB→BAAB→AABB→···	✓
ABBA→BBAA→BBAA→···	✓

k=3,

AABB→BBAA→AABB→···	
ABAB→AABB→BBAA→···	✓
ABBA→BBAA→AABB→···	✓

k=4

AABB→BBAA→AABB→···	\
ABAB→BABA→ABAB→···	×
ABBA→AABB→BBAA→···	✓

3. n=3, 同理, 原有20種排列, 但只要算其中10種即可。 k=1,

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→AABABB→···	×
AABBAB→AABBAB→···	×
AABBBA→AABBBA→···	×
ABAABB→ABAABB→···	×
ABBAAB→ABBAAB→···	×
ABBBAA→ABBBAA→···	×
ABABAB→ABABAB→···	×
ABABBA→ABABBA→···	×
ABBABA→ABBABA→···	×

k=2

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→AABABB→···	×
AABBAB→AABBAB→···	×
AABBBA→AABBBA→···	×
ABAABB→BAAABB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→BBAAAB→BBAAAB→···	×
ABBBAA→BBBAAA→BBBAAA→···	✓
ABABAB→BAABAB→AABBAB→···	×
ABABBA→BAABBA→AABBBA→···	×
ABBABA→BBAABA→···	×

k=3

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→BAAABB→AAABBB→···	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
AABBBA→BBBAAA→···	✓
ABAABB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
ABBBAA→BBBAAA→···	✓
ABABAB→AABBAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
ABABBA→AABBBA→BBBAAA→···	✓
ABBABA→BBAABA→AABBBA→BBBAAA→···	✓

k=4

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	✓
AABABB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABAABB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABBBAA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABABAB→BABAAB→AABABB→AAABBB→···	✓
ABABBA→BBABAA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABBABA→AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	✓

k=5

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	\
AABABB→BBAABA→BBBAAA→AAABBB→···	>
AABBAB→AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	\
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	>
ABAABB→BBABAA→AABBAB→AAABBB→···	\
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→···	>
ABBBAA→AAABBB→BBBAAA→···	\
ABABAB→AABABB→BBAABA→BBBAAA→···	\
ABABBA→BBABAA→AABBAB→AAABBB→···	\
ABBABA—BABBAA—AABABB—BBAABA—BBBAAA—···	✓

k=6

AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABABB→BBAABA→ABBAAB→BABBAA→···	×
$AABBAB \rightarrow BAABBA \rightarrow ABAABB \rightarrow BBABAA \rightarrow AABBAB \rightarrow \cdots$	×
AABBBA→AAABBB→···	✓
ABAABB→BBABAA→AABBAB→BAABBA→···	×
ABBAAB→BABBAA→AABABB→BBAABA→···	x
ABBBAA→AAABBB→···	✓
ABABAB→BABABA→···	×
ABABBA→AABABB→BBAABA→···	×
ABBABA→AABBAB→BAABBA→···	×

- 4. n=4,同理,原有70種排列,但只要算其中35種即可。
- 5. n=5,同理,原有 252 種排列,但只要算其中 126 種 ___即可。 ______

(二)觀察.

表1 1≦n≦5,可以/不能 達成國際數學奧林匹亞 2022年第1題要求的k值

	k tr	う 值
n	可以達成問題 1 的要求	不能達成問題 1 的要求
1	1,2	無
2	2,3	1 • 4
3	$3 \cdot 4 \cdot 5$	1,2,6
4	4,5,6	1 • 2 • 3 • 7 • 8
5	5,6,7,8	1,2,3,4,9,10

(三)分析

1. 可以/不可 達成國際數學奧林匹亞2022年第 1 題要求的 k 值範圍。

將表 1 的 k 值用範圍表示

2/2 //32/ 13 // [日/13年3日2/3/		
	k #	方值
n	可以達成問題 1 的要求	不能達成問題 1 的要求
1	1≤k≤2	無
2	$2 \le k \le 4-1$	$k=1\cdot 4$
3	$3 \le k \le 6-1$	$1 \leq k \leq 2, k=6$
4	$4 \leq k \leq 8-2$	$1 \le k \le 3$, $7 \le k \le 8$
5	$5 \leq k \leq 10 - 2$	$1 \le k \le 4$, $9 \le k \le 10$

2. 猜測,觀察表 2 可以達成國際數學奧林匹亞2022年第 1 題要求的 k 值範圍,發現:

1.k≥n,1≤n≤5

式(1) 式(2)

2. k的最大值略小於全部硬幣數量

先討論 式(1):

例1. N=6 ,以下狀態使得當 1≦k≦5,無論操作幾次,最左邊 6 枚不會是同一材質

AAAABABBBBB

由例 1 可知道對於一般的 n,k≥n。

接著討論 式(2):

例2. 以下狀態為n=6,如果 k=10、11、12,則持續操作會回復 成起始狀態,期間不會發生6枚同材質硬幣集中到最左邊。 AAABBBAAA<mark>BBB</mark>

例3. 以下狀態為n=7,如果 k=12、13、14 ,則持續操作會回復 成起始狀態,期間不會發生7枚同材質硬幣集中到最左邊。 AAAABBBBAAA<mark>BBB</mark>

由例 2 和例 3 看來,如果 k 選整列硬幣的最末段——最末段長度 大約是 n 的一半的那些位置,則存在一種狀態,當 n 是偶數 6 時

, k在最末端的 $\frac{6}{2}$ 個數,當 n 是奇數 7 時, k 在最末端的 $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{2}$ =3.5 取整數為 3 個數時,無論如何操作,最左側 n 枚不會同一 材質。經討論後老師告訴我們一個更方便的表示方式:高斯符號 $[\chi]$ 。在數學領域中,有時需要略去一個數的小數部分,只研究 它的整數部分,可用高斯符號來表示。高斯符號[χ]是指取「小 於或等於 χ 的最大整數」,例如:[3.6] = 3,[1] = 1。因而推測

 $k \le 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$,其中[]為高斯符號。

統整起來,對於一般化的(n,k),猜測如下:

 $n \le k \le 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$

3. 驗證猜測成立

驗證過程是本小組試算一百個以上數據後,所發現的討論和敘述。 (1) 如果一列硬幣恰有 2 段同花段,則已使得最左邊 n 枚為同一種

(2) 承 1 ,如果恰有 3 段,則必有一段為同一材質,操作 1 次即可

(3)承2,如果段數≥4,持續操作下去,總有某材質同花段長度加 長。以n=6為例,全部12枚,依猜測,令6≤k≤12 $-\frac{6}{2}$ =9。

假如每次操作都不會改變每一段同花的長度,表示每次操作, 包含第 k 枚的同花段包含到第12枚—也就是最後 1 枚,因為如 果沒有包含,則操作 1 次後會使兩段同材質同花段結合,得到 一長度更長的同花段。若包含第12枚,則該段硬幣數最少有12 -9+1=4。注意到已假設每次操作都不會改變同花段的長度 ,由於段數≥4,推得全體硬幣數量≥4×4=16,和全部原有 12枚矛盾!

所以只要一列硬幣同花**段數**≥4,便會一直發生某材質硬幣同 花段變長,直到 6 枚都聚集在一起,就可達成最左邊 n 枚同· 材質。

(四)國際數學奧林匹亞2022年第1題的解答.

1. 所求之數對如下:

n=1, k=1, 2

式(3)

式(4)

 $n \ge 2$, $n \le k \le 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$

以下先說明:不能出現最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的 k 之 範圍,再說明能出現的 k 之範圍。

2. n≥2,將說明下列範圍,存在一種起始狀態無法操作至最左 n 枚 均為同一材質。

 $(1)1 \leq k \leq n-1$

令左起第 1 枚至第 k 枚均為 A ,第k+1枚為 B 。可知尚有 n-k 枚鋁幣在左起第k+1枚之後,此狀態依題意操作將使得每一步 的硬幣列狀態均和起始狀態相同,表示不會出現左邊為 n 枚相 同材質硬幣的狀態。例n=3,1≦k≦3−1,k=1、2,在AABABB 的狀況下,都沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

 $(2)2n - [\frac{n}{2}] + 1 \le k \le 2n.$

① n 為偶數,第 1 枚至第 $\frac{n}{2}$ 枚為 A 同花段,右接長度 $\frac{n}{2}$ 枚 B 同

花段,再右接長度 $\frac{n}{2}$ 枚 A 同花段,最後接長度 $\frac{n}{2}$ 枚 B 同花段

,持續操作所得狀態和起始同。例n=4,2×4 $-\left[\frac{4}{2}\right]$ +1≤k ≦2×4,7≦k≦8,k=7、8,在AABBAABB的狀況下,都沒有 辦法讓左邊都是同一個材質。

② n 為奇數,第 1 枚至第 $\left[\frac{n}{2}\right]$ +1枚為 A 同花段,右接長度 $\left[\frac{n}{2}\right]$

+1 枚 B 同花段,再右接長度 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 枚 A 同花段,最後接長度

 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 枚 B 同花段,持續操作所得狀態和起始同。例如:n=3,

 $2\times3-\left[\frac{3}{2}\right]+1\leq k\leq2\times3$,k=6,在AABBAB的狀況下,沒有 辦法讓左邊都是同一個材質。

上述①和②主要說明當 $2n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 2n$,我們能找到一種 起始狀態使得在操作過程中,都不會出現國際數學奧林匹亞 2022年第1題要求的狀態。

3. 式(3)式(4)就是國際數學奧林匹亞2022年第 1 題所求

(1) n=1, k=1, 2. 只要看AB這一種即可: k=1 , AB→AB

k=2 , AB→BA

(2) $n \ge 2$, $n \le k \le 2n - \left[\frac{n}{2}\right]$

不失一般性,設第 k 枚為 A 。如果該同花段含最後一枚,則操 作 1 次後全數同花段長度不變;若不包含,操作 1 次後會使得 兩段 B 同花段結合,得到一條加長的 B 同花段。注意到不可能 每次要移到最左的同花段總能包含最後一枚,利用反證法:假 如可以,先看總同花段數:若是2段或3段,必可完成題意要 求;若是≧4段,則有

硬幣列長度≥4×($[\frac{n}{2}]+1$)>4×($\frac{n-1}{2}+1$)=2n+2,

與給定條件矛盾!故經過若干次操作後,只要總段數≥4,必 得長度漸增的 A 同花段或 B 同花段,直到某材質同花段長度 為n枚。

二、硬幣爲3種以上的情形

推廣至m≥3的發想來源,思考國際數學奧林匹亞2022年第 1 題時, 曾想過用黑和白來區別兩種材質的硬幣,一旦解決國際數學奧林匹亞 2022年第 1 題,我們聯想到如果顏色不限黑白,而是彩色,也就是硬幣 種類數≥3,那麼推廣原題條件的結果會是什麼?

問題2(國際數學奧林匹亞2022年第 1 題的 m 種硬幣版本). 奧斯陸銀行 發行 m 種硬幣:分別記作:A,B,C,D,···,等。喬治分別有 n 枚,他 任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同 花段」。給定一正整數 k≤m×n ,喬治重複下列的操作:找出包含由左 數來第 k 枚硬幣的最長同花段,然後把這個同花段中的所有硬幣移到整 列硬幣的最左邊。舉例來說,當n=3,m=3,k=7時,從這個起始狀態 開始操作,過程會是

AABCBABCC-BAABCBACC-ABAABCBCC-BABAABCCC-CCCBABAAB-AACCCBABB→AAACCCBBB→BBBAAACCC→···

找出符合 1≦k≦m×n 的所有數對(n,k),使得不管是什麼起始狀態,在 操作過程的某個時刻,會形成恰好m個同花段。 先從無法達成問題 2 要求的 k 值找起。

(-) m=3

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k

例4. n=4,m=3,以下狀態使得當<u>1≦k≦7</u>時,一直操作都不會出 現問題 2 要求的狀態:

AAABBBBCACCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。 **例5.** n=4,m=3,以下狀態使得當<u>7≦k≦8</u>時,一直操作都不會出 現問題 2 要求的狀態:

AABBAABBCCCC .

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度

例6. n=4,m=3,以下狀態當<u>11≤k≤12</u>時,一直操作都不會出現 問題 2 要求的狀態:

AABBCCAABB<u>CC</u> •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度 不變。

例7. n=5,m=3,以下狀態當<u>1≦k≦9</u>時,一直操作都不會出現問 題 2 要求的狀態:

AAAABBBBBCACCCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例8. n=5,m=3,以下狀態當<u>9≦k≤10</u>時,一直操作都不會出現 問題 2 要求的狀態:

AAABBBAA<u>BB</u>CCCCC •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度

例9. n=5,m=3,以下狀態當<u>14≤k≤15</u>時,一直操作都不會出現 問題2要求的狀態:

AAABBBCCCAABB<u>CC</u> •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度 不變。

式(5)

0

觀察上面的例子,猜測當

$$1 \le k \le 2 \times n$$
, $3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 3 \times n$

無法達成問題 2 的要求。

2.m=3,問題2要求的k值,由式(5),推測當

$$2n+1 \le k \le 3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

就是m=3時,問題2所要求的k,以下為證明過程。

證. 以下(1)、(2)說明無法達成要求的 k 值範圍,(3)說明可以 達成要求的 k 值範圍。

(1) 如果 n 是偶數:

①下列狀態使得當1≦k≦2×n−1時,持續操作不會 有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA···ABB···BCAC···C

其中左起 A 有n-1枚,接著 B 有 n 枚,然後接 CAC···C,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當2×n-1≤k≤2×n時,持續操作 不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA···AABB···BBAA···AABB···BBCCCC······CCCC

A 和 B 各連續 $\frac{n}{2}$ 枚,交替排列,最末 n 枚排 C , 上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A 和 B 的 同花段長度不變。

③下列狀態使得當 3×n-[ⁿ/₂]+1≤k≤3×n 時,持 續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段 AA···BB···CC···AA···BB···CC···

其中左起各有 $\frac{n}{2}$ 枚 A、 $\frac{n}{2}$ 枚 B、 $\frac{n}{2}$ 枚 C 依序排列

・最後再接 $\frac{n}{2}$ 枚 A 、 $\frac{n}{2}$ 枚 B 、 $\frac{n}{2}$ 枚 C ,上面狀態 ,持續操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度 不變。

(2)如果 n 是奇數:

①下列狀態使得當1≦k≦2×n−1時,持續操作不會 有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA···ABB···BCAC···C

其中左起 $A \in A \cap A$ 有 $A \cap B$ 有 $B \cap B$ 有 $B \cap B$,然後接 CAC···C,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當2×n−1≦k≦2×n時,持續操作 不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段 AA···ABB···BAA···ABB···BCC···C

左起 A 和 B 分別有連續 $\frac{n+1}{2}$ 枚,再右接 $\frac{n-1}{2}$ 枚 A

及 $\frac{n-1}{2}$ 枚 B ,最後接 n 枚 C ,上面的狀態,持續 操作,每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

③下列狀態使得當 $3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 3 \times n$ 時,持續 操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段 AA···BB···CC···AA···BB···CC···

其中左起各有 $\frac{n+1}{2}$ 枚 A $\times \frac{n+1}{2}$ 枚 B $\times \frac{n+1}{2}$ 枚 C 依

序排列,最後再接 $\frac{n-1}{2}$ 枚 A 、 $\frac{n-1}{2}$ 枚 B 、 $\frac{n-1}{2}$ 枚 C ,上面的狀態,持續操作,每一次的狀態 A、B 、C 同花段長度不變。

(3) 問題 2 ,m=3時,題目要求的 k 之範圍 $n=1, 1 \le k \le 3,$

ABC→ABC

ABC→BAC ABC→CAB

 $n \ge 2 \cdot 2n + 1 \le k \le 3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$

$(\underline{})$ m=4

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k

例10. n=4, m=4, 以下狀態當<u>1≤k≤11</u>時, 一直操作 都不會出現問題 2 要求的狀態:

AAABBBCCCCDADDD ,

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例11. n=4,m=4,以下狀態當<u>11≦k≦12</u>時,一直操 作都不會出現問題 2 要求的狀態:

AABBCCAABB<u>CC</u>DDDD,

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態,各材質 的同花段長度不變。

例12.n=4,m=4,以下狀態當<u>15≦k≦16</u>時,一直操作 都不會出現問題 2 要求的狀態:

AABBCCDDAABBCCDD •

上面的狀態,持續操作,每一次的狀態,各材質 的同花段長度不變。

根據例10~例12,提出m=n=4,可達成問題2要求, 能得到恰有 4 段同花的 k 的範圍:

$$3n+1 \le k \le 4 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

2. 問題 2 ,m=4時,題目所要求的 k 之範圍

n=1,1≦k≦4,

式(8)

式(6)

ABCD→ABCD

ABCD→BACD

ABCD→CABD ABCD→DABC

 $n \ge 2 \cdot 3 \times n + 1 \le k \le 4 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 式(9)

(三)一般化的 m

1. 不能達成題目 2 要求的 k

(1) n 為偶數:1≦k≤m×n,Ci表示第 *i* 種硬幣,前 (m-1)×n-1枚安排如下

 $AA \cdots ABB \cdots BCC \cdots CDD \cdots D \cdots Cm-1 Cm-1 \cdots Cm-1 Cm A$ $Cm Cm \cdots Cm$

① A 為長度n-1枚的同花段,右接第 n 枚到第 (m-1)×n-1枚排各材質硬幣全集合的同花段, 末n+1枚排Cm A Cm Cm ··· Cm

當 1≤k≤(m-1)×n-1,持續操作不會出現恰 有 m段同花,上面的狀態,持續操作,每一次的 狀態灰底的 A 都在原位。

②當(m-1)×n-1≤k≤(m-1)×n,前(m-1)×n枚 安排如下:

 $AA \cdots BB \cdots CC \cdots DD \cdots Cm-1 \quad Cm-1 \cdots AA \cdots BB \cdots CC \cdots$ $DD \cdots Cm-1 Cm-1 \cdots Cm Cm Cm \cdots Cm$

 $C\cdots C_{m-1}$ 各連續 $\frac{n}{2}$ 枚同花段,最末 n 枚排 C_m ,上 面狀態持續操作,每一次的狀態 $A \times B \times C \cdots Cm-1$ Cm 同花段長度不變。

③當m×n-[n/2]+1≤k≤m×n時,下列狀態持續操 作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。 $AA \cdots ABB \cdots BCC \cdots CDD \cdots D \cdots Cm Cm \cdots Cm AA \cdots$

 $ABB\cdots BCC\cdots CDD\cdots D\cdots Cm Cm \cdots Cm$

分別排每種材質長度為 $\frac{n}{2}$ 枚的同花段,自第 $\frac{m \times n}{2}$

+1格起重覆此排列,可知當 $m \times n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \le k \le 1$ m×n,經過若干次操作後會回復原來的狀態,期 間不會產生形成恰好 m 個同花段。

(2) n 為奇數:

①如果 n 是奇數:下列狀態使得當 1≤k≤(m-1)× n-1時,持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個 同花段。

> $AA \cdots ABB \cdots BCC \cdots CDD \cdots D \cdots Cm-1 Cm-1 \cdots$ Cm-1 Cm ACm Cm \cdots Cm

其中左起 A 有n-1枚,右接第 n 枚到第(m-1)× n-1枚排各材質硬幣全集合的同花段,末n+1枚 一次的狀態灰底的 🗛 都在原位。

②下列狀態使得當(m-1)×n-1≤k≤(m-1)×n時, 持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。 $AA \cdots BB \cdots CC \cdots DD \cdots Cm-1 Cm-1 \cdots AA \cdots BB \cdots$

 $CC\cdots DD\cdots Cm-1 Cm-1 \cdots Cm Cm Cm \cdots Cm$

左起 $A \times B \times \cdots \times C_{m-1}$ 分別有連續 $\frac{n+1}{2}$ 枚,接著 $A \times$

 $B \times \cdots \times C_{m-1}$ 分別有連續 $\frac{n-1}{2}$ 枚,最末 n 枚排 C_m 。

③下列狀態使得當 $m \times n - [\frac{n}{2}] + 1 \le k \le m \times n$ 時,下 列狀態持續操作,不會有某個時刻形成恰好 m 個 同花段。

> $AA \cdots BB \cdots CC \cdots Cm-1 \cdots Cm-1 Cm Cm \cdots Cm AA \cdots$ BB···CC···Cm-1···Cm-1 Cm Cm···Cm

其中左起 $A \times B \times C \times D \cdots C_{m-1} C_m$ 各有 $\frac{n+1}{2}$ 枚,最後

再接A、B、C、D···Cm-1Cm各 $\frac{n-1}{2}$ 枚。

2. 可以達成問題 2 要求的 k

ABC···N→NAB···M

 $n \ge 2$, $(m-1) \times n + 1 \le k \le m \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$ 式(11)

陸、結論

一、給出數學奧林匹亞2022年第 1 題的解答。

n=1, $k=1 \cdot 2$

$$n \ge 2$$
, $n \le k \le 2n - \left[\frac{n}{2}\right]$

二、推廣原題,研究 m≥3 種硬幣的情形,給出能符合原題要 求的k值。

n=1 , 1 ≤ k ≤ n

 $n \ge 2$, $(m-1) \times n + 1 \le k \le m \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$

柒、引用文献

─ \ [1]International Mathematical Olympiad • IMO2022 Problems。2022/07/31。取自https://www.imo-offici al.org/problems.aspx •

二、南一文教事業教科書編輯委員會(民112年2月三版2刷) 怎 樣解題(一)(二)。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。 國家教育研究院。