中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080412

同花相聚

學校名稱：　嘉義縣布袋鎮布新國民小學

作者：	指導老師：
小六　林語芊 小六　蔡泱妮 小六　蔡承煒	翁雅玲

關鍵詞：　離散動態系統、硬幣、國際數學奧林匹亞

摘要

本作品取自國際數學奧林匹亞 2022 年第一題，我們給出完整的解答，不需要使用中學以上的數學知識，而且利用本作品的方法，將原題探討的兩種硬幣，推廣到 $m \geqq 3$ 種。

壹、問題

問題 1 (國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題，[1]). 奧斯陸銀行發行兩種硬幣：鋁幣（記做 A）以及銅幣（記做 B）。瑪麗有 n 枚鋁幣和 n 枚銅幣，她任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 $k \leqq 2n$，瑪麗重複下列的操作：找出包含由左數來第 k 枚硬幣的最長同花段，然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說，當 $n=4$ 且 $k=4$ 時，從 AABBBABA 這個起始狀態開始操作，過程會是

AABBBABA → BBBAAABA → AAABBBBA → BBBBAAAA → BBBBAAAA → ⋯。

找出符合 $1 \leqq k \leqq 2n$ 的所有數對 (n, k)，使得不管是什麼起始狀態，在操作過程的某個時刻，最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的。

貳、研究動機

老師介紹有名的數學競賽：國際數學奧林匹亞，表示題目易懂，但是解題過程很費心思，我們好奇便請老師提供例子，她就拿了今年（2022 年）的第一題同學們見識。經過一百個以上的數據試算，觀察後本小組有了解題思路，想要進一步探討，所以請老師指導，因而踏上科展之旅。

參、研究目的

一、解決國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題。

二、研究硬幣為 3 種以上的情形。

肆、研究工具

一、計算紙、筆。

伍、研究過程與討論

一、解決國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題

（一）1≦n≦5 的計算

1. n＝1. 有 AB 和 BA 兩種排列，但只要算 AB 即可，BA 和 AB 僅是 A 和 B 的身份互換。

k＝1，

AB→AB→AB→⋯	✓

k＝2，

AB→BA→AB→⋯	✓

「✓」表示操作過程中，能出現最左邊的 n 枚硬幣是同一材質，「×」在操作過程中，未出現最左邊 n 枚是同一材質。

2. n＝2. 有 AABB、ABAB、ABBA、BAAB、BABA、BBAA 等 6 種排列，但只要算前 3 種即可，後 3 種和前 3 種相比，僅是 A 和 B 的身份互換。

k＝1，

AABB→AABB→AABB→⋯	✓
ABAB→ABAB→ABAB→⋯	×
ABBA→ABBA→ABBA→⋯	×

k＝2，

AABB→AABB→AABB→⋯	✓
ABAB→BAAB→AABB→⋯	✓
ABBA→BBAA→BBAA→⋯	✓

k＝3，

AABB→BBAA→AABB→⋯	✓
ABAB→AABB→BBAA→⋯	✓
ABBA→BBAA→AABB→⋯	✓

k＝4，

AABB→BBAA→AABB→⋯	✓
ABAB→BABA→ABAB→⋯	×
ABBA→AABB→BBAA→⋯	✓

3. n＝3. 同理，原有 20 種排列，但只要算其中 10 種即可。

k＝1，

AAABBB→AAABBB→…	✓
AABABB→AABABB→…	×
AABBAB→AABBAB→…	×
AABBBA→AABBBA→…	×
ABAABB→ABAABB→…	×
ABBAAB→ABBAAB→…	×
ABBBAA→ABBBAA→…	×
ABABAB→ABABAB→…	×
ABABBA→ABABBA→…	×
ABBABA→ABBABA→…	×

k＝2，

AAABBB→AAABBB→…	✓
AABABB→AABABB→…	×
AABBAB→AABBAB→…	×
AABBBA→AABBBA→…	×
ABAABB→BAAABB→AAABBB→…	✓
ABBAAB→BBAAAB→BBAAAB→…	×
ABBBAA→BBBAAA→BBBAAA→…	✓
ABABAB→BAABAB→AABBAB→…	×
ABABBA→BAABBA→AABBBA→…	×
ABBABA→BBAABA→…	×

k＝3，

AAABBB→AAABBB→…	✓
AABABB→BAAABB→AAABBB→…	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→…	✓
AABBBA→BBBAAA→…	✓
ABAABB→AAABBB→…	✓
ABBAAB→BBAAAB→AAABBB→…	✓
ABBBAA→BBBAAA→…	✓
ABABAB→AABBAB→BBAAAB→AAABBB→…	✓
ABABBA→AABBBA→BBBAAA→…	✓
ABBABA→BBAABA→AABBBA→BBBAAA→…	✓

k＝4，

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
AABABB→AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
ABAABB→AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
ABBBAA→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
ABABAB→BABAAB→AABABB→AAABBB→⋯	✓
ABABBA→BBABAA→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
ABBABA→AABBBA→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓

k＝5，

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
AABABB→BBAABA→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
AABBAB→AAABBB→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→⋯	✓
ABAABB→BBABAA→AABBAB→AAABBB→⋯	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
ABBBAA→AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
ABABAB→AABABB→BBAABA→BBBAAA→⋯	✓
ABABBA→BBABAA→AABBAB→AAABBB→⋯	✓
ABBABA→BABBAA→AABABB→BBAABA→BBBAAA→⋯	✓

k＝6，

AAABBB→BBBAAA→⋯	✓
AABABB→BBAABA→ABBAAB→BABBAA→⋯	×
AABBAB→BAABBA→ABAABB→BBABAA→AABBAB→⋯	×
AABBBA→AAABBB→⋯	✓
ABAABB→BBABAA→AABBAB→BAABBA→⋯	×
ABBAAB→BABBAA→AABABB→BBAABA→⋯	×
ABBBAA→AAABBB→⋯	✓
ABABAB→BABABA→⋯	×
ABABBA→AABABB→BBAABA→⋯	×
ABBABA→AABBAB→BAABBA→⋯	×

4. n＝4. 同理，原有 70 種排列，但只要算其中 35 種即可。

k＝1，

AAAABBBB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABABBB→AAABABBB→⋯	×
AAABBABB→AAABBABB→⋯	×
AAABBBAB→AAABBBAB→⋯	×
AAABBBBA→AAABBBBA→⋯	×
AABAABBB→AABAABBB→⋯	×
AABABABB→AABABABB→⋯	×
AABABBAB→AABABBAB→⋯	×
AABABBBA→AABABBBA→⋯	×
AABBAABB→AABBAABB→⋯	×
AABBABAB→AABBABAB→⋯	×
AABBABBA→AABBABBA→⋯	×
AABBBAAB→AABBBAAB→⋯	×
AABBBABA→AABBBABA→⋯	×
AABBBBAA→AABBBBAA→⋯	×
ABAAABBB→ABAAABBB→⋯	×
ABAABABB→ABAABABB→⋯	×
ABAABBAB→ABAABBAB→⋯	×
ABAABBBA→ABAABBBA→⋯	×
ABABAABB→ABABAABB→⋯	×
ABABABAB→ABABABAB→⋯	×
ABABABBA→ABABABBA→⋯	×
ABABBAAB→ABABBAAB→⋯	×
ABABBABA→ABABBABA→⋯	×
ABABBBAA→ABABBBAA→⋯	×
ABBAAABB→ABBAAABB→⋯	×
ABBAABAB→ABBAABAB→⋯	×
ABBAABBA→ABBAABBA→⋯	×
ABBABAAB→ABBABAAB→⋯	×
ABBABABA→ABBABABA→⋯	×
ABBABBAA→ABBABBAA→⋯	×
ABBBAAAB→ABBBAAAB→⋯	×
ABBBAABA→ABBBAABA→⋯	×
ABBBABAA→ABBBABAA→⋯	×
ABBBBAAA→ABBBBAAA→⋯	×

k＝2，

AAAABBBB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABABBB→AAABABBB→⋯	×
AAABBABB→AAABBABB→⋯	×
AAABBBAB→AAABBBAB→⋯	×
AAABBBBA→AAABBBBA→⋯	×
AABAABBB→AABAABBB→⋯	×
AABABABB→AABABABB→⋯	×
AABABBAB→AABABBAB→⋯	×
AABABBBA→AABABBBA→⋯	×
AABBAABB→AABBAABB→⋯	×
AABBABAB→AABBABAB→⋯	×
AABBABBA→AABBABBA→⋯	×
AABBBAAB→AABBBAAB→⋯	×
AABBBABA→AABBBABA→⋯	×
AABBBBAA→AABBBBAA→⋯	×
ABAAABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABABB→BAAABABB→AAABBABB→⋯	×
ABAABBAB→BAAABBAB→AAABBBAB→⋯	×
ABAABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→⋯	×
ABABAABB→BAABAABB→AABBAABB→⋯	×
ABABABAB→BAABABAB→AABBABAB→⋯	×
ABABABBA→BAABABBA→AABBABBA→⋯	×
ABABBAAB→BAABBAAB→AABBBAAB→⋯	×
ABABBABA→BAABBABA→AABBBABA→⋯	×
ABABBBAA→BAABBBAA→AABBBBAA→⋯	×
ABBAAABB→BBAAAABB→⋯	×
ABBAABAB→BBAAABAB→⋯	×
ABBAABBA→BBAAABBA→⋯	×
ABBABAAB→BBAABAAB→⋯	×
ABBABABA→BBAABABA→⋯	×
ABBABBAA→BBAABBAA→⋯	×
ABBBAAAB→BBBAAAAB→⋯	×
ABBBAABA→BBBAAABA→⋯	×
ABBBABAA→BBBAABAA→⋯	×
ABBBBAAA→BBBBAAAA→⋯	✓

k＝3，

AAAABBBB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABABBB→AAABABBB→⋯	×
AAABBABB→AAABBABB→⋯	×
AAABBBAB→AAABBBAB→⋯	×
AAABBBBA→AAABBBBA→⋯	×
AABAABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABABB→BAAABABB→AAABBABB→⋯	×
AABABBAB→BAAABBAB→AAABBBAB→⋯	×
AABABBBA→BAAABBBA→AAABBBBA→⋯	×
AABBAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→⋯	×
AABBABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→⋯	×
AABBBAAB→BBBAAAAB→⋯	×
AABBBABA→BBBAAABA→⋯	×
AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABABB→AAABBABB→⋯	×
ABAABBAB→AAABBBAB→⋯	×
ABAABBBA→AAABBBBA→⋯	×
ABABAABB→AABBAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABABAB→AABBABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→⋯	×
ABABABBA→AABBABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→⋯	×
ABABBAAB→AABBBAAB→BBBAAAAB→⋯	×
ABABBABA→AABBBABA→BBBAAABA→⋯	×
ABABBBAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBAAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→⋯	×
ABBAABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→⋯	×
ABBABAAB→BBAABAAB→AABBBAAB→BBBAAAAB→⋯	×
ABBABABA→BBAABABA→AABBBABA→BBBAAABA→⋯	×
ABBABBAA→BBAABBAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBAAAB→BBBAAAAB→⋯	×
ABBBAABA→BBBAAABA→⋯	×
ABBBABAA→BBBAABAA→⋯	×
ABBBBAAA→BBBBAAAA→⋯	✓

k＝4，

AAAABBBB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABABB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABBAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABBBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBAABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBABAB→BBAAABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBABBA→BBAAABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBBAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABABB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABAABB→BABAAABB→AAABABBB→BAAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABABAB→BABAABAB→AABABBAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABABBA→BABAABBA→AABABBBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBAAB→BBABAAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABBABA→BBABAABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBBAA→BBBABAAA→ABBBBAAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABAAB→AABBBAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBABABA→AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABBAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBAAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBBAABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBABAA→BBBAABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBBAAA→BBBBAAAA→⋯	✓

k＝5，

AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABABBB→AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBBBA→BBBBAAAA→AAAABBBB→⋯	✓
AABAABBB→AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AABABABB→BAABAABB→AABAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABBAB→BBAABAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBBAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABAAABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABABB→BABAAABB→AAABABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBAB→BBABAAAB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBBA→BBBABAAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABAABB→AAABABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABABAB→AABABBAB→BBAABAAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABABBA→AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBAAB→BBABAAAB→AAABBABB→BBAAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABBABA→BBABAABA→AABBABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBBAA→BBBABAAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAABAB→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAABBA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABAAB→BABBAAAB→AAABABBB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBABABA→BABBAABA→AABABBBA→BBBAABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABBAA→BBABBAAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBBAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBABAA→AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBBAAA→BBBBAAAA→⋯	✓

k＝6，

AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABBABB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABAABBB→BBBAABAA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABABABB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABABBAB→BBAABAAB→AABBAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABBBA→BBBAABAA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBAABB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBABAB→BAABBAAB→AABAABBB→BBBAABAA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBABBA→BBAABBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBBABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBBBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABABB→AABAABBB→BBBAABAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABAABBAB→BBABAAAB→AAABBABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBBA→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABAABB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABABAB→BABABAAB→AABABABB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA →BBBBAAAA→⋯	✓
ABABABBA→BBABABAA→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABBAAB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBABA→AABABBBA→BBBAABAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBBAA→BBBABAAA→AAABBBAB→BBBAAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAAABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBAABAB→BABBAAAB→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBAABBA→BBABBAAA→AAABBABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBABAAB→AAABBABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBABABA→AABBABBA→BBAABBAA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABBAA→BBABBAAA→AAABBABB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBBAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBBAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBABAA→BABBBAAA→AAABABBB→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBBAAA→AAAABBBB→⋯	✓

k＝7，

AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABABBB→BBBAAABA→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABBBAB→AAAABBBB→⋯	✓
AAABBBBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABABB→BBAABABA→BBBAABAA→AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABABBAB→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABABBBA→BBBAABAA→AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→⋯	×
AABBABAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
AABBABBA→BBAABBAA→AABBAABB→⋯	×
AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBBABA→BAABBBAA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
AABBBBAA→AAAABBBB→⋯	✓
ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABABB→BBABAABA→BBBABAAA→AAABBBAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBAB→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABAABBBA→BBBABAAA→AAABBBAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABABAB→AABABABB→BBAABABA→BBBAABAA→AABBBAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABABABBA→BBABABAA→AABBABAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBAAB→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABABBABA→BABABBAA→AABABABB→BBAABABA→BBBAABAA→AABBBAAB→ AAAABBBB→⋯	✓
ABABBBAA→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBAABAB→AABBAABB→BBAABBAA→⋯	×
ABBAABBA→BBABBAAA→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABAAB→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBABABA→BABBABAA→AABABBAB→AAABABBB→BBBAAABA→BBBAAAA→⋯	✓
ABBABBAA→AAABBABB→BBAAABBA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBAAAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBBAABA→BABBBAAA→AAABABBB→BBBAAABA→BBBBAAAA→⋯	✓
ABBBABAA→AAABBBAB→AAAABBBB→⋯	✓
ABBBBAAA→AAAABBBB→⋯	✓

k＝8，

AAAABBBB→BBBBAAAA→⋯	✓
AAABABBB→BBBAAABA→ABBBAAAB→BABBBAAA→AAABABBB→⋯	×
AAABBABB→BBAAABBA→ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→⋯	×
AAABBBAB→BAAABBBA→ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→⋯	×
AAABBBBA→AAAABBBB→⋯	✓
AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→BAABBBAA→AABAABBB→⋯	×
AABABABB→BBAABABA→ABBAABAB→BABBAABA→ABABBAAB→BABABBAA→⋯	×
AABABBAB→BAABABBA→ABAABABB→BBABAABA→ABBABAAB→BABBABAA→⋯	×
AABABBBA→AAABABBB→BBBAAABA→ABBBAAAB→BABBBAAA→AAABABBB→⋯	×
AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→⋯	×
AABBABAB→BAABBABA→ABAABBAB→BABAABBA→ABABAABB→BBABABAA→⋯	×
AABBABBA→AAABBABB→BBAAABBA→ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→⋯	×
AABBBAAB→BAABBBAA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→⋯	×
AABBBABA→AAABBBAB→BAAABBBA→ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→⋯	×
AABBBBAA→AAAABBBB→⋯	✓
ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→BAAABBBA→ABAAABBB→⋯	×
ABAABABB→BBABAABA→ABBABAAB→BABBABAA→AABABBAB→BAABABBA→⋯	×
ABAABBAB→BABAABBA→ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→BAABBABA→⋯	×
ABAABBBA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→BAABBBAA→AABAABBB→⋯	×
ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→BAABBABA→ABAABBAB→BABAABBA→⋯	×
ABABABAB→BABABABA→ABABABAB→⋯	×
ABABABBA→AABABABB→BBAABABA→ABBAABAB→BABBAABA→ABABBAAB→BABABBAA→ABABABBA→⋯	×
ABABBAAB→BABABBAA→AABABABB→BBAABABA→ABBAABAB→BABBAABA→ABABBAAB→⋯	×
ABABBABA→AABABBAB→BAABABBA→ABAABABB→BBABAABA→ABBABAAB→BABBABAA→AABABBAB→⋯	×
ABABBBAA→AAABABBB→BBBAAABA→ABBBAAAB→BABBBAAA→AAABABBB→⋯	×
ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→BBAAABBA→ABBAAABB→⋯	×
ABBAABAB→BABBAABA→ABABBAAB→BABABBAA→BBAABABA→ABBAABAB→⋯	×
ABBAABBA→AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→BBAABBAA→AABBAABB→⋯	×
ABBABAAB→BABBABAA→AABABBAB→BAABABBA→ABAABABB→BBABAABA→ABBABAAB→⋯	×
ABBABABA→AABBABAB→BAABBABA→ABAABBAB→BABAABBA→ABABAABB→BBABABAA→AABBABAB→⋯	×
ABBABBAA→AAABBABB→BBAAABBA→ABBAAABB→BBABBAAA→AAABBABB→⋯	×
ABBBAAAB→BABBBAAA→AAABABBB→BBBAAABA→BBBAAAB→⋯	×

ABBBAABA→AABBBAAB→BAABBBAA→AABAABBB→BBBAABAA→AABBBAAB→⋯	×
ABBBABAA→AAABBBAB→BAAABBBA→ABAAABBB→BBBABAAA→AAABBBAB→⋯	×
ABBBBAAA→AAAABBBB→⋯	✓

5. n＝5. 同理，原有 252 種排列，但只要算其中 126 種即可，因篇幅繁多，請參考解題紀錄本。

(二)、觀察.

表 1. 1≦n≦5，可以/不能 達成國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的 k 值

n	k 的值	
	可以達成問題 1 的要求	不能達成問題 1 的要求
1	1，2	無
2	2，3	1，4
3	3，4，5	1，2，6
4	4，5，6	1，2，3，7，8
5	5，6，7，8	1，2，3，4，9，10

(三)、分析

1. 可以/不可 達成國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的 k 值範圍

表 2. 將表 1 的 k 值用範圍表示

n	k 的值	
	可以達成問題 1 的要求	不能達成問題 1 的要求
1	1≦k≦2	無
2	2≦k≦4－1	k＝1，4
3	3≦k≦6－1	1≦k≦2，k＝6
4	4≦k≦8－2	1≦k≦3，7≦k≦8
5	5≦k≦10－2	1≦k≦4，9≦k≦10

2. 猜測. 觀察表 2 可以達成國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的 k 值範圍，發現：

1. $k \geqq n$，$1 \leqq n \leqq 5$。　式（1）

2. k 的最大值略小於全部硬幣數量。　式（2）

先討論 式（1）:

例 1. $n=6$，以下狀態使得當 $1 \leqq k \leqq 5$，無論操作幾次，最左邊 6 枚不會是同一材質

AAAAABABBBBB。

由例 1 可知道對於一般的 n，$k \geqq n$。

接著討論 式（2）:

例 2. 以下狀態為 $n=6$，如果 $k=10$、11、12，則持續操作會回復成起始狀態，期間不會發生 6 枚同材質硬幣集中到最左邊。

AAABBBAAABBB

例 3. 以下狀態為 $n=7$，如果 $k=12$、13、14，則持續操作會回復成起始狀態，期間不會發生 7 枚同材質硬幣集中到最左邊。

AAAABBBBAAABBB

由例 2 和例 3 看來，如果 k 選整列硬幣的最末段——最末段長度大約是 n 的一半的那些位置，則存在一種狀態，當 n 是偶數 6 時，k 在最末端的$\frac{6}{2}$個數，當 n 是奇數 7 時，k 在最末端的$\frac{7}{2}$，$\frac{7}{2}$=3.5 取整數為 3 個數時，無論如何操作，最左側 n 枚不會同一材質。經討論後老師告訴我們一個更方便的表示方式:高斯符號[x]。在數學領域中，有時需要略去一個數的小數部分，只研究它的整數部分，可用高斯符號來表示。高斯符號[x]是指取「小於或等於 x 的最大整數」，例如：[3.6]=3，[1]=1。因而推測

$k \leqq 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$，其中[ ]為高斯符號。

統整起來，對於一般化的（n，k），猜測如下：

$$n \leqq k \leqq 2 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

3.驗證猜測成立

驗證過程是本小組試算一百個以上數據後，所發現的討論和敘述。

1.如果一列硬幣恰有 2 段同花段，則已使得最左邊 n 枚為同一種材質。

2.承 1，如果恰有 3 段，則必有一段為同一材質，操作 1 次即可達成。

3.承 2，如果段數≧4，持續操作下去，總有某材質同花段長度加長。以 n＝6 為例，全部 12 枚，依猜測，令 $6 \leqq k \leqq 12-\frac{6}{2}=9$。

假如每次操作都不會改變每一段同花的長度，表示**每次操作**，包含第 k 枚的同花段包含到第 12 枚—也就是最後 1 枚，因為如果沒有包含，則操作 1 次後會使兩段同材質同花段結合，得到一長度更長的同花段。若包含第 12 枚，則該段硬幣數最少有 12－9＋1＝4。注意到已假設每次操作都不會改變同花段的長度，由於段數≧4，推得全體硬幣數量 $\geqq 4\times4=16$，和全部原有 12 枚矛盾！

所以只要一列硬幣同花**段數**≧4，便會一直發生某材質硬幣同花段變長，直到 6 枚都聚集在一起，就可達成最左邊 n 枚同一材質。

(四)國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題的解答.

1.所求之數對如下：

$$n=1，k=1、2， \qquad 式（3）$$

$$n \geqq 2，n \leqq k \leqq 2\times n-\left[\frac{n}{2}\right]。 \qquad 式（4）$$

以下先說明：不能出現最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的 k 之範圍，再說明能出現的 k 之範圍。

2. n≧2. 將說明下列範圍，存在一種起始狀態無法操作至最左 n 枚均為同一材質。

證.

(1)$1 \leqq k \leqq n-1$

令左起第 1 枚至第 k 枚均為 A，第 k+1 枚為 B。可知尚有 n－k 枚鋁幣在左起第 k＋1 枚之後，此狀態依題意操作將使得每一步的硬幣列狀態均和起始狀態相同，表示不會出現左邊為 n 枚相同材質硬幣的狀態。例 n=3，$1 \leqq k \leqq 3-1$，k=1、2，在 AABABB 的狀況下，都沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

(2)$2n-\left[\frac{n}{2}\right]+1\leqq k\leqq 2n$.

① n 為偶數，第 1 枚至第$\frac{n}{2}$枚為 A 同花段，右接長度$\frac{n}{2}$枚 B 同花段，再右接長度$\frac{n}{2}$枚 A 同花段，最後接長度$\frac{n}{2}$枚 B 同花段，持續操作所得狀態和起始同。例 n=4，$2\times4-\left[\frac{4}{2}\right]+1\leqq k\leqq 2\times4$，$7\leqq k\leqq 8$，k=7、8，在 AABBAABB 的狀況下，都沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

② n 為奇數，第 1 枚至第$\left[\frac{n}{2}\right]$+1 枚為 A 同花段，右接長度$\left[\frac{n}{2}\right]$+1 枚 B 同花段，再右接長度$\left[\frac{n}{2}\right]$枚 A 同花段，最後接長度$\left[\frac{n}{2}\right]$枚 B 同花段，持續操作所得狀態和起始同。例如:n=3，$2\times3-\left[\frac{3}{2}\right]+1\leqq k\leqq 2\times3$，k=6，在 AABBAB 的狀況下，沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

上述①和②主要說明當 $2n-\left[\frac{n}{2}\right]+1\leqq k\leqq 2n$，我們能找到一種起始狀態使得在操作過程中，都不會出現國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題要求的狀態。

3.式（3）式（4）就是國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題所求

證.

（1）n=1，k=1,2. 只要看 AB 這一種即可：

$$k=1，AB\rightarrow AB，$$

$$k=2，AB\rightarrow BA。$$

（2）$n\geqq 2$，$n\leqq k\leqq 2n-\left[\frac{n}{2}\right]$

不失一般性，設第 k 枚為 A。如果該同花段含最後一枚，則操作 1 次後全數同花段長度不變；若不包含，操作 1 次後會使得兩段 B 同花段結合，得到一條加長的 B 同花段。注意到不可能每次要移到最左的同花段總能包含最後一枚，利用反證法：假如可以，先看總同花段數：若是 2 段或 3 段，必可完成題意要求；若是≧4 段，則有

$$\text{硬幣列長度}\geqq 4\times\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)>4\times\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=2n+2，$$

與給定條件矛盾！故經過若干次操作後，只要總段數≧4，必得長度漸增的 A 同花段或 B 同花段，直到某材質同花段長度為 n 枚。

二、硬幣為 3 種以上的情形

推廣至 m≧3 的發想來源，思考國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題時，曾想過用黑和白來區別兩種材質的硬幣，一旦解決國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題，我們聯想到如果顏色不限黑白，而是彩色，也就是硬幣種類數≧3，那麼推廣原題條件的結果會是什麼？

問題 2(國際數學奧林匹亞 2022 年第 1 題的 m 種硬幣版本). 奧斯陸銀行發行 m 種硬幣：分別記作：A，B，C，D，…，等。喬治分別有 n 枚，他任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 k≦m×n，喬治重複下列的操作：找出包含由左數來第 k 枚硬幣的最長同花段，然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說，

當 n＝3，m＝3，k＝7 時，從這個起始狀態開始操作，過程會是

AABCBABCC→BAABCBACC→ABAABCBCC→BABAABCCC→CCCBABAAB→AACCCBABB→AAACCCBBB→BBBAAACCC→…

找出符合 1≦k≦m×n 的所有數對(n,k)，使得不管是什麼起始狀態，在操作過程的某個時刻，**會形成恰好 m 個同花段**。

先從無法達成問題 2 要求的 k 值找起。

(一)m＝3

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k

例 4. n＝4，m＝3，以下狀態使得當 1≦k≦7 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBBCACCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例 5. n＝4，m＝3，以下狀態使得當 $7 \leqq k \leqq 8$ 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBAABBCCCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例 6. n＝4，m＝3，以下狀態當 $11 \leqq k \leqq 12$ 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBCCAABBCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例 7. n＝5，m＝3，以下狀態當 $1 \leqq k \leqq 9$ 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAAABBBBBCACCCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例 8. n＝5，m＝3，以下狀態當 $9 \leqq k \leqq 10$ 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBAABBCCCCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例 9. n＝5，m＝3，以下狀態當 $14 \leqq k \leqq 15$ 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBCCCAABBCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

觀察上面的例子，猜測當

$$1 \leqq k \leqq 2 \times n，3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leqq k \leqq 3 \times n， \qquad 式(5)$$

無法達成問題 2 的要求。

2. m＝3，問題 2 要求的 k 值. 由式（5），推測當

$$2n + 1 \leqq k \leqq 3 \times n - \left[\frac{n}{2}\right]$$

就是 m＝3 時，問題 2 所要求的 k，以下為證明過程。

證. 以下（1）、（2）說明無法達成要求的 k 值範圍，（3）說明可以達成要求的 k 值範圍。

（1）如果 n 是偶數：

①下列狀態使得當 $1 \leqq k \leqq 2 \times n-1$ 時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA⋯ABB⋯BCAC⋯C

其中左起 A 有 n－1 枚，接著 B 有 n 枚，然後接 CAC⋯C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當 $2 \times n-1 \leqq k \leqq 2 \times n$ 時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA⋯AABB⋯BBAA⋯AABB⋯BBCCCC⋯⋯CCCC

A 和 B 各連續$\frac{n}{2}$枚，交替排列，最末 n 枚排 C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A 和 B 的同花段長度不變。

③下列狀態使得當 $3 \times n-\left[\frac{n}{2}\right]+1 \leqq k \leqq 3 \times n$，時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA⋯BB⋯CC⋯AA⋯BB⋯CC⋯

其中左起各有$\frac{n}{2}$枚 A、$\frac{n}{2}$枚 B、$\frac{n}{2}$枚 C 依序排列，最後再接$\frac{n}{2}$枚 A、$\frac{n}{2}$枚 B、$\frac{n}{2}$枚 C，上面狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

（2）如果 n 是奇數：

①下列狀態使得當 $1 \leqq k \leqq 2 \times n-1$ 時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA⋯ABB⋯BCAC⋯C

其中左起 A 有 n－1 枚，接著 B 有 n 枚，然後接 CAC⋯C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當 $2 \times n-1 \leqq k \leqq 2 \times n$ 時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA⋯ABB⋯BAA⋯ABB⋯BCC⋯C

左起 A 和 B 分別有連續$\frac{n+1}{2}$枚，再右接$\frac{n-1}{2}$枚 A 及$\frac{n-1}{2}$枚 B，最後接 n 枚 C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

③下列狀態使得當 $3 \times n-\left[\frac{n}{2}\right]+1 \leqq k \leqq 3 \times n$ 時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同

花段

AA⋯BB⋯CC⋯AA⋯BB⋯CC⋯

其中左起各有$\frac{n+1}{2}$枚 A、$\frac{n+1}{2}$枚 B、$\frac{n+1}{2}$枚 C 依序排列，最後再接$\frac{n-1}{2}$枚 A、$\frac{n-1}{2}$枚 B、$\frac{n-1}{2}$枚 C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

（3）問題 2，m＝3 時，題目要求的 k 之範圍

$$n=1，1\leqq k\leqq 3， \qquad \text{式（6）}$$

$\underline{A}BC\rightarrow ABC$

$A\underline{B}C\rightarrow BAC$

$AB\underline{C}\rightarrow CAB$

$$n\geqq 2，2n+1\leqq k\leqq 3\times n-\left[\frac{n}{2}\right] \qquad \text{式（7）}$$

①當一列硬幣恰有 3 個同花段，則已達成題意要求。

②當一列硬幣有＞3 個同花段：

（i）如果要移至最左邊的同花段長度＝n，則可看作 2 種硬幣的題目。

（ii）承（i），如果長度＜n，接著設要操作的包含第 k 枚之同花段最右端為第 k＋j 枚，0≦j≦n－1，假若第 k＋j＋1 枚起至第 3×n 枚同花段組成的一組狀態不變， 表示將要移至最左邊的同花段材質和第 k＋j＋1 不同，但上述情形不會一直發生，因為第 k＋j＋1 枚起至第 3×n 枚至多有 n－1 枚，表示至少有 1 枚在第 k＋j＋1 枚左邊，持續操作下去，左邊的若干枚總會和第 k＋j＋1 枚相鄰，相鄰後由 2 條同花段結合成 1 條，然後有兩種情況：當結合後的同花段包含第 k 枚則移到最左邊；不包含則留在第 k＋1 枚之後的同花段組中。無論如何，總會得到某材質硬幣的同花段長度加長，一直到長度為 n 為止。

一旦得到長度為 n 的同花段，該同花段在操作過程中不會影響其它種類硬幣的操作，可以當作它不存在，則可看作 2 種硬幣的題目，此時 k 的範圍在 2 種硬幣的問題裡可以達成要求，因此當 m＝3，問題 2 所要求的 k 值範圍為式（6）、式（7）。

(二)m＝4

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k.

例 10. n＝4，m＝4，以下狀態當 <u>1≦k≦11</u> 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBBCCCCDADDD，

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例 11. n＝4，m＝4，以下狀態當 11≦k≦12 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBCCAABBCCDDDD，

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態，各材質的同花段長度不變。

例 12. n＝4，m＝4，以下狀態當 15≦k≦16 時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBCCDDAABBCCDD。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態，各材質的同花段長度不變。

根據例 10—例 12，提出 m＝n＝4，可達成問題 2 要求，能得到恰有 4 段同花的 k 的範圍：

$$3n+1\leqq k\leqq 4\times n-\left[\frac{n}{2}\right],$$

2. 問題 2，m＝4 時，題目所要求的 k 之範圍.

$$n=1,\ 1\leqq k\leqq 4, \qquad \text{式(8)}$$

ABCD→ABCD

ABCD→BACD

ABCD→CABD

ABCD→DABC

$$n\geqq 2,\ 3\times n+1\leqq k\leqq 4\times n-\left[\frac{n}{2}\right]. \qquad \text{式(9)}$$

(1)當一列硬幣恰有 4 個同花段，則已達成題意要求。

(2)當一列硬幣有＞4 個同花段：

①如果要移至最左邊的同花段長度＝n，則可看作 3 種硬幣的題目。

②承①，如果長度＜n，接著設要操作的包含第 k 枚之同花段最右端為第 k＋j 枚，0≦j≦n－1，假若第 k＋j＋1 枚起至第 4×n 枚同花段組成的一組狀態不變， 表示將要移至最左邊的同花段材質和第 k＋j＋1 不同，但上述情形不會一直發生，因為第 k＋j＋1 枚起至第 3×n 枚至多有 n－1 枚，表示至少有 1 枚在第 k＋j＋1 枚左邊，持續操作下去，左邊的若干枚總會和第 k＋j＋1 枚相鄰，相鄰後由 2 條同花段結合成 1 條，

然後有兩種情況：當結合後的同花段包含第 k 枚則移到最左邊；不包含則留在第 k＋1 枚之後的同花段組中。無論如何，總會得到某材質硬幣的同花段長度加長，一直到長度為 n 為止。

一旦得到長度為 n 的同花段，該同花段在操作過程中不會影響其它種類硬幣的操作，可以當作它不存在，則可看作 3 種硬幣的題目，此時 k 的範圍在 3 種硬幣的問題裡可以達成要求，因此問題 2，m＝4 時所要求的 k 值為式（8）和式（9）。

（三）一般化的 m

1. 不能達成題目 2 要求的 k

（1）n 為偶數：1≦k≦m×n. C_i表示第 i 種硬幣；前（m－1）×n－1 枚安排如下

$$\mathrm{AA\ldots ABB\ldots BCC\ldots CDD\ldots D\ldots C}_{m-1}\mathrm{C}_{m-1}\ldots\mathrm{C}_{m-1}\mathrm{C}_m A\,\mathrm{C}_m\mathrm{C}_m\cdots\mathrm{C}_m$$

①A 為長度 n－1 枚的同花段，右接第 n 枚到第（m－1）×n－1 枚排各材質硬幣全集合的同花段，末 n+1 枚排$\mathrm{C}_m A\,\mathrm{C}_m\mathrm{C}_m\cdots\mathrm{C}_m$

當 1≦k≦（m－1）×n－1，持續操作不會出現恰有 m 段同花，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②當（m－1）×n－1≦k≦（m－1）×n，前（m－1）×n 枚安排如下：

$\mathrm{AA\cdots BB\cdots CC\cdots DD\cdots C}_{m-1}\mathrm{C}_{m-1}\cdots\mathrm{AA\cdots BB\cdots CC\cdots DD\cdots C}_{m-1}\mathrm{C}_{m-1}\cdots\mathrm{C}_m\mathrm{C}_m\mathrm{C}_m\cdots\mathrm{C}_m$

A、B、C⋯C_{m-1}各連續$\frac{n}{2}$枚同花段，再右接 A、B、C⋯C_{m-1}各連續$\frac{n}{2}$枚同花段，最末 n 枚排C_m，上面狀態持續操作，每一次的狀態 A、B、C⋯$\mathrm{C}_{m-1}\mathrm{C}_m$同花段長度不變。

③當 m×n－$\left[\frac{n}{2}\right]$＋1≦k≦m×n 時，下列狀態持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

$$\mathrm{AA\ldots ABB\ldots BCC\ldots CDD\ldots D\ldots C}_m\mathrm{C}_m\cdots\mathrm{C}_m\ \ \mathrm{AA\ldots ABB\ldots BCC\ldots CDD\ldots D\ldots C}_m\mathrm{C}_m\cdots\mathrm{C}_m$$

分別排每種材質長度為$\frac{n}{2}$枚的同花段，自第$\frac{m\times n}{2}+1$格起重覆此排列，可知當 m×n－$\left[\frac{n}{2}\right]$＋1≦k≦m×n，經過若干次操作後會回復原來的狀態，期間不會產生形成恰好 m 個同花段。

(2)n 為奇數：

①如果 n 是奇數：下列狀態使得當 1≦k≦（m－1）xn－1，時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

$$\text{AA…ABB…BCC…CDD…D…}C_{m-1}C_{m-1}\ldots C_{m-1}C_m A C_m C_m \cdots C_m$$

其中左起 A 有 n－1 枚，右接第 n 枚到第（m－1）xn－1 枚排各材質硬幣全集合的同花段，末 n+1 枚排$C_m A C_m C_m \cdots C_m$，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當（m－1）xn－1≦k≦（m－1）xn 時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

$$\text{AA}\cdots\text{BB}\cdots\text{CC}\cdots\text{DD}\cdots C_{m-1}C_{m-1}\cdots\text{AA}\cdots\text{BB}\cdots\text{CC}\cdots\text{DD}\cdots C_{m-1}C_{m-1}\cdots C_m C_m C_m\cdots C_m$$

左起 A、B、…、C_{m-1}分別有連續$\frac{n+1}{2}$枚，接著 A、B、…、C_{m-1}分別有連續$\frac{n-1}{2}$枚，最末 n 枚排C_m。

③下列狀態使得當 mxn－$\left[\frac{n}{2}\right]$＋1≦k≦mxn 時，下列狀態持續操作，不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

$$\text{AA}\cdots\text{BB}\cdots\text{CC}\cdots C_{m-1}\ldots C_{m-1}C_m C_m\cdots C_m\text{AA}\cdots\text{BB}\cdots\text{CC}\cdots C_{m-1}\ldots C_{m-1}C_m C_m\cdots C_m$$

其中左起 A、B、C、D⋯$C_{m-1}C_m$各有$\frac{n+1}{2}$枚，最後再接 A、B、C、D⋯$C_{m-1}C_m$各$\frac{n-1}{2}$枚。

2. 可以達成問題 2 要求的 k.

$$n=1，1\leqq k\leqq n， \qquad \text{式(10)}$$

$$\underline{A}BC\cdots N\rightarrow ABC\cdots N$$
$$A\underline{B}C\cdots N\rightarrow BAC\cdots N$$
$$AB\underline{C}\cdots N\rightarrow CAB\cdots N$$
$$\vdots$$
$$ABC\cdots\underline{N}\rightarrow NAB\cdots M$$

$$(m-1)\times n+1\leqq k\leqq m\times n-\left[\frac{n}{2}\right]， \qquad \text{式（11）}$$

（1）若一列硬幣恰有 m 個同花段，則已達成題意要求。

（2）若一列硬幣有＞m 個同花段：

①如果要移至最左邊的同花段長度＝n，則可看作 m－1 種硬幣的題目。

②承①，如果長度＜n，接著設要操作的包含第 k 枚之同花段最右端為第 k＋j 枚，0≦j≦n－1，假若第 k＋j＋1 枚起至第 m×n 枚同花段組成的一組狀態不變， 表示將要移至最左邊的同花段材質和第 k＋j＋1 不同，但上述情形不會一直發生，因為第 k＋j＋1 枚起至第 m×n 枚至多有 n－1 枚，表示至少有 1 枚在第 k＋j＋1 枚左邊，持續操作下去，左邊的若干枚總會和第 k＋j＋1 枚相鄰，相鄰後由 2 條同花段結合成 1 條，然後有兩種情況：當結合後的同花段包含第 k 枚則移到最左邊；不包含則留在第 k＋1 枚之後的同花段組中。無論如何，總會得到某材質硬幣的同花段長度加長，一直到長度為 n 為止。

一旦得到長度為 n 的同花段，該同花段在操作過程中不會影響其它種類硬幣的操作，則可看作 m－1 種硬幣的題目，同時 k 值也在可以產生恰有 m－1 個同花段的範圍中，問題 2 要求的 k 值為式（10）和式（11）。

陸、結論

一、給出數學奧林匹亞 2022 年第 1 題的解答。

$$n=1，k=1、2，$$

$$n\geqq 2，n\leqq k\leqq 2n-\left[\frac{n}{2}\right]。$$

二、推廣原題，研究 m≧3 種硬幣的情形，給出能符合原題要求的 k 值。

$$n=1，1\leqq k\leqq n，$$

$$n\geqq 2，(m-1)\times n+1\leqq k\leqq m\times n-\left[\frac{n}{2}\right]。$$

柒、引用文獻

一、[1]International Mathematical Olympiad。IMO2022 Problems。2022/07/31。取自 https://www.imo-official.org/problems.aspx。

二、南一文教事業教科書編輯委員會(民 112 年 2 月三版 2 刷)怎樣解題(一)(二)。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。

【評語】080412

從數學競賽中取材，將兩種等量的硬幣隨意排成一列，由給定K點的位置移動相連的同種硬幣到最左端，如此重複操作到同種硬幣完全排在一起，找出符合的(n，K)數對。作者透過有系統的分類逐一解出部分規模範例的解與無解，經由這些例子的觀察獲得初步研究結果的猜測，再經由檢驗得到一般化結果。最後進一步修改考題使得問題更具挑戰性。當硬幣的種類增加到三種時，重複操作後卻只能有一種硬幣排在一起，另兩種硬幣依舊混再一起，可考慮其他方式操作。若能將該問題應用於具體的生活情境會讓結果更有意涵。

作品簡報

同花相聚

摘要

本作品取自國際數學奧林匹亞2022年第一題，我們給出完整的解答，不需要使用中學以上的數學知識，而且利用本作品的方法，將原題探討的兩種硬幣，推廣到 m≧3 種。

壹、問題

問題1（國際數學奧林匹亞2022年第 1 題，[1]）．奧斯陸銀行發行兩種硬幣：鋁幣（記做 A）以及銅幣（記做 B）。瑪麗有 n 枚鋁幣和 n 枚銅幣，她任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 k≦2n，瑪麗重複下列的操作：找出包含由左數來第 k枚硬幣的最長同花段，然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說，當 n=4且 k=4 時，從 AABBBABA 這個起始狀態開始操作，過程會是

AABBBABA→BBBAAABA→AAABBBBA→BBBBAAAA→···。

找出符合 1≦k≦2n 的所有數對 (n, k)，使得不管是什麼起始狀態，在操作過程的某個時刻，最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的。

貳、研究動機

老師介紹有名的數學競賽：國際數學奧林匹亞，表示題目易懂，但是解題過程很費心思，我們好奇便請老師提供例子，她就拿了今年(2022年)的第一題同學們見識。經過一百個以上的數據試算，觀察後本小組有了解題思路，想要進一步探討，所以請老師指導，因而踏上科展之旅。

參、研究目的

一、解決國際數學奧林匹亞2022年第 1 題。
二、研究硬幣為 3 種以上的情形。

肆、研究工具

一、計算紙、筆。

伍、研究過程與討論

一、解決國際數學奧林匹亞2022年第 1 題

(一) 1≦n≦5 的計算

1. n=1，有AB和BA兩種排列，但只要算AB即可，BA和AB僅是 A 和 B 的身份互換。

k=1，

AB→AB→AB→···	✓

k=2，

AB→BA→AB→···	✓

「✓」表示操作過程中，能出現最左邊的 n 枚硬幣是同一材質，「×」在操作過程中，未出現最左邊 n 枚是同一材質。

2. n=2，有AABB、ABAB、ABBA、BAAB、BABA、BBAA等 6 種排列，但只要算前 3 種即可，後 3 種和前 3 種相比，僅是 A 和 B 的身份互換。

k=1，

AABB→AABB→AABB→···	✓
ABAB→ABAB→ABAB→···	×
ABBA→ABBA→ABBA→···	×

k=2，

AABB→AABB→AABB→···	✓
ABAB→BAAB→AABB→···	✓
ABBA→BBAA→BBAA→···	✓

k=3，

AABB→BBAA→AABB→···	✓
ABAB→AABB→BBAA→···	✓
ABBA→BBAA→AABB→···	✓

k=4，

AABB→BBAA→AABB→···	✓
ABAB→BABA→ABAB→···	×
ABBA→AABB→BBAA→···	✓

3. n=3，同理，原有20種排列，但只要算其中10種即可。

k=1，

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→AABABB→···	×
AABBAB→AABBAB→···	×
AABBBA→AABBBA→···	×
ABAABB→ABAABB→···	×
ABBAAB→ABBAAB→···	×
ABBBAA→ABBBAA→···	×
ABABAB→ABABAB→···	×
ABABBA→ABABBA→···	×
ABBABA→ABBABA→···	×

k=2，

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→AABABB→···	×
AABBAB→AABBAB→···	×
AABBBA→AABBBA→···	×
ABAABB→BAAABB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→BBAAAB→BBAAAB→···	×
ABBBAA→BBBAAA→BBBAAA→···	✓
ABABAB→BAABAB→AABBAB→···	×
ABABBA→BAABBA→AABBBA→···	×
ABBABA→BBAABA→···	×

k=3，

AAABBB→AAABBB→···	✓
AABABB→BAAABB→AAABBB→···	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
AABBBA→BBBAAA→···	✓
ABAABB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
ABBBAA→BBBAAA→···	✓
ABABAB→AABBAB→BBAAAB→AAABBB→···	✓
ABABBA→AABBBA→BBBAAA→···	✓
ABBABA→BBAABA→AABBBA→BBBAAA→···	✓

k=4，

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	✓
AABABB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABBAB→BBAAAB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABAABB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABBBAA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABABAB→BABAAB→AABABB→AAABBB→···	✓
ABABBA→BBABAA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABBABA→AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	✓

k=5，

AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	✓
AABABB→BBAABA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
AABBAB→AAABBB→BBBAAA→AAABBB→···	✓
AABBBA→BBBAAA→AAABBB→···	✓
ABAABB→BBABAA→AABBAB→AAABBB→···	✓
ABBAAB→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABBBAA→AAABBB→BBBAAA→···	✓
ABABAB→AABABB→BBAABA→BBBAAA→···	✓
ABABBA→BBABAA→AABBAB→AAABBB→···	✓
ABBABA→BABBAA→AABABB→BBAABA→BBBAAA→···	✓

k=6，

AAABBB→BBBAAA→···	✓
AABABB→BBAABA→ABBAAB→BABBAA→···	×
AABBAB→BAABBA→ABAABB→BBABAA→AABBAB→···	×
AABBBA→AAABBB→···	✓
ABAABB→BBABAA→AABBAB→BAABBA→···	×
ABBAAB→BABBAA→AABABB→BBAABA→···	×
ABBBAA→AAABBB→···	✓
ABABAB→BABABA→···	×
ABABBA→AABABB→BBAABA→···	×
ABBABA→AABBAB→BAABBA→···	×

4. n=4，同理，原有70種排列，但只要算其中35種即可。

5. n=5，同理，原有 252 種排列，但只要算其中 126 種即可。

(二)觀察.

表1　1≦n≦5，可以/不能 達成國際數學奧林匹亞2022年第 1 題要求的 k 值

n	k 的值	
	可以達成問題 1 的要求	不能達成問題 1 的要求
1	1，2	無
2	2，3	1，4
3	3，4，5	1，2，6
4	4，5，6	1，2，3，7，8
5	5，6，7，8	1，2，3，4，9，10

(三)分析

1. 可以/不可 達成國際數學奧林匹亞2022年第 1 題要求的 k 值範圍。

表2　將表 1 的 k 值用範圍表示

n	k 的值	
	可以達成問題 1 的要求	不能達成問題 1 的要求
1	1≦k≦2	無
2	2≦k≦4－1	k＝1，4
3	3≦k≦6－1	1≦k≦2，k＝6
4	4≦k≦8－2	1≦k≦3，7≦k≦8
5	5≦k≦10－2	1≦k≦4，9≦k≦10

2. 猜測，觀察表 2 可以達成國際數學奧林匹亞2022年第 1 題要求的 k 值範圍，發現：

1. k≧n，1≦n≦5　　式(1)
2. k的最大值略小於全部硬幣數量　　式(2)

先討論 式(1)：

例1. N＝6 ，以下狀態使得當 1≦k≦5，無論操作幾次，最左邊 6 枚不會是同一材質

AAAAABABBBBB

由例 1 可知道對於一般的 n，k≧n 。

接著討論 式(2)：

例2. 以下狀態為n＝6，如果 k＝10、11、12，則持續操作會回復成起始狀態，期間不會發生 6 枚同材質硬幣集中到最左邊。

AAABBBAAABBB

例3. 以下狀態為n＝7，如果 k＝12、13、14 ，則持續操作會回復成起始狀態，期間不會發生 7 枚同材質硬幣集中到最左邊。

AAAABBBBAAABBB

由例 2 和例 3 看來，如果 k 選整列硬幣的最末段——最末段長度大約是 n 的一半的那些位置，則存在一種狀態，當 n 是偶數 6 時，k在最末端的$\frac{6}{2}$個數，當 n 是奇數 7 時，k 在最末端的$\frac{7}{2}$，$\frac{7}{2}$＝3.5 取整數為 3 個數時，無論如何操作，最左側 n 枚不會同一材質。經討論後老師告訴我們一個更方便的表示方式：高斯符號[χ]。在數學領域中，有時需要略去一個數的小數部分，只研究它的整數部分，可用高斯符號來表示。高斯符號[χ]是指取「小於或等於 χ 的最大整數」，例如：[3.6]＝3，[1]=1。因而推測 $k\leq 2\times n-[\frac{n}{2}]$，其中[　]為高斯符號。

統整起來，對於一般化的(n，k)，猜測如下：

$n\leq k\leq 2\times n-[\frac{n}{2}]$

3. 驗證**猜測**成立

驗證過程是本小組試算一百個以上數據後，所發現的討論和敘述。

(1) 如果一列硬幣恰有 2 段同花段，則已使得最左邊 n 枚為同一種材質。

(2) 承 1 ，如果恰有 3 段，則必有一段為同一材質，操作 1 次即可達成。

(3) 承2，如果段數≧4，持續操作下去，總有某材質同花段長度加長。以n＝6為例，全部12枚，依猜測，令$6\leq k\leq 12-\frac{6}{2}=9$。

假如每次操作都不會改變每一段同花的長度，表示**每次操作**，包含第 k 枚的同花段包含到第12枚—也就是最後 1 枚，因為如果沒有包含，則操作 1 次後會使兩段同材質同花段結合，得到一長度更長的同花段。若包含第12枚，則該段硬幣數最少有12－9＋1＝4。注意到已假設每次操作都不會改變同花段的長度，由於段數≧4，推得全體硬幣數量≧4×4＝16，和全部原有12枚矛盾！

所以只要一列硬幣同花**段數**≧4，便會一直發生某材質硬幣同花段變長，直到 6 枚都聚集在一起，就可達成最左邊 n 枚同一材質。

(四)國際數學奧林匹亞2022年第 1 題的解答.

1. 所求之數對如下：

n=1，k=1、2　　式(3)

$n\geq 2，n\leq k\leq 2\times n-[\frac{n}{2}]$　　式(4)

以下先說明：不能出現最左邊的 n 枚硬幣都是同一種材質的 k 之範圍，再說明能出現的 k 之範圍。

2. n≧2，將說明下列範圍，存在一種起始狀態無法操作至最左 n 枚均為同一材質。

證.

(1) 1≦k≦n－1

令左起第 1 枚至第 k 枚均為 A ，第k+1枚為 B 。可知尚有 n－k 枚鋁幣在左起第k＋1枚之後，此狀態依題意操作將使得每一步的硬幣列狀態均和起始狀態相同，表示不會出現左邊為 n 枚相同材質硬幣的狀態。例n=3，1≦k≦3－1，k=1、2，在AABABB的狀況下，都沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

(2) $2n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq 2n.$

① n 為偶數，第 1 枚至第$\frac{n}{2}$枚為 A 同花段，右接長度$\frac{n}{2}$枚 B 同花段，再右接長度$\frac{n}{2}$枚 A 同花段，最後接長度$\frac{n}{2}$枚 B 同花段，持續操作所得狀態和起始同。例n=4，$2\times 4-[\frac{4}{2}]+1\leq k\leq 2\times 4$，7≦k≦8，k=7、8，在AABBAABB的狀況下，都沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

② n 為奇數，第 1 枚至第$[\frac{n}{2}]$+1枚為 A 同花段，右接長度$[\frac{n}{2}]$＋1 枚 B 同花段，再右接長度$[\frac{n}{2}]$枚 A 同花段，最後接長度$[\frac{n}{2}]$枚 B 同花段，持續操作所得狀態和起始同。例如:n=3，$2\times 3-[\frac{3}{2}]+1\leq k\leq 2\times 3$，k=6，在AABBAB的狀況下，沒有辦法讓左邊都是同一個材質。

上述①和②主要說明當$2n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq 2n$，我們能找到一種起始狀態使得在操作過程中，都不會出現國際數學奧林匹亞2022年第 1 題要求的狀態。

3. 式(3)式(4)就是國際數學奧林匹亞2022年第 1 題所求

證.

(1) n=1，k=1, 2. 只要看AB這一種即可：

k=1，AB→AB

k=2，AB→BA

(2) $n\geq 2，n\leq k\leq 2n-[\frac{n}{2}]$

不失一般性，設第 k 枚為 A 。如果該同花段含最後一枚，則操作 1 次後全數同花段長度不變；若不包含，操作 1 次後會使得兩段 B 同花段結合，得到一條加長的 B 同花段。注意到不可能每次要移到最左的同花段總能包含最後一枚，利用反證法：假如可以，先看總同花段數：若是 2 段或 3 段，必可完成題意要求；若是≧4 段，則有

硬幣列長度$\geq 4\times([\frac{n}{2}]+1)>4\times(\frac{n-1}{2}+1)=2n+2$，

與給定條件矛盾！故經過若干次操作後，只要總段數≧4，必得長度漸增的 A 同花段或 B 同花段，直到某材質同花段長度為 n 枚。

二、硬幣爲 3 種以上的情形

推廣至m≧3的發想來源，思考國際數學奧林匹亞2022年第 1 題時，曾想過用黑和白來區別兩種材質的硬幣，一旦解決國際數學奧林匹亞2022年第 1 題，我們聯想到如果顏色不限黑白，而是彩色，也就是硬幣種類數≧3，那麼推廣原題條件的結果會是什麼？

問題2（國際數學奧林匹亞2022年第 1 題的 m 種硬幣版本）. 奧斯陸銀行發行 m 種硬幣：分別記作：A，B，C，D，…，等。喬治分別有 n 枚，他任意地將這些硬幣排成一列。我們稱相同材質的連續一小段硬幣為「同花段」。給定一正整數 k≦m×n ，喬治重複下列的操作：找出包含由左數來第 k 枚硬幣的最長同花段，然後把這個同花段中的所有硬幣移到整列硬幣的最左邊。舉例來說，當n＝3，m＝3，k＝7時，從這個起始狀態開始操作，過程會是

AABCBABCC→BAABCBACC→ABAABCBCC→BABAABCCC→CCCBABAAB→AACCCBABB→AAACCCBBB→BBBAAACCC→…

找出符合 1≦k≦m×n 的所有數對(n, k)，使得不管是什麼起始狀態，在操作過程的某個時刻，**會形成恰好 m 個同花段**。

先從無法達成問題 2 要求的 k 值找起。

(一) m＝3

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k

例4. n＝4，m＝3，以下狀態使得當1≦k≦7時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBBCACCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例5. n＝4，m＝3，以下狀態使得當7≦k≦8時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBAABBCCCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例6. n＝4，m＝3，以下狀態當11≦k≦12時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBCCAABBCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例7. n＝5，m＝3，以下狀態當1≦k≦9時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAAABBBBBCACCCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例8. n＝5，m＝3，以下狀態當9≦k≦10時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBAABBCCCCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

例9. n＝5，m＝3，以下狀態當14≦k≦15時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AAABBBCCCAABBCC。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

觀察上面的例子，猜測當

$1\leq k\leq 2\times n，3\times n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq 3\times n$　　式(5)

無法達成問題 2 的要求。

2. m＝3，問題 2 要求的 k 值，由式(5)，推測當

$2n+1\leq k\leq 3\times n-[\frac{n}{2}]$

就是m＝3時，問題 2 所要求的 k ，以下為證明過程。

證. 以下(1)、(2)說明無法達成要求的 k 值範圍，(3)說明可以達成要求的 k 值範圍。

(1) 如果 n 是偶數：

①下列狀態使得當$1\leq k\leq 2\times n-1$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA…ABB…BCAC…C

其中左起 A 有$n-1$枚，接著 B 有 n 枚，然後接 CAC…C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當$2\times n-1\leq k\leq 2\times n$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA…AABB…BBAA…AABB…BBCCCC……CCCC

A 和 B 各連續$\frac{n}{2}$枚，交替排列，最末 n 枚排 C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A 和 B 的同花段長度不變。

③下列狀態使得當$3\times n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq 3\times n$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA…BB…CC…AA…BB…CC…

其中左起各有$\frac{n}{2}$枚 A、$\frac{n}{2}$枚 B、$\frac{n}{2}$枚 C 依序排列，最後再接$\frac{n}{2}$枚 A、$\frac{n}{2}$枚 B、$\frac{n}{2}$枚 C，上面狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

(2) 如果 n 是奇數：

①下列狀態使得當$1\leq k\leq 2\times n-1$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA…ABB…BCAC…C

其中左起 A 有$n-1$枚，接著 B 有 n 枚，然後接 CAC…C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當$2\times n-1\leq k\leq 2\times n$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA…ABB…BAA…ABB…BCC…C

左起 A 和 B 分別有連續$\frac{n+1}{2}$枚，再右接$\frac{n-1}{2}$枚 A 及$\frac{n-1}{2}$枚 B，最後接 n 枚 C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

③下列狀態使得當$3\times n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq 3\times n$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段

AA…BB…CC…AA…BB…CC…

其中左起各有$\frac{n+1}{2}$枚 A、$\frac{n+1}{2}$枚 B、$\frac{n+1}{2}$枚 C 依序排列，最後再接$\frac{n-1}{2}$枚 A、$\frac{n-1}{2}$枚 B、$\frac{n-1}{2}$枚 C，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態 A、B、C 同花段長度不變。

(3) 問題 2，m=3時，題目要求的 k 之範圍

$n=1$，$1\leq k\leq 3$，　　式(6)

ABC→ABC
ABC→BAC
ABC→CAB

$n\geq 2$，$2n+1\leq k\leq 3\times n-[\frac{n}{2}]$　　式(7)

(二) m=4

1. 例子觀察

不能達成問題 2 要求的 k

例10. n=4，m=4，以下狀態當<u>$1\leq k\leq 11$</u>時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

<u>AAABBBBCCCCDADDD</u>，

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

例11. n=4，m=4，以下狀態當<u>$11\leq k\leq 12$</u>時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBCCAABBCCDDDD，

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態，各材質的同花段長度不變。

例12. n=4，m=4，以下狀態當<u>$15\leq k\leq 16$</u>時，一直操作都不會出現問題 2 要求的狀態：

AABBCCDDAABBCCDD。

上面的狀態，持續操作，每一次的狀態，各材質的同花段長度不變。

根據例10～例12，提出m=n=4，可達成問題 2 要求，能得到恰有 4 段同花的 k 的範圍：

$$3n+1\leq k\leq 4\times n-[\frac{n}{2}]$$

2. 問題 2，m=4時，題目所要求的 k 之範圍

$n=1$，$1\leq k\leq 4$，　　式(8)

ABCD→ABCD
ABCD→BACD
ABCD→CABD
ABCD→DABC

$n\geq 2$，$3\times n+1\leq k\leq 4\times n-[\frac{n}{2}]$　　式(9)

(三) 一般化的 m

1. 不能達成題目 2 要求的 k

(1) n 為偶數：$1\leq k\leq m\times n$，C_i表示第 i 種硬幣，前$(m-1)\times n-1$枚安排如下

AA…ABB…BCC…CDD…D…$C_{m-1}C_{m-1}$…$C_{m-1}C_m$AC_mC_m…C_m

① A 為長度$n-1$枚的同花段，右接第 n 枚到第$(m-1)\times n-1$枚排各材質硬幣全集合的同花段，末$n+1$枚排C_mAC_mC_m…C_m

當 $1\leq k\leq(m-1)\times n-1$，持續操作不會出現恰有 m段同花，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②當$(m-1)\times n-1\leq k\leq(m-1)\times n$，前$(m-1)\times n$枚安排如下：

AA…BB…CC…DD…Cm−1 C_{m-1}…AA…BB…CC…DD…$C_{m-1}C_{m-1}$…$C_mC_mC_m$…C_m

A、B、C…C_{m-1}各連續$\frac{n}{2}$枚同花段，再右接A、B、C…C_{m-1}各連續$\frac{n}{2}$枚同花段，最末 n 枚排C_m，上面狀態持續操作，每一次的狀態 A、B、C…C_{m-1} C_m同花段長度不變。

③當$m\times n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq m\times n$時，下列狀態持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

AA…ABB…BCC…CDD…D…C_mC_m…C_mAA…ABB…BCC…CDD…D…C_mC_m…C_m

分別排每種材質長度為$\frac{n}{2}$枚的同花段，自第$\frac{m\times n}{2}+1$格起重覆此排列，可知當$m\times n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq m\times n$，經過若干次操作後會回復原來的狀態，期間不會產生形成恰好 m 個同花段。

(2) n 為奇數：

①如果 n 是奇數：下列狀態使得當 $1\leq k\leq(m-1)\times n-1$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

AA…ABB…BCC…CDD…D…$C_{m-1}C_{m-1}$…$C_{m-1}C_m$AC_mC_m…C_m

其中左起 A 有$n-1$枚，右接第 n 枚到第$(m-1)\times n-1$枚排各材質硬幣全集合的同花段，末$n+1$枚排C_mAC_mC_m…C_m，上面的狀態，持續操作，每一次的狀態灰底的 A 都在原位。

②下列狀態使得當$(m-1)\times n-1\leq k\leq(m-1)\times n$時，持續操作不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

AA…BB…CC…DD…$C_{m-1}C_{m-1}$…AA…BB…CC…DD…$C_{m-1}C_{m-1}$…$C_mC_mC_m$…C_m

左起A、B、…、C_{m-1}分別有連續$\frac{n+1}{2}$枚，接著A、B、…、C_{m-1}分別有連續$\frac{n-1}{2}$枚，最末 n 枚排C_m。

③下列狀態使得當$m\times n-[\frac{n}{2}]+1\leq k\leq m\times n$時，下列狀態持續操作，不會有某個時刻形成恰好 m 個同花段。

AA…BB…CC…C_{m-1}…$C_{m-1}C_mC_m$…C_mAA…BB…CC…C_{m-1}…$C_{m-1}C_mC_m$…C_m

其中左起A、B、C、D…$C_{m-1}C_m$各有$\frac{n+1}{2}$枚，最後再接A、B、C、D…$C_{m-1}C_m$各$\frac{n-1}{2}$枚。

2. 可以達成問題 2 要求的 k

$n=1$，$1\leq k\leq n$，　ABC…N→ABC…N　式(10)

ABC…N→BAC…N
ABC…N→CAB…N
⋮
ABC…<u>N</u>→NAB…M

$n\geq 2$，$(m-1)\times n+1\leq k\leq m\times n-[\frac{n}{2}]$　　式(11)

陸、結論

一、給出數學奧林匹亞2022年第 1 題的解答。

$n=1$，$k=1$、2

$n\geq 2$，$n\leq k\leq 2n-[\frac{n}{2}]$

二、推廣原題，研究 $m\geq 3$ 種硬幣的情形，給出能符合原題要求的 k 值。

$n=1$，$1\leq k\leq n$

$n\geq 2$，$(m-1)\times n+1\leq k\leq m\times n-[\frac{n}{2}]$

柒、引用文獻

一、[1]International Mathematical Olympiad。IMO2022 Problems。2022/07/31。取自https://www.imo-official.org/problems.aspx。

二、南一文教事業教科書編輯委員會(民112年2月三版2刷)怎樣解題(一)(二)。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。國家教育研究院。