中華民國第 63 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080411

辛克曼的難題—Z 形棋的挑戰與擴充

學校名稱：屏東縣屏東市仁愛國民小學

作者：	指導老師：
小五 余沛翰	陳淑慧
小五 王有育	鄭鈺清
小六 陳穎萱	
小六 黃妙如	
小六 蘇上哲	

關鍵詞：辛克曼難題、Z 形移位遊戲、複合路徑圖

辛克曼的難題—Z 形棋的挑戰與擴充

摘要

我們從數學遊戲書裡發現西洋棋名家辛克曼發展予以解析並得到擴充結果如下：

一、使用 P_3V 型、P_4Z 型、P_5P 型、P_6R 型與 P_3I 型，以 K 移動位置作為橋接點 V_{Br}，我們找到$\mathscr{k}$值作為多階段移動結果組合數可得到最少移動總次數。

二、複合路徑圖以重圖為主，是E_Q和E_ℓ兩種路徑複合圖。

三、4 點配置 BR，當弧形邊數$E_Q \geq 2$，弧形邊可以視為 B-K 型組路徑，階段中直線數$E_\ell \geq 2$則可以視為 R-K 路徑。度序列衍生路徑組合若$E_Q \geq 2$優先配置 B，$E_\ell \geq 2$優先配置 K。

四、P_6 複合路徑圖的正例所有點都符合$\mathrm{DS} \geq 2$，反例特徵係每張圖至少有 1 點$\mathrm{DS} = 1$，可 2B2R、3B1R、1B3R、4R，3B1R 配置條件 $E_Q \geq 3$，2B2R 配置條件 $E_Q \geq 2$，1B3R 配置條件 $E_Q \geq 1$；但若圖中有 2 點 DS=1 且 $E_Q = 1$，僅能配置 4R。

壹、研究動機

我們在一本數學遊戲書中發現西洋棋名家辛克曼(W. Shinkman, 1847-1933)設計的三個 Z 形難題(3 Zigzag problems)，該遊戲又被稱為「取代遊戲」(replacing game)。挑戰者必須在有限的十連方設計中達成白國王取代黑騎士的目標，我們想解決這道難題並探討研究裡面的數學方法。

貳、研究目的

本研究先嘗試解決辛克曼 Z 形棋難題第二道題，在思考研究其他相關棋戲內容，例如探討遊戲擴充的可能性及條件，分成以下三個次主題探討：

一、以自創複合路徑圖挑戰 Z 形棋最少步數。

二、分析多連方結構與多角色配置的可能性。

三、找出複合路徑圖特徵與棋子移動最少步數的關係。

參、研究設備與材料

一、多色塑膠方塊，用來拼組各種連方組合可能。

二、紀錄資料與繪圖之 B5、A4 紙張和多色筆等文書用品。

三、電腦設備、微軟 Excel 文書處理程式、Geogebra 程式。

四、自製連方塊棋盤與複合路徑圖畫冊。

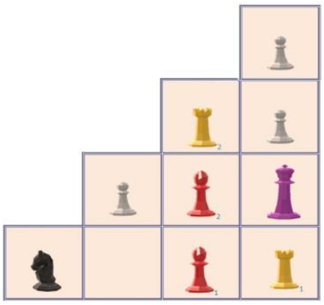
肆、研究過程及方法

一、現有文獻分析

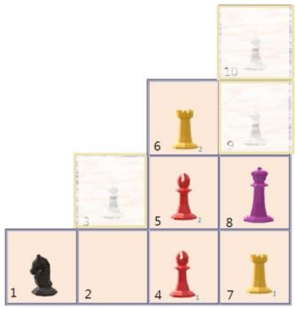
【命題由來】

辛克曼的難題原為辛克曼的 Z 形棋(3 Zig-zag problems, Petkovic, 1996)，取設計(b)挑戰，原設計是在4×4棋盤內置入 10 顆棋子，實際分析後發現 3 個小兵是虛子，餘下 6 子和 1 個空格，

也就是國王、主教、城堡分別有 1K2B2R，合計 6 顆棋子在七連方範圍內移動。

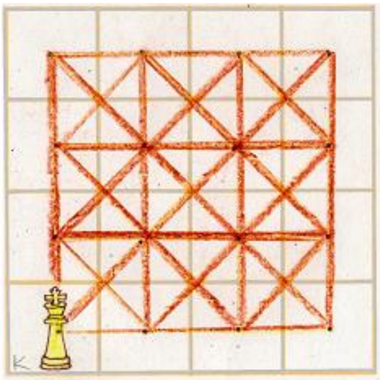


原始設計

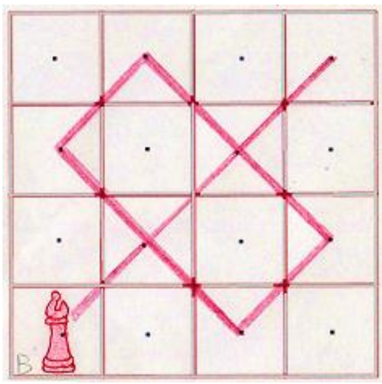


實際作用棋子

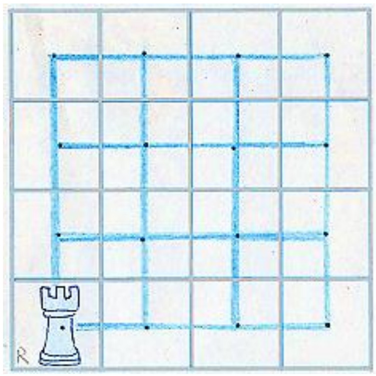
【前提】與西洋棋合法步數略有不同，該題限制棋子皆以 1 步為限。符合難題規定之國王路徑、主教路徑與城堡路徑，一次只能移動 1 步，國王 K 縱、橫、斜走、主教斜走、城堡縱、橫走，4x4 範圍路徑圖如下。



國王路徑 King's graph



主教路徑 Bishop's graph



城堡路徑 Rook's graph

【歷屆科展作品探討】

以西洋棋發展相關主題的數學作品頗多，有探討皇后互不攻擊難題、棋子配置與漢彌爾頓路徑關係等，近幾年歷屆作品則包含互不攻擊全控制主教配置(第 57 屆 十字軍斜征[1])、以騎士巡邏問題延伸出棋盤上擺放黑白兩子進行位置互換(第 58 屆 Knight One One[2])、以騎士巡邏探討交換騎士的可能以圖論分析棋盤設計與符合騎士交換條件之最適配置條件(第 60 屆 Crazy Knights)。

歷屆作品少討論到多種身分複合路徑，本研究探討多階段連方塊組合與棋子角色搭配結果再以複合路徑圖表徵移位策略是我們與歷屆作品間最大的差異。

二、名詞定義

(一) 點：由點與邊構成，「點」代表棋子的位置，以 v 表示， $v_1v_2v_3 \ldots \ldots v_n$分別「由下而上，由左而右」對應連方的位置。

(二) 橋接點：指國王移動後的新位置，以 V_{Br} 表示，代表下一個移位階段的起點，也是橋

接多個階段的點。

(三) 邊：表示點與點之間的關係，又分為兩種，第一種是直線表示縱橫走以「城堡」(Rook, 以 R 代稱)為主的路徑，用E_ℓ表示；第二種是斜走邊，以E_Q表示，複合路徑圖以斜線或弧形表示以「主教」(Bishop, 以 B 代稱)為主的路徑。

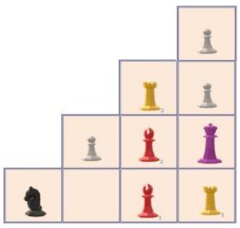
(四) 多連方：連方塊組合的型組，以 P_n 型組字母型表示，例如 P_5L 表示五連方 L 型，其中七連方為本研究擴充設計，以 Hep 表示。棋子在移動時如若進入循環狀態，以上下標表示P_n^C 該多連方可形成循環路徑，小寫 C 或(CIRC)標註可循環路徑。

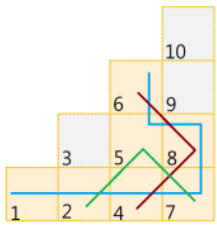
(五) 複合路徑圖：以點和邊構成的圖示方法，用來表徵不同棋子角色路徑複合結果。

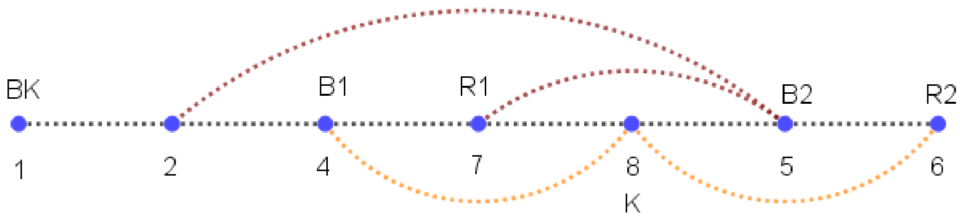
(六) 移動步數：國王 K、主教 B 與城堡 R 移動步數，以 M 表示，M_{max} 表示最多步數，M_{min} 表示最少步數。本研究依據七連方棋盤設計，得到三種情境狀態，分別以 k 值區別情境之總移動次數。

三、挑戰辛克曼的難題

【前情提要】難題設定目標是最終國王必須取代黑棋士(取得其領地)，但國王所到之處必須避開黑騎士可影響的區域，也就是騎士路徑所經之處，國王不可踩踏。

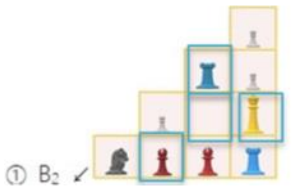






【第一階段】移動狀態示意—遙遠的距離是關鍵

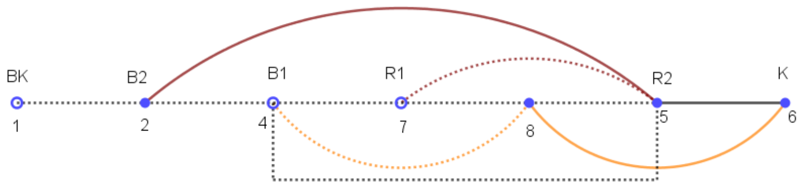
首先，我們將棋子合法移動方向皆視為連方塊範圍，在這裡是「不完全連方塊」，在路徑圖則不受多連方定義限制。

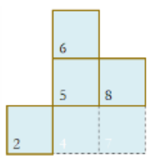


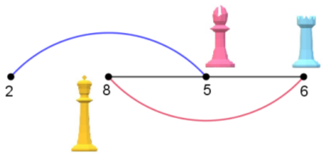
5→2

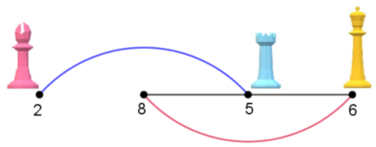
6→5

8→6









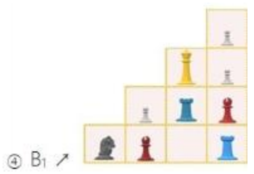
【發現 1】連方數決定棋子數，小兵不動的情形視為 P_3+1，外加一方塊以弧型路徑表示主教合法移動方向，以此開啟解題。

【發現 2】v4、v8、v6 形成兩個弧形路徑，$E_Q = 2$，3 點 2 弧至少可供兩個主教移動，這裡擺了國王，因此國王的功能等同主教。

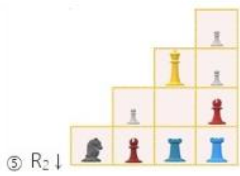
【發現 3】我們發現國王避開了黑騎士路徑，在第 3 步時來到**最上方**的位置， 國王的有效路徑數必須避開 V5 弧路徑，循 V8→V7→V4→V2→V1，因此 M_{max}=5。

【第二階段】循環路徑 P_4 與 P_5 組合合併為 P_6R 型

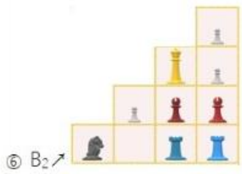
四連方 Z 型(CIRC)



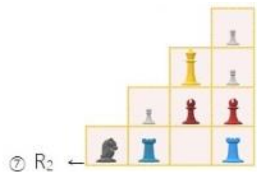
4→8



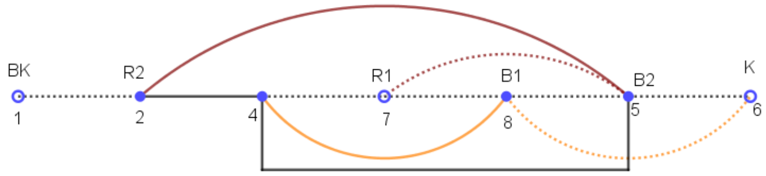
5→4

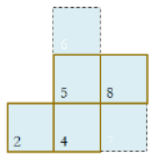


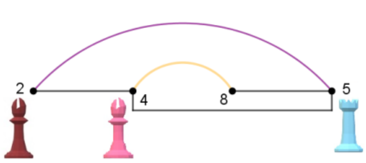
2→5

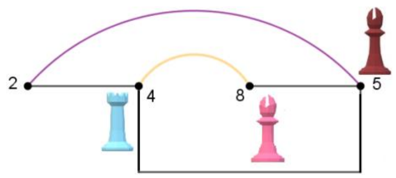


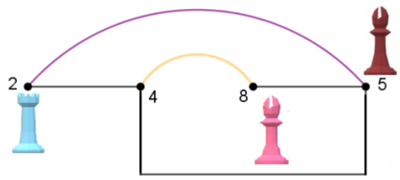
4→2



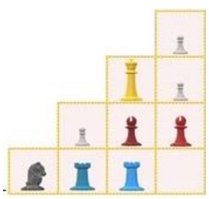




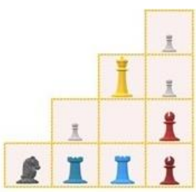




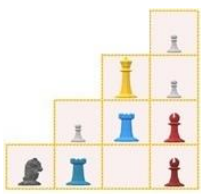
五連方 P 型(CIRC)



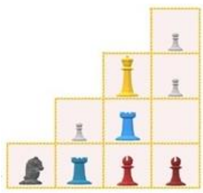
8: R_1 7→4



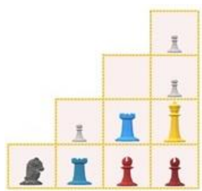
9: B_2 5→7



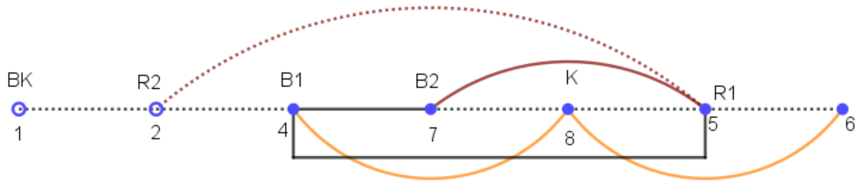
10: R_1 4→5

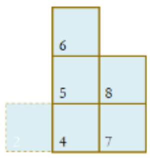


11: B_1 8→4

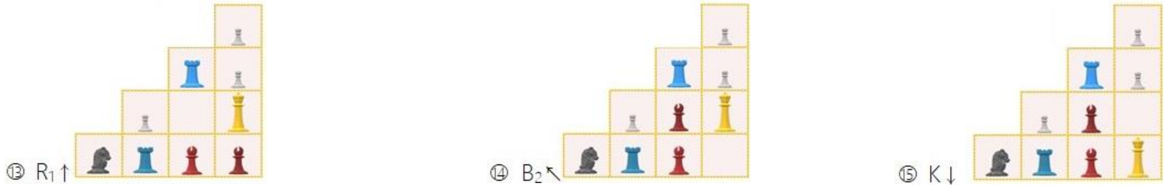


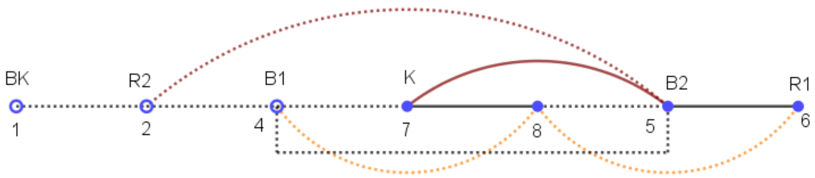
12: K 6→8

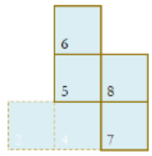




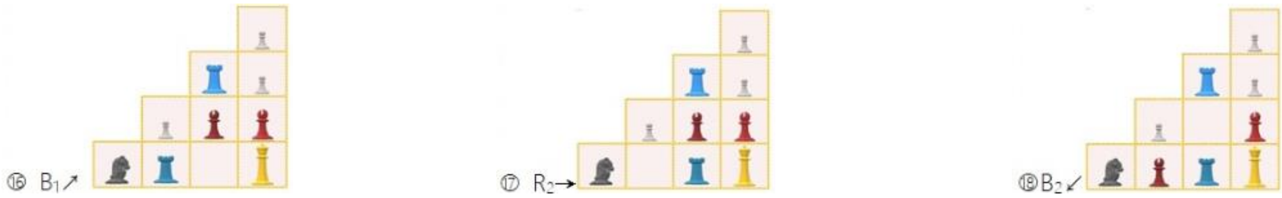
【第三階段】移動狀態示意 — R 型析出 N 型四連方



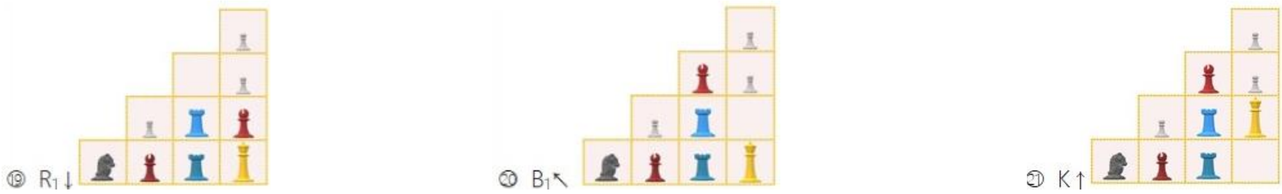




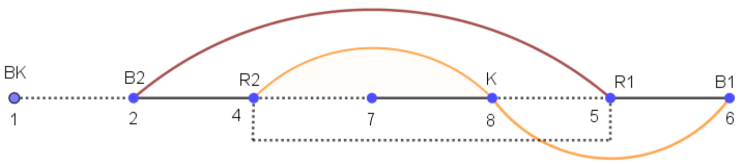
【第四階段】 完整兩組 BR 加 K 的 R 型六連方設計(CIRC)

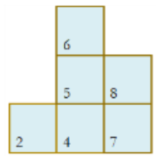


4⟶8　　2⟶4　　5⟶2

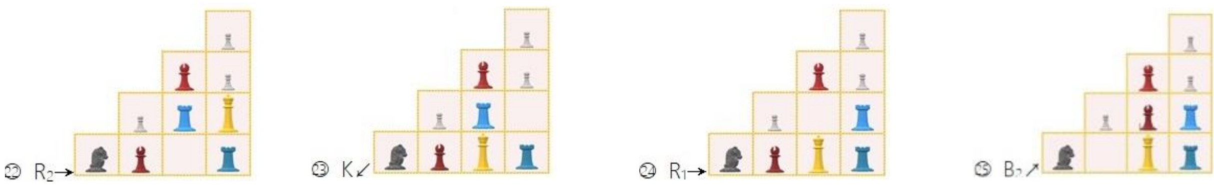


6⟶5　　8⟶6　　7⟶8

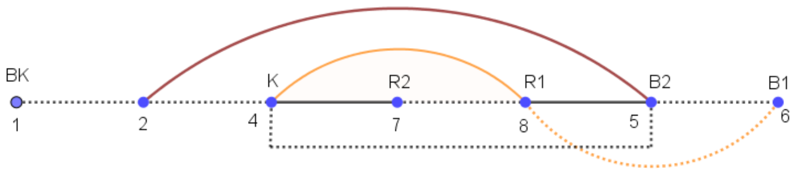


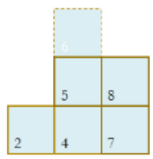


【第五階段】 逼近狀態示意—協商讓位—「類」兩組 BR 之 P 型五連方

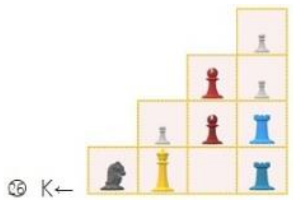


4⟶7　　8⟶4　　5⟶8　　2⟶5

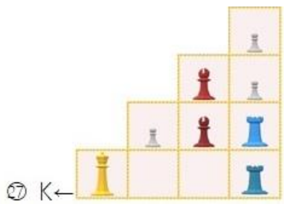




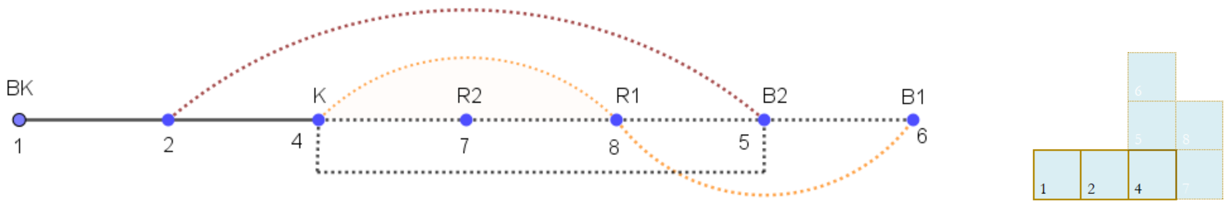
【發現與討論】在這裡國王不切段是因為國王的功能與主教相同，都走弧形邊，我們認為這時　候的國王形同主教，因此可以視為 2B2R 組合，$E_Q = 2$，$E_\ell = 2$。



4⟶2



2⟶1

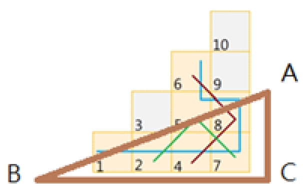


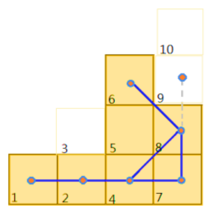
【第六階段】2 次國王的移動皆以二連方為單位，兩次 P_2I 併為三連方 I 型。

【小結】六連方 R 型是主要範圍，依序使用三、四、五連方，其中四、五連方個出現 2 次。我們發先連方塊決定棋子擺放位置，如果要讓主教順利移動，複合路徑圖至少要有弧形邊，當弧形邊數大於主教數量，國王可以使用路徑的機會就增加，因此弧形邊可以視為 B-K 型組路徑，直線則可以視為 R-K 路徑。

(七) 拆解辛克曼難題

最長路徑如何確認是真？我們試以不同國王路徑比較，包含合法與不合法路徑，V 9 取代 V6 計算直線與斜線路徑：





國王循 V9⟶V8⟶V7⟶V4⟶V2⟶V1，即 $\overline{AC}+\overline{CB}$ ，E_1=V-1=5

國王若改由 V9⟶V5⟶V2⟶V1，即$\overline{AB}$，E_2=V-1=3

$\overline{AC}+\overline{CB}>\overline{AB}$，$E_1$> E_2，由此可知辛克曼設計難題取最長路徑完成多階段組合。

根據連方塊分割結果得到總移動次數 M 與移位階段值：

$$M=P_4+P_9^c+P4+P_6^c+P_5+P2+P2=3+9+3+6+4+1+1=27$$

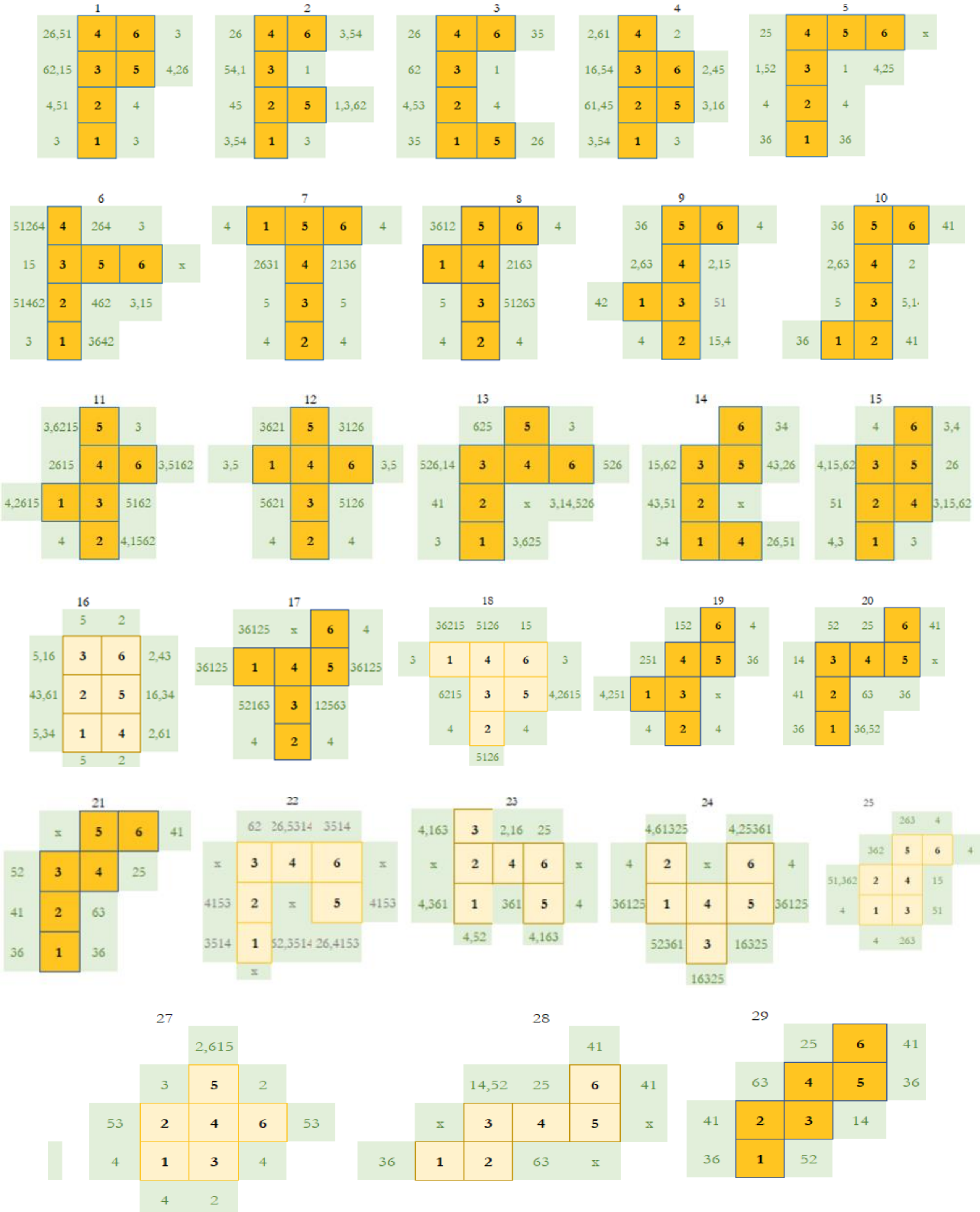
$$M_{max}=27,\ \mathcal{k}=7$$

(八) 難題擴充

【方法】從 35 張六連方唯一圖篩出 29 張符合4×4範圍六連方，與 V_0 組合發展 256 張 66 種七

連方棋盤設計。

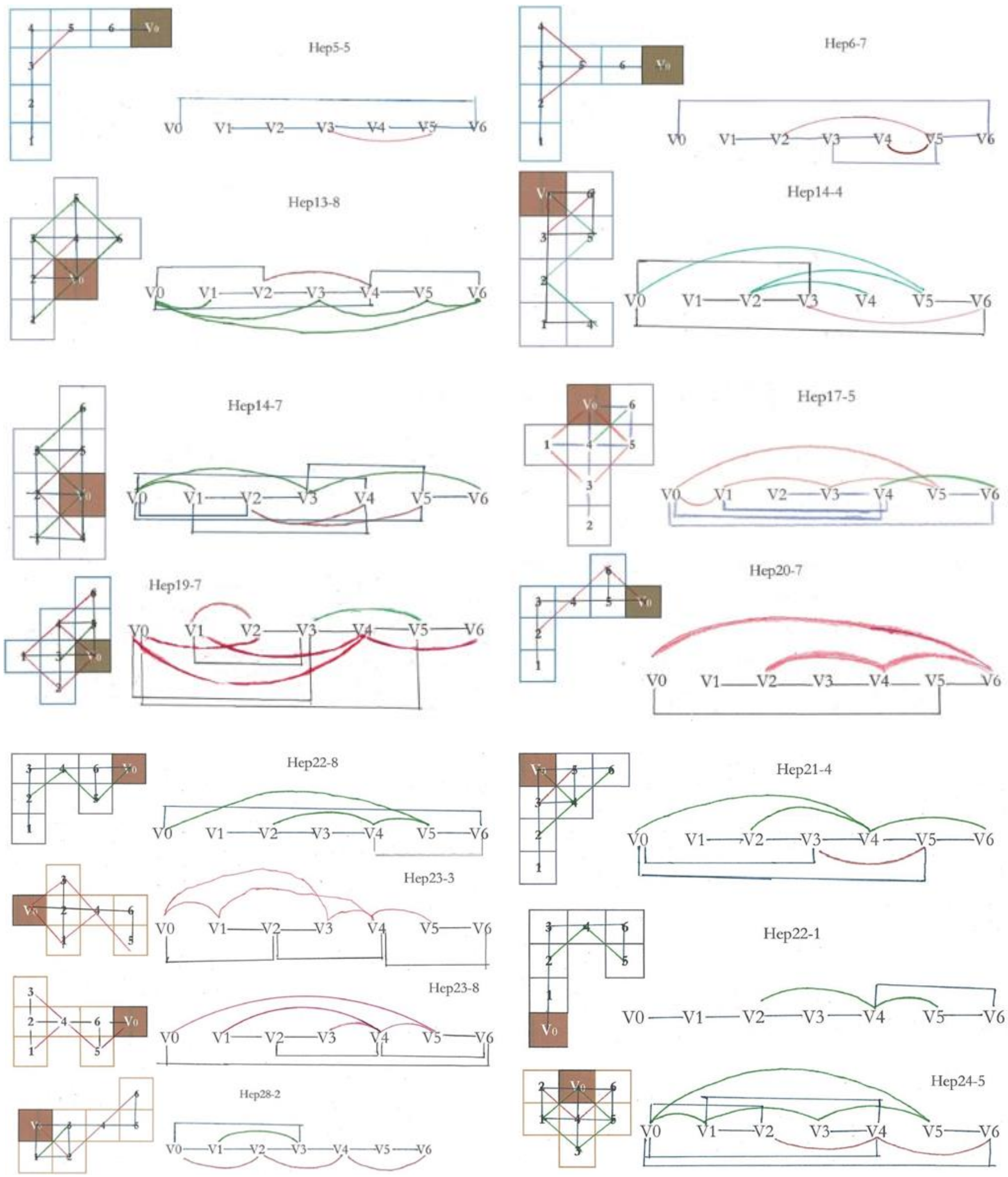
【擴充設計】圍繞六連方的綠色數字是預設 BK 位置，根據辛克曼的難題，國王不走騎士路徑，所以我們標註所有騎士到達位置，國王必須避開。



根據以上 29 張六連方唯一圖設計產生 256 張七連方棋盤設計，對照4×4範圍內七連方，得到4×2、4×3、4×4、3×3等 66 種唯一圖。比對後刪掉國王無法擺放或無法取代黑騎士的圖，剩下 238 張設計，分別符合三種情境。我們將全部棋盤設計以(V_0,V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6)依序標註度序列與E_Q 和E_ℓ 特徵，探究異構圖對棋子配置與移動影響。

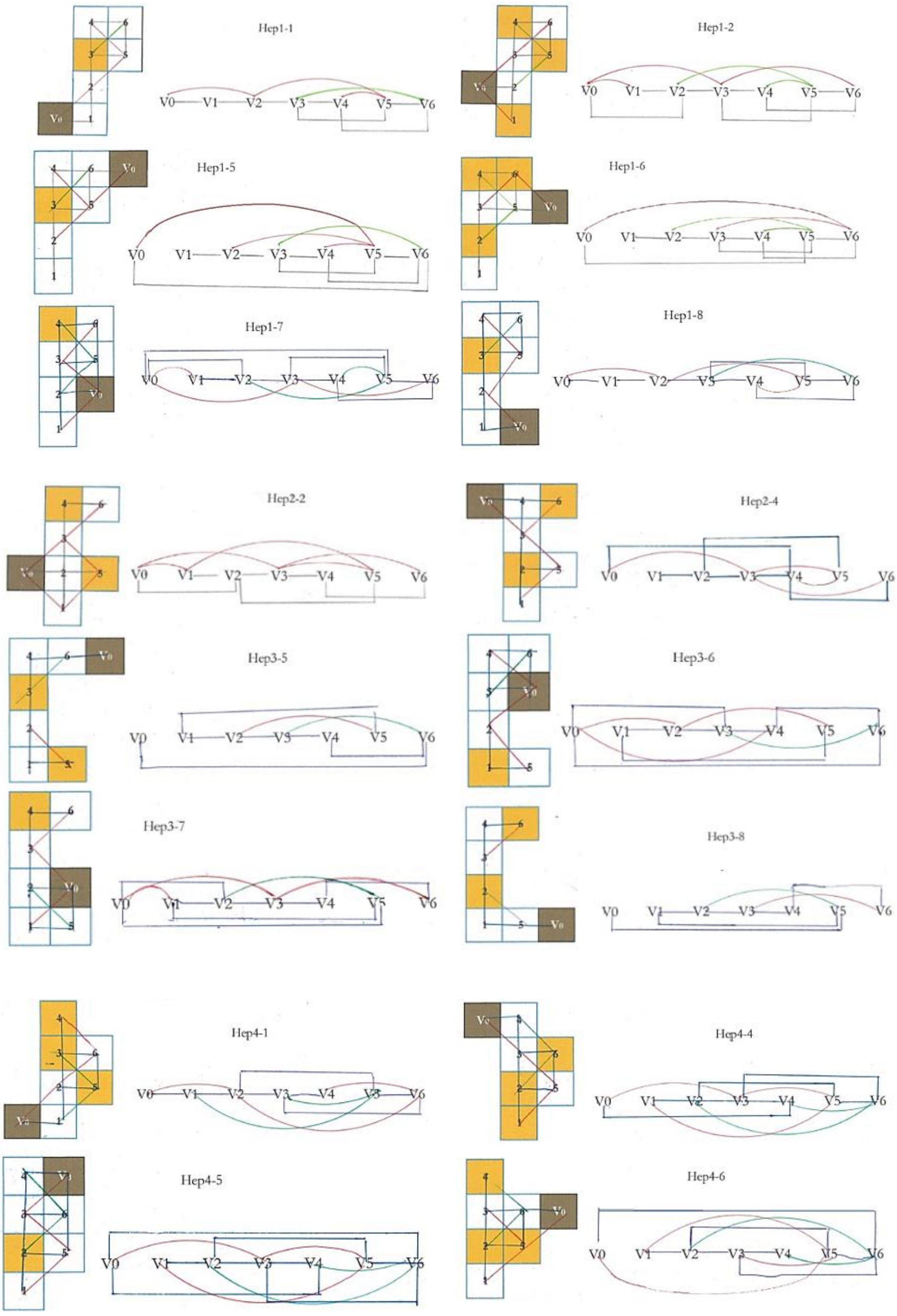
(九) 七連方 Hep 三種可行情勢設計

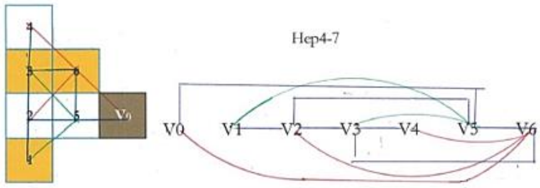
【情境 1】除 V0 旁須預留空格外，國王的路徑保留最多，總計 15 組七連方與對應複合路徑圖。



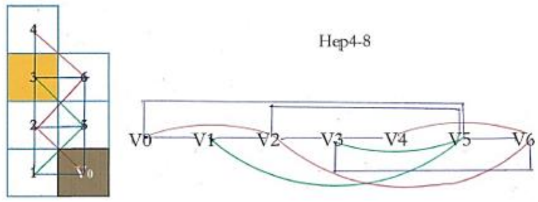
【情境 2】排除 BK 路徑所到之處不能配置 K，尚有空間配置，符合$|V_K - V_{BK}| \geq 2$條件，總

計 125 組七連方與對應複合路徑圖

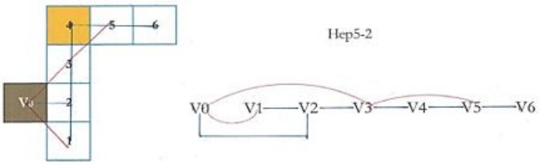




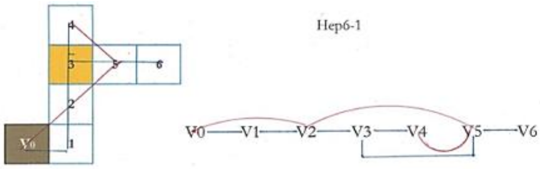
Hep4-7



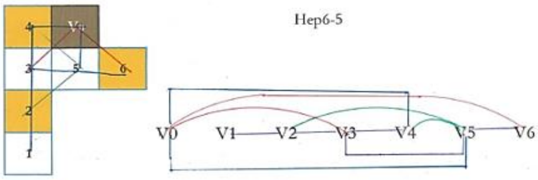
Hep4-8



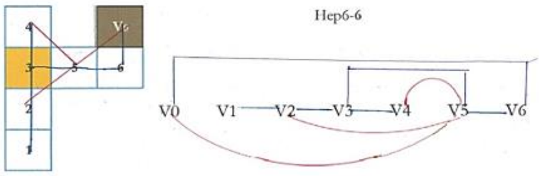
Hep5-2



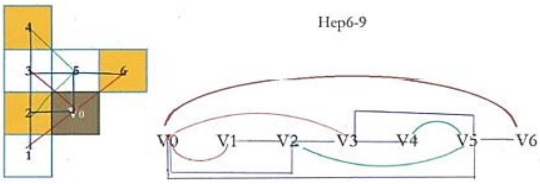
Hep6-1



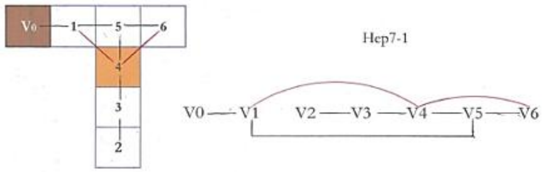
Hep6-5



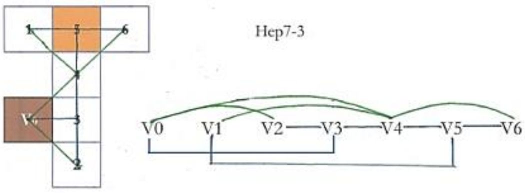
Hep6-6



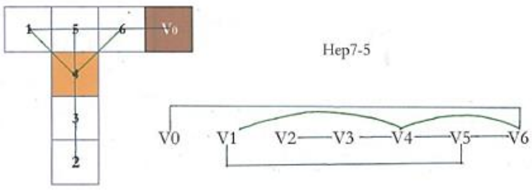
Hep6-9



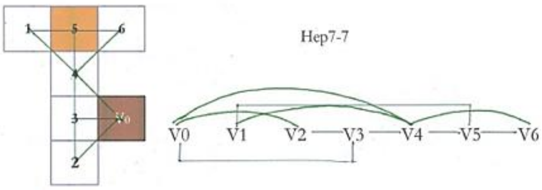
Hep7-1



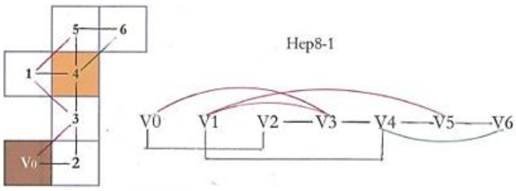
Hep7-3



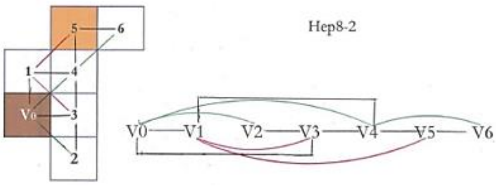
Hep7-5



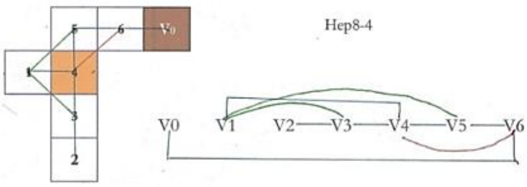
Hep7-7



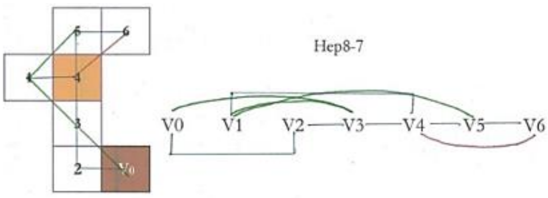
Hep8-1



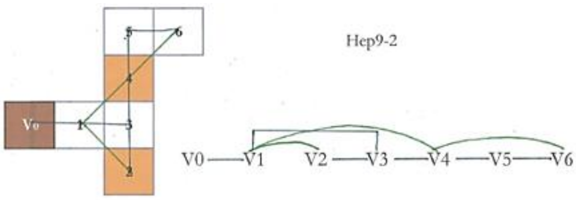
Hep8-2



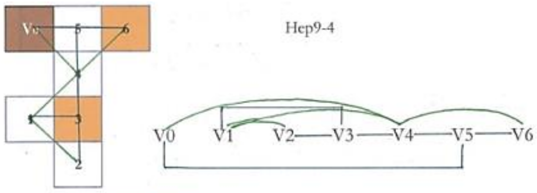
Hep8-4



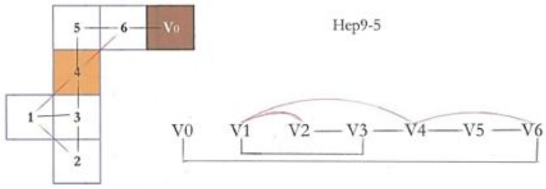
Hep8-7



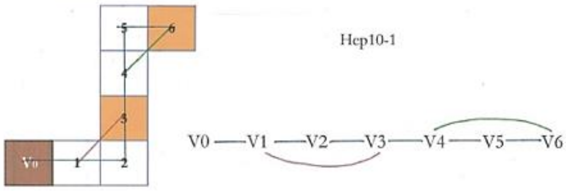
Hep9-2



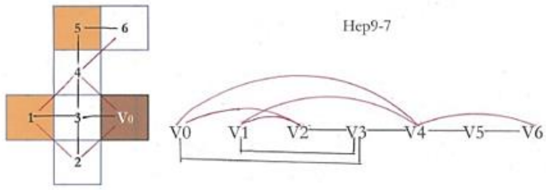
Hep9-4



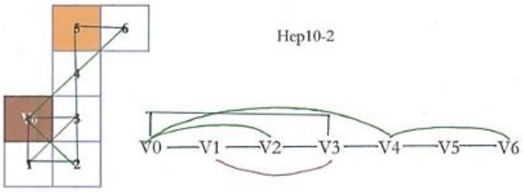
Hep9-5



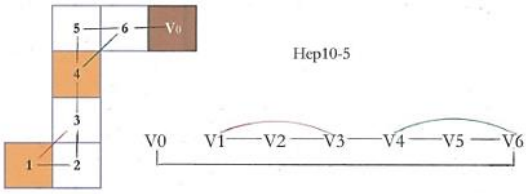
Hep10-1



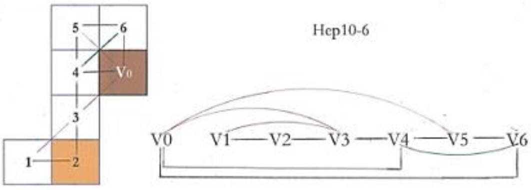
Hep9-7



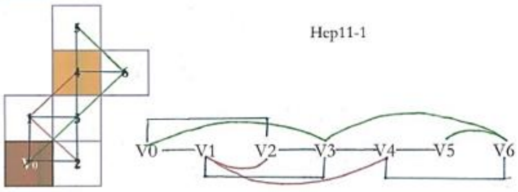
Hep10-2



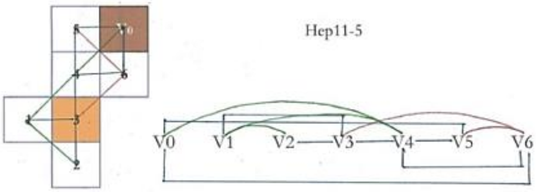
Hep10-5



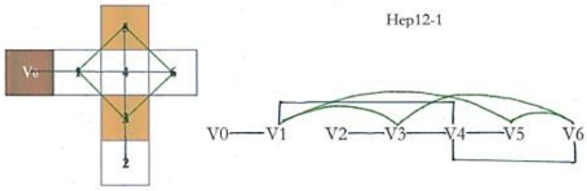
Hep10-6



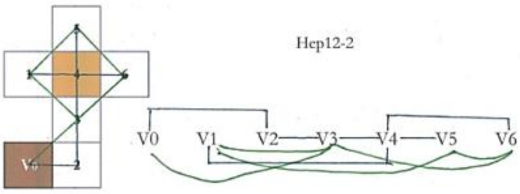
Hep11-1



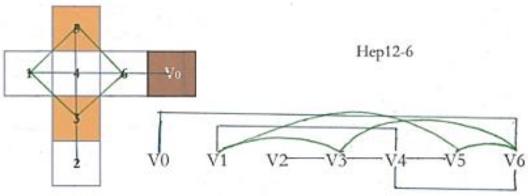
Hep11-5



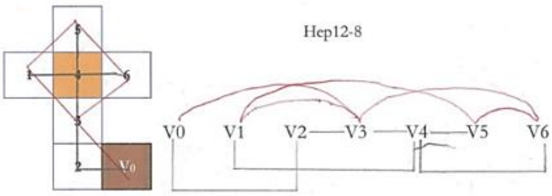
Hep12-1



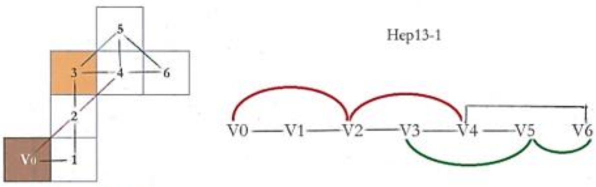
Hep12-2



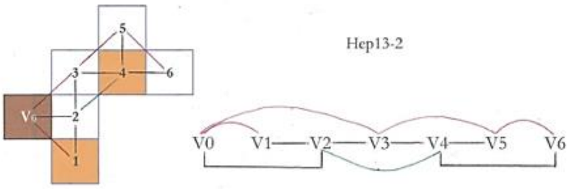
Hep12-6



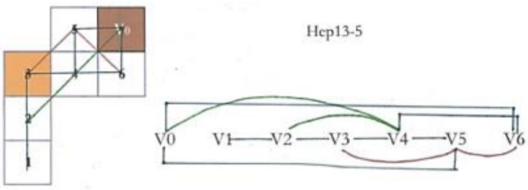
Hep12-8



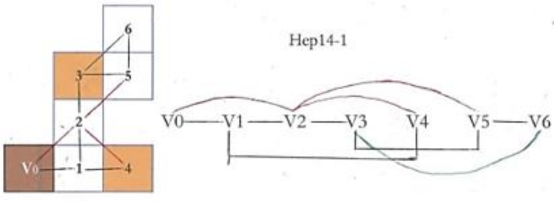
Hep13-1



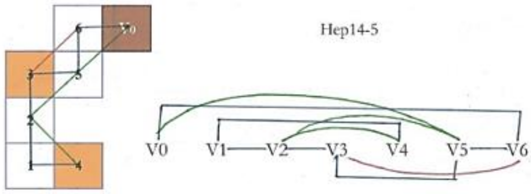
Hep13-2



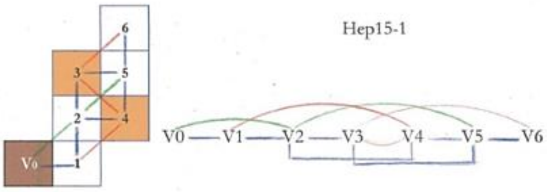
Hep13-5



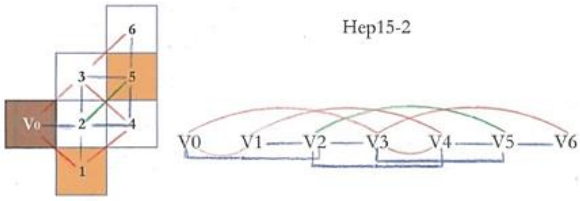
Hep14-1



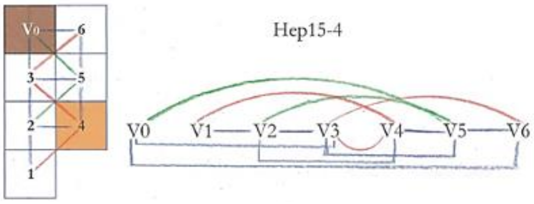
Hep14-5



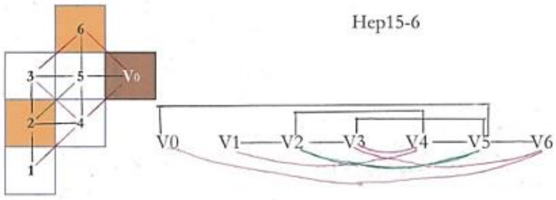
Hep15-1



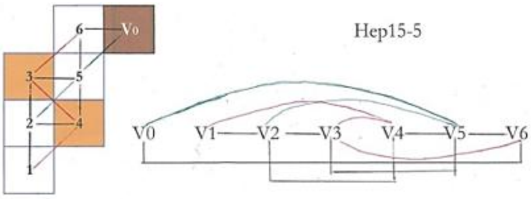
Hep15-2



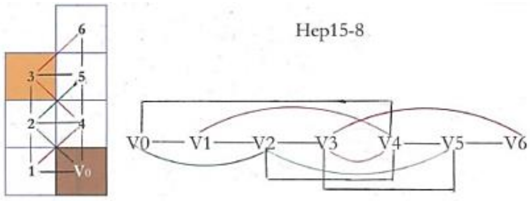
Hep15-4



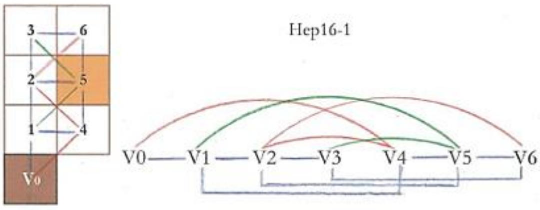
Hep15-6



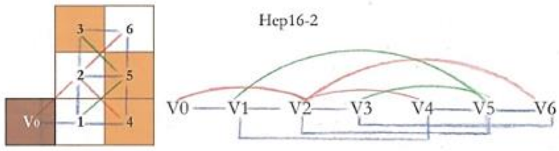
Hep15-5



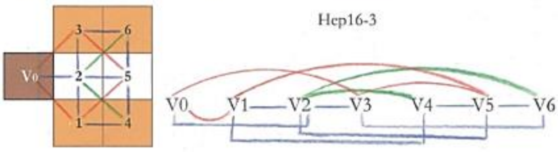
Hep15-8



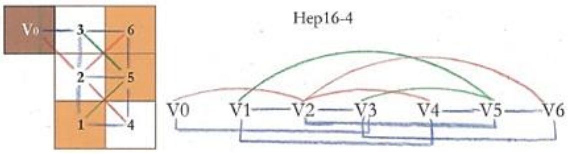
Hep16-1



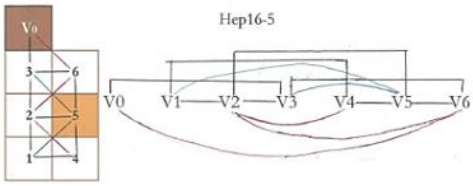
Hep16-2



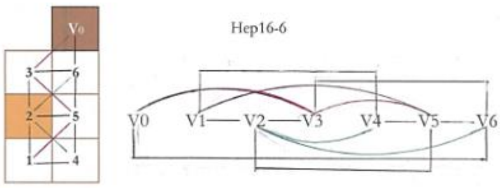
Hep16-3



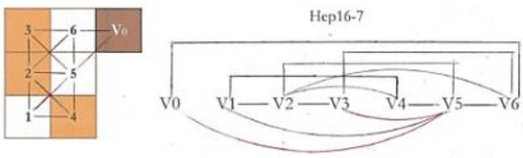
Hep16-4



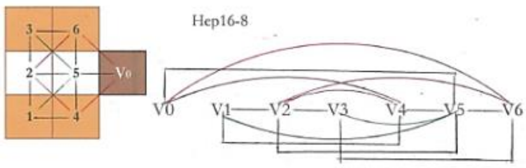
Hep16-5



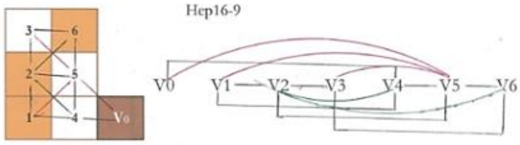
Hep16-6



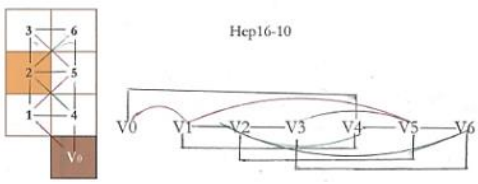
Hep16-7



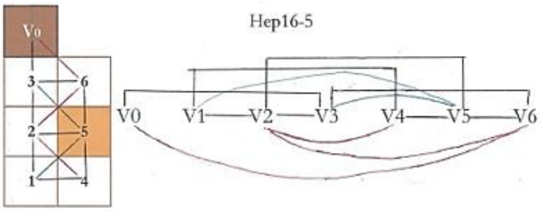
Hep16-8



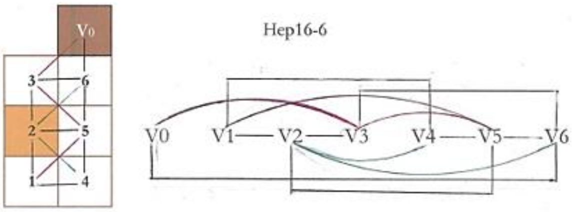
Hep16-9



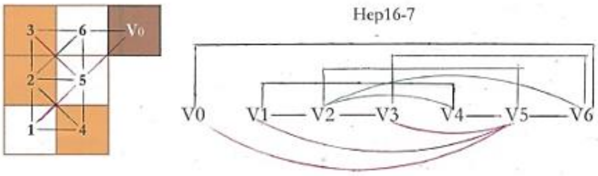
Hep16-10



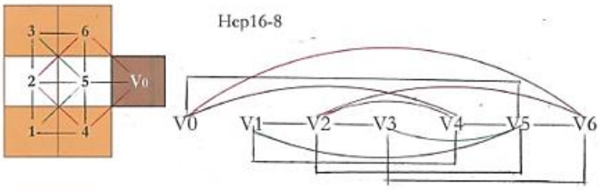
Hep16-5



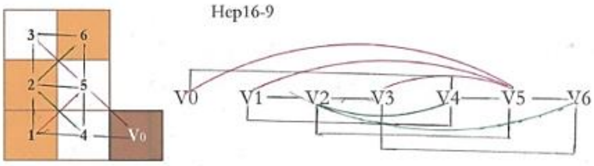
Hep16-6



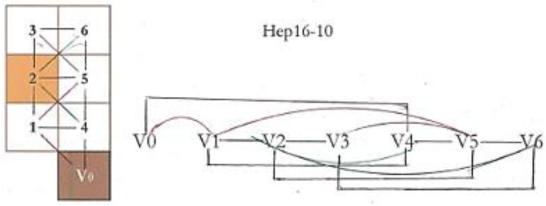
Hep16-7



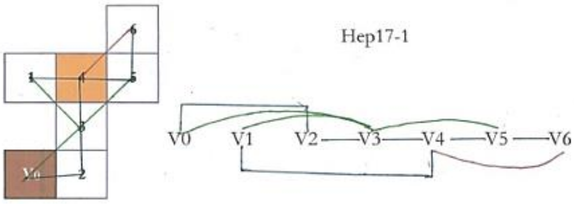
Hep16-8



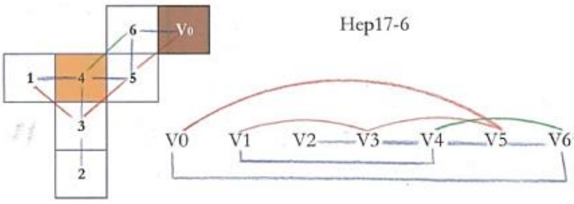
Hep16-9



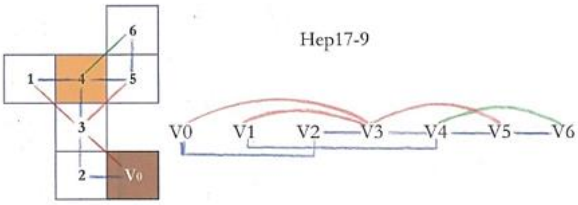
Hep16-10



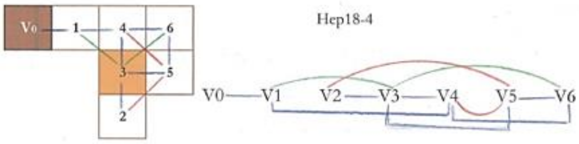
Hep17-1



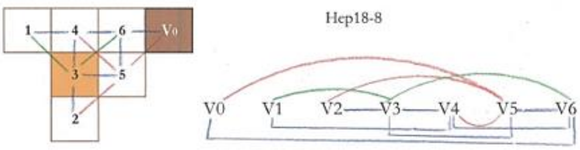
Hep17-6



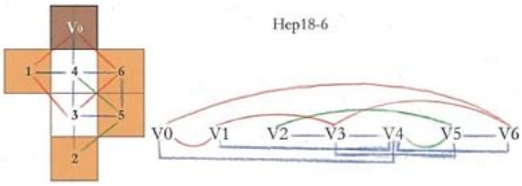
Hep17-9



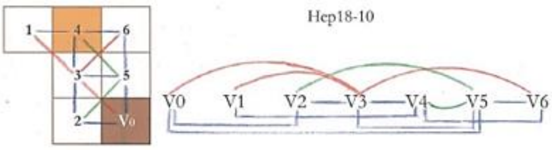
Hep18-4



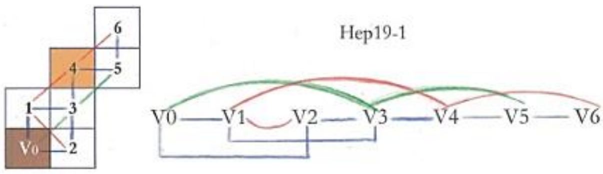
Hep18-8



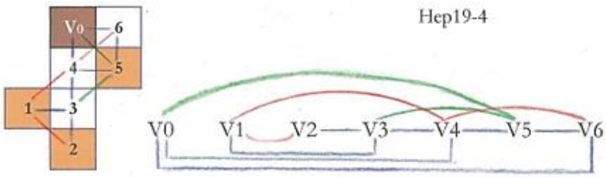
Hep18-6



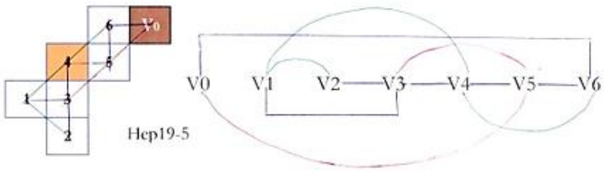
Hep18-10



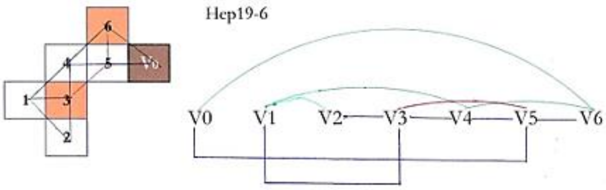
Hep19-1



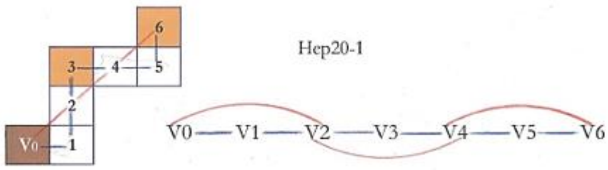
Hep19-4



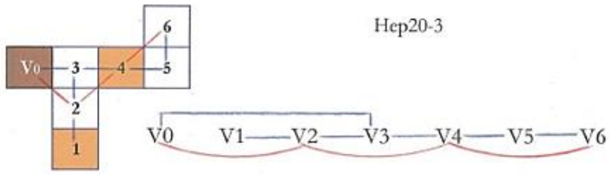
Hep19-5

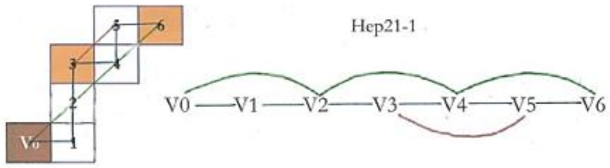


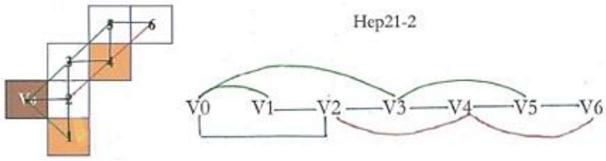
Hep19-6

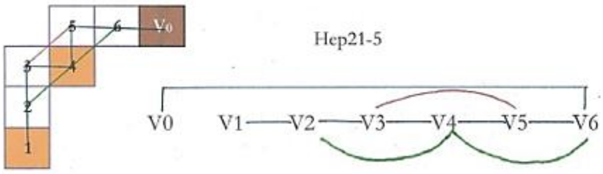


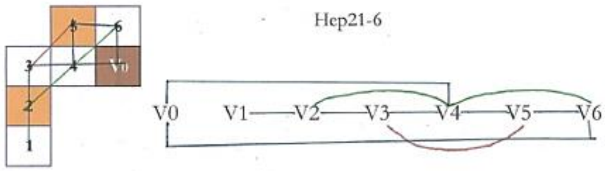
Hep20-1

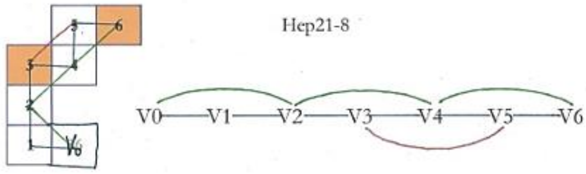
Hep20-3


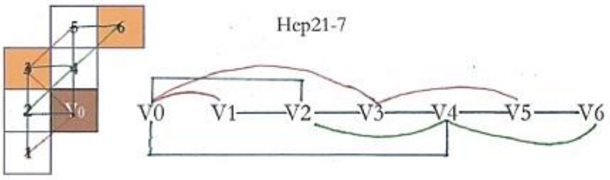
Hep21-1


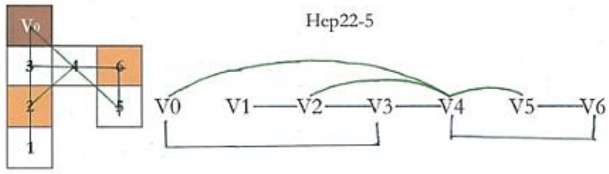
Hep21-2


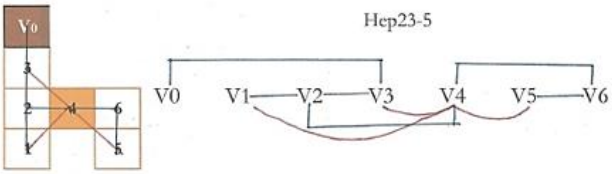
Hep21-5


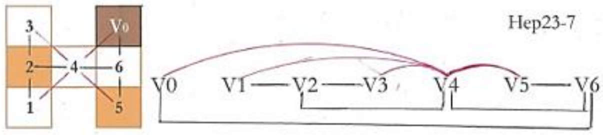
Hep21-6


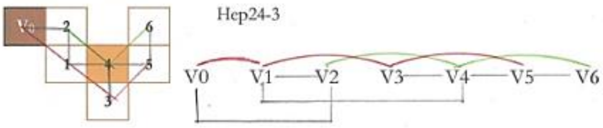
Hep21-8


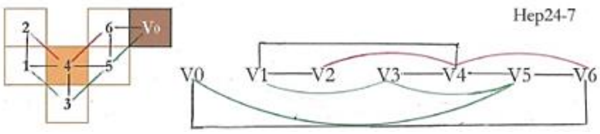
Hep21-7


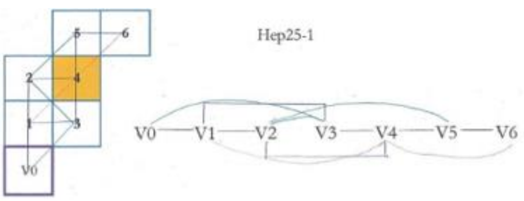
Hep22-5


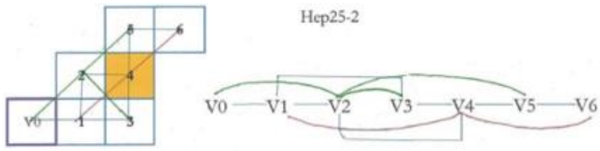
Hep23-5


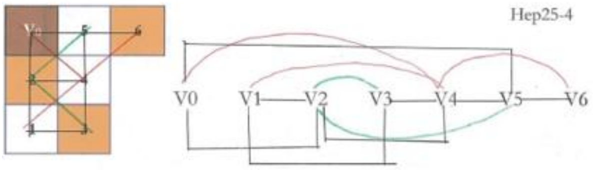
Hep23-7


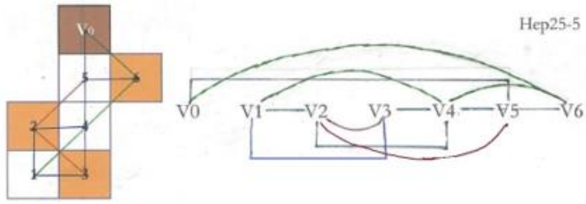
Hep24-3


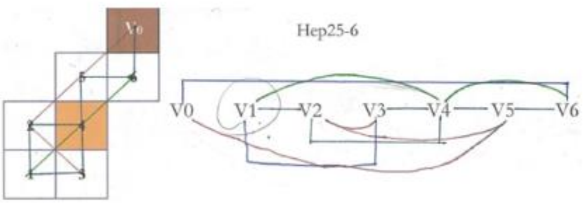
Hep24-7


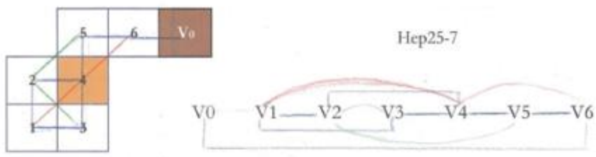
Hep25-1


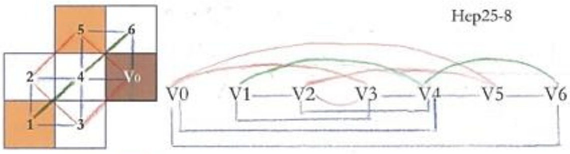
Hep25-2


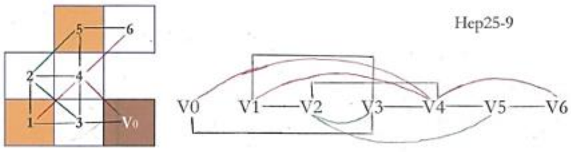
Hep25-4


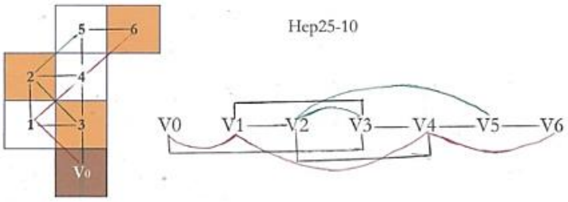
Hep25-5


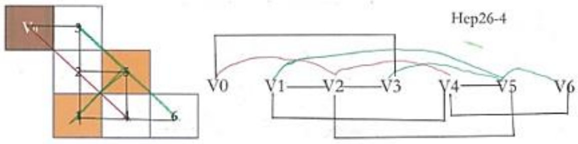
Hep25-6


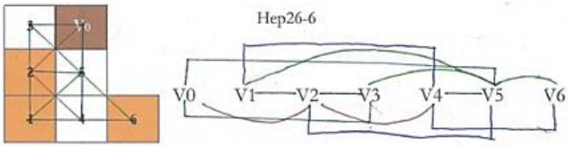
Hep25-7


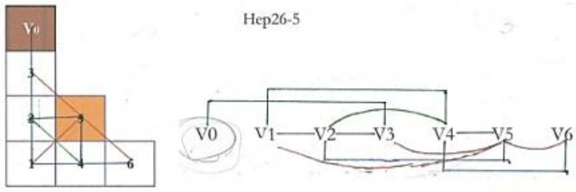

Hep25-8

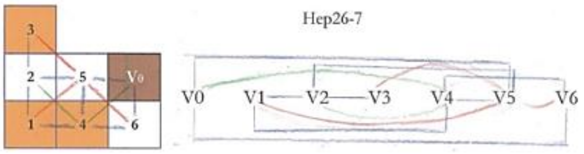

Hep25-9

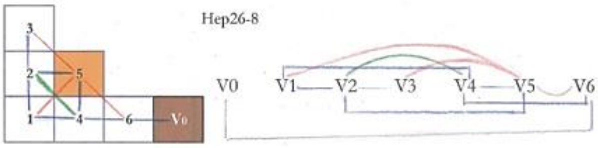

Hep25-10

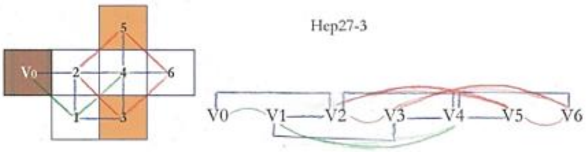

Hep26-4

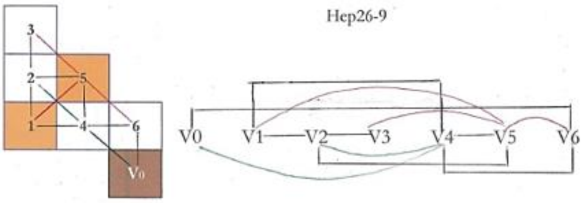

Hep26-6

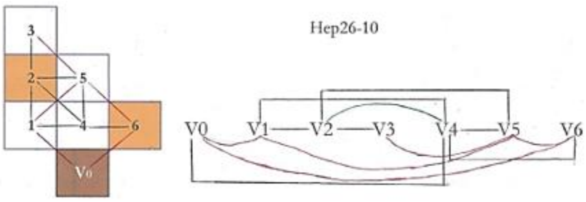

Hep26-5

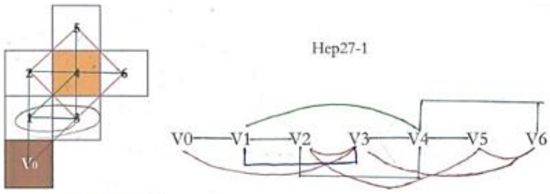

Hep26-7

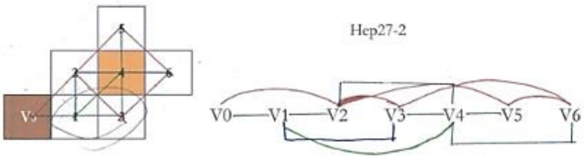

Hep26-8

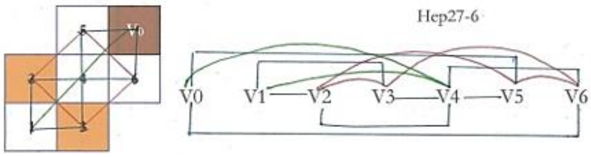

Hep27-3

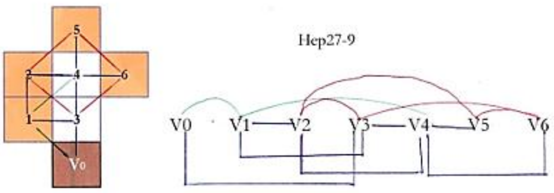

Hep26-9

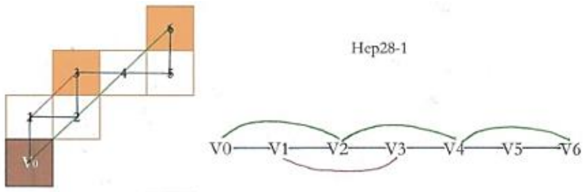

Hep26-10

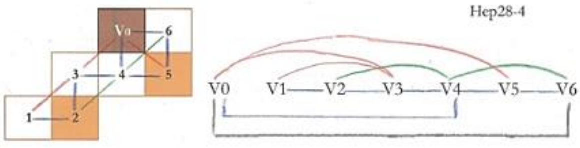

Hep27-1

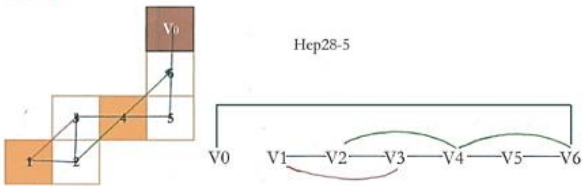

Hep27-2

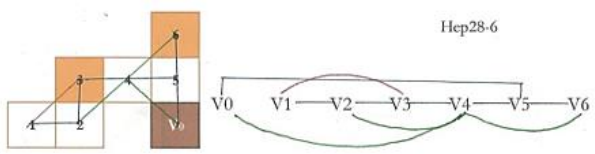

Hep27-6


Hep27-9

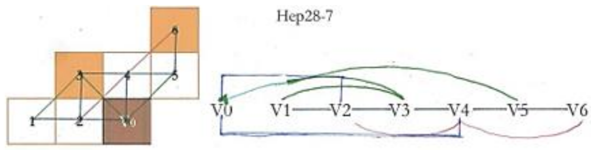

Hep28-1


Hep28-4

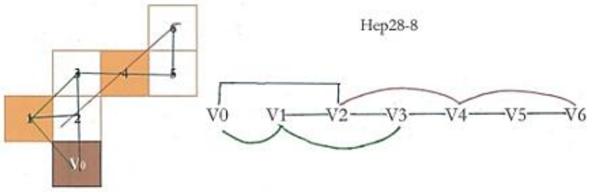

Hep28-5



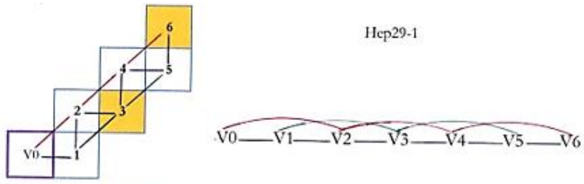
Hep28-6



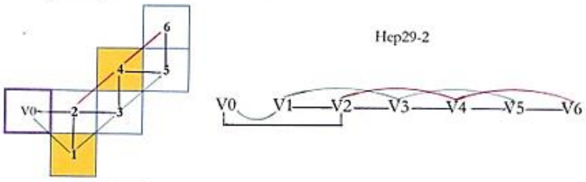
Hep28-7



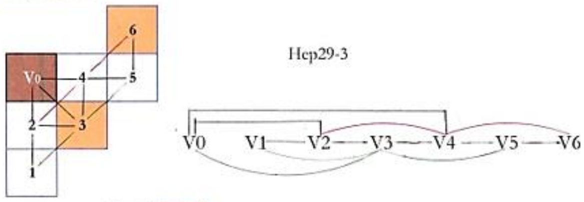
Hep28-8



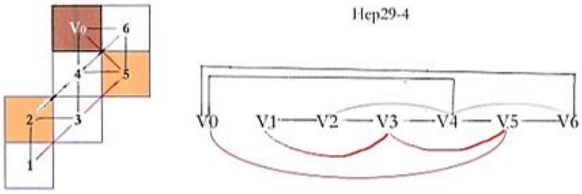
Hep29-1



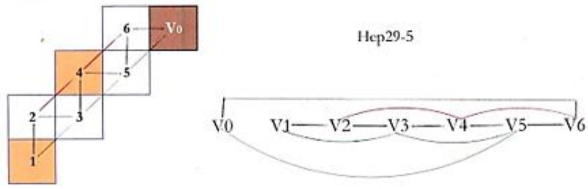
Hep29-2



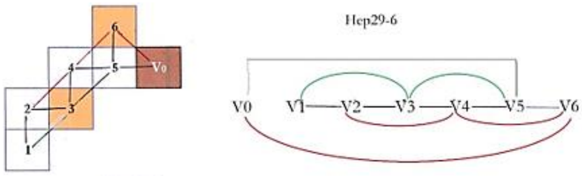
Hep29-3



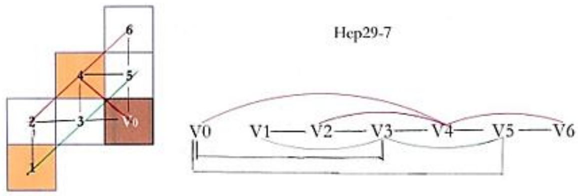
Hep29-4



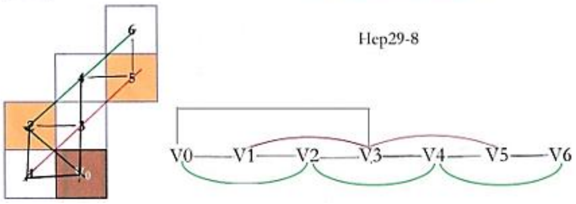
Hep29-5



Hep29-6

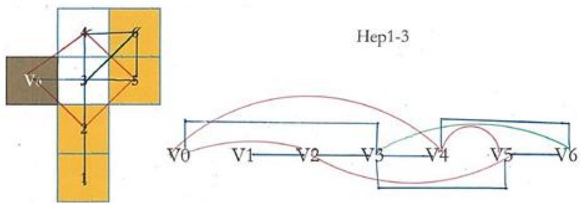


Hep29-7

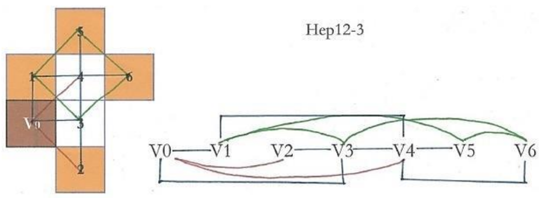


Hep29-8

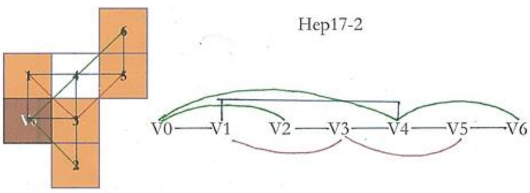
【情境 3】 總計 98 張，略以五冊各一張作為代表圖為例 A 冊 Hep1-3、 B 冊 Hep12-3、C 冊 Hep17-2、D 冊 Hep22-4 和 E 冊 Hep27-8 和 28-3。假設 BK 旁可放置 K。由於國王的位置緊鄰黑騎士，以「全部棋子皆移動至少 1 次」國王方可取代黑騎士為前提的設計，我們把這種視為特殊設計。



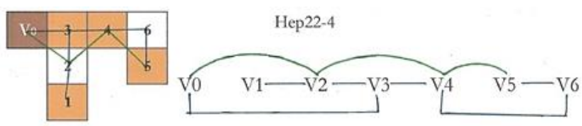
Hep1-3



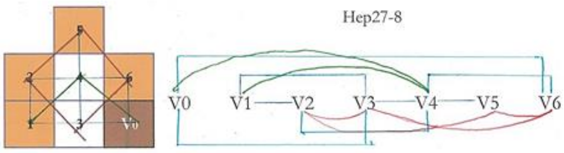
Hep12-3

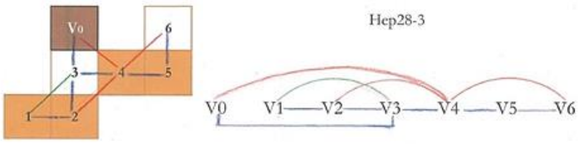


Hep17-2



Hep22-4



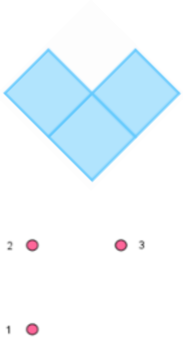


伍、研究結果與討論

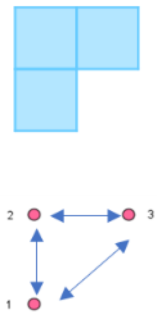
一、 連方塊、棋子角色與複合路徑的關係分析

(一) 由於多連方組合決定棋子路徑，因此分別分析後轉化為複合路徑圖與之比對。棋子身分分別以英文字母 K、B、R、P、BK 標註移動狀態，其中，供棋子移動的空位以「x」或以大寫「E」表示。

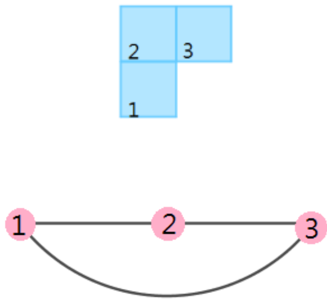
(二) 連方塊編碼「由左而右」、「由下而上」標號。例如三連方有兩種，第 1 種是連方塊連成直條，是一個1×3長方形，稱為 I 型；第 2 種是 V 型，考慮鏡射、旋轉視為同一型，以下以旋轉 135°作為代表連方塊圖，決定型態後標註編碼並轉化為複合路徑圖。



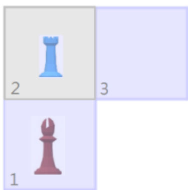
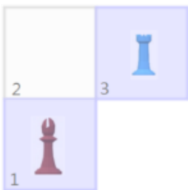
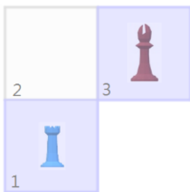
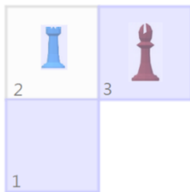
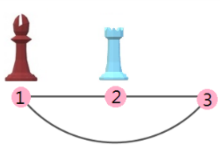
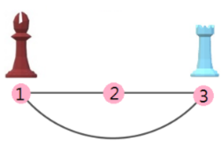
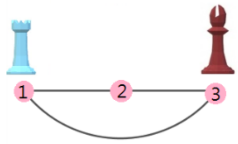
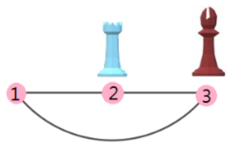
方格轉化為點

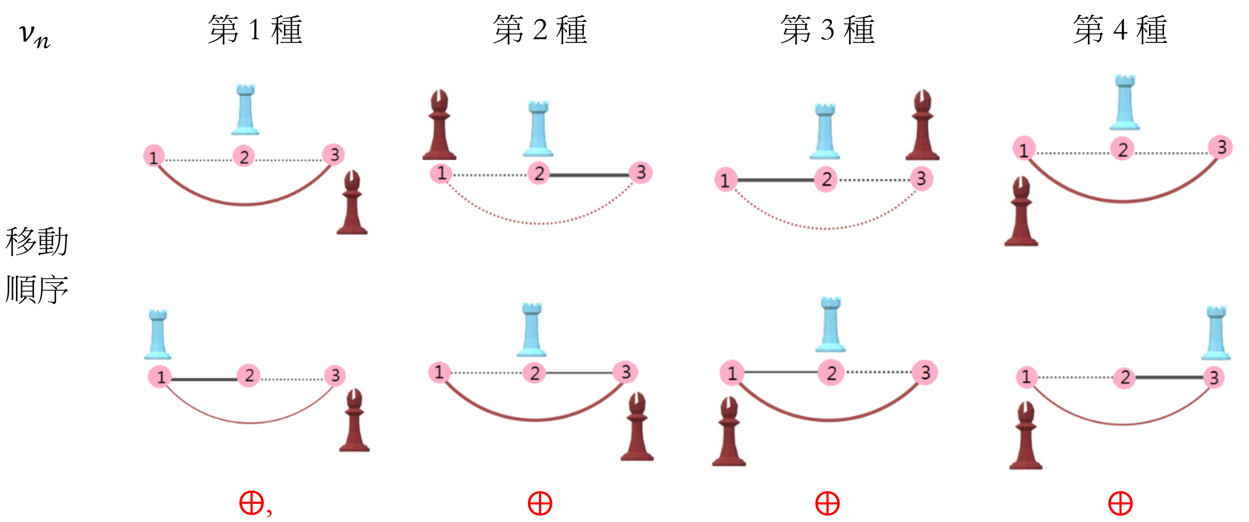


分析棋子路徑

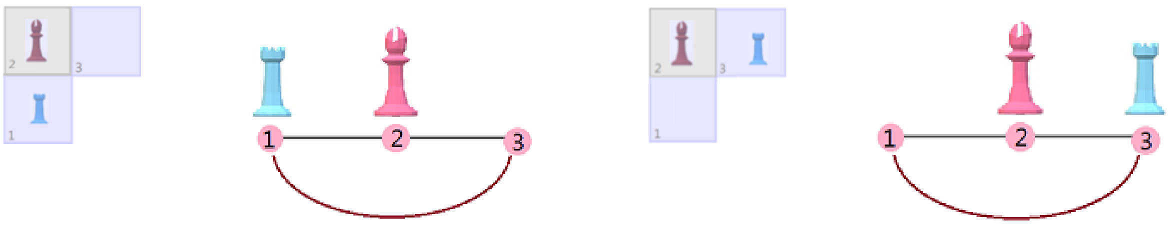


以複合路徑圖標註
點和點之間的關係

v_n	第 1 種	第 2 種	第 3 種	第 4 種
v_1	B	B	R	x
v_2	R	x	x	R
v_3	x	R	B	B
棋子位置圖				
複合路徑圖				



【說明】依序配置棋子後不能動的配置圖有兩種



【發現】 左右兩張 **P**$_3$V 型呈現鏡射，路徑圖同構，擺放的位置不符合棋子路徑要求， 結果就是一樣的，主教不動，城堡就動不了。

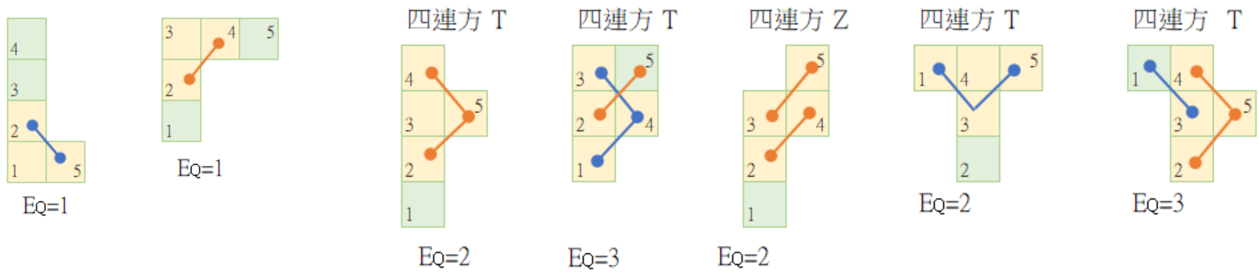
【分析】$E_Q = 0, E_\ell = 2$，但是主教沒有可供斜走的點，無法移動的情形下造成 3 個孤立點，彼此毫無關係。**P**$_3$左圖與右圖乍看不一樣，事實上旋轉、翻轉後是一樣的圖，視為同一種狀態，複合路徑圖呈現相同狀態。

【結果】從複合路徑圖來看，沒有弧的主教不能動，只能供城堡移動，因此是個無效圖，**M**$_{\min}$**=0**。 根據以上初步分析，我們將辛克曼以複合路徑圖表示如下，我們發現數個階段表現多連方的組合。

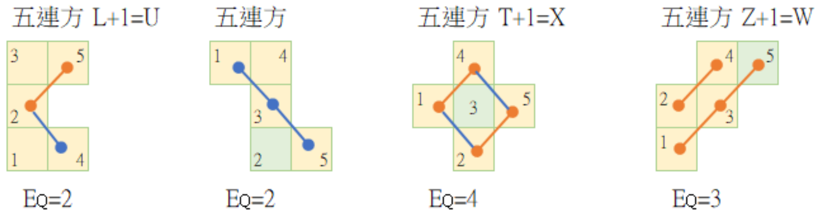
二、 多連方之間的關係探討

我們分析辛克曼的解法，發現兩個重點，其一，國王必須避開黑騎士所能到達的位置，其二，國王移動後就是棋子在新連方範圍 P$_n$移位起始，國王有有銜接前後範圍的功能，以 V$_{Br}$表示，作為橋接多個階段的點。

三連方→五連方 四連方→五連方



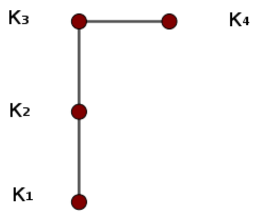
我們思考要如何設計擋住 R，好的擺放位置可以讓 B 多走幾步，與多數研究探討最少移動步數不同，我們的研究重點是想辦法增加多階段移動次數，讓國王趕走黑騎士的難度增加，因此拆解多連方結構變得很重要。

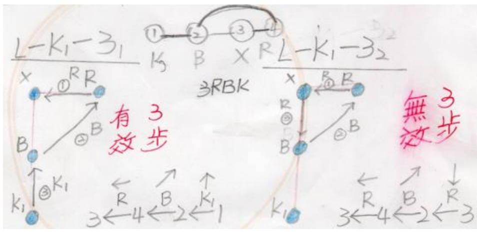


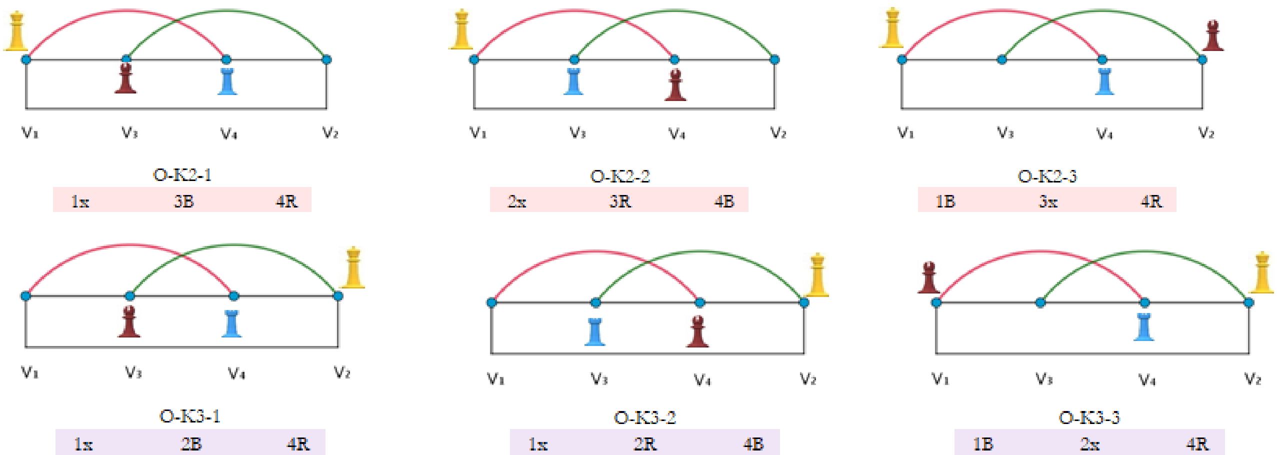
三、 角色配置效果探討

以四連方結構探討國王與主教-城堡(又稱為「BR 組」)配置可能，四連方有 I、L、T、O、Z 型，由於 I 限制很大，僅供國王、主教移動，因此進一步分析在 L、T、O、Z 型四型中，國王 K 與一組 BR 移動狀態探討，得到 96 種結果。

【說明】E 表示可供移動的空格，K 國王、B 主教、R 城堡。國王有四種位置，分別搭配一組 BR。







L 型		有 24 種位置	分析結果	
編碼	原始配置	移動方向與順序	三子皆能移動就是有效圖	
L-K1-1	2E3B4R	2 ‖ K	2‖K	無效
L-K1-2	2E3R4B	2 ╳ B — R	2╳B—R	無效
L-K1-3	2B3E4R	3 — R ╳ B ‖ K	3—R╳ B‖K	有效
L-K1-4	2R3E4B	3 ‖ R ╳ B — R	3‖R╳B— R	無效

L-K1-5	2B3R4E	4 ╳ B ‖ K	4╳B‖K	無效	
L-K1-6	2R3B4E	4	4	無效	完全不能動
L-K2-1	1E3B4R	1 ‖ K	1‖K	無效	
L-K2-2	1E3R4B	1 ‖ K ╳ B ━ R	1‖K╳B━R	有效	
L-K2-3	1B3E4R	3 ‖ K	3‖K	無效	
L-K2-4	1R3E4B	3 ‖ K ╳ B ━ K	3‖K╳B━K	無效	R 不能動
L-K2-5	1B3R4E	4 ━ R ‖ K	4━R‖K	無效	
L-K2-6	1R3B4E	4 ╳ K ‖ R	4╳K‖R	無效	

L 型		有 24 種位置	分析結果	
編碼	原始配置	移動方向與順序	三子皆能移動就是有效圖	
L-K3-1	1E2B4R	1	1	無效
L-K3-2	1E2R4B	1 ‖ R ╳ B ━ K	1‖R╳B━K	有效
L-K3-3	1B2E4R	2 ‖ K ━ R ╳ K	2‖K━R╳K	無效
L-K3-4	1R2E4B	2 ╳ B ━ K	2╳B━K	無效
L-K3-5	1B2R4E	4 ━ K ‖ R ╳ K	4━K‖R╳K	無效
L-K3-6	1R2B4E	4 ╳ B ‖ K	4╳B‖K	無效
L-K4-1	1E2B3R	1	1	無效
L-K4-2	1E2R3B	1	1	無效
L-K4-3	1B2E3R	2 ╳ K ━ R ‖ K	2╳K━R‖K	無效
L-K4-4	1R2E3B	2 ╳ K	2╳K	無效
L-K4-5	1R2B3E	3 ‖ R ╳ K ━ R	3‖R╳K━R	無效
L-K4-6	1B2R3E	3 ━ K ╳ B ‖ R	3━K╳B‖R	有效

【說明】以下 T、O、Z 型擺放方式皆同 L 型，及空格跟隨 K 再搭配一組 BR。

O 型	分析結果		O 型	分析結果	
編碼	三子皆能移動是有效圖		編碼	三子皆能移動是有效圖	
O-K1-1	2╳B‖R╳K	有效	O-K3-1	1━K╳B━R	有效
O-K1-2	2‖K╳B‖R	有效	O-K3-2	1╳B━R╳K	有效
O-K1-3	3╳B━R╳K	有效	O-K3-3	2━R╳B━K	有效
O-K1-4	3━K╳B━R	有效	O-K3-4	2‖R╳B‖K	有效
O-K1-5	4╳K━R╳B	有效	O-K3-5	4╳B‖R╳K	有效

O 型	分析結果		O 型	分析結果	
O-K1-6	4╳K║R╳B	有效	O-K3-6	4║K╳B║R	有效
O-K2-1	1║K╳B║R	有效	O-K4-1	1—R╳B—K	有效
O-K2-2	1╳B║R╳K	有效	O-K4-2	1║R╳B║K	有效
O-K2-3	3║R╳B║K	有效	O-K4-3	2—K╳B—R	有效
O-K2-4	3—R╳B—K	有效	O-K4-4	2╳B—R╳K	有效
O-K2-5	4╳B—R╳K	有效	O-K4-5	3║K╳B║R	有效
O-K2-6	4—K╳B—R	有效	O-K4-6	3╳B║R╳K	有效

T 型	分析結果		T 型	分析結果	
編碼	三子皆能移動是有效圖		編碼	三子皆能移動是有效圖	
T-K1-1	2—R╳B║R║K	有效	T-K3-1	1	無效
T-K1-2	2║R╳B╳K	有效	T-K3-2	1╳B—R║K	有效
T-K1-3	3	無效	T-K3-3	2—R╳B║R║K	有效
T-K1-4	3╳B—R║K	有效	T-K3-4	2║R╳B╳K	有效
T-K1-5	4╳K	無效	T-K3-5	3╳B║R║K	有效
T-K1-6	4╳B║R║K	有效	T-K3-6	4╳K	無效
T-K2-1	1║K—R╳B	有效	T-K4-1	1╳K	無效
T-K2-2	1╳B—K║R	有效	T-K4-2	1║R—K╳B	有效
T-K2-3	3║K—R╳B	有效	T-K4-3	2║R╳K╳B	有效
T-K2-4	3╳B—K║R	有效	T-K4-4	2║R╳K╳B	有效
T-K2-5	4╳B║K║R	有效	T-K4-5	3║R—K╳B	有效
T-K2-6	4╳B║K║R	有效	T-K4-6	3╳K	無效

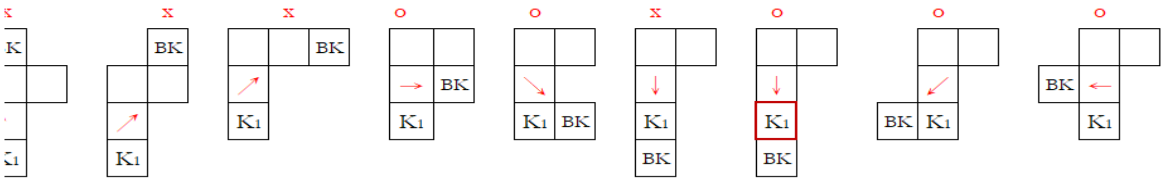
Z 型	分析結果		Z 型	分析結果	
編碼	三子皆能移動是有效圖		編碼	三子皆能移動是有效圖	
Z-K1-1	2—R╳B—K	有效	Z-K3-1	1╳B—R╳K	有效
Z-K1-2	2╳K—R╳B	有效	Z-K3-2	1—K╳B—R	有效
Z-K1-3	3—K╳B—R	有效	Z-K3-3	2—R╳K║R╳B	有效
Z-K1-4	3╳B—R╳K	有效	Z-K3-4	2║K—R╳K║R╳B	有效
Z-K1-5	4	無效	Z-K3-5	4—R╳B—K	有效
Z-K1-6	4╳B║R╳K	有效	Z-K3-6	4╳K—R╳B	有效
Z-K2-1	1╳K—R╳B	有效	Z-K4-1	1╳B║R╳K	有效

O 型	分析結果		O 型	分析結果	
Z-K2-2	1━R╳B━K	有效	Z-K4-2	1	有效
Z-K2-3	3‖K━R╳K‖R╳B	有效	Z-K4-3	2╳B━R╳K	無效
Z-K2-4	3━R╳K‖R╳B	有效	Z-K4-4	2━K╳B━R	有效
Z-K2-5	4━K╳B━R	有效	Z-K4-5	3‖R╳B━R	有效
Z-K2-6	4╳B━R╳K	有效	Z-K4-6	3━R╳B━K	有效

四、 黑騎士 BK 在五連方配置的影響

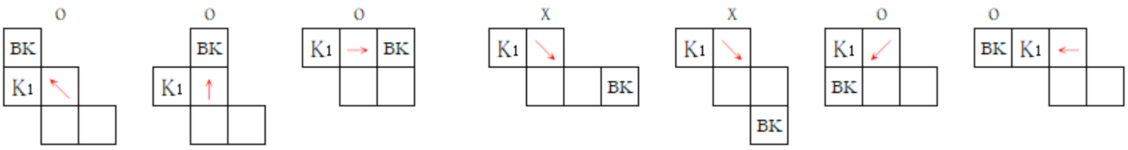
我們分析出 24 種獨立圖形，再進一步與黑騎士組合得到可用圖，L 型析出 4 種國王配置條件，X 表示國王無法取代黑騎士，O 表示可以取代，做為最後階段判斷依據。

L 型-K1

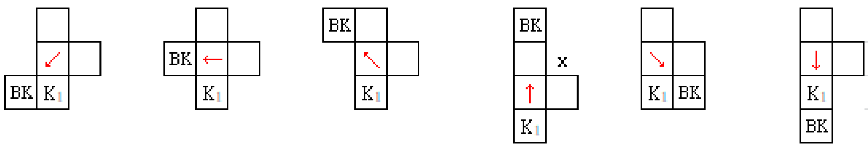


L 型-K4

Z 型加入黑騎士做為終點階段參考，計有 53 張圖(略以 K1-1 代表)。



T 型加入黑騎士做為終點階段參考，計有 52 張連方設計(略以 K1-6 代表)。

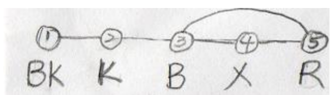


根據以上評估圖，我們將連方塊對應棋子路徑設計複合路徑圖，做為配置棋子、計算移動次數參考。

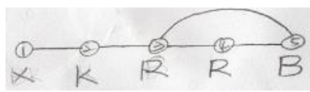
【討論】不考慮 P_5I 型，理由有兩個，其一辛克曼的設計限制於4×4範圍內；其二，除了 P_5I 型是E_ℓ，不利主教配置。P_5沒有全環形圖或直線圖，所有複合路徑圖一定有直線路徑，是 $E_\ell + E_Q$ 複合圖形。

1-1	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
E_ℓ	1	2	2	2	1
E_Q	0	0	1	0	1
小計	1	2	3	2	2

第 1 種設計

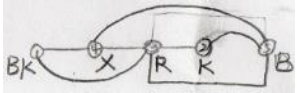


第 2 種設計

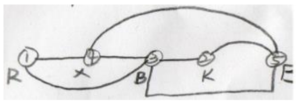


2-1	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
E_ℓ	1	1	3	2	1
E_Q	1	1	1	1	2
小計	2	2	4	3	3

第 1 種設計

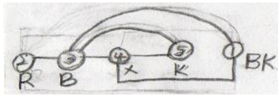


第 2 種設計

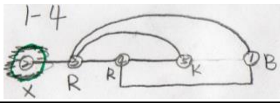


1-4	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
E_ℓ	1	1	2	3	1
E_Q	1	0	2	0	1
小計	2	1	4	3	2

第 1 種設計



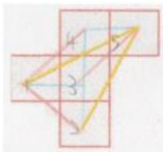
第 2 種設計



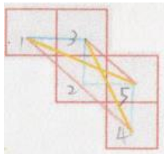
【討論】E_Q限制主教國王移動(B-K path)，E_ℓ限制城堡國王移動(R-K path)，我們還發現單環圖、多環圖的存在，環圖可以讓棋子移動的彈性增加。

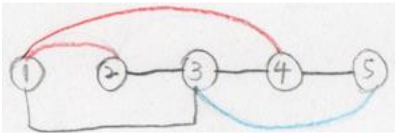
五、 從五連方路徑圖判斷環點圖是否有利於國王移動

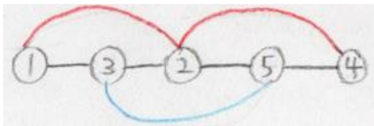
F/f 型



M 型





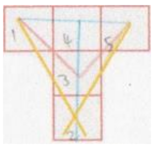


【討論 1】3 點環=(1,2,3),(1,3,4),(3,4,5)
4 點環=(1,2,3,4),(1,3,5,4)　5 點環=(2,1,4,5,3)

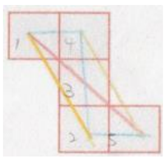
【討論 2】3 點環= (1,2,3),(2,3,5),(2,4,5)
4 點環= (1,3,5,2),(3,5,4,2)　5 點環= (1,2,4,5,3)

【小結】 F 型和 M 型五個點都有E_Q和E_ℓ，最多形成 5 點環，有利於國王與主教擺放，並且可以放置主教 B× 2。　$\mathbb{K}$適用配置$2\mathcal{B}1\mathcal{R}$在 F 型可得最少移動步數為 4 步；同樣配置在 M 型亦可得最少移動步數為 4 步。

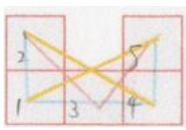
T 型

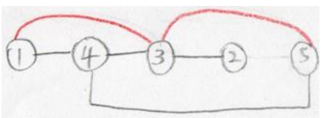


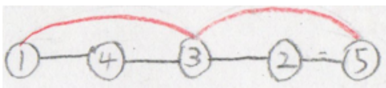
N 型

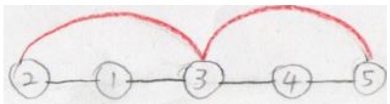


U 型









3 點環= (1,3,4),(3,4,5)
4 點環= (1,3,5,4)

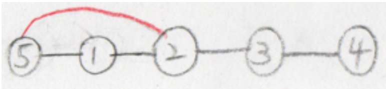
3 點環= (1,3,4),(2,3,5)

3 點環=(1,2,3),(3,4,5)

【小結】N 型和 U 型圖同構，都有 3 點環，可放置國王與 1 主教。$\mathbb{K}$適用配置$1\mathcal{B}2\mathcal{R}$。以上 3 型共同特徵是 2 條E_Q，但 T 型看似出現一條E_ℓ卻恰好是反例。如果 T 型擺放$2\mathcal{B}$

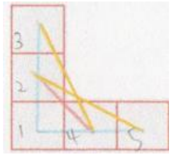
於 V_1 和 V_3，位置相鄰，但是 V_2 作為唯一可移動點就會失去效果。P_5T、P_5N、P_5U 三型均適用$\mathbb{K}$配置$1\mathcal{B}2\mathcal{R}$， $M_{min}=4$。

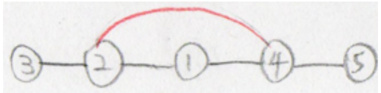
L 型



3 點環=(1,2,5)

V 型

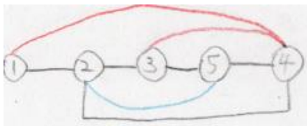




3 點環=(1,2,4)

【小結】L 型和 V 型五個點僅有一條E_Q，至多形成 3 點環，主教擺放受到限制，國王只能配置於E_ℓ路徑上。 $\mathbb{K}$適用配置$1\mathcal{B}2\mathcal{R}$，在 L 型可得最少移動步數為 4 步；然而，V 型受限於 V3 和 V5 度序列皆小於 2，因此兩點中必然有一子失去移動能力，因此 V 型為無效圖，可視為五連方路徑圖的反例。

P 型

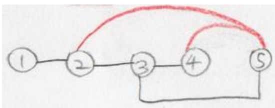


度序列 $(V_1,V_2,V_3,V_5,V_4)=(2,4,3,3,4)$

3 點環＝(1,2,4),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5) 4 點環= (1,2,3,4),(1,2,5,4),(2,3,5,4) 5 點環= (1,2,3,5,4)

【小結】P 型容易出現循環走法(CIRC)，5 個點都有E_Q和E_ℓ，最多形成 5 點環，有利於國王與主教擺放，並且可以放置至多 2B。P_5P 適用配置$2\mathcal{B}1\mathcal{R}$，Mmin=4。

Y 型



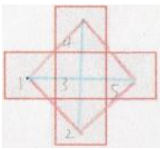
度序列 $(V_1,V_2,V_3,V_5,V_4)=(1,3,3,2,3)$

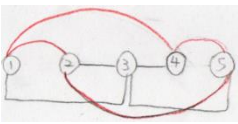
3 點環=(2,3,5),(3,4,5)

4 點環=(2,3,4,5)

【小結】Y 型 V_1、V_3 只有E_ℓ，但是$E_Q \geq 2$，優先考慮 B 位置，棋子最佳擺法依序(V_1,V_2,V_3,V_5,V_4)=(x, R,K,B,B)，P_5Y $\mathbb{K}$適用配置$2\mathcal{B}1\mathcal{R}$，有最少移動步數，Mmin=4。

X 型



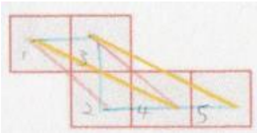
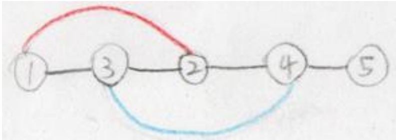


3 點環=(1,2,3),(1,3,4),(2,3,5),(3,4,5)

4 點環= (1,2,3,4),(1,2,5,3),(1,4,5,3),(2,3,4,5),(1,2,5,4)

5 點環=(1,2,3,5,4)

【小結】X 型是一個很容易形成循環路徑的設計，因為有 4 條E_Q，E_ℓ則有(1,2,3)、(5,4,3)對稱，(1,3,4)和(2,3,5)對稱，最多形成 5 點環，有利於國王與主教擺放，並且可以放置至多 2B。P_5X 適用配置$3\mathcal{B}1\mathcal{R}$且無循環，移動次數是唯一情形，M=4。但若配置$\mathbb{K}2\mathcal{B}1\mathcal{R}$可循環，有最少移動步數，Mmin=4。

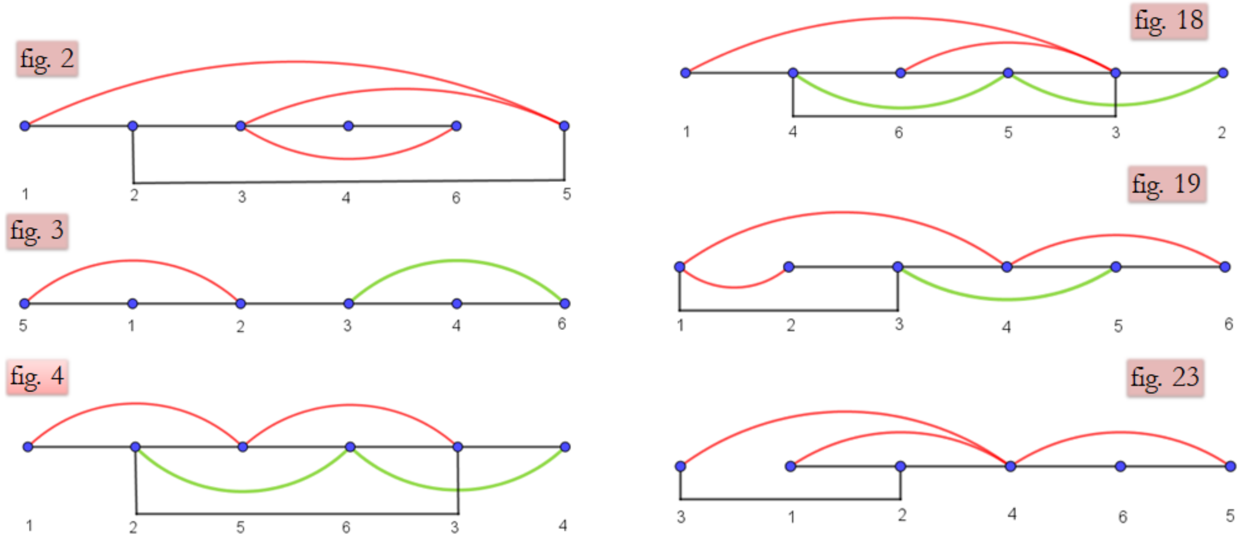
Z 型  

3 點環=2=(1,2,3),(2,3,4)
4 點環=1=(1,2,4,3)

【小結】Z 型有 2 條E_Q，有利於擺放 2B 且不衝突，P_5Z $\mathbb{K}$適用配置$2\mathcal{B}1\mathcal{R}$，有最少移動步數，Mmin=4。

六、 六連方衍生之複合路徑圖特徵判斷

我們析出辛克曼第五階段採用 P_6R 型，於是從六連方 35 張唯一圖中篩出符合4×4範圍內計 29 多連方型組。圖以度序列分為兩類，正例**所有點度序列皆$DS \geq 2$**，反例特徵係每張圖**至少有 1 點$DS = 1$**。若以 6 點圖配置 K、2B、2R， B 與 K 路徑重疊，1B 至少占用 2 點 1 條弧路徑，正例圖有兩組弧路徑配置，單組弧路徑卻擁有 3 條同樣可配置 2B 但 R 配置受到弧路徑限制。以圖 18 為例適合 2B2R，考慮 BK 外加，則若 V(1,4,6,5,3,2)=(K, R1, R2, B1, B2, x)至少 3 種走法。



移動次數	1	2	3	4	5	6	7	8	9
第 1 種	B1:5→2	R2	B2	R1	K:1→4				
第 2 種	B1	R2	B2	K:1→3	R1	K:3→4	B2	R2	B1
第 3 種				同上步驟					K:4→5

棋子擺法決定設計是否能達成多階段移動、產生最多階段、控制階段內最少移動步數。第 1 種 5 步，第 2 種 2 階段 6 步，第 3 種至少 3 階段 9 步。

棋子配置考慮度序列，若 $E_Q \geq 2$ 優先考慮配置 B。反之，若$E_\ell \geq 2$優先配置 R。度序列=2，且 $E_Q = 1, E_\ell = 1$，考慮配置 K。第一種移動方式係每一子移動後 K 即可取代 BK，與七連方棋盤設計【狀態 3】相符，第 3 種方法多階段移動，符合【狀態 1】配置。

fig. 9

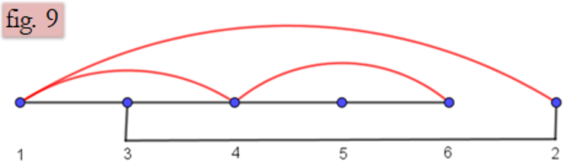


fig. 10

fig. 11

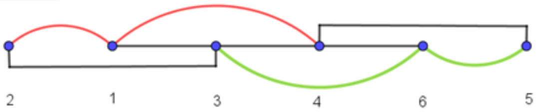


fig. 14

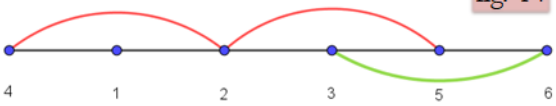


fig. 15

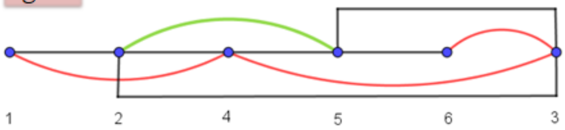


fig. 16

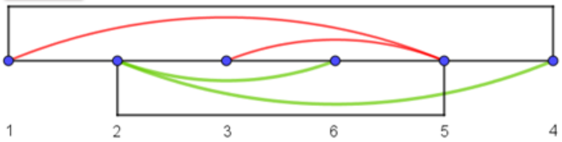


fig. 24

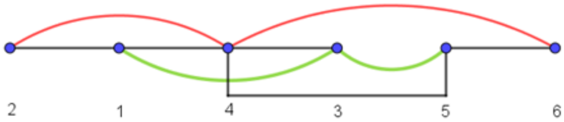


fig. 25

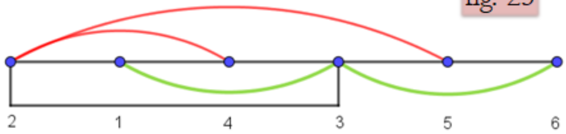


fig. 26

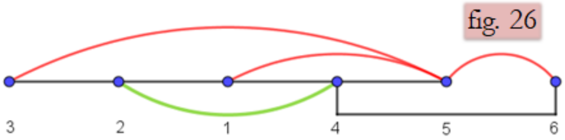


fig. 27

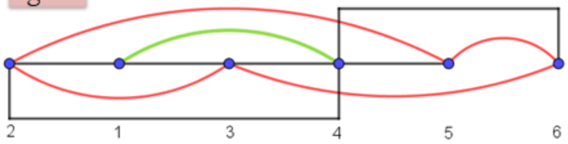


fig. 28

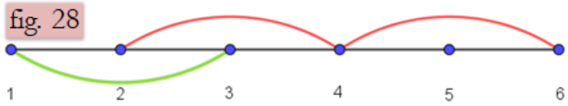
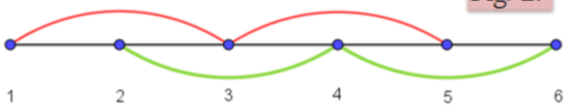


Fig. 29



【反例】

fig. 1

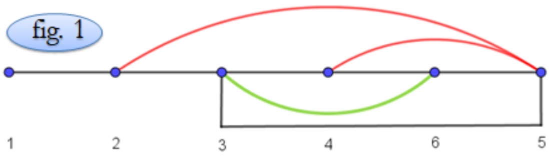


fig. 6

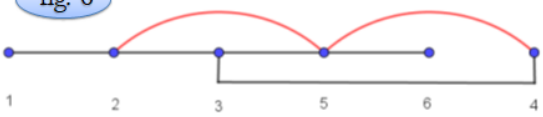


fig. 8

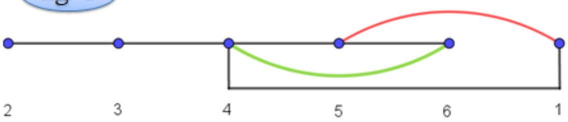


fig. 13

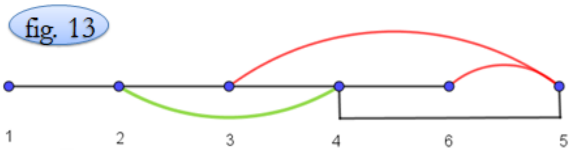


fig. 5

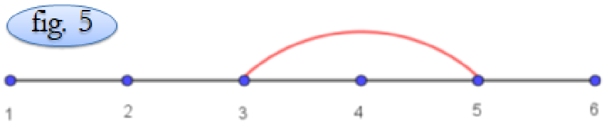


fig. 7

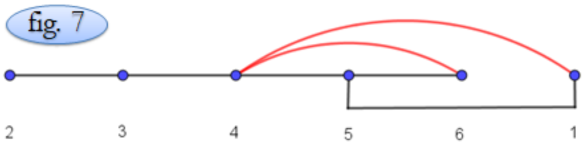


fig. 12

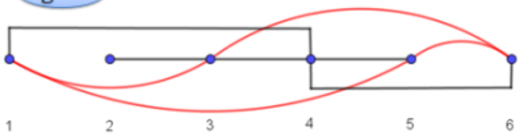


fig. 17

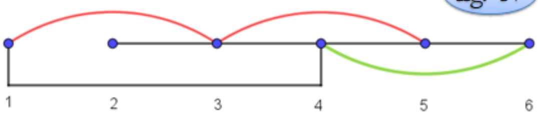


fig. 20

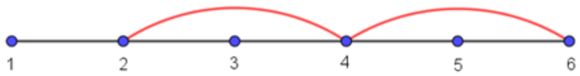


fig. 21

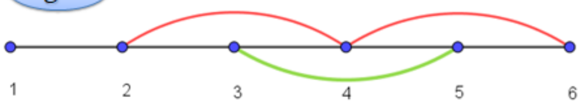
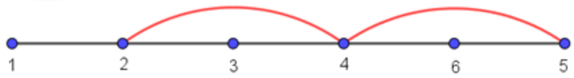


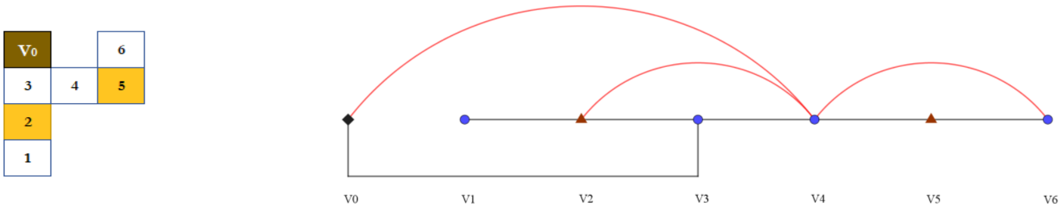
fig. 22



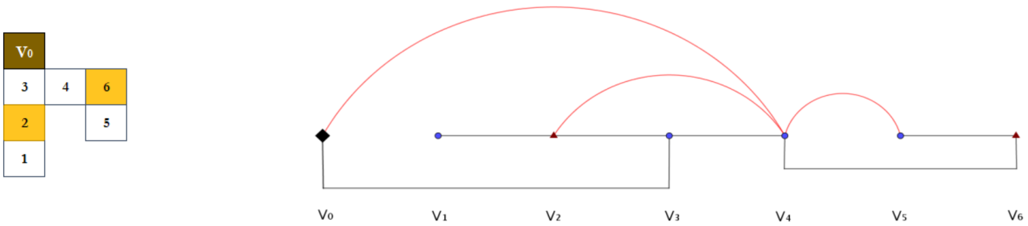
(一) 圖同構判斷

1.根據前述 P_4、P_5、P_6 分析，為了便於判斷棋子配置複合路徑圖適用於 256 張圖判斷是否同構，以 Hep20-4、22-5 為例，兩張棋盤設計略有不同，上圖(4,5-6)對應下圖(4,6-5)。

›20-4



Hep22-5



點編號		V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
Hep20-4	檢查相鄰點	(3,4)	(0,2)	(1,3,4)	(2,4,0)	(2,3,0,5,6)	(4,6)	(5,4)
Hep 22-5		(3,4)	(0,2)	(1,3,4)	(2,4,0)	(2,3,0,5,6)	(4,6)	(5,4)

兩張複合路徑圖點之間關係相同，E_Q 和 E_I 對稱，可視為同構圖。

(二) 度序列對配置與移動的影響

在反例中我們發現有四種配置可能包括 2B2R、3B1R、1B3R、4R，四種配置都可以的路徑有圖 1、12、13、17、21，圖 8 適用 2B2R、1B3R、4R，適用 1B3R、4R 有圖 6、7、20、22，其中圖 5 僅能配置 4R。我們發現 3B1R 配置條件 $E_Q \geq 3$，2B2R 配置條件 $E_Q \geq 2$，1B3R 配置條件 $E_Q \geq 1$，圖 5 有 2 點 DS=1，$E_Q = 1$，僅能配置 4R 且 K 不會走 E_Q。

一、橋接點出現次數判斷k值

多階段步數組合以 K 做為中介橋接點，在情境 1 當中，若 $|V_K - V_{BK}| \geq 2$，K 作為橋接點

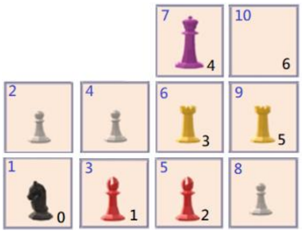
編號	配置	Mmin	k值	編號	配置	Mmin	k值
Hep5-5	R,R,R,R,K,_,BK	6	2	Hep17-5	R,_,R,B,BK,B,K	6	2
Hep6-7	R,R,R,B,K,_,BK	5	2	Hep19-7	B,K,R,_, BK,R,B	11	5
Hep13-8	_,R,B,BK,B, K,B	10	4	Hep20-7	_,R,R,B,R,K,BK	7	3
Hep14-4	R,B,B,BK,R,_,K	7	3	Hep21-4	_,R,K,BK,B,B,B	7	3

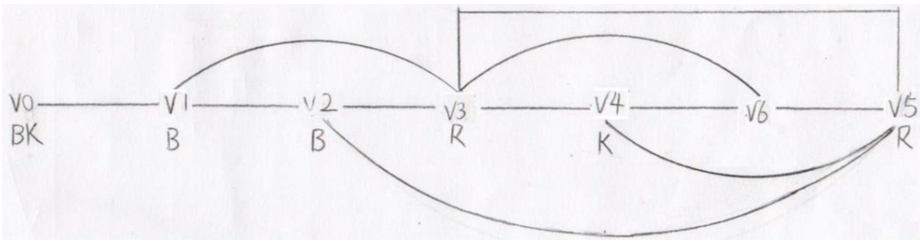
編號	配置	Mmin	k值	編號	配置	Mmin	k值
Hep14-7	_,R,R,R,BK,B,K	9	2	Hep22-1	BK,_,K,R,R,R,R	6	2
Hep22-8	R,R,R,B,K,_,BK	6	2	Hep23-8	R,R,B,B,K,_,BK	6	2
Hep23-3	BK,K,R,B,B,R,_	6	2	Hep24-5	_,K,B,B,BK,R,R	10	4
Hep28-2	R,BK,_,B,K,R,B	6	2				

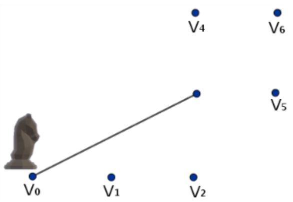
綜上情境 1 的 15 張設計配置結果可得 $2 \leq k \leq 5$。

七、擴充設計

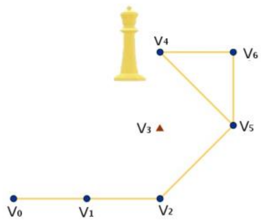
針對多方塊型態對西洋棋棋路徑的影響徹底理解後，我們嘗試模擬辛克曼難題將 Z 型棋盤予以擴充。 從分析衍生棋盤設計，我們嘗試增加移動次數，讓難題挑戰性提高，以 Hep25-7 翻轉鏡射做為起點，設計出符合十連塊七實格棋盤與路徑分析。



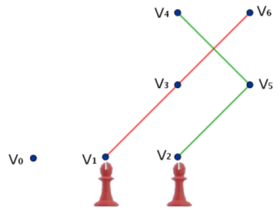




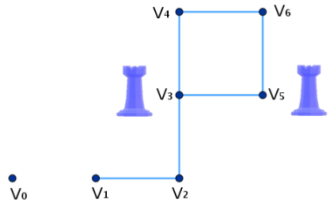
騎士路徑



國王路徑



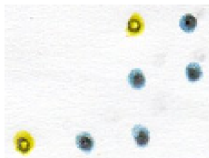
主教路徑



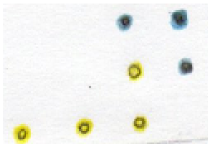
城堡路徑

【討論】上圖配置(0,1,2,3,4,5,6)=(BK, B, B, R, K, R, x)，移動步數可達 30 步。

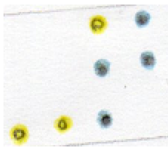
stage① $V_5 \to V_6$ R　$V_2 \to V_1$ R　$V_5 \to V_3$ R　$V_4 \to V_6$ K
$V_2 \to V_5$ B　$V_5 \to V_2$ B　$V_2 \to V_5$ B
13　$V_3 \to V_2$ R　$V_6 \to V_5$ R　$V_3 \to V_2$ R
$V_1 \to V_3$ B　$V_3 \to V_6$ B　$V_6 \to V_3$ B



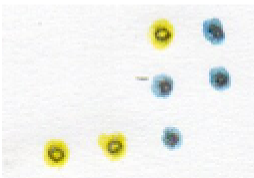
stage② $V_5 \to V_4$ B
2　$V_6 \to V_5$ K



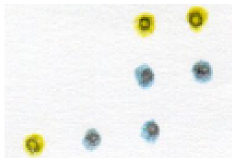
stage③ $V_3 \to V_6$ B
$V_2 \to V_3$ R
3　$V_5 \to V_2$ K

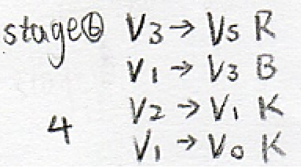


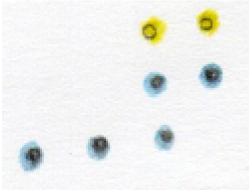
stage④ $V_3 \to V_5$ R
$V_6 \to V_3$ B
4　$V_5 \to V_6$ R
$V_2 \to V_5$ K



stage⑤ $V_1 \to V_2$ R
$V_3 \to V_1$ B
4　$V_2 \to V_3$ R
$V_5 \to V_2$ K







但若將配置改為(0,1,2,3,4,5,6)=(BK, x, K, R, B, R, B)，會得到最少移動步數

K:2→1, R:3→2, B:6→3, R:5→6, B:4→5, K:1→0 ，Mmin=6, $\mathcal{k}=2$

【討論】從度序列判斷最利移動點

點 v_n	v_1	v_3	v_5	v_6	v_7	v_9	v_{10}
E_ℓ	1	2	2	3	2	2	2
E_Q	0	1	1	2	1	2	1
$E_\ell+E_Q$	1	3	3	5	3	4	3
M_{max}	1	3	6	7	1	7	5

【發現與討論】v_6和v_9最有利移動，也是最多棋子到訪的點，具有兩個弧形路徑是其共同特徵，v_9與v_5條件接近，但少了一條弧形路徑限制了「B-R」組移動，到訪次數相對就少了。

陸、研究結論

一、辛克曼難題的設計涵蓋三、四、五連方與六連方，依序使用 P_3V 型、P_4Z 型、P_5P 型、P_6R 型與 P_3I 型，以 K 移動位置作為橋接點 V_{Br}，我們找到$\mathcal{k}$值作為多階段移動結果組合數可得到最少移動總次數。

二、本研究是複合圖形，對應棋子路徑條件，從多方塊得到的複合路徑圖以重圖為主，是E_Q和E_ℓ兩種路徑複合圖。

三、以 4 點配置 BR，當弧形邊數$E_Q\geq 2$，弧形邊可以視為 B-K 型組路徑，若該階段中直線數$E_\ell\geq 2$大於 2 則可以視為 R-K 路徑。度序列衍生路徑組合若$E_Q\geq 2$優先配置 B，$E_\ell\geq 2$優先配置 K。

四、本研究除了「I 形」連方塊衍生的複合路徑圖之外皆為重圖 E，$\mathrm{E}\geq V$；僅 I 形是簡單圖，限於水平/垂直路徑，$\mathrm{E}=V-1$。

五、多環圖中，3 點環圖$E_Q\geq 1$，$E_\ell\geq 1$至少可以完成一組「B-R」移動。

六、P_6複合路徑圖圖以度序列分為兩類，正例所有點度序列皆$\mathrm{DS}\geq 2$，反例特徵係每張圖至少有 1 點$\mathrm{DS}=1$。反例有四種配置可能包括 2B2R、3B1R、1B3R、4R，3B1R 配置條件 $E_Q\geq 3$，2B2R 配置條件 $E_Q\geq 2$，1B3R 配置條件 $E_Q\geq 1$；但若圖中有 2 點 DS=1 且 $E_Q=1$，僅能配置 4R。

柒、未來研究建議

本研究礙於時間有限，僅能就辛克曼 3 個難題取(b)探討，(a)看似範圍較小，(c)範圍與本研究類似，配子不同，兩者完成取代所需步數更多，頗值得探究，可做為未來主題參考。

捌、參考文獻

[1] 黃英綺、余采臻。十字軍斜征。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會作品說明書。國中組數學科 https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=183&sid=13602

[2]葉其璋(2018)。Knight One One. 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。國中組數學科 https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=60&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=3&sid=15166

[3]黃楷宸等 (2020)。Crazy Knights.中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書。國小組數學 https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=60&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=16628

[4]張鎮華、蔡牧村(2020)。演算法觀點的圖論。台大出版中心。

[5]Petkovic, M. (1997). Mathematics and Chess. New York: Dover Publications.

【評語】080411

探討十連方內的一盤殘棋，十個方格內有一只國王、兩只主教、兩只城堡、三只士兵及一只敵對的黑騎士共九只棋子，剩餘一格空格，依西洋棋各棋子的走法，國王避開黑騎士路線，達成國王取代黑騎士的目標。作者利用圖論研究辛克曼 Z 形棋第二道題，西洋棋每個角色有不同的走法，透過轉換將棋盤模式改成圖論中的圖，因此不同角色與初始擺放的位置形成不同的圖，在圖上只要兩點有連線就可走且每個角色連線即邊的顏色不一樣，因此易於討論與研究下棋的歷程。將原有的十連方，去除士兵所在的位置，變成七連方，配合各個棋子的移動路線，分析其中所含的三、四、五、六連方塊，找出多階段移動結果的組合數，得到最少移動總次數。研究細膩，線段圖示若能詳加說明，可讀性會更好。

作品海報

動　機　我們在一本數學遊戲書中發現辛克曼的Z形棋難題，在有限的六連方裡移動棋子最後把目標棋子取代，是一種極有挑戰、多步數的取代遊戲，因此想瞭解設計原理並進一步將難題擴充。

研究目的
- 以自創節點圖分析難題。
- 在特定範圍內創發擴充難題。

研究設備與材料
- 電腦設備、文書處理程式、Geogebra程式。
- 自製棋盤、需用文具。

現有文獻分析

辛克曼的難題原為辛克曼的Z形棋(Petkovic, 1996)，是在10格階梯形棋盤內置入9顆棋子，白方國王需完成移位取代黑方騎士的任務。該難題出自Zalepukin's encyclopedia of chess problems(Kiev: Zdorov'ya, 1982)。

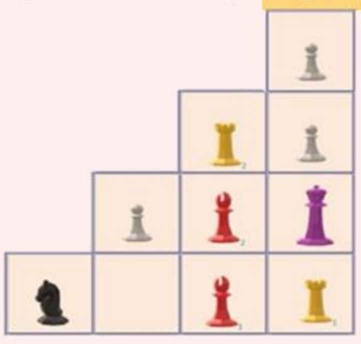
歷屆科展作品探討

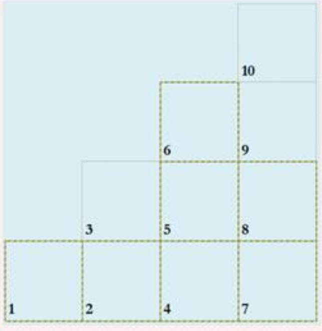
第57屆 十字軍斜征：互不攻擊全控制主教配置問題
第58屆 Knight One One ：以騎士巡邏問題延伸出棋盤上擺放黑白兩子進行位置互換，探討完成交換條件。
第60屆 Crazy Knights ：以騎士巡邏探討交換騎士的可能以圖論分析棋盤設計與符合騎士交換條件之最適配置條件。

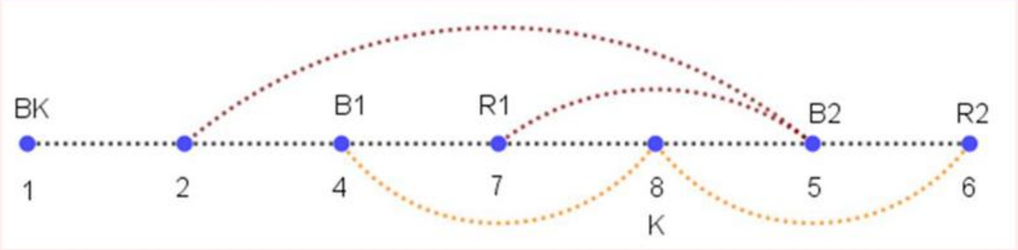
名詞定義

1) **點**：代表棋子的位置，以v表示，$v_1v_2v_3 \ldots\ldots v_n$分別「由下而上，由左而右」對應連方的位置。
2) **橋接點**：指國王移動後的新位置，以V_{Br}表示，代表下一個移位階段的起點，也是橋接多個階段的點。
3) **邊**：表示點與點之間的關係，又分為兩種，第一種是直線表示縱橫走以「城堡」(Rook, 以R代稱)為主的路徑，用E_ℓ表示；第二種是斜走邊，以E_Q表示，複合路徑圖以斜線或弧形表示以「主教」(Bishop, 以B代稱)為主的路徑。
4) **多連方**：連方塊組合的型組，以P_n型組字母型表示，例如P_5L表示五連方L型，以七連方擴充設計，以Hep表示。棋子在移動時如若進入循環狀態，以上下標表示P_n^c 該多連方可形成循環路徑，小寫C或(CIRC)標註可循環路徑。
5) **複合路徑圖**：以點和邊構成的圖示方法，用來表徵不同棋子角色路徑複合結果。
6) **移動步數**：國王K、主教B與城堡R移動步數，以M表示，M $_{max}$表示最多步數，M $_{min}$表示最少步數。本研究依據七連方棋盤設計，得到三種情境狀態，分別以k值區別情境之總移動次數。

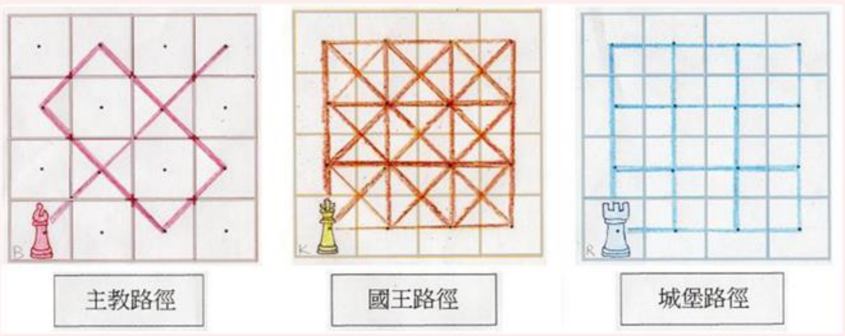
§探討重點§　多種身分複合路徑→多方塊階段性目的產生序列組合→衍生複合路徑的移位策略

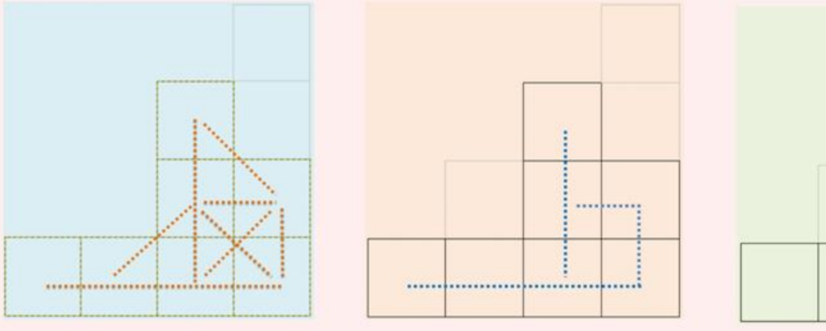




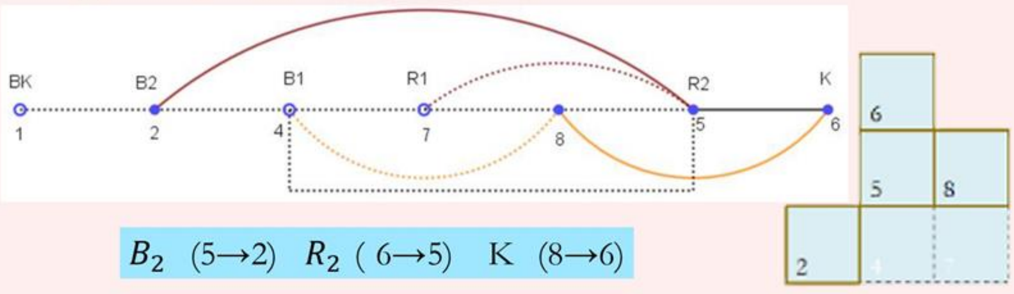


- 3個小兵不動
- 國王K必須避開黑騎士路徑BK path





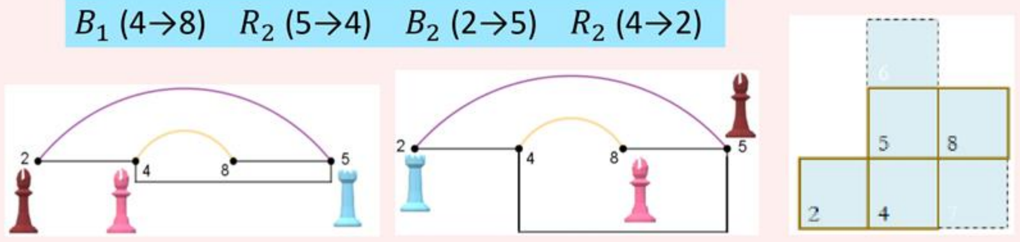
Stage 1　移動狀態示意



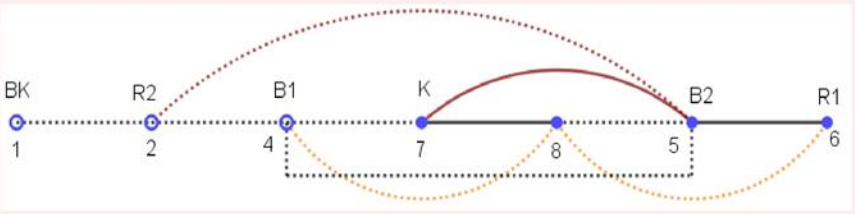
B_2 (5→2) R_2 (6→5) K (8→6)

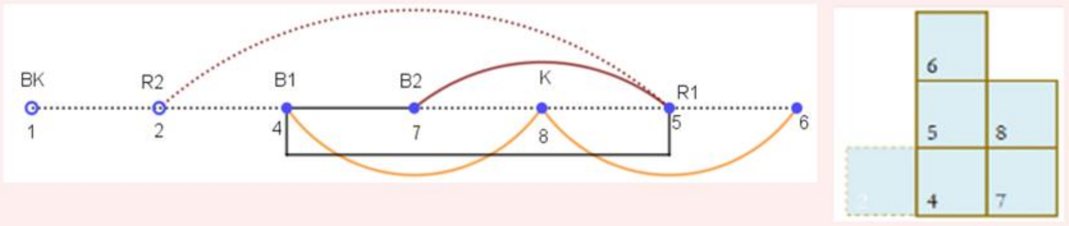
Stage 2　循環路徑開始

B_1 (4→8) R_2 (5→4) B_2 (2→5) R_2 (4→2)



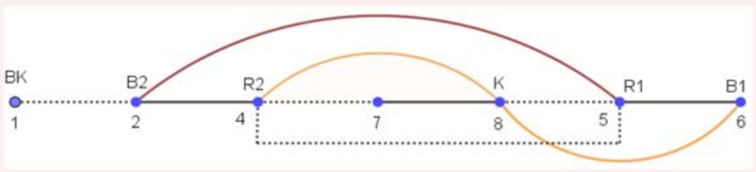
Stage 3　R型析出N型四連方



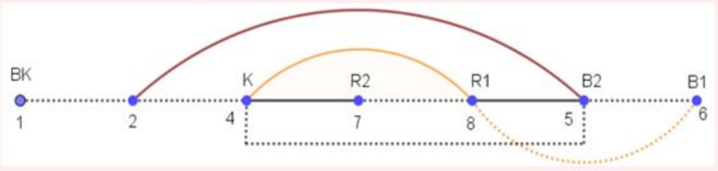


R_1 (7→4) B_2 (5→7) R_1 (4→5) B_1 (8→4) K (6→8)

Stage 4　R型六連方



Stage 5　逼近狀態示意

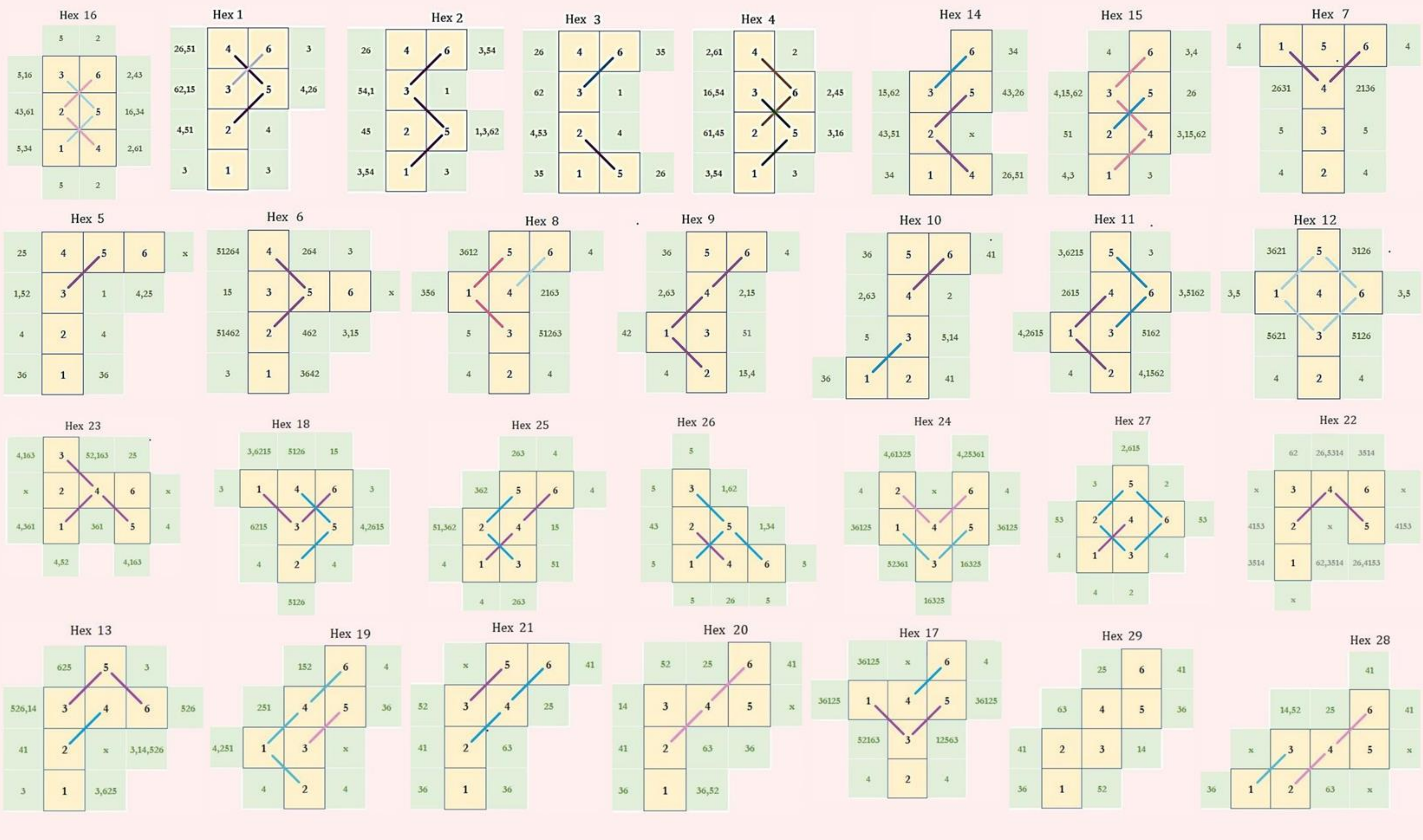


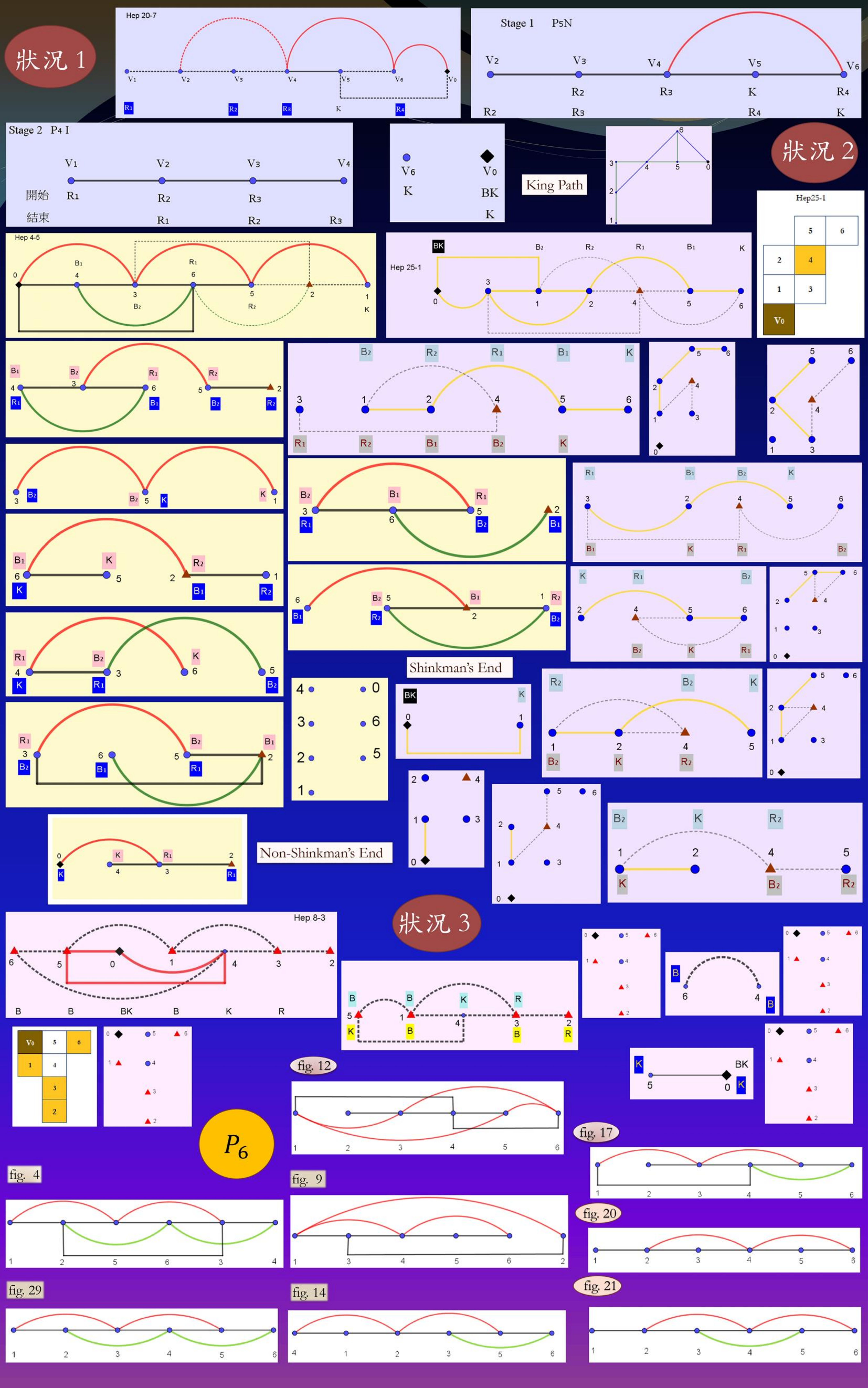
Stage 6　Finale

V_{BR} $P_4+P_9^c+P4+P_6^c+P_5+P2+P2=3+9+3+6+4+1+1=27$, M $_{max}=27, k=7$, V $_{BR}=7$

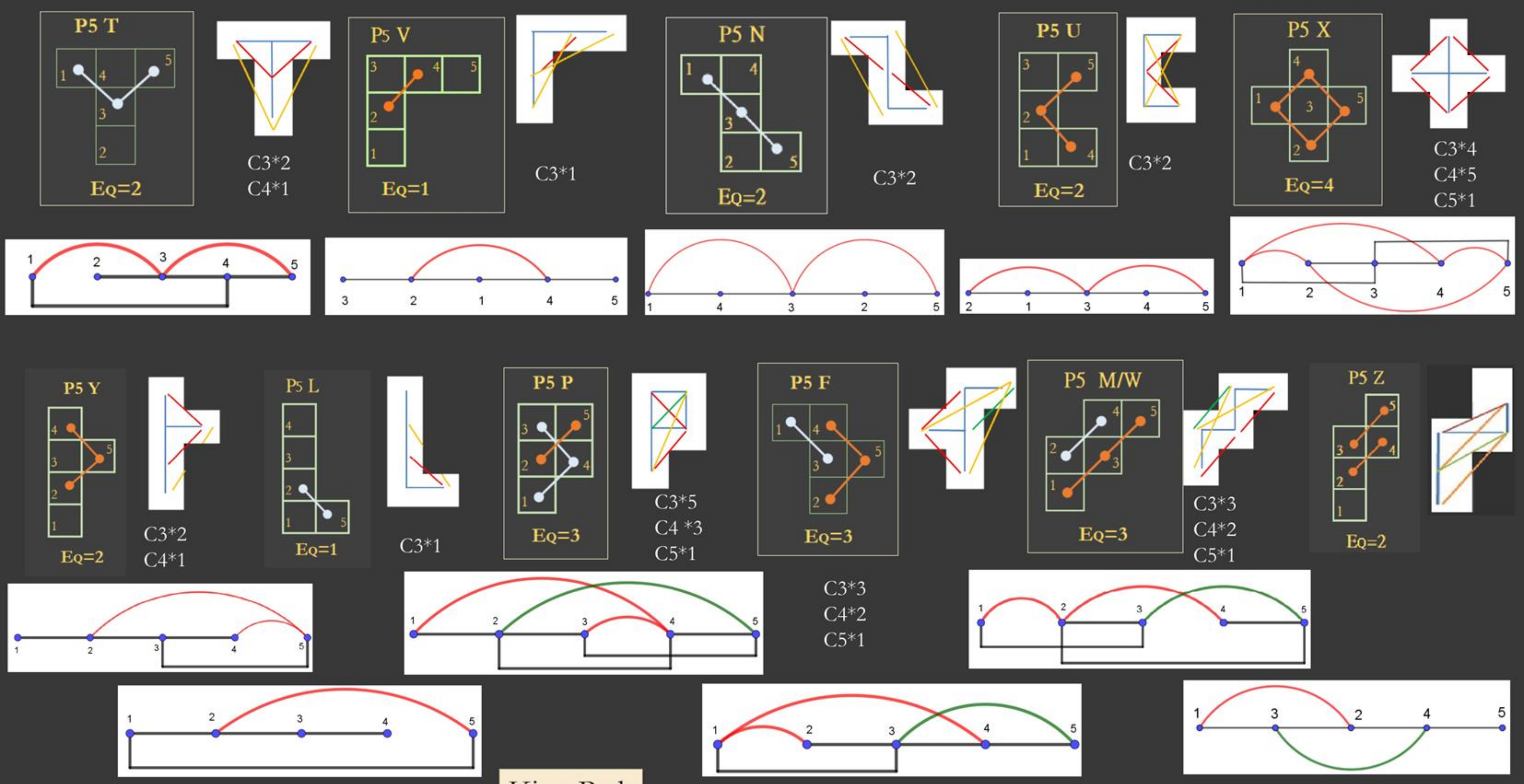
P_n $P_4+P_4^c+P_5^c+P4+P_6^c+P_5+P2+P2=3+9+3+6+4+1+1=27$, M $_{max}=27, P_n=8$

§　擴充設計　§



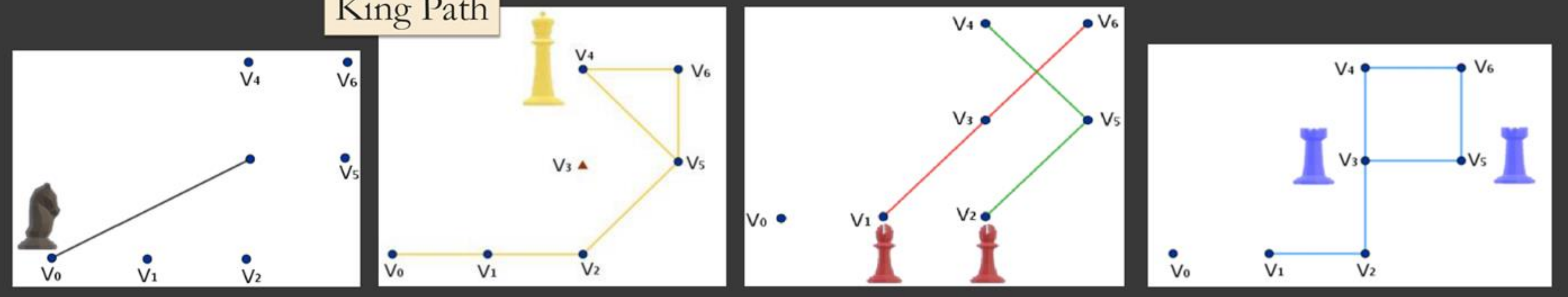


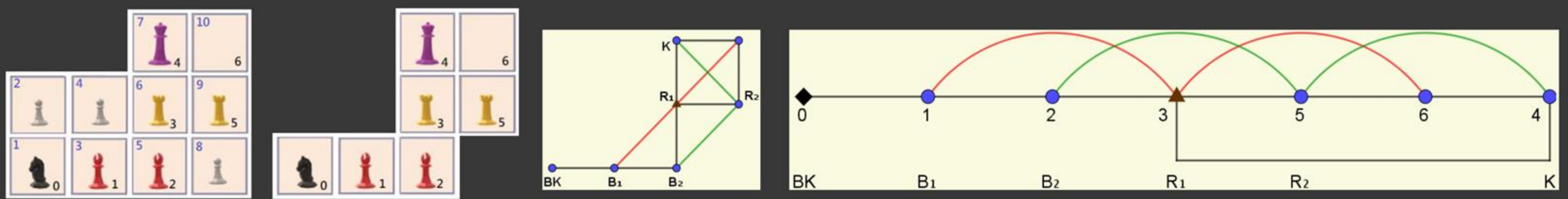
狀況 1
Hep 20-7
Stage 1 P5N
Stage 2 P4 I
開始
結束
King Path
狀況 2
Hep25-1
Hep 4-5
Hep 25-1
Shinkman's End
Non-Shinkman's End
狀況 3
Hep 8-3
fig. 12
fig. 17
fig. 4
P_6
fig. 9
fig. 20
fig. 29
fig. 14
fig. 21



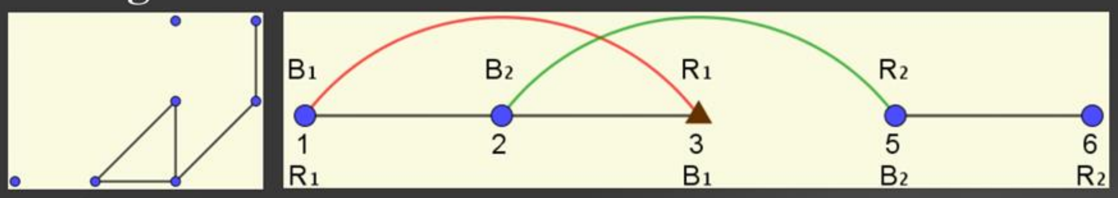
King Path

擴充設計





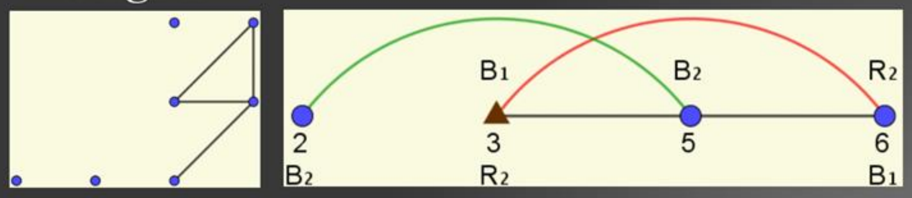
Stage 1



$R_2 \xrightarrow[①]{56} B_2 \xrightarrow[②]{25} R_1 \xrightarrow[③]{32} B_1 \xrightarrow[④]{13} R_1 \xrightarrow[⑤]{21}$

$(v_5 , v_6 , v_2 , v_3 , v_1)$ P_n^c M

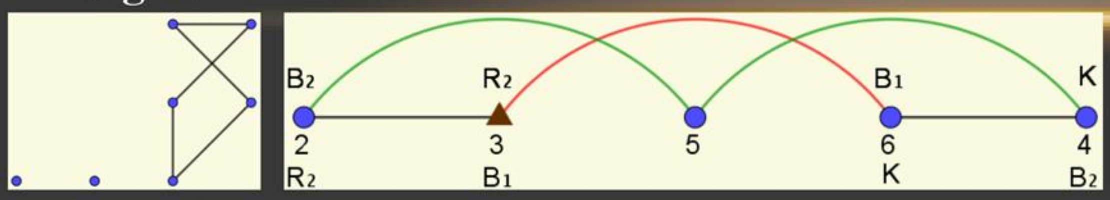
Stage 2



$B_2 \xrightarrow[①]{52} R_2 \xrightarrow[②]{65} B_1 \xrightarrow[③]{36} R_2 \xrightarrow[④]{53}$

(v_2 , v_5 , v_6 , v_3) P_n^c M

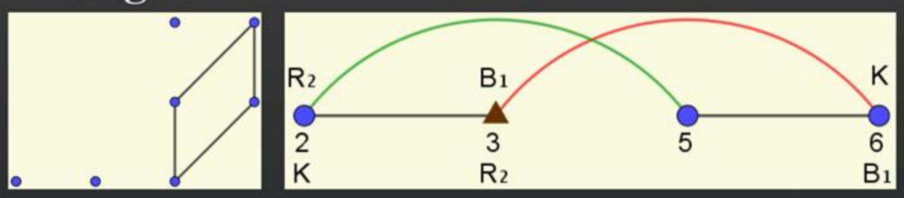
Stage 3



$B_2 \xrightarrow[①]{25} R_2 \xrightarrow[②]{32} B_1 \xrightarrow[③]{63} K \xrightarrow[④]{46} B_2 \xrightarrow[⑤]{54}$

P_n^c M $(v_2 , v_5 , v_3 , v_6 , v_4)$

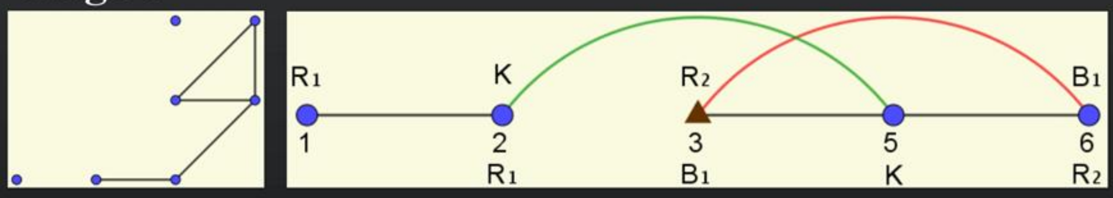
Stage 4



$K \xrightarrow[①]{65} B_1 \xrightarrow[②]{36} R_2 \xrightarrow[③]{23} K \xrightarrow[④]{52}$

(v_6 , v_5 , v_3 , v_2) P_n^c M

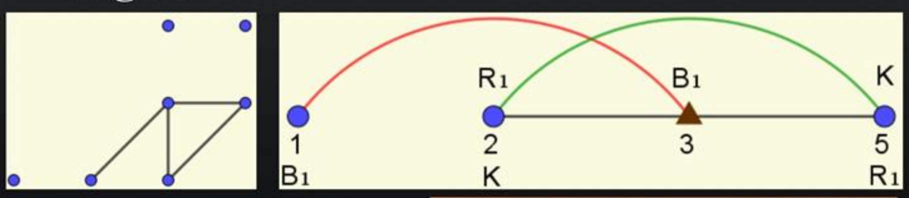
Stage 5



$R_2 \xrightarrow[①]{35} B_1 \xrightarrow[②]{63} R_2 \xrightarrow[③]{56} K \xrightarrow[④]{25} R_1 \xrightarrow[⑤]{12}$

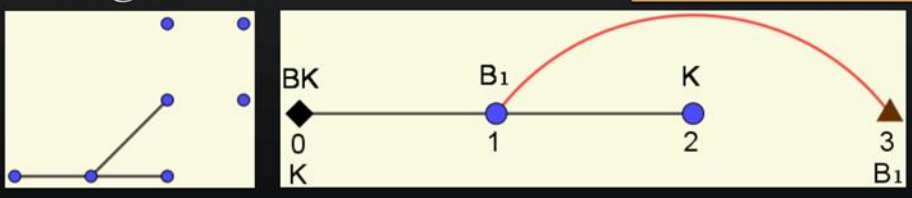
P_n^c M $(v_3 , v_5 , v_6 , v_2 , v_1)$

Stage 6



(v_3 , v_1 , v_2 , v_5) $B_1 \xrightarrow[①]{31} R_1 \xrightarrow[②]{23} K \xrightarrow[③]{52} R_1 \xrightarrow[④]{35}$

Stage 7 Shinkman's End P_n M



(v_1 , v_3 , v_2 , v_0) $B_1 \xrightarrow[①]{13} K \xrightarrow[②]{21} K \xrightarrow[③]{10}$

研 究 結 論

一、辛克曼難題的設計涵蓋三、四、五連方與六連方，依序使用P_3 V 型、 P_4 Z 型、P_5 P 型、P_6 R 型與P_3 I 型，K移動位置為橋接點V_{Br}， k值係對應多階段移動結果，求階段總和可得到最少移動次數。以連方塊分割可得到P值P_n^c與P_n兩種型態，以此求得最少移動次數。

二、複合圖形對應路徑條件，從多方塊得到的複合路徑圖以重圖為主，是E_Q和E_ℓ兩種路徑複合圖。

三、以4點配置BR，當弧形邊數$E_Q \geq 2$，弧形邊可以視為B-K型組路徑，若該階段中直線數$E_\ell \geq 2$大於2則可視為R-K路徑。度序列衍生路徑組合若$E_Q \geq 2$優先配置B，$E_\ell \geq 2$優先配置K。

四、本研究除了「I形」連方塊衍生的複合路徑圖之外皆為重圖E，E ≥ V；僅I形是簡單圖，限於水平/垂直路徑，有效$E_\ell = V - 1$。國王的路徑KP有三種狀況， $E = E_Q + E_\ell$，狀況一S1有效國王路徑數$1 \leq KP \leq 5$、狀況二S2有效國王路徑數$1 \leq KP \leq 6$、S3有效國王路徑數$1 \leq KP \leq 3$。

五、多環圖中，3點環圖$E_Q \geq 1$．$E_\ell \geq 1$至少可以完成一組「B-R」移動。3點環出現次數最多，增加點數若$v = 1$，得到P_4^c；增加點數若$v = 2$，得到P_5^c 。

六、P_6複合路徑圖以度序列DS分為兩類，正例所有點度序列皆DS ≥ 2，反例特徵係每張圖至少有1點DS = 1。反例有4種K配置，包括2B2R、3B1R、1B3R、4R，其中3B1R配置條件$E_Q \geq 3$，2B2R配置條件$E_Q \geq 2$，1B3R配置條件$E_Q \geq 1$；但若圖中有2點DS=1且 $E_Q = 1$ ，僅能K配置4R。

參考文獻

[1]黃英綺、余采臻。十字軍斜征。中華民國第 57 屆中小學科學展覽會作品說明書。國中組數學科。
[2]葉其璋(2018)。Knight One One. 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。國中組數學科。
[3]林子濠、黃楷宸(2020)。 Crazy Knights. 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會作品說明書。國小組數學科。
張鎮華、蔡牧村(2020)。演算法觀點的圖論。台大出版中心。
Petkovic, M. (1997). Mathematics and Chess. New York: Dover Publications.