中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

(鄉土)教材獎

080410

機率無所不在-探討麻將賓果遊戲中獎機率

學校名稱：桃園市八德區霄裡國民小學

作者：	指導老師：
小六 徐婕恩	曾美玲
小六 徐于涵	
小六 李佩蓁	
小六 廖孟涵	

關鍵詞：機率、期望值、大數法則

摘要

日常生活脫離不了機率問題，也因為機率使生活充滿樂趣與驚喜，本文藉由麻將賓果遊戲的討論，試著分析連線的概率計算，進而研究抽牌數量對應的連線機率，以及每局花費的成本與應得到的獎品價值的關係。目前在夜市中的麻將賓果遊戲玩法，大多是以排入 6x6 矩陣，達連線則獲勝，總共有 36 張牌，由當中抽取 12 張至 15 張牌，每局所需的費用由 10 局 100 元到 1 局 100 元都有(不同攤位抽取的數量各異)。經過我們理論計算的結果，能在夜市獲得連線得到獎品的概率實在是很低，機率由抽取 12 張牌的 0.55%到抽取 15 張牌的 3.73%，且其對應的獎品價值應該要比目前老闆提供的大娃娃更好才能達到期望值的數值。

壹、 前言

一、 研究動機

生活中到處充斥機率問題，在夜市中很流行的麻將賓果遊戲就是個很有趣的例子，同學們逛夜市都一定會看到麻將賓果的攤子，此遊戲是以麻將排列至 6 行以及 6 列，總共有 36 張牌，由當中抽取 12 張至 15 張牌，達到連線就會有獎品，總是好奇想知道要怎麼做才能中獎？中獎的機率是多少？或是我只花一百元有沒有可能中獎之類的疑惑。

為了要解決相關諸多問題，我們就開始收集資料展開研究。參考了嘉義市第 32 屆中小學科展的作品『麻將的”賓果”奇緣』[註一]，我們在理論計算連線數上做更多更完整的研究，並且新增加電腦程式模擬實驗，來驗證理論計算是否正確，而且經過網路查詢到的相關文章，皆指出二連線以上的組合數很低可以忽略，但是經我們的理論計算卻是不可忽略的，如此才能與電腦程式模擬結果相符合。另外在規劃實驗上，由麻將維度小的 3x3 矩陣開始由小研究到大，由 3x3 矩陣、4x4 矩陣、5x5 矩陣到夜市流行的 6x6 矩陣依序研究。

二、 目的

（一） 3x3 麻將矩陣抽牌張數和連線中獎機率的關係。

（二） 4x4 麻將矩陣抽牌張數和連線中獎機率的關係。

（三） 5x5 麻將矩陣抽牌張數和連線中獎機率的關係。

（四） 6x6 麻將矩陣抽牌張數和連線中獎機率的關係。

（五） 分析連線中獎的機率和獎品價值的相互關係。

貳、 研究設備及器材

一、 實體麻將賓果: 麻將一副、麻將賓果紙四張，實驗記錄簿

二、 電腦模擬麻將賓果: 以微軟 Office Excel VBA 開發電腦麻將賓果模擬程式(其中包含抽牌模組、連線檢查模組、以及連續實驗模組)[註二]

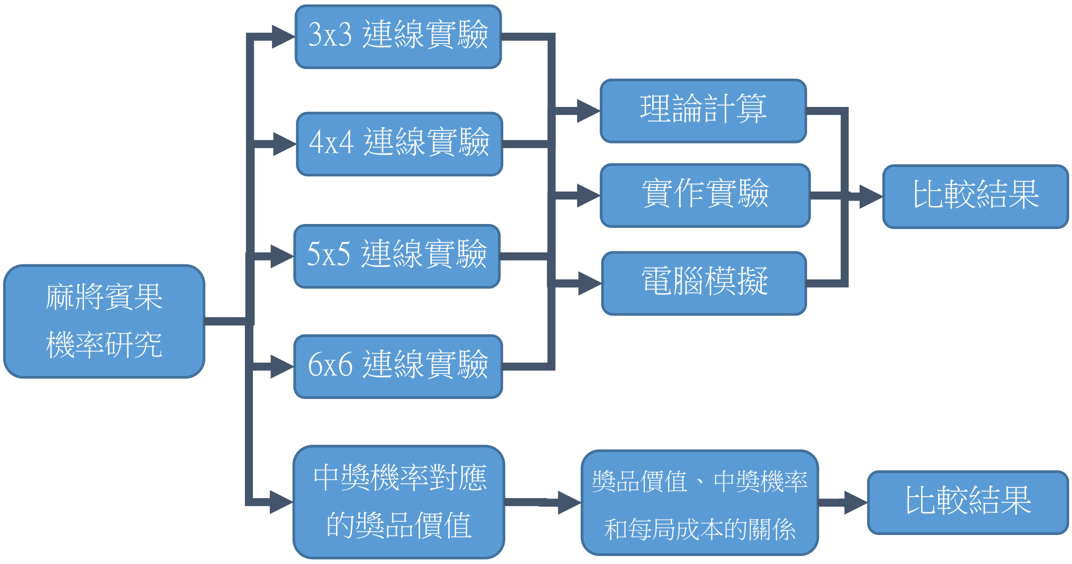
參、 研究過程或方法

一、 麻將賓果遊戲規則

一副麻將總共有 144 張牌，包含 136 張基本牌、花牌(梅、蘭、竹、菊各 1 張)以及四季牌(春、夏、秋、冬各 1 張)、而基本牌所指的就是 1~9 萬、1~9 條、1~9 筒、以及 7 個字牌(中、發、白、東、南、西、北)各四張。所以在 144 張牌之中，1~9 萬、1~9 條、1~9 筒和 7 個字牌都各取一張，加上花牌和四季牌各一張(四花牌及四季牌視為相同)，就可以組成 36 張不重覆的組合。剩下的牌以相同的方法，可以另組三組 36 張不重覆的牌組。

夜市流行的麻將賓果紙上有 6 x 6 的方格(直向和橫向各由 6 格麻將組成的方格矩陣)，將上述不重覆的 36 張牌組隨機排列，每格對應一個麻將圖案。玩家在全部的 36 張不重覆的麻將牌中抽 12 至 15 張，依序對應排列在麻將賓果紙上。只要有一連線就中獎，一般的獎品是大娃娃或中娃娃一隻。

二、研究流程圖



三、 實驗方法

本文研究不同的麻將矩陣大小，有小到 3x3，大到 6x6，其實驗方法是以理論計算、實際實驗、以及電腦程式模擬三種方法進行，再將此三方法的結果列於表及圖中做比較和討論。

(一) 理論計算方法

針對理論的推導，我們的做法是先以計算概念開始發想和討論，再將合乎邏輯的結論，請老師幫忙轉化成數學式子，以方便我們進行實際的計算。下方以[討論]標示的內容就是我們的討論結果，而以[數學式]標示的就是請老師展出的數學式。另本章節的理論計算 n 值適用為 3 到 6，連線組合計算由一連線到四連線，所以抽牌數量 X 會因 n 值及最高四連線而有上限值。

[討論]依排列組合原理，至少一連線機率的算法是算出有連線狀況時的組合數，再除以所有的組合數。所以我們有二個計算目標，第一個是算出所有的組合數，第二個是算出有連線的組合數。

1. **總組合數：**

[討論]在所有矩陣的格子對應的牌之中，不考慮有沒有連線，抽出指定數量的牌。

[數學式]在指定大小 n x n 的麻將矩陣之中，排入指定張數 X 的麻將牌，計算總組合數，可以 $C_X^{n\times n}$ 表示。

2. **一連線組合數：**

[討論]考慮可以造成一連線的條件，然後從已經抽取出的牌中，取出 n 張牌，排在矩陣內的直、横或斜排之中，代表已經是一連線的情況了，其他剩下的牌就排列在其餘的格子中。(此算法會有重覆計算的狀況)

[數學式]抽取指定張數 X，對應於 n x n 麻將紙上的花色排列，出現一連線的所有組合數，可以分別計算直排、横排、斜排三種不同狀況下出現一連線的組合數，再將三種狀況下計算的所有組合數相加，即為一連線的總組合數。(如果此項和為 0，則沒有連線組合，連線機率為 0%)

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，以及連線的特性
直排	$C_1^n \times C_{X-n}^{n\times(n-1)}$	條件：X≥ n 垂直線條
横排	$C_1^n \times C_{X-n}^{n\times(n-1)}$	條件：X≥ n 水平横線條
斜排	$C_1^2 \times C_{X-n}^{n\times(n-1)}$	條件：X≥ n 斜向線條

3. **二連線組合數：**

[討論]一連線的計算方法會在二連線的排列情況之下重覆計算一次，所以我們也要計算二連線的組合數。先考慮可以造成二連線的條件，二條線會有平行和交叉的情況，平行時所需要的牌張數和交叉時不同，又偶數邊的矩陣在二條斜線的情況下是沒有交點的，就是不會共用牌張，所以分別考慮二線的不同狀況，從已經抽取出的牌中，取出符合二線狀況數量的牌，排在矩陣內，代表已經是二連線的情況了，其他剩下的牌就排列在其餘的格子中。

(此算法也會有重覆計算的狀況)

[數學式]抽取指定張數 X，對應 n x n 麻將紙上的花色排列，出現二連線的所有組合數，可以依下表中二線條的特性分別計算組合數，再將所有組合數相加。(如果此和項為 0，則停止計算之後的連線組合數)

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，以及連線的特性
直 x 直	$C_2^n \times C_{X-2n}^{n\times(n-2)}$	條件：$X\geq 2n$ 平行二線不交叉，二線無共用格子
直 x 橫	$C_1^n \times C_1^n \times C_{X-(2n-1)}^{n\times(n-2)+1}$	條件：$X\geq (2n-1)$ 二線交叉，二線共用一格
直 x 斜	$C_1^n \times C_1^2 \times C_{X-(2n-1)}^{n\times(n-2)+1}$	條件：$X\geq (2n-1)$ 二線交叉，二線共用一格
橫 x 橫	$C_2^n \times C_{X-2n}^{n\times(n-2)}$	條件：$X\geq 2n$ 平行二線不交叉，二線無共用格子
橫 x 斜	$C_1^n \times C_1^2 \times C_{X-(2n-1)}^{n\times(n-2)+1}$	條件：$X\geq (2n-1)$ 二線交叉，有一格共用
斜 x 斜 (n 為奇數)	$C_2^2 \times C_{X-(2n-1)}^{n\times(n-2)+1}$	條件：n 為奇數且 $X\geq (2n-1)$ 二線交叉，二線共用一格
斜 x 斜 (n 為偶數)	$C_2^2 \times C_{X-2n}^{n\times(n-2)}$	條件：n 為偶數且 $X\geq 2n$ 二線交叉，但二線無共用格子

4. 三連線組合數：

[討論]和前述二連線相同，計算二連線時也會在三連線的情況下有重覆計算的現象，所以我們也要計算三連線的組合數。同樣的先考慮造成三連線的條件，就是三條線的相互平行和交叉的所有情況，所以要分別考慮三線的不同狀況，從已經抽取出的牌中，取出符合三線狀況數量的牌，排在矩陣內，代表已經是三連線的情況了，其他剩下的牌就排列在其餘的格子中。(此算法也會有重覆計算的狀況)

[數學式]抽取指定張數 X，對應 n x n 麻將紙上的花色排列，出現三連線的所有組合數，可以依下表特性分別計算組合數，再將所有組合數相加。(如果此項和為 0，則停止計算之後的連線組合數)

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，以及連線的特性
直 x 直 x 直	$C_3^n \times C_{X-3n}^{n\times(n-3)}$	條件：$n\geq 3$且 $X\geq 3n$ 平行三線不交叉，三線無共用格子

直 x 直 x 橫	$C_2^n \times C_1^n \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件：X≥ $(3n-2)$ 一線與另平行二線交叉，三線共用二格
直 x 直 x 斜	$C_2^n \times C_1^2 \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件：X≥ $(3n-2)$ 一線與另平行二線交叉，三線共用二格
直 x 橫 x 橫	$C_1^n \times C_2^n \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件：X≥ $(3n-2)$ 一線與另平行二線交叉，三線共用二格
直 x 橫 x 斜	3x3 矩陣： $[(C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^2) -6]\ C_{X-(3n-3)}^{n(n-3)+3}$ 4x4 矩陣： $[(C_1^4 \times C_1^4 \times C_1^2) -8]\ C_{X-(3n-3)}^{n(n-3)+3}$ 5x5 矩陣： $[(C_1^5 \times C_1^5 \times C_1^2) -10]\ C_{X-(3n-3)}^{n(n-3)+3}$ 6x6 矩陣： $[(C_1^6 \times C_1^6 \times C_1^2) -12]\ C_{X-(3n-3)}^{n(n-3)+3}$	條件 1：X≥ $(3n-3)$ 三線相互交叉，三線共用三格 計算方法：三線相交三點的狀況會包含三線相交一點，所以需要先將相交三點的公式，減去相交一點的組合數，再做後續的排列。
	3x3 矩陣: $6 \times C_{X-(3n-2)}^{n(n-3)+2}$ 4x4 矩陣: $8 \times C_{X-(3n-2)}^{n(n-3)+2}$ 5x5 矩陣: $10 \times C_{X-(3n-2)}^{n(n-3)+2}$ 6x6 矩陣: $12 \times C_{X-(3n-2)}^{n(n-3)+2}$	條件 2：X≥ $(3n-2)$ 三線交叉於同一格，三線共用一格 計算方法：不同矩陣大小，三線交於一點的組合如下。 3x3 矩陣有 6 個組合 4x4 矩陣有 8 個組合 5x5 矩陣有 10 個組合 6x6 矩陣有 12 個組合
橫 x 橫 x 斜	$C_2^n \times C_1^2 \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件：X≥ $(3n-2)$ 平行二線分別與一線交叉，三線共用二格
橫 x 橫 x 橫	$C_3^n \times C_{X-3n}^{n\times(n-3)}$	條件：n≥ 3且 X≥ 3n 三線不交叉，三線無共用格子
斜 x 斜 x 直 (n 為奇數)	$[C_1^n \times C_2^2 - 1] \times C_{X-(3n-3)}^{n\times(n-3)+3}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ $(3n-3)$ 三線相互交叉，三線共用三格 計算方法：三線相交於三格的狀況會包含三線交一點，所以需先將相交三點的公式，減去相交一點的組合數，再做後續的排列。
	$1 \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ $(3n-2)$ 三線交叉於同一格，三線共用一格

		計算方法：不同矩陣大小，三線交於一點的組合如下。 3x3 矩陣有 1 個組合 5x5 矩陣有 1 個組合
斜 x 斜 x 直 (n 為偶數)	$C_1^n \times C_2^2 \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件：n 為偶數且 X≥ $(3n-2)$ 直線分別與斜線交叉，三線共用二格
斜 x 斜 x 橫 (n 為奇數)	$[C_1^n \times C_2^2 - 1] \times C_{X-(3n-3)}^{n\times(n-3)+3}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ $(3n-3)$ 三線相互交叉，三線共用三格 計算方法：三線相交於三格的狀況會包含三線交一點，所以需先將相交三點的公式，減去相交一點的組合數，再做後續的排列。
	$1 \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ $(3n-2)$ 三線交叉於同一格，三線共用一格 計算方法：不同矩陣大小，三線交於一點的組合如下。 3x3 矩陣有 1 個組合 5x5 矩陣有 1 個組合
斜 x 斜 x 橫 (n 為偶數)	$C_1^n \times C_2^2 \times C_{X-(3n-2)}^{n\times(n-3)+2}$	條件：n 為偶數且 X≥ $(3n-2)$ 橫線分別斜線交叉，三線共用二格

5. 四連線組合數：

[討論]和前述二連線以及三連線相同，計算三連線時也會在四連線的情況下有重覆計算的現象，所以我們也要計算四連線的組合數。同樣的先考慮造成四連線的條件，就是四條線的相互平行和交叉的所有情況，所以要先分別考慮四線的不同狀況，從已經抽取出的牌中，取出符合四線狀況數量的牌，排在矩陣內，代表已經是四連線的情況了，其他剩下的牌就排列在其餘的格子中。

[數學式]抽取指定張數 X，對應 n x n 麻將紙上的花色排列，出現四連線的所有組合數，可以依下表特性分別計算組合數，再將所有組合數相加。(如果此項和為 0，則停止計算之後的連線組合數)

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，以及連線的特性
直 x 直 x 直 x 直	$C_4^n \times C_{X-4n}^{n\times(n-4)}$	條件：n≥ 4且 X≥ $4n$

		平行四線互不交叉，四線無共用格子
直 x 直 x 直 x 橫	$C_3^n \times C_1^n \times C_{X-(4n-3)}^{n\times(n-4)+3}$	條件：n≥ 3且 $X\geq(4n-3)$ 一線與另平行三線交叉，四線共用三格
直 x 直 x 直 x 斜	$C_3^n \times C_1^2 \times C_{X-(4n-3)}^{n\times(n-4)+3}$	條件：n≥ 3且 $X\geq(4n-3)$ 一線與另平行三線交叉，四線共用三格
直 x 直 x 橫 x 橫	$C_2^n \times C_2^n \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件：$X\geq(4n-4)$ 平行二線與另平行二線交叉，四線共用四格
直 x 直 x 橫 x 斜	$[(C_2^n \times C_1^n \times C_1^2) - (C_2^n \times C_1^2 \times C_1^2)] \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$	條件 1：$X\geq(4n-5)$ 二線相互交叉與另平行二線相交，有五格共用 計算方法：四線相交於五格的狀況會包含四線相交三格，所以需先將相交五點的公式, 減去相交三格的組合數，再做後續的排列。
	$(C_2^n \times C_1^2 \times C_1^2) \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件 2：$X\geq(4n-4)$ 二線相互交叉與另平行二線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法：先考慮斜線的組合狀況是C_1^2，再考慮二直線的組合是C_2^n，最後橫 線必須相交於直線和斜線的交點，所以是C_1^2，所以綜合組合為$(C_2^n \times C_1^2 \times C_1^2)$，再做後續的排列。
直 x 直 x 斜 x 斜 (n 為奇數)	$C_2^{(n-1)} \times C_2^2 \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$	條件 1：n 為奇數且 $X\geq(4n-5)$ 二斜線相互交叉與另平行二直線相交，有五格共用 計算方法：直線不可相交於二斜線交點，所以二直線的組合是$C_2^{(n-1)}$，二斜線的組合是C_2^2，所以綜合組合是$C_2^{(n-1)} \times C_2^2$，再做後續的排列。
	$C_1^1 \times C_1^{(n-1)} \times C_2^2 \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件 2：n 為奇數且 $X\geq(4n-4)$ 二斜線相互交叉與另平行二直線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法：直線一定要交於二斜線交點，所以二直線的組合是$C_1^1 \times C_1^{(n-1)}$，再考慮二斜線，所以綜合組合是$C_1^1 \times C_1^{(n-1)} \times C_2^2$，再做後續的組合。
直 x 直 x 斜 x 斜 (n 為偶數)	$C_2^n \times C_2^2 \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件：n 為偶數且 $X\geq(4n-4)$ 二線相互交叉與另平行二直線相交，有四格共

		用
直 x 橫 x 橫 x 橫	$C_1^n \times C_3^n \times C_{X-(4n-3)}^{n\times(n-4)+3}$	條件：n≥ 3且 X≥ $(4n-3)$ 一線與另平行三橫線交叉，有三格共用
直 x 橫 x 橫 x 斜	$[(C_2^n \times C_1^n \times C_1^2) - (C_2^n \times C_1^2 \times C_1^2)] \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$	條件 1：X≥ $(4n-5)$ 二線相互交叉與另平行二橫線相交，有五格共用 計算方法: 四線相交於五格的狀況會包含四線相交三格，所以需先將相交五點的公式, 減去相交三格的組合數，再做後續的排列。
	$(C_2^n \times C_1^2 \times C_1^2) \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件 2：X≥ $(4n-4)$ 二線相互交叉與另平行二橫線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法: 先考慮斜線的組合狀況是C_1^2，再考慮二橫線的組合是C_2^n ，最後直線必須相交於橫線和斜線的交點，所以是C_1^2，所以綜合組合為$(C_2^n \times C_1^2 \times C_1^2)$，再做後續的排列。
直 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為奇數)	5x5 矩陣: $[(C_1^5 \times C_1^5 \times C_2^2) - 16 - 1] \times C_{X-(4n-6)}^{n\times(n-4)+6}$	條件 1：n 為奇數、$n \geq 5$且 X≥ $(4n-6)$ 四線相互交叉，有六格共用 計算方法: 四線相交於六格的狀況會包含四線相交四格，以及相交一格的狀況，所以需先將相交六點的公式，減去相交四格和一格的組合數，再做後續的排列。
	3x3 矩陣: $8 \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$ 5x5 矩陣: $16 \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ $(4n-5)$ 四線相互交叉，有四格共用(有一格三線共用) 計算方法: 不同矩陣大小，三線交於一點的組合，先考慮直、橫、斜三線交一點的組合如下。 3x3 矩陣有 4 個組合 5x5 矩陣有 8 個組合 再考慮直或橫線，搭配二斜線，其交點會在正中間。 3x3 矩陣有 4 個組合 5x5 矩陣有 8 個組合 所以總組合 3x3 矩陣有 8 個組合 5x5 矩陣有 16 個組合

	$1 \times C_{X-(4n-3)}^{n\times(n-4)+3}$	條件 3：n 為奇數且 X≥ $(4n-3)$ 四線相互交叉，有一格共用(有一格四線共用) 四線相交一格的情況只有一種。
直 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為偶數)	4x4 矩陣: $[C_1^4 \times C_1^4 \times C_2^2 - 8] \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$ 6x6 矩陣: $[C_1^6 \times C_1^6 \times C_2^2 - 12] \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$	條件 1：n 為偶數且 X≥ $(4n-5)$ 四線相互交叉，有五格共用 計算方法: 四線相交五格的狀況會包含四線交三格, 所以將相交五格的公式, 減去四線交三格的數量，再做後續的排列。
	4x4 矩陣: $8 \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$ 6x6 矩陣: $12 \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件 2：n 為偶數且 X≥ $(4n-4)$ 四線相互交叉，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法: 不同矩陣大小，三線交於一點的組合，考慮直、橫、斜三線交一點的組合如下。 4x4 矩陣有 8 個組合 6x6 矩陣有 12 個組合
橫 x 橫 x 橫 x 橫	$C_4^n \times C_{X-4n}^{n\times(n-4)}$	條件：n≥ 4且 X≥ 4n 平行四線互不交叉，四線無共用格子
橫 x 橫 x 橫 x 斜	$C_3^n \times C_1^2 \times C_{X-(4n-3)}^{n\times(n-4)+3}$	條件：n≥ 3且 X≥ $(4n-3)$ 一線與另三線交叉，四線有三格共用
橫 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為奇數)	$C_2^{(n-1)} \times C_2^2 \times C_{X-(4n-5)}^{n\times(n-4)+5}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ $(4n-5)$ 二線相互交叉與另平行二線相交，有五格共用 計算方法：橫線不可相交於二斜線交點，所以二橫線的組合是$C_2^{(n-1)}$，二斜線的組合是C_2^2，所以綜合組合是$C_2^{(n-1)} \times C_2^2$，再做後續的排列。
	$C_1^1 \times C_1^{(n-1)} \times C_2^2 \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ $(4n-4)$ 二線相互交叉與另平行二線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法：橫線一定要交於二斜線交點，所以二橫線的組合是$C_1^1 \times C_1^{(n-1)}$，再考慮二斜線，所以綜合組合是$C_1^1 \times C_1^{(n-1)} \times C_2^2$，再做後續的組合。
橫 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為偶數)	$C_2^n \times C_2^2 \times C_{X-(4n-4)}^{n\times(n-4)+4}$	條件：n 為偶數且 X≥ $(4n-4)$ 二線相互交叉與另平行二線相交，有四格共用

6. **總連線組合數：**

[討論]前面我們已經各別計算一連線至四連線的組合數了，我們要利用這些數值去算出至少一連線，但又不重覆計算的組合數。

[數學式]依排容原理計算總組合數

總連線組合數 = (奇數連線數的組合總和) – (偶數連線數的組合總和)

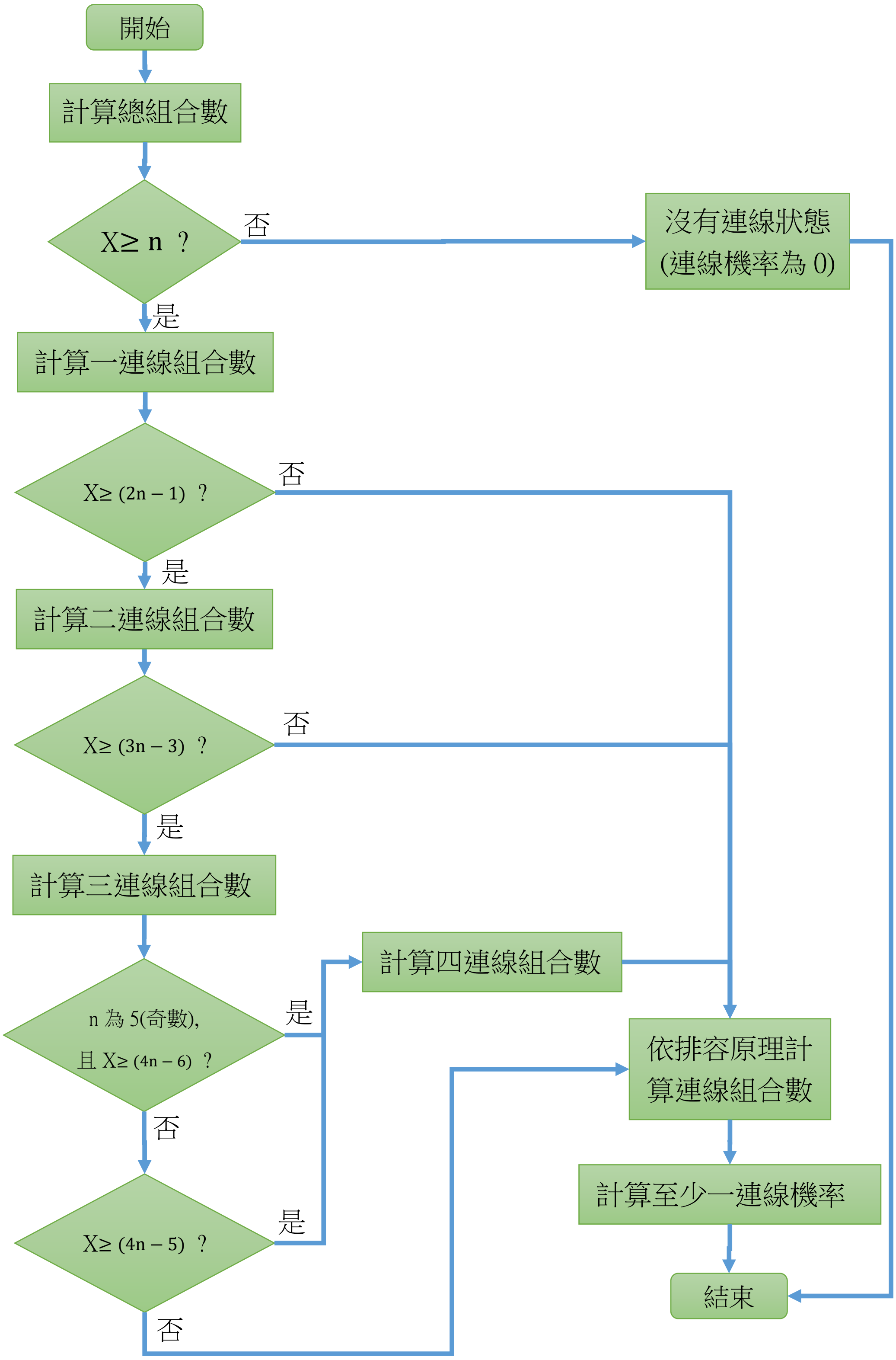
7. **至少一連線機率：**

[討論]我們已經可以算出所有連線情況下的組合數，以及所有連線和沒有連線情況下的總組合數，接著去計算至少一連線的機率。

[數學式]至少一連線的機率式子如下。

至少一連線機率為 $\frac{\text{總連線組合數}}{\text{總組合數}}$

將上述理論計算至少有一連線的機率計算流程整理如下：



理論計算方法試算例：由上述理論計算方法試算麻將賓果矩陣大小為 6 x 6 方格，依排列組合理論計算抽取 12 張牌得到一連線的機率。

步驟 1、計算總組合數　$C_{12}^{36} = 1251677700$

步驟 2、因為抽取的牌數 12 大於一連線的 6 張牌，可以計算一連線組合數

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，及特性線條的特性	**計算值**
直排	$C_1^n \times C_{X-n}^{n\times(n-1)}$	條件：X≥ n 垂直線條	某直排 6 張一定要抽出，剩下 30 張隨意抽 6 張 $C_1^6 \times C_{12-6}^{6\times(6-1)}$= 3562650
橫排	$C_1^n \times C_{X-n}^{n\times(n-1)}$	條件：X≥ n 水平橫線條	$C_1^6 \times C_{12-6}^{6\times(6-1)}$ = 3562650
斜排	$C_1^2 \times C_{X-n}^{n\times(n-1)}$	條件：X≥ n 斜向線條	某斜排 6 張一定要抽出，剩下 30 張隨意抽 6 張 $C_1^2 \times C_{12-6}^{6\times(6-1)}$ = 1187550
		總和	共 8312850 種組合

步驟 3、因為抽牌數 12 大於等於二連線的所需牌數 2x6 所以需要再算二連線組合數

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，及特性線條的特性	**計算值**
直 x 直	$C_2^n \times C_{X-2n}^{n\times(n-2)}$	條件：X≥ 2n 平行二線不交叉，即無共用格子	某 2 直排 12 張一定要抽出，剩 24 張隨意抽出 0 張 C_2^6= 15
直 x 橫	$C_1^n \times C_1^n \times C_{X-2n+1}^{n\times(n-2)+1}$	條件：X≥ (2n − 1) 二線交叉，二線共用一格	某直排及橫排 11 張一定要抽出，剩 25 張隨意抽出 1 張 $C_1^6 \times C_1^6 \times C_1^{25}$= 900
直 x 斜	$C_1^n \times C_1^2 \times C_{X-2n+1}^{n\times(n-2)+1}$	條件：X≥ (2n − 1) 二線交叉，有一格共用	$C_1^6 \times C_1^2 \times C_1^{25}$= 300
橫 x 橫	$C_2^n \times C_{X-2n}^{n\times(n-2)}$	條件：X≥ 2n 平行二線不交叉，無共用格子	C_2^6= 15
橫 x 斜	$C_1^n \times C_1^2 \times C_{X-2n+1}^{n\times(n-2)+1}$	條件：X≥ (2n − 1) 二線交叉，二線共用一格	$C_1^6 \times C_1^2 \times C_1^{25}$= 300
斜 x 斜	$C_2^2 \times C_{X-2n}^{n\times(n-2)}$	條件：X≥ 2n 二線交叉，二線共用一格	二斜排 12 張牌一定要抽出，剩 25 張隨意抽出 0 張 C_2^2= 1
		總和	共 1531 種組合

步驟 4、檢查是否有三連線的狀況(n 為偶數，X 是否大於(3n - 2))，其中(3n - 2)是 16，抽的牌 12 張小於 16，所以三連線的組合為 0，則停止連線組合的計

算。

步驟 5、利用排容原理，將一連線組合數減去二連線組合數，即可求得連線的總組合數。

連線總組合數 $= (\text{一連線組合數}) - (\text{二連線組合數}) = (8312850) - (1531) = 8311319$

步驟 6、將上個步驟計算連線總組合數值除以全部總組合數就可以算出 6x6 矩陣下，抽取 12 張牌至少一連線的機率。

$$\text{連線機率} = \frac{8311319}{1251677700} = 0.664\%$$

(二)實作實驗方法

1. 實驗器材: 麻將一副、賓果紙四張(下圖例)、實驗記錄簿。
2. 實驗方法:

(1) 除了依目前所知的夜市規則，使用 6 x 6 格的賓果麻將紙(共 36 張麻將)之外，也準備了 3 x 3 格(共 9 張麻將)、4 x 4 格(共 16 格麻將)、5 x 5 格(共 25 格麻將)的賓果麻將紙。

(2) 3 x 3 連線實驗：以 3 x 3 格排列的麻將紙，抽取指定數量的 3 ~ 7 張麻將牌，對應麻將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線，不同抽牌數各玩 100 次，再統計有連線的次數及機率。

(3) 4 x 4 連線實驗：以 4 x 4 格排列的麻將紙，抽取指定數量的 4 ~ 11 張麻將牌，對應麻將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線，不同抽牌數各玩 100 次，再統計有連線的次數及機率。

(4) 5 x 5 連線實驗：以 5 x 5 格排列的麻將紙，抽取指定數量的 5 ~ 14 張麻將牌，對應麻將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線，不同抽牌數各玩 100 次，再統計有連線的次數及機率。

(5) 6 x 6 連線實驗：以 6 x 6 格排列的麻將紙，抽取指定數量的 6 ~ 19 張

牌，檢查是否有連線。不同抽牌張數各玩 100 次，再統計有連線的次數及其中獎機率。

3x3 實驗麻將紙	4x4 實驗麻將紙	5x5 實驗麻將紙	6x6 實驗麻將紙
			

(三)電腦程式模擬方法

我們採用微軟 Office Excel VBA 撰寫電腦麻將賓果抽牌模擬程式，Excel VBA 屬於高階的程式語言[註二]，比較容易入門，其中的模組功能介紹如下，而實際執行的流程如下圖。

1. **抽牌模組**：在(n x n)張牌之中，抽出 X 張牌，以綠色記錄在 Excel 的(n x n)方格中。

   <u>程式流程</u>：在 Excel 布置 n x n 方格，將(n x n)張牌編號由 1 到(n x n)，以隨機函數抽一張，抽出的號碼先比對是否已經抽過，若已抽過則重抽，若沒有重覆，就記錄號碼，在 Excel 方格上以綠色標示，再重覆抽牌步驟，直到抽出的牌數達到指定抽牌數量 X 為止。

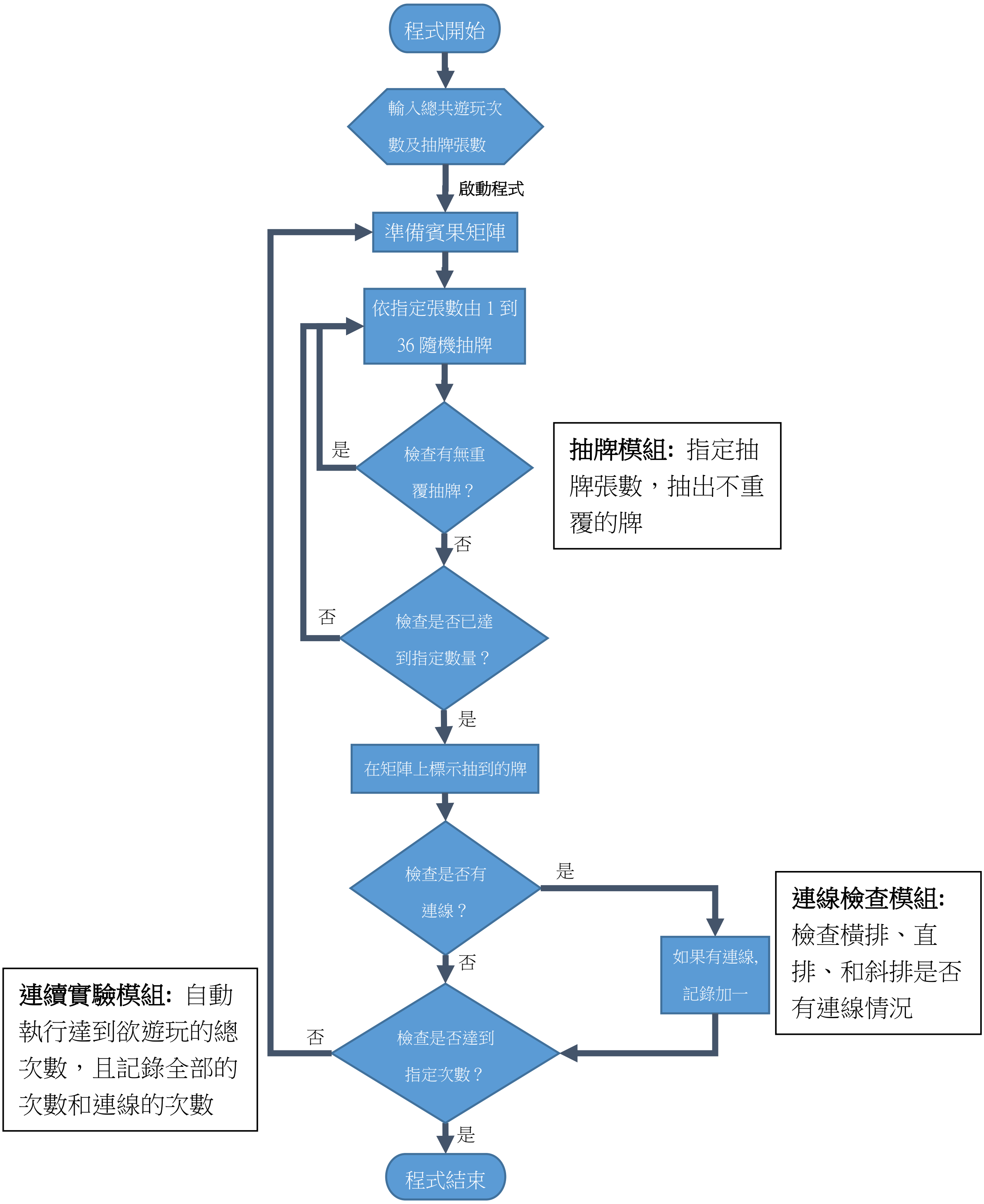
2. **連線檢查模組**：在 Excel 的(n x n)方格中，依序檢查直排、橫排、斜排是否有連線，檢查結果記錄於連線次數變數。

   <u>程式流程</u>：完成抽牌後，在方格上以綠色標出抽出的牌，依序檢查直排(n 排)、橫排(n 排)、斜排(2 排)，只要檢查有連線(整排方格為綠色)，則將連線記錄次數變數加一，並跳出連線檢查迴圈，若沒有連線產生，待全部檢查結束之後，跳出連線檢查迴圈。

3. **連續實驗模組**：當模擬次數達到玩家設定的數量就停止模擬，再輸出模

擬結果。

<u>程式流程</u>：在結束抽牌模組及連線檢查模組的運作時，將總遊玩次數變數加一，再將其與玩家設定的遊玩次數比對，若未達到則繼續下一回合抽牌，若已達到欲遊玩的次數則停止模擬，輸出總次數及總連線次數。



四、 3x3 麻將矩陣連線實驗

3x3 麻將矩陣是由直向和橫向各由 3 格麻將組成的方格矩陣，由不重覆的 9 張麻將牌隨機排列至每一格內。在 9 張牌中抽出指定數量的牌數，對應麻將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線(一連線以上)。

實驗方法是以前述三種實驗方法施測，分別是理論計算方法、實作實驗方法和電腦程式模擬方法，計算、實際抽取或模擬抽取 3 到 7 張牌以得出結果，再記錄連線的次數及機率。

其中理論計算是依據本文第 5 頁(一)章節所列公式計算得之。

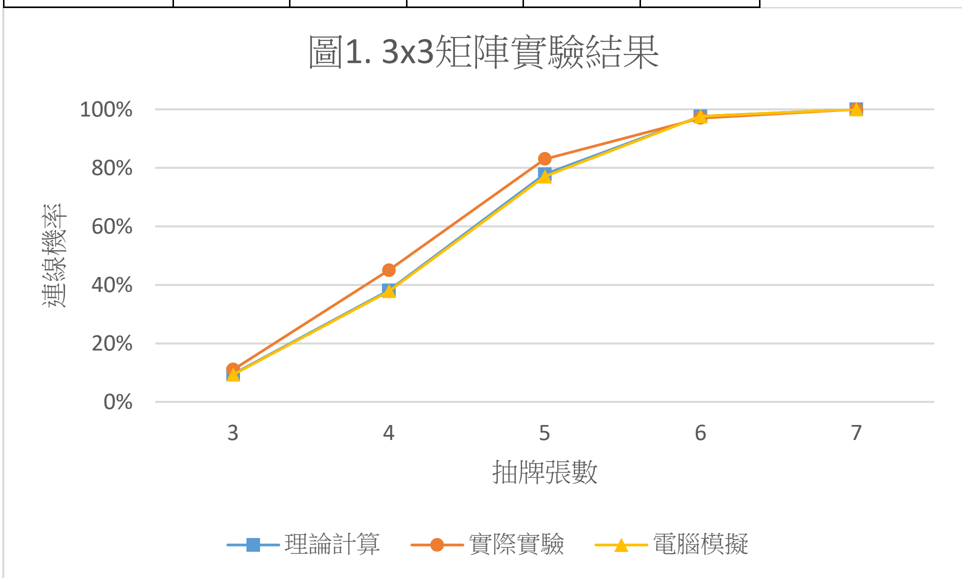
而實作實驗是每個抽牌數各玩 100 次，記錄至少一連線的次數，再除以總遊玩數 100 次去計算連線機率。

而電腦程式模擬是在每個抽牌數各執行 10000 次，再分別統計有連線的次數及除總執行次數去統計連線機率。

三種實驗方法的結果，分別對應抽取不同張數牌，至少一連線的機率列於下表 1.

表 1. 3x3 矩陣下，抽牌張數對應的連線機率

抽牌張數	3	4	5	6	7
理論計算	9.5%	38.1%	77.8%	97.6%	100.0%
實際實驗	11%	45%	83%	97%	100%
電腦模擬	9.29%	37.82%	77.02%	97.58%	100.00%



(一)由圖 1 可知，理論計算及電腦模擬二者數值較接近，而實際實驗的數值相較另二者有差距。

(二)承(一)，實際實驗的連線機率數值相對另二者數值較高，差距最大是在抽 4 張牌的實驗結果，與理論計算數差距在 6.9%。

(三) 以理論計算值來說，抽三張牌一連線的機率是 9.5%，再多抽一張至 4 張牌的連線機率就快速上升到 38.1%，甚至抽到第 5 張牌的連線機率就超過 5 成的 77.8%。

五、 4x4 麻將矩陣連線實驗

4x4 麻將矩陣是由直向和橫向各由 4 格麻將組成的方格矩陣，由不重覆的 16 張麻將牌隨機排列至每一格內。在 16 張牌中抽出指定數量的牌數，對應麻將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線(一連線以上)。

實驗方法是以前述三種實驗方法施測，分別是理論計算方法、實作實驗方法和電腦程式模擬方法，計算、實際抽取或模擬抽取 4 到 11 張牌以得出結果，再記錄連線的次數及機率。

其中理論計算是依據本文第 5 頁(一)章節所列公式計算得之。

而實作實驗是每個抽牌數各玩 100 次，記錄至少一連線的次數，再除以總遊玩數 100 次去計算連線機率。

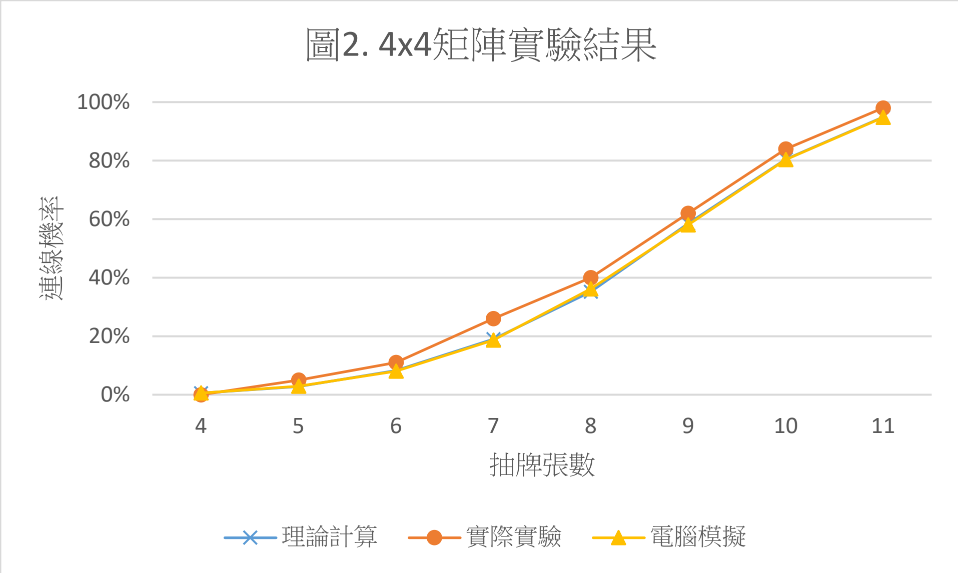
而電腦程式模擬是在每個抽牌數各執行 10000 次，再分別統計有連線的次數及除總執行次數去統計連線機率。

三種實驗方法的結果，分別對應抽取不同張數牌，至少一連線的機率列於下表 2.

表 2. 4x4 矩陣下，抽牌張數對應的連線機率

抽牌張數	4	5	6	7	8	9	10	11
理論計算	0.55%	2.75%	8.24%	18.95%	35.13%	58.46%	80.47%	94.87%

實際實驗	0%	5%	11%	26%	40%	62%	84%	98%
電腦模擬	0.56%	2.94%	8.06%	18.65%	36.13%	58.08%	80.36%	94.75%



(一) 由圖 2 可知，理論計算及電腦模擬二者數值較接近，而實際實驗的數值相較另二者有差距，此結果與 3x3 矩陣結果相同。

(二) 承(一)，實際實驗的連線機率數值相對另二者數值高，差距最大的是在抽 7 張牌的實驗結果，與理論計算數差距 7%。

六、 5x5 麻將矩陣連線實驗

5x5 麻將矩陣是由直向和橫向各由 5 格麻將組成的方格矩陣，由不重覆的 25 張麻將牌隨機排列至每一格內。在 25 張牌中抽出指定數量的牌數，對應麻將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線(一連線以上)。

實驗方法是以前述三種實驗方法施測，分別是理論計算方法、實作實驗方法和電腦程式模擬方法，計算、實際抽取或模擬抽取 5 到 14 張牌以得出結果，再記錄連線的次數及機率。

其中理論計算是依據本文第 5 頁(一)章節所列公式計算得之。

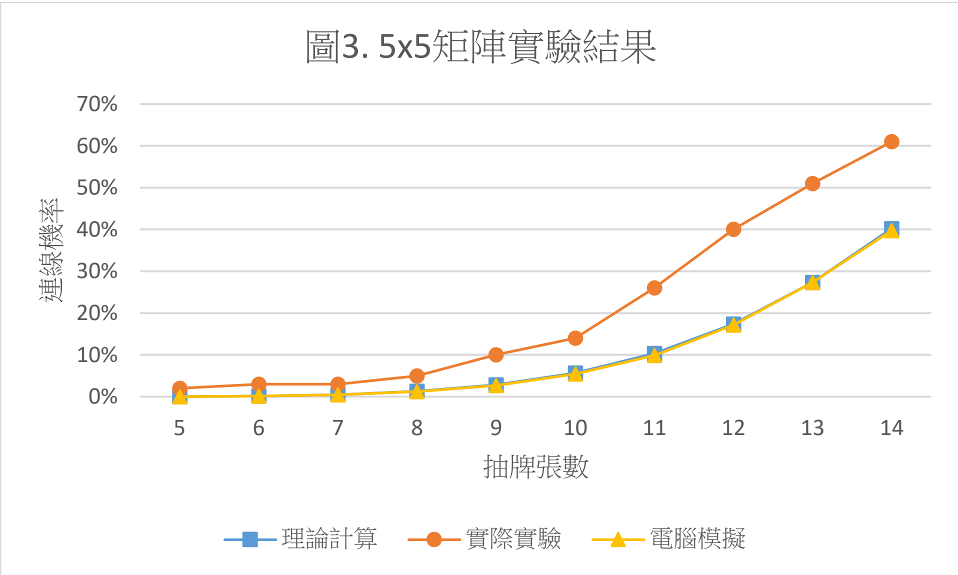
而實作實驗是每個抽牌數各玩 100 次，記錄至少一連線的次數，再除以總遊玩數 100 次去計算連線機率。

而電腦程式模擬是在每個抽牌數各執行 10000 次，再分別統計有連線的次數及除總執行次數去統計連線機率。

三種實驗方法的結果，分別對應抽取不同張數牌，至少一連線的機率列於下表 3.

表 3. 5x5 矩陣下，抽牌張數對應的連線機率

抽牌張數	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
理論計算	0%	0.15%	0.47%	1.26%	2.84%	5.67%	10.30%	17.35%	27.30%	40.22%
實際實驗	2%	3%	3%	5%	10%	14%	26%	40%	51%	61%
電腦模擬	0%	0.13%	0.47%	1.20%	2.70%	5.42%	9.90%	17.14%	27.29%	39.75%



(一) 由圖 3 可知，理論計算及電腦模擬二者數值較接近，而實際實驗的數值相較另二者有差距，此結果與 3x3、4x4 矩陣結果相同。

(二) 承(一)，實際實驗的連線機率數值相對另二者數值高，差距最大的是在抽 13 張牌的實驗結果，與理論計算數差距 23.7%。

七、 6x6 麻將矩陣連線實驗

6x6 麻將矩陣是由直向和橫向各由 6 格麻將組成的方格矩陣，由不重覆的 36 張麻將牌隨機排列至每一格內。在 36 張牌中抽出指定數量的牌數，對應麻

將紙上圖案，排列在圖案上，檢查是否有連線(一連線以上)。

實驗方法是以前述三種實驗方法施測，分別是理論計算方法、實作實驗方法和電腦程式模擬方法，計算、實際抽取或模擬抽取 6 到 19 張牌以得出結果，再記錄連線的次數及機率。

其中理論計算是依據本文第 5 頁(一)章節所列公式計算得之。

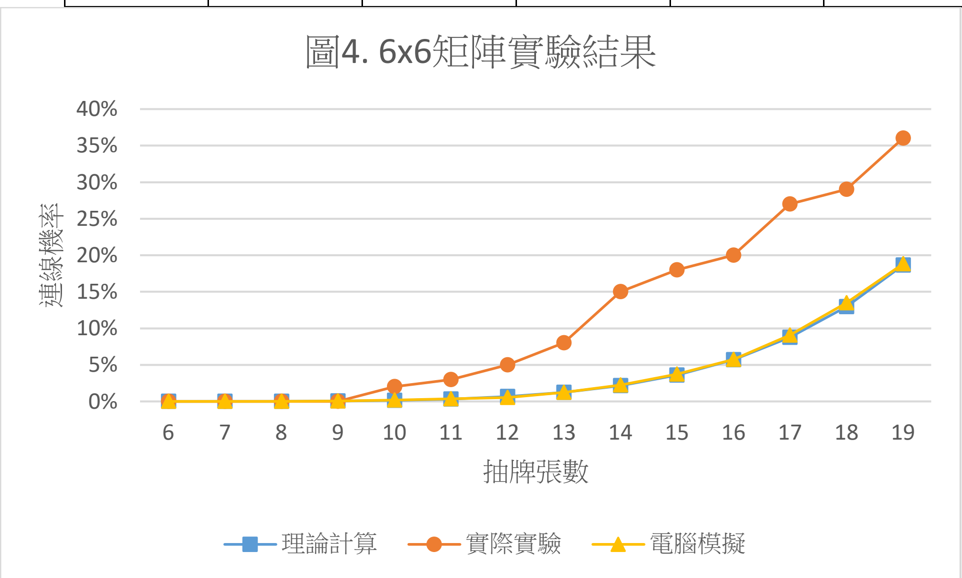
而實作實驗是每個抽牌數各玩 100 次，記錄至少一連線的次數，再除以總遊玩數 100 次去計算連線機率。

而電腦程式模擬是在每個抽牌數各執行 10000 次，再分別統計有連線的次數及除總執行次數去統計連線機率。

三種實驗方法的結果，分別對應抽取不同張數牌，至少一連線的機率列於下表 4.

表 4. 6x6 矩陣下，抽牌張數對應的連線機率

抽牌張數	6	7	8	9	10	11	12
理論計算	0%	0.01%	0.02%	0.06%	0.15%	0.33%	0.66%
實際實驗	0%	0%	0%	0%	2%	3%	5%
電腦模擬	0%	0%	0.01%	0.05%	0.18%	0.35%	0.55%
抽牌張數	13	14	15	16	17	18	19
理論計算	1.23%	2.15%	3.58%	5.70%	8.76%	12.98%	18.63%
實際實驗	8%	15%	18%	20%	27%	29%	36%
電腦模擬	1.23%	2.26%	3.73%	5.72%	9.07%	13.50%	18.81%



(一)由圖 4 可知，理論計算及電腦模擬二者數值較接近，而實際實驗的數值較另二者有差距，此結果由 3x3 到 6x6 矩陣結果都相同。

(二)承(一)，實際實驗的連線機率數值相對另二者數值高，差距最大的是在抽 17 張牌的實驗結果，與理論計算數差距 19.24%。

(三)由表 4 看來，抽 15 張牌得到一連線以上的機率是 3.73%，即我們玩 100 次平均會中獎 3.73 次。如果改抽 12 張牌的話，中獎機率是 0.55%，即我們玩 100 次平均只會中獎 0.55 次，大概是抽 15 張中獎機率的 1/7。

(四)另外，由圖 4 也可看出機率曲線的趨勢，抽牌張數愈少，一連線中獎的機率會快速向低概率的方向遞減，可見抽取的牌數愈少，要中一連線以上的機率也跟著快速降低。反之，抽牌張數愈多，一連線中獎的機率就會快速向高概率的上方增加。可見抽牌的數量愈多，要中一連線以上的機率也會快速增加。

八、 中獎機率對應的獎品價值

關於中獎獎品應該有多少價值才划算?

這個部分可以帶入期望值的概念，由中獎機率和每局的花費來計算出獎品應該要有多少價值。

期望值 = (獎品的價值 x 中獎的機率) – 每局付出的費用 [公式 1]

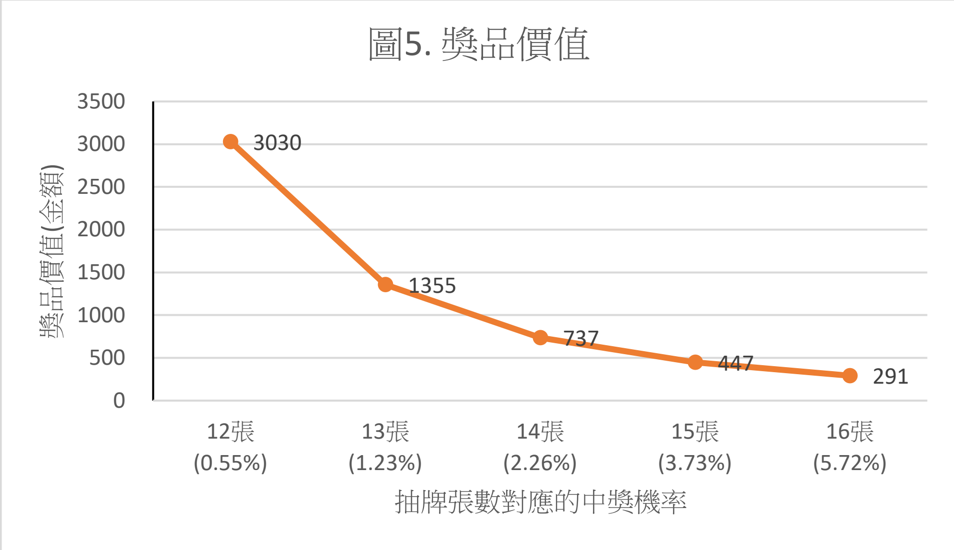
若上式期望值大於 0 表示是對玩家有利。

如果以不賺不賠的條件下，公式 1 的期望值可以 0 代入，換算出獎品價值等於下式。

獎品的價值 = 每局付出的費用/中獎的機率 [公式 2]

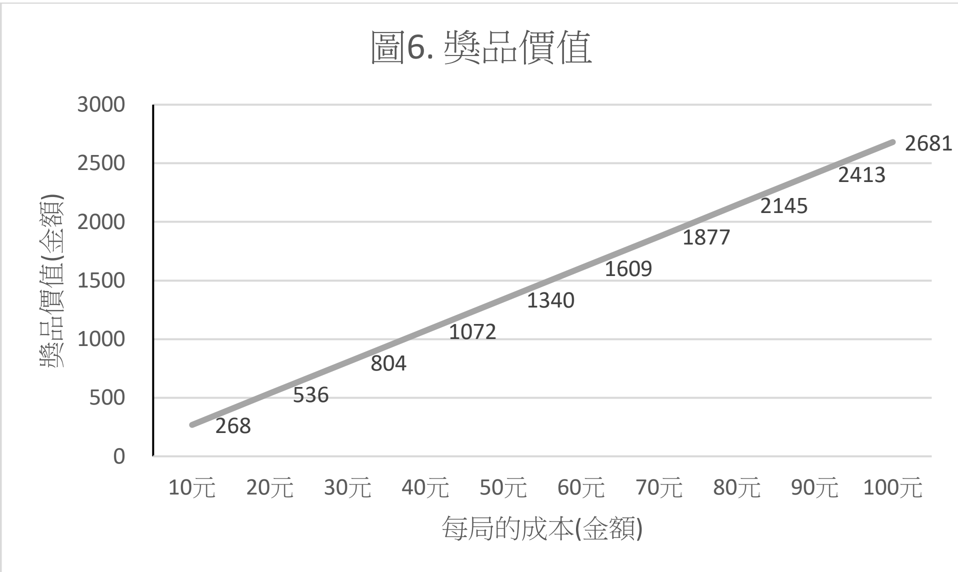
依夜市實際使用的 6x6 矩陣，以及價位 6 局 100 元來計算，即每局付出的

費用是($\frac{100}{6}$)元，中獎機率數值以 6x6 電腦程式模擬的結果，代入公式 2 算出每局抽取不同張數的中獎機率所對應的獎品價值如下圖 5。



由上圖 5 可知，抽牌數愈少(即中獎機率降低)，獎品的價值自然上升。如果相同規則之下，原本抽取 15 張牌改抽 12 張牌，機率只剩 0.55%，獎品的價值會增加約 7 倍，遊戲才會公平。如果抽 15 張中獎贈送的獎品成本是 447 元，那抽取 12 張連線相對的獎品價值就應該調整成 3030 元。

同公式 2，假設固定中獎機率，如抽取 15 張牌(3.73%中獎率)，即可算出每局付出不同的成本所對應的中獎獎品價值，如下圖 6。



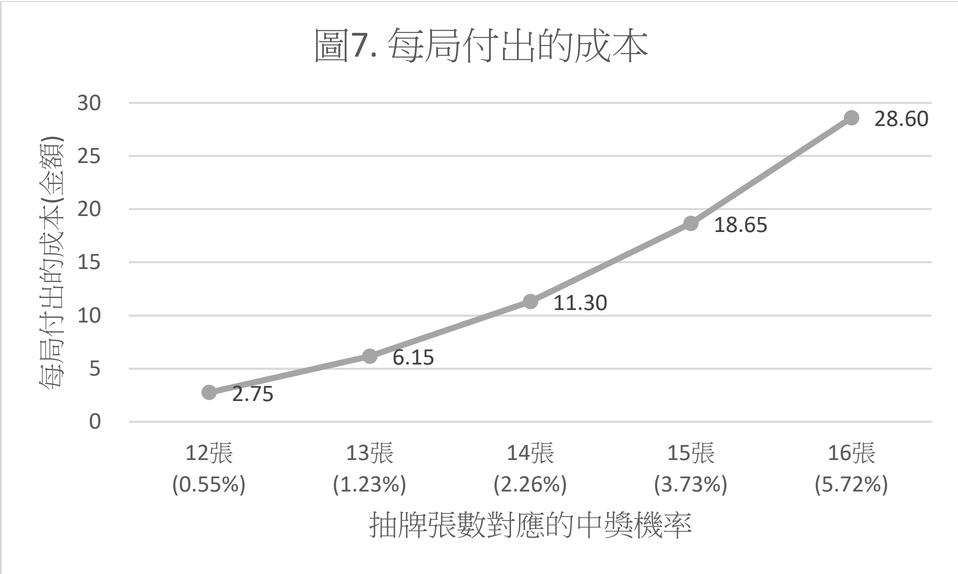
由上圖 6 可知，玩家每局所付出的費用(每局的成本)愈高，所換得的獎品價

值就要愈高。如果抽牌數為 15 張的狀況之下，一局 20 元所得到的獎品價值應為 536 元才划算。若一局成本增加至 5 倍為 100 元時所得到的獎品價值就相對需要增加至 5 倍為 2681 元，才符合期望值理論。

另外，再將公式 1 改成下式，也可由中獎機率和老闆提供的獎品價值換算出每局應付出的費用。

每局付出的費用 = (中獎的機率 x 獎品的價值) [公式 3]

如果固定獎品價值是 500 元，即可算出抽取不同張數的中獎機率所對應的玩家每局付出的成本，如下圖 7。



由上圖 7 可知，抽牌數愈少(即中獎機率降低)，且獎品的價值相同時，玩家每局所付出的成本就應該降低。如果相同規則之下，原本抽取 15 張牌改抽 12 張牌，中獎機率由 3.73%降低至 0.55%，每局付出的成本也應該相對調整成 1 / 7 左右，遊戲才會公平。如果抽 15 張的付出成本是 18.65 元，那抽取 12 張付出的成本就應該調整成 2.75 元。

如果我是老闆，舉行週年慶活動，以不虧錢的前提，準備的獎品價值為 500 元，相同的遊戲規則之下，抽取 15 張牌的規則下，每次收 18.65 元就是成本價。只要收取超過成本價，長期經營下來是會獲利的(期望值大於 0)。

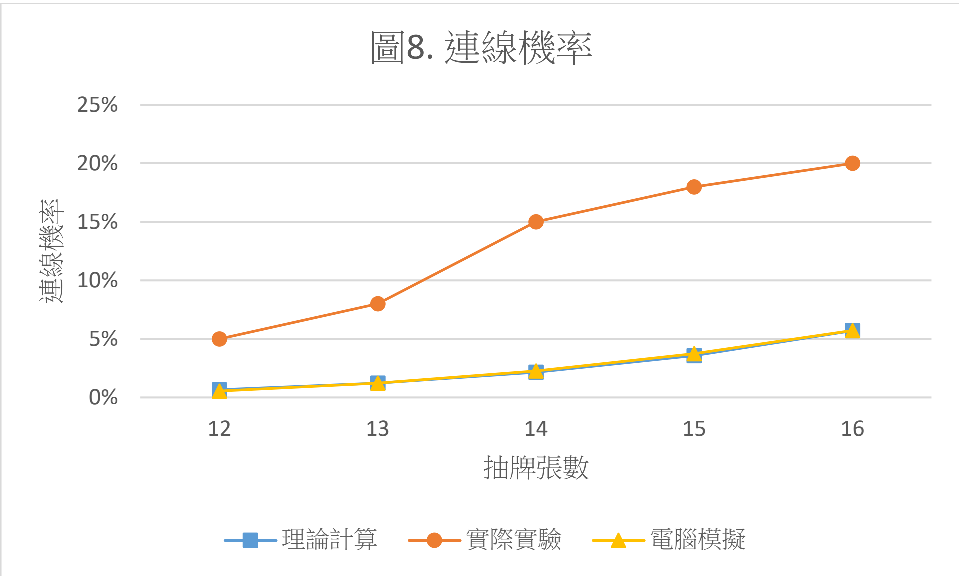
肆、 研究結果

一、 3x3、4x4、5x5、6x6 實驗比較結果

矩陣維度較小時，要達到連線所要抽的牌數會比較少，所以遊玩的時間會比較短，以 3x3 矩陣為例，只要抽取 5 張牌以上，連線的機率就超過達到 77.8%。所以沒那麼多時間，仍想感受賓果樂趣的玩家是可以考慮小維度的矩陣。相對地最大的 6x6 矩陣，在抽 19 張牌的連線機率也只達到 18.63%，所以對於想享受抽牌樂趣的玩家會比較適合。

二、 連線機率比較結果

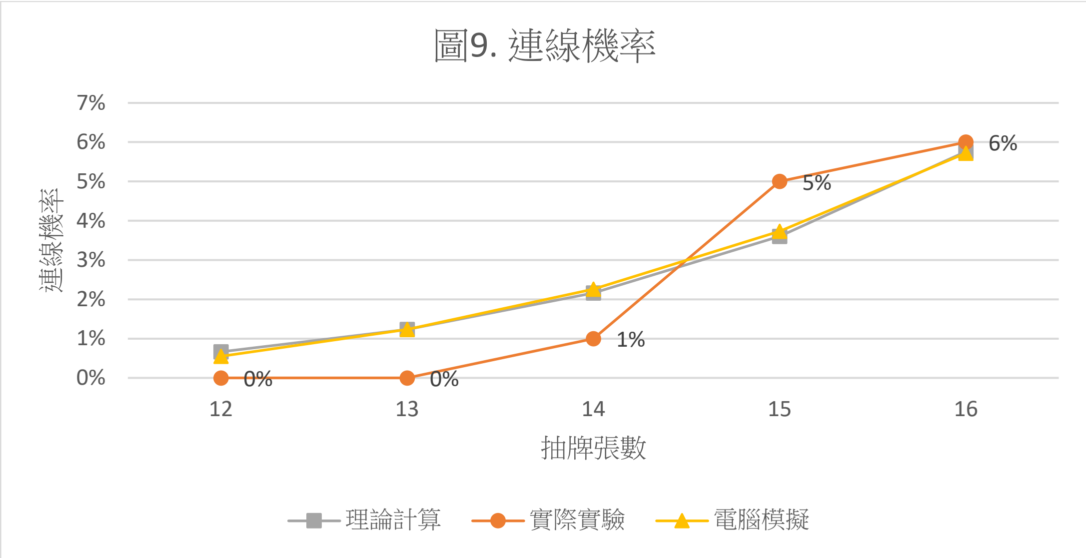
將 6x6 矩陣實驗結果的「理論計算」、「實作實驗」及「電腦模擬」三者的結果取夜市常用的 12~16 張牌的結果繪於同一張圖比較，結果如下圖 8。



(一)圖 8 中實際實驗的連線機率數值明顯相較另二者數值高，推測原因是每局牌局結束後洗牌沒有徹底，造成每張牌被抽到的機率不相同，如果前一局已有連線的情況，加上牌沒洗乾淨，下一局連線的機率就會上升。

為了避免洗牌不均勻的誤差，我們參考夜市麻將賓果老闆的洗牌方式，需要準備至少一個肩膀寬的桌面，洗牌時雙手手掌快速旋轉，次數至少 20 下，以達到每次開局麻將的每張牌是隨機散佈在桌上的，再針對 6x6 矩陣

的 12 ~ 16 張牌，各重新測試 100 次，結果如下圖 9。

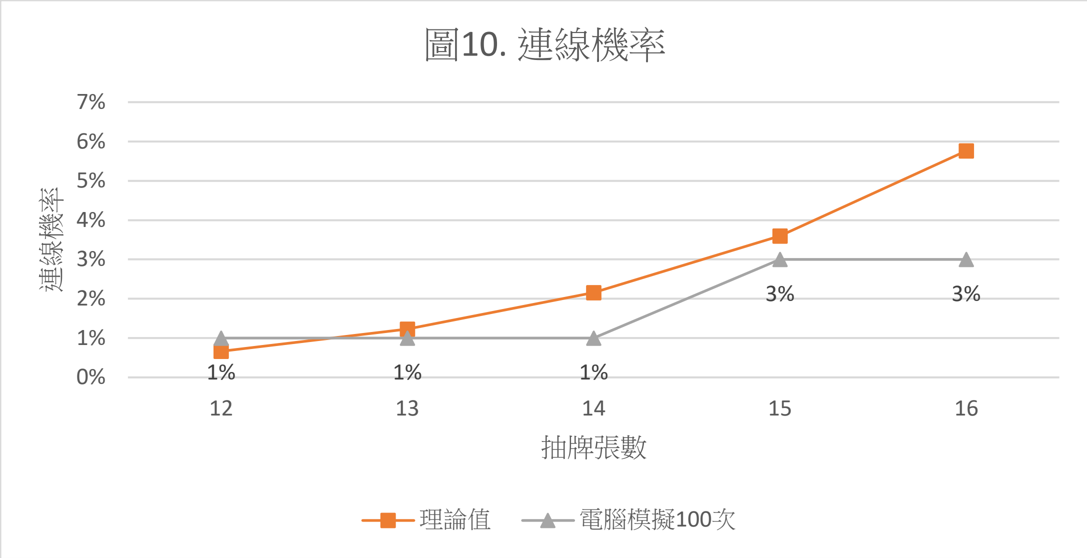


(二)改善洗牌方式後，實際實驗數值在 12 ~ 14 張牌實驗值是落在理論數值的下方，而 15 ~ 16 張牌的數值是在理論值的上方，看來已明顯降低洗牌不均勻的問題。

(三)理論計算與電腦模擬的數據值二者的曲線接近，可見電腦模擬 10000 次的數據已經足夠貼近理論值。

(四)再分析實際實驗值，其與理論計算值(或電腦模擬值)還是有差距，原因推測是取樣太少，實驗次數只有 100 次，其實驗結果一定會是整數值；若依大數法則[註三]，取樣到一定多次時，其實驗結果就會呈現非整數值，且機率曲線就會接近理論值。

(五)將電腦調整只模擬 100 次，推測結果也會像實際實驗值般與理論值曲線差距很大。實際電腦模擬 100 次結果如下圖 10。



電腦模擬 100 次曲線確實與理論值距離明顯拉大很多，取樣太少結果也符合大數法則。

三、 對應獎品價值比較結果

將「每局付出成本」、「連線機率」及「獎品價值」三者的相對關係做比較。

(一) 連線機率降低時，獎品的價值要提升。原本抽取 15 張牌改抽 12 張牌，機率降低至 0.55%時，獎品的價值要提高約 7 倍，遊戲才會公平。

(二) 每局付出的成本愈高，所換得的獎品價值就要愈高。一局成本增加至 5 倍時，所得到的獎品價值就相對需要增加至 5 倍，符合期望值理論。

(三) 連線機率降低時，玩家每局所付出的成本就應該降低。原本抽取 15 張牌改抽 12 張牌，連線機率降低約 1/7，每局的成本也應該調整成 1/7 左右，遊戲才會公平。

(四) 如果我是老闆，只要每局收取玩家的費用超過成本價(期望值大於 0)，長期經營下來是會獲利的。

伍、 討論

一、 麻將賓果遊戲連線中獎的機率有多高？

經理論計算、電腦程式模擬及實作實驗皆證明，中獎機率與抽取牌數量有關，抽牌數量愈多，連線中獎機率愈高。所以抽牌數量與連線中獎機率大約呈正比(參考圖 9)。

二、 抽牌張數和連線中獎的機率的關係是什麼？

經研究結果得知，抽 12 張牌時，連線中獎機率為 0.55%，也就是說，玩 100 次會中獎 0.55 次，若抽 15 張牌時，連線中獎機率為 3.73%，也就是說，玩 100 次會中獎 3.73 次。

三、 連線中獎的機率和獎品價值有沒有相互關係？

依研究數據可知，抽牌張數對應的中獎機率愈低時，獎品的價值會愈高。所以中獎機率與獎品的價值大約呈反比(參考圖 5)。

四、 如果減少抽牌數量換取更大獎是否划算？

經研究證明，原本抽 15 張牌改抽 12 張牌，獎品的價值會增加約 7 倍，可換取更大的獎項。如果抽 15 張牌中獎贈送的獎品價值是 430 元，那抽取 12 張牌連線中獎相對的獎品價值就應該調整成 3014 元。所以商家提供的商品實際價值比理論數值低時就不划算。

陸、 結論

一、 本文的理論計算與電腦模擬的結果二者的數值接近，足以證明理論方法的正確性，未來在玩賓果遊戲，由 3x3 到 6x6 的矩陣大小，都能利用本文的理論先行計算確認其機率值，再決定是否參與遊戲。

二、 綜合本文理論計算與實驗結論，以目前的夜市所訂定的遊戲規則，每玩一局的成本和中獎獎品價值代入計算得到的期望值是小於 0，就是表示玩家長期參與此遊戲是會吃虧的，但以純娛樂心態視之是勉強可以接受的

三、 綜觀麻將賓果的遊戲，雖然是娛樂為主，但裡頭充滿趣味的數學機率理論，我們只要平時細心留意生活週遭，就能發現一些與機率相關的事物潛藏在四周，可謂機率無所不在。

柒、 參考文獻資料

一、 麻將的”賓果”奇緣，嘉義市第 32 屆中小學科學展覽作品

二、 Office 的 VBA 入門

https://learn.microsoft.com/zh-tw/office/vba/library-reference/concepts/getting-started-with-vba-in-office

三、 大數法則

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%A4%A7%E6%95%B8%E6%B3%95%E5%89%87

【評語】080410

本研究從生活中取材，以夜市麻將賓果遊戲為題材，用理論計算、實際實驗以及電腦程式模擬等三種方法進行，由 3x3、4x4、5x5、到 6x6，深入探討抽牌張數和連線中獎機率的關係，研究過程除了利用古典機率計算中獎機率，也實際重複實驗計算機率和利用電腦模擬實驗，多方面探勘研究問題精神可嘉。分析連線中獎的機率和獎品價值的相互關係。發現抽牌數量愈多，連線中獎機率愈高，抽牌數量與連線中獎機率約略成正比，理論計算的結果與電腦模擬的結果數值接近。最後再利用計算出的機率進一步推算相關期望值，若能像探討連線機率一樣多方面探勘相關期望值會更有趣。

作品海報


機率無所不在
探討麻將賓果中獎機率
二萬
一萬
八萬

摘　　要

日常生活脫離不了機率問題，也因為機率使生活充滿樂趣與驚喜，本文藉由麻將賓果遊戲的討論，試著分析連線的概率計算，進而研究抽牌數量對應的連線機率，以及每局花費的成本與應得到的獎品價值的關係。目前在夜市中的麻將賓果遊戲玩法，大多是以排入6x6矩陣，達連線則獲勝，總共有36張牌，由當中抽取12張至15張牌，每局所需的費用由10局100元到1局100元都有(不同攤位抽取的數量各異)。經過我們理論計算的結果，能在夜市獲得連線得到獎品的概率實在是很低，機率由抽取12張牌的0.55%到抽取15張牌的3.73%，且其對應的獎品價值應該要比目前老闆提供的大娃娃更好才能達到期望值的數值。

壹、研究動機及目的

生活中到處充斥機率問題，在夜市中很流行的麻將賓果遊戲就是個很有趣的例子，同學們逛夜市都一定會看到麻將賓果的攤子，此遊戲是以麻將排列至6行以及6列，總共有36張牌，由當中抽取12張至15張牌，達到連線就會有獎品，總是好奇想知道要怎麼做才能中獎？中獎的機率是多少？或是我只花一百元有沒有可能中獎之類的疑惑。

為了要解決相關諸多問題，我們就開始收集資料展開研究。參考了嘉義市第32屆中小學科展的作品『麻將的"賓果"奇緣』【文獻一】，我們在理論計算連線數上做更多更完整的研究，並且新增加電腦程式模擬實驗，來驗證理論計算是否正確，而且經過網路查詢到的相關文章，皆指出二連線以上的組合數很低可以忽略，但是經我們的理論計算卻是不可忽略的，如此才能與電腦程式模擬結果相符合。另外在規劃實驗上，由麻將維度小的3x3矩陣開始由小研究到大，由3x3矩陣、4x4矩陣、5x5矩陣到夜市流行的6x6矩陣依序研究麻將矩陣抽牌張數和連線中獎機率的關係以及分析連線中獎的機率和獎品價值的相互關係。

貳、　研究設備及器材

一、實體麻將賓果: 麻將一副、麻將賓果紙四張，實驗記錄簿

二、電腦模擬麻將賓果: 以微軟Office Excel VBA開發電腦麻將賓果模擬程式(其中包含抽牌模組、連線檢查模組、以及連續實驗模組)[文獻二]

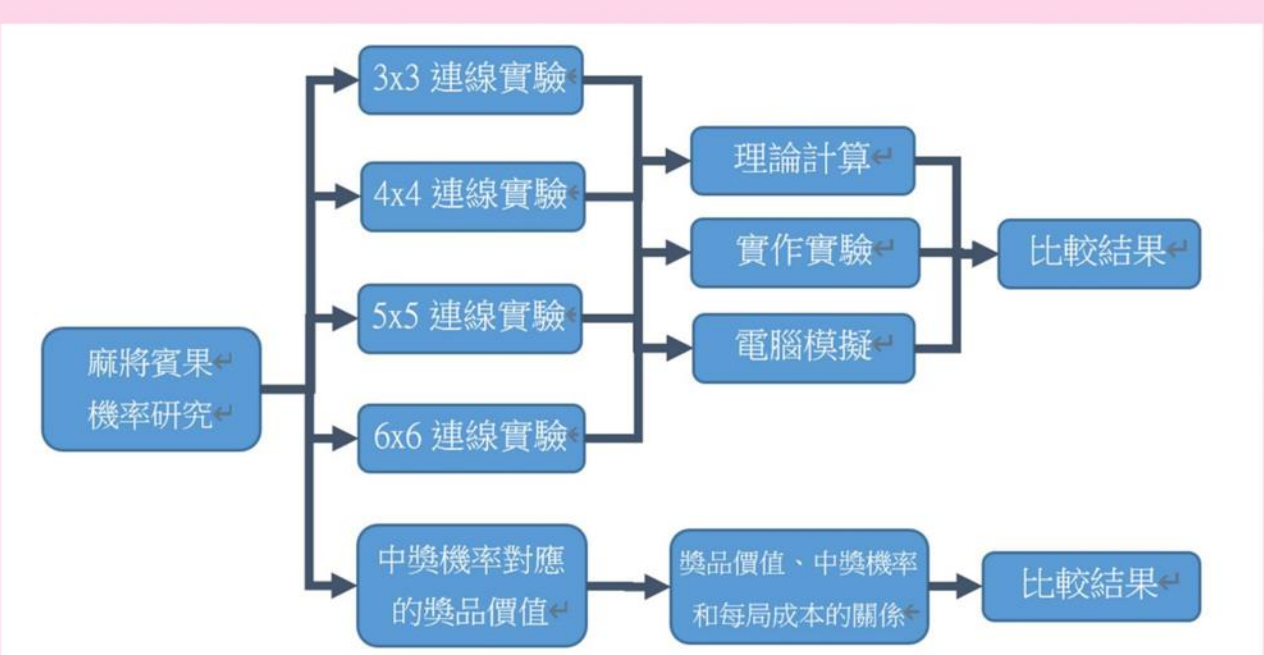
參、　研究過程或方法

一、 麻將賓果遊戲規則

一副麻將總共有144張牌，包含136張基本牌、4張花牌(梅、蘭、竹、菊各1張)以及4張四季牌(春、夏、秋、冬各1張)、而基本牌所指的就是1~9萬、1~9條、1~9筒、以及7個字牌(中、發、白、東、南、西、北)各四張。所以在144張牌之中，1~9萬、1~9條、1~9筒和7個字牌都各取一張，加上花牌和四季牌各一張(四花牌及四季牌視為相同)，就可以組成36張不重覆的組合。剩下的牌以相同的方法，可以另組三組36張不重覆的牌組。

夜市流行的麻將賓果紙上有6 x 6的方格(直向和橫向各由6格麻將組成的方格矩陣)，將上述不重覆的36張牌組隨機排列，每格對應一個麻將圖案。玩家在全部的36張不重覆的麻將牌中抽12至15張，依序對應排列在麻將賓果紙上。只要有一連線就中獎，一般的獎品是大娃娃或中娃娃一隻。

二、研究流程



(一) 理論計算方法

針對理論的推導，我們的做法是先以計算概念開始發想和討論，再將合乎邏輯的結論，請老師幫忙轉化成數學式子，以方便我們進行實際的計算。本章節的理論計算n值適用為3到6，連線組合計算由一連線到四連線，所以抽牌數量X會因n值及最高四連線而有上限值。

[討論]依排列組合原理，至少一連線機率的算法是算出有連線狀況時的組合數，再除以所有的組合數。所以我們有二個計算目標，第一個是算出所有的組合數，第二個是算出有連線的組合數。

1.總組合數：[討論]在所有矩陣的格子對應的牌之中，不考慮有沒有連線，抽出指定數量的牌。例如: $C^{36}_{12}=1251677700$
計算總組合數 [數學式]在指定大小 n×n 的麻將矩陣之中，排入指定張數 X 的麻將牌，計算總組合數，可以用 $C^{n\times n}_{X}$ 表示。

2.一連線組合數：

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，及特性線條的特性	計算值
直排	$C^n_1 \times C^{n\times(n-1)}_{X-n}$	條件：X≥ n 垂直線條	某直排 6 張一定要抽出，剩下 30 張隨意抽 6 張 $C^6_1 \times C^{6\times(6-1)}_{12-6} = 3562650$
橫排	$C^n_1 \times C^{n\times(n-1)}_{X-n}$	條件：X≥ n 水平橫線條	$C^6_1 \times C^{6\times(6-1)}_{12-6} = 3562650$
斜排	$C^2_1 \times C^{n\times(n-1)}_{X-n}$	條件：X≥ n 斜向線條	某斜排 6 張一定要抽出，剩下 30 張隨意抽 6 張 $C^2_1 \times C^{6\times(6-1)}_{12-6} = 1187550$
		總和	共 8312850 種組合

3. 二連線組合數：

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，及特性線條的特性	計算值
直 x 直	$C^n_2 \times C^{n\times(n-2)}_{X-2n}$	條件：X≥ 2n 平行二線不交叉，即無共用格子	某 2 直排 12 張一定要抽出，剩 24 張隨意抽出 0 張 $C^6_2 = 15$
直 x 橫	$C^n_1 \times C^n_1 \times C^{n\times(n-2)+1}_{X-2n+1}$	條件：X≥ (2n − 1) 二線交叉，二線共用一格	某直排及橫排 11 張一定要抽出，剩 25 張隨意抽出 1 張 $C^6_1 \times C^6_1 \times C^{25}_1 = 900$
直 x 斜	$C^n_1 \times C^2_1 \times C^{n\times(n-2)+1}_{X-2n+1}$	條件：X≥ (2n − 1) 二線交叉，有一格共用	$C^6_1 \times C^2_1 \times C^{25}_1 = 300$
橫 x 橫	$C^n_2 \times C^{n\times(n-2)}_{X-2n}$	條件：X≥ 2n 平行二線不交叉，無共用格子	$C^6_2 = 15$
橫 x 斜	$C^n_1 \times C^2_1 \times C^{n\times(n-2)+1}_{X-2n+1}$	條件：X≥ (2n − 1) 二線交叉，二線共用一格	$C^6_1 \times C^2_1 \times C^{25}_1 = 300$
斜 x 斜	$C^2_2 \times C^{n\times(n-2)}_{X-2n}$	條件：X≥ 2n 二線交叉，二線共用一格	二斜排 12 張牌一定要抽出，剩 25 張隨意抽出 0 張 $C^2_2 = 1$
		總和	共 1531 種組合

4. 三連線組合數(1)：

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，以及連線的特性
直 x 直 x 直	$C^n_3 \times C^{n\times(n-3)}_{X-3n}$	條件：n≥ 3且 X≥ 3n 平行三線不交叉，三線無共用格子
直 x 直 x 橫	$C^n_2 \times C^n_1 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件：X≥ (3n − 2) 一線與另平行二線交叉，三線共用二格
直 x 直 x 斜	$C^n_2 \times C^2_1 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件：X≥ (3n − 2) 一線與另平行二線交叉，三線共用二格
直 x 橫 x 橫	$C^n_1 \times C^n_2 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件：X≥ (3n − 2) 一線與另平行二線交叉，三線共用二格
直 x 橫 x 斜	3x3 矩陣： $[(C^3_1 \times C^3_1 \times C^2_1) -6]\, C^{n(n-3)+3}_{X-(3n-3)}$ 4x4 矩陣： $[(C^4_1 \times C^4_1 \times C^2_1) -8]\, C^{n(n-3)+3}_{X-(3n-3)}$ 5x5 矩陣： $[(C^5_1 \times C^5_1 \times C^2_1) -10]\, C^{n(n-3)+3}_{X-(3n-3)}$ 6x6 矩陣： $[(C^6_1 \times C^6_1 \times C^2_1) -12]\, C^{n(n-3)+3}_{X-(3n-3)}$	條件 1：X≥ (3n − 3) 三線相互交叉，三線共用三格 計算方法：三線相交三點的狀況會包含三線相交一點，所以需要先將相交三點的公式，減去相交一點的組合數，再做後續的排列。
	3x3 矩陣: $6 \times C^{n(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$ 4x4 矩陣: $8 \times C^{n(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$ 5x5 矩陣: $10 \times C^{n(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$ 6x6 矩陣: $12 \times C^{n(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件 2：X≥ (3n − 2) 三線交叉於同一格，三線共用一格 計算方法：不同矩陣大小，三線交於一點的組合如下。 3x3 矩陣有 6 個組合 4x4 矩陣有 8 個組合 5x5 矩陣有 10 個組合 6x6 矩陣有 12 個組合
橫 x 橫 x 斜	$C^n_2 \times C^2_1 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件：X≥ (3n − 2) 平行二線分別與一線交叉，三線共用二格
橫 x 橫 x 橫	$C^n_3 \times C^{n\times(n-3)}_{X-3n}$	條件：n≥ 3且 X≥ 3n 三線不交叉，三線無共用格子
斜 x 斜 x 直 (n 為奇數)	$[C^n_1 \times C^2_2 - 1] \times C^{n\times(n-3)+3}_{X-(3n-3)}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ (3n − 3) 三線相互交叉，三線共用三格 計算方法：三線相交於三格的狀況會包含三線交一點，所以需先將相交三點的公式，減去相交一點的組合數，再做後續的排列。
	$1 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ (3n − 2) 三線交叉於同一格，三線共用一格 計算方法：不同矩陣大小，三線交於一點的組合如下。 3x3 矩陣有 1 個組合

4. 三連線組合數(2)：

		5x5 矩陣有 1 個組合
斜 x 斜 x 直 (n 為偶數)	$C^n_1 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件：n 為偶數且 X≥ (3n − 2) 直線分別與斜線交叉，三線共用二格
斜 x 斜 x 橫 (n 為奇數)	$[C^n_1 \times C^2_2 - 1] \times C^{n\times(n-3)+3}_{X-(3n-3)}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ (3n − 3) 三線相互交叉，三線共用三格 計算方法：三線相交於三格的狀況會包含三線交一點，所以需先將相交三點的公式，減去相交一點的組合數，再做後續的排列。
	$1 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ (3n − 2) 三線交叉於同一格，三線共用一格 計算方法：不同矩陣大小，三線交於一點的組合如下。 3x3 矩陣有 1 個組合 5x5 矩陣有 1 個組合
斜 x 斜 x 橫 (n 為偶數)	$C^n_1 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-3)+2}_{X-(3n-2)}$	條件：n 為偶數且 X≥ (3n − 2) 橫線分別斜線交叉，三線共用二格

5. 四連線組合數(1)：

連線狀況	組合數	達成連線狀態的條件，以及連線的特性
直 x 直 x 直 x 直	$C^n_4 \times C^{n\times(n-4)}_{X-4n}$	條件：n≥ 4且 X≥ 4n 平行四線互不交叉，四線無共用格子
直 x 直 x 直 x 橫	$C^n_3 \times C^n_1 \times C^{n\times(n-4)+3}_{X-(4n-3)}$	條件：n≥ 3且 X≥ (4n − 3) 一線與另平行三線交叉，四線共用三格
直 x 直 x 直 x 斜	$C^n_3 \times C^2_1 \times C^{n\times(n-4)+3}_{X-(4n-3)}$	條件：n≥ 3且 X≥ (4n − 3) 一線與另平行三線交叉，四線共用三格
直 x 直 x 橫 x 橫	$C^n_2 \times C^n_2 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件：X≥ (4n − 4) 平行二線與另平行二線交叉，四線共用四格
直 x 直 x 橫 x 斜	$[(C^n_2 \times C^n_1 \times C^2_1) - (C^n_2 \times C^2_1 \times C^2_1)] \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$	條件 1：X≥ (4n − 5) 二線相互交叉與另平行二線相交，有五格共用 計算方法：四線相交於五格的狀況會包含四線相交三格，所以需先將相交五點的公式, 減去相交三格的組合數，再做後續的排列。
	$(C^n_2 \times C^2_1 \times C^2_1) \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件 2：X≥ (4n − 4) 二線相互交叉與另平行二線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法：先考慮斜線的組合狀況是C^2_1，再考慮二直線的組合是C^n_2，最後橫 線必須相交於直線和斜線的交點，所以是C^2_1，所以綜合組合為$(C^n_2 \times C^2_1 \times C^2_1)$，再做後續的排列。
直 x 直 x 斜 x 斜 (n 為奇數)	$C^{(n-1)}_2 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ (4n − 5) 二斜線相互交叉與另平行二直線相交，有五格共用 計算方法：直線不可相交於二斜線交點，所以二直線的組合是$C^{(n-1)}_2$，二斜線的組合是C^2_2，所以綜合組合是$C^{(n-1)}_2 \times C^2_2$，再做後續的排列。
	$C^1_1 \times C^{(n-1)}_1 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ (4n − 4) 二斜線相互交叉與另平行二直線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法：直線一定要交於二斜線交點，所以二直線的組合是$C^1_1 \times C^{(n-1)}_1$，再考慮二斜線，所以綜合組合是$C^1_1 \times C^{(n-1)}_1 \times C^2_2$，再做後續的組合。
直 x 直 x 斜 x 斜 (n 為偶數)	$C^n_2 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件：n 為偶數且 X≥ (4n − 4) 二線相互交叉與另平行二直線相交，有四格共用
直 x 橫 x 橫 x 橫	$C^n_1 \times C^n_3 \times C^{n\times(n-4)+3}_{X-(4n-3)}$	條件：n≥ 3且 X≥ (4n − 3) 一線與另平行三橫線交叉，有三格共用
直 x 橫 x 橫 x 斜	$[(C^n_2 \times C^n_1 \times C^2_1) - (C^n_2 \times C^2_1 \times C^2_1)] \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$	條件 1：X≥ (4n − 5) 二線相互交叉與另平行二橫線相交，有五格共用 計算方法: 四線相交於五格的狀況會包含四線相交三格，所以需先將相交五點的公式, 減去相交三格的組合數，再做後續的排列。
	$(C^n_2 \times C^2_1 \times C^2_1) \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件 2：X≥ (4n − 4) 二線相互交叉與另平行二橫線相交，有三格共用(有一格三線共用)

5. 四連線組合數(2)：

		計算方法: 先考慮斜線的組合狀況是C^2_1，再考慮二橫線的組合是C^n_2，最後直線必須相交於橫線和斜線的交點，所以是C^2_1，所以綜合組合為$(C^n_2 \times C^2_1 \times C^2_1)$，再做後續的排列。
直 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為奇數)	5x5 矩陣: $[(C^5_1 \times C^5_1 \times C^2_2) - 16 - 1] \times C^{n\times(n-4)+6}_{X-(4n-6)}$	條件 1：n 為奇數，n ≥ 5且 X≥ (4n − 6) 四線相互交叉，有六格共用 計算方法: 四線相交於六格的狀況會包含四線相交四格，以及相交一格的狀況，所以需先將相交六點的公式，減去相交四格和一格的組合數，再做後續的排列。
	3x3 矩陣: $8 \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$ 5x5 矩陣: $16 \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ (4n − 5) 四線相互交叉，有四格共用(有一格三線共用) 計算方法: 不同矩陣大小，三線交於一點的組合，先考慮直、橫、斜三線交一點的組合如下。 3x3 矩陣有 4 個組合 5x5 矩陣有 8 個組合 再考慮直或橫線，搭配二斜線，其交點會在正中間。 3x3 矩陣有 4 個組合 5x5 矩陣有 8 個組合 所以總組合

		3x3 矩陣有 8 個組合 5x5 矩陣有 16 個組合
	$1 \times C^{n\times(n-4)+3}_{X-(4n-3)}$	條件 3：n 為奇數且 X≥ (4n − 3) 四線相互交叉，有一格共用(有一格四線共用) 四線相交一格的情況只有一種。
直 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為偶數)	4x4 矩陣: $[C^4_1 \times C^4_1 \times C^2_2 - 8] \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$ 6x6 矩陣: $[C^6_1 \times C^6_1 \times C^2_2 - 12] \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$	條件 1：n 為偶數且 X≥ (4n − 5) 四線相互交叉，有五格共用 計算方法: 四線相交五格的狀況會包含四線交三格, 所以將相交五格的公式, 減去四線交三格的數量，再做後續的排列。
	4x4 矩陣: $8 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$ 6x6 矩陣: $12 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件 2：n 為偶數且 X≥ (4n − 4) 四線相互交叉，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法: 不同矩陣大小，三線交於一點的組合，考慮直、橫、斜三線交一點的組合如下。 4x4 矩陣有 8 個組合 6x6 矩陣有 12 個組合
橫 x 橫 x 橫 x 橫	$C^n_4 \times C^{n\times(n-4)}_{X-4n}$	條件：n≥ 4且 X≥ 4n 平行四線互不交叉，四線無共用格子

橫 x 橫 x 橫 x 斜	$C^n_3 \times C^2_1 \times C^{n\times(n-4)+3}_{X-(4n-3)}$	條件：n≥ 3且 X≥ (4n − 3) 一線與另三線交叉，四線有三格共用
橫 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為奇數)	$C^{(n-1)}_2 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-4)+5}_{X-(4n-5)}$	條件 1：n 為奇數且 X≥ (4n − 5) 二線相互交叉與另平行二線相交，有五格共用 計算方法：橫線不可相交於二斜線交點，所以二橫線的組合是$C^{(n-1)}_2$，二斜線的組合是C^2_2，所以綜合組合是$C^{(n-1)}_2 \times C^2_2$，再做後續的排列。
	$C^1_1 \times C^{(n-1)}_1 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件 2：n 為奇數且 X≥ (4n − 4) 二線相互交叉與另平行二線相交，有三格共用(有一格三線共用) 計算方法：橫線一定要交於二斜線交點，所以二橫線的組合是$C^1_1 \times C^{(n-1)}_1$，再考慮二斜線，所以綜合組合是$C^1_1 \times C^{(n-1)}_1 \times C^2_2$，再做後續的組合。
橫 x 橫 x 斜 x 斜 (n 為偶數)	$C^n_2 \times C^2_2 \times C^{n\times(n-4)+4}_{X-(4n-4)}$	條件：n 為偶數且 X≥ (4n − 4) 二線相互交叉與另平行二線相交，有四格共用

6. 總連線組合數：依排容原理計算總組合數

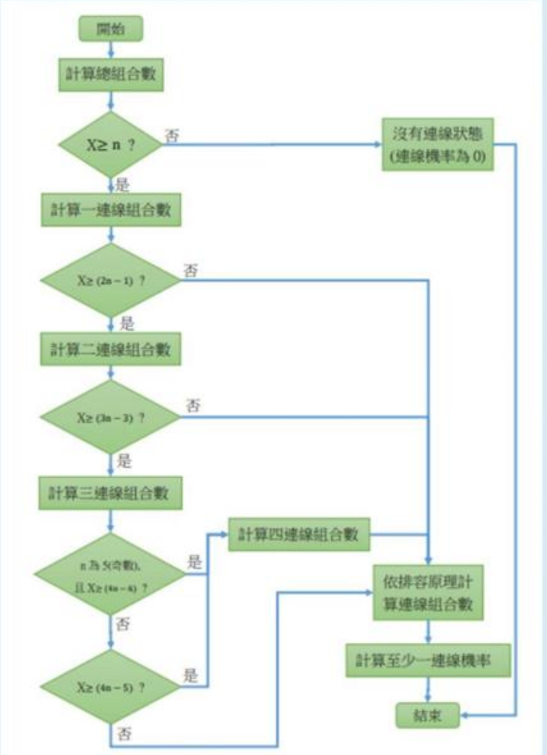
總連線組合數 = (奇數連線數的組合總和) − (偶數連線數的組合總和)

以6x6抽12 張總組合數為例(8312850)−(1531)=8311319

7.至少一連線機率：至少一連線機率為 總連線組合數/總組合數

舉例以6x6抽12張至少一連線機率 $\text{連線機率}=\frac{8311319}{1251677700}=0.664\%$

理論計算流程圖



理論計算是依據本文上述所列公式計算得之

實作實驗作法

3x3 實驗麻將紙

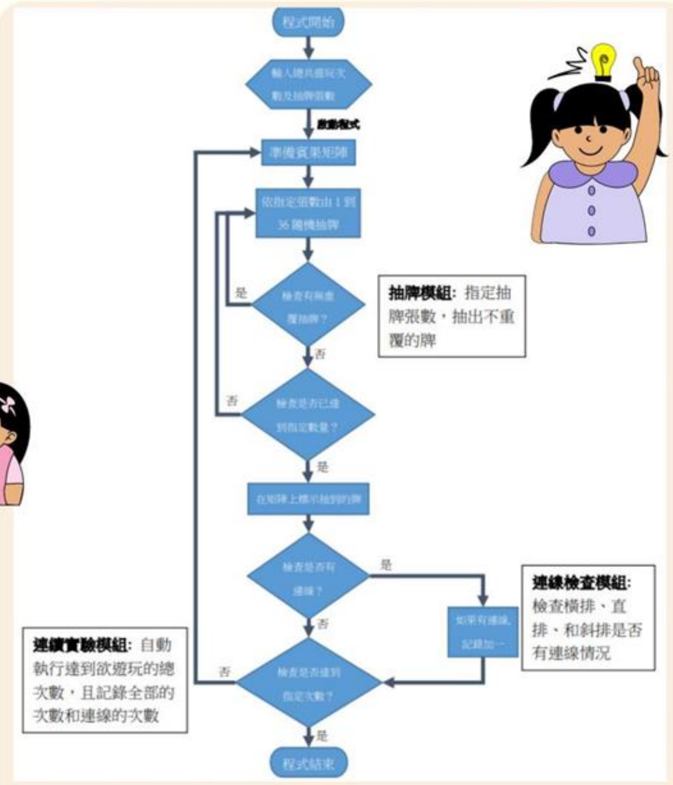
4x4 實驗麻將紙

5x5 實驗麻將紙

6x6 實驗麻將紙

實作實驗是每個抽牌數各玩100次，記錄至少一連線的次數，再除以總遊玩數100次去計算連線機率。

電腦程式模擬方法流程圖



電腦程式模擬是在每個抽牌數各執行 10000次，再分別統計有連線的次數及 除總執行次數去統計連線機率。

肆、研究結果

一、三種實驗方法的結果，分別對應抽取不同張數牌，至少一連線的機率列於下圖

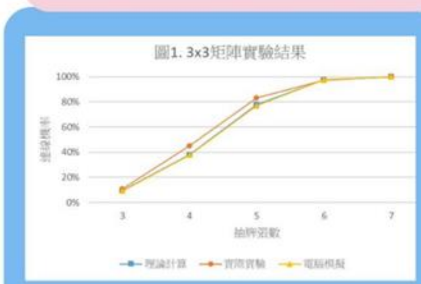


圖1. 3x3矩陣實驗結果

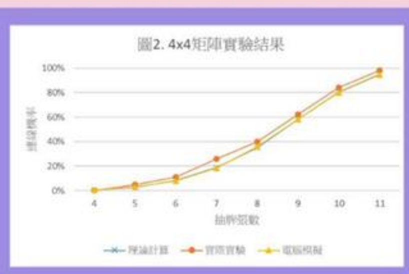


圖2. 4x4矩陣實驗結果


圖3. 5x5矩陣實驗結果


圖4. 6x6矩陣實驗結果

二、連線機率比較結果：

將**6x6**矩陣實驗結果的「理論計算」、「實作實驗」及「電腦模擬」三者的結果取夜市常用的**12~16**張牌的結果繪於同一張圖比較，結果如下圖**8**。改善洗牌方式：為了避免洗牌不均勻的誤差，我們參考夜市麻將賓果老闆的洗牌方式，需要準備至少一個肩膀寬的桌面洗牌時雙手手掌快速旋轉，次數至少**20**下，再針對**6x6**矩陣的**12 ~ 16**張牌，各重新測試**100**次，結果如右圖**9**。 將電腦調整只模擬**100**次，推測結果也會像實際實驗值般與理論值曲線差距很大。實際電腦模擬**100**次結果如下圖**10**。


圖8. 連線機率


圖9. 連線機率

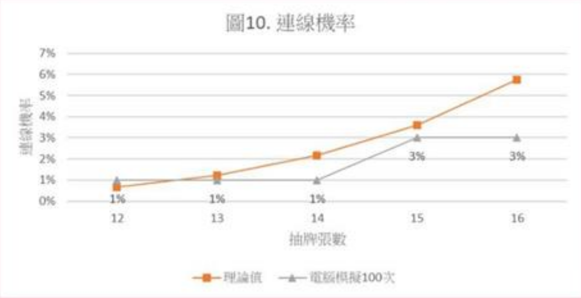


圖10. 連線機率

三、中獎機率對應的獎品價值

期望值 = (獎品的價值x中獎的機率) –每局付出的費用　　【公式1】

若上式期望值大於**0**表示是對玩家有利。如果以不賺不賠的條件下，公式**1**的期望值可以**0**代入，換算出獎品價值等於下式。獎品的價值 = 每局付出的費用/中獎的機率　【公式2】

另外，再將公式**1**改成下式，也可由中獎機率和老闆提供的獎品價值換算出每局應付出的費用。

每局付出的費用 = (中獎的機率x獎品的價值)　　　【公式3】

若固定六局**100**元，算出每局抽取不同張數的中獎機率所對應的獎品價值如下圖**5**。假設固定中獎機率，如抽取**15**張牌(**3.73%**中獎率)，即可算出每局付出不同的成本所對應的中獎獎品價值，如下圖**6**。如果固定獎品價值是**500**元，即可算出抽取不同張數的中獎機率所對應的玩家每局付出的成本，如下圖**7**。

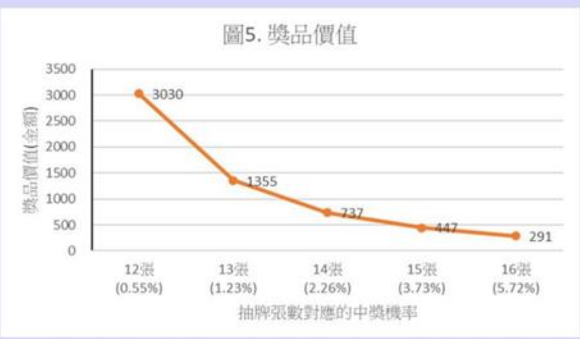


圖5. 獎品價值

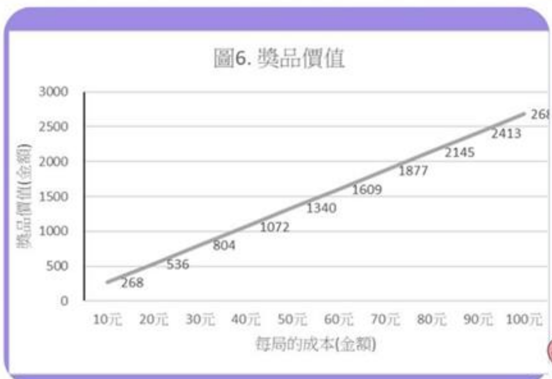


圖6. 獎品價值

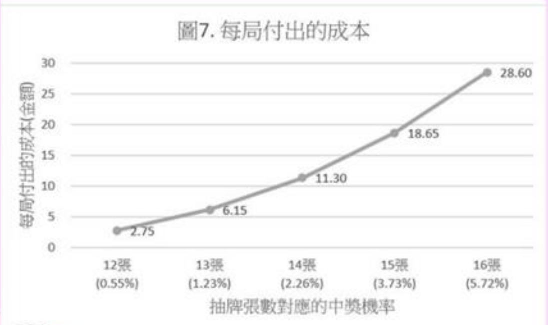


圖7. 每局付出的成本

伍、討論

一、麻將賓果遊戲連線中獎的機率有多高？

經理論計算、電腦程式模擬及實作實驗皆證明，中獎機率與抽取牌數量有關，抽牌數量愈多，連線中獎機率愈高。所以抽牌數量與連線中獎機率大約呈正比(參考圖**9**)。

二、抽牌張數和連線中獎的機率的關係是什麼？

經研究結果得知，抽**12**張牌時，連線中獎機率為**0.55%**，也就是說，玩**100**次會中獎**0.55**次，若抽**15**張牌時，連線中獎機率為**3.73%**，也就是說，玩**100**次會中獎**3.73**次。

三、連線中獎的機率和獎品價值有沒有相互關係？

依研究數據可知，抽牌張數對應的中獎機率愈低時，獎品的價值會愈高。所以中獎機率與獎品的價值大約呈反比(參考圖**5**)。

陸、總結

一、本文的理論計算與電腦模擬的結果二者的數值接近，足以證明理論方法的正確性，未來在玩賓果遊戲，由**3x3**到**6x6**的矩陣大小，都能利用本文的理論先行計算確認其機率值，再決定是否參與遊戲。

二、綜合本文理論計算與實驗結論，以目前的夜市所訂定的遊戲規則，每玩一局的成本和中獎獎品價值代入計算得到的期望值是小於**0**，就是表示玩家長期參與此遊戲是會吃虧的，但以純娛樂心態視之是勉強可以接受的

三、綜觀麻將賓果的遊戲，雖然是娛樂為主，但裡頭充滿趣味的數學機率理論，我們只要平時細心留意生活週遭，就能發現一些與機率相關的事物潛藏在四周，可謂機率無所不在。

柒、參考文獻資料

一、 麻將的"賓果"奇緣，嘉義市第32屆中小學科學展覽作品

二、 OFFICE的VBA入門
HTTPS://LEARN.MICROSOFT.COM/ZH-TW/OFFICE/VBA/LIBRARY-REFERENCE/CONCEPTS/GETTING-STARTED-WITH-VBA-IN-OFFICE

三、 大數法則
HTTPS://ZH.WIKIPEDIA.ORG/ZH-TW/%E5%A4%A7%E6%95%B8%E6%B3%95%E5%89%87