中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080409

以少勝多

學校名稱： 苗栗縣苑裡鎮中正國民小學

作者：	指導老師：
小五 鄭羽宏 小五 蕭翰均	葉美娟 康芸琳

關鍵詞： 正方形、對稱軸

以少勝多

摘要

本次實驗的目的是在探討若要將方格全部照射到，不同尺寸的正方形及長方形與放置最少點光源數量的關係。研究結果發現：正方形尺寸最少燈泡數量放置方式第 1、3、7、9 格不放置燈泡的規律性，是邊長 18cm 之後就會再一次循環增加，因此當正方形的邊長為 n，n÷18＝k…h 時，放置最少燈泡數量 s＝n－k×4－k_1（若 k ≧3 時，s＝n－（k－1）×4－k_1，k_1＝h 在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。寬為 n 的長方形，當長≧寬×2＋1 時，放置最少燈泡數量 s＝寬度，而當長＜寬×2＋1 時，最少燈泡數量，從 n×n 開始會以「斜線」數列依序增加。

一、前言

一本數學書上有個有趣的遊戲：在 6cm×6cm 的正方形任何一個格子裡，最少要放入多少顆寶石時，寶石散發出的橫線、直線或斜線的光芒可以照射到正方形的全部格子。我們試著在方格子裡畫了起來，發現大家寶石擺放的方式都不太一樣，但有些人使用的寶石數量有些是相同，有些則是使用了更多的寶石數量才將全部的格子都照射到，但最少寶石數量都是 4 顆。

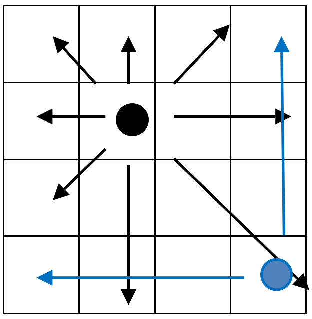
因此我們設想如果寶石換成點光源，每個方格只要有光線照射到，不考慮方格的每個位置的亮度是否均勻的條件下，就可以用最少的電將一個正方形的平面全部照亮，就可以達到省電的效果，那我們是否可以從一個正方形的尺寸來計算最少的點光源數量呢？如果換成是長方形的尺寸，點光源的數量是否也有規律性可以計算出來呢？點光源擺放的方式又要如何擺放，才能達到最少點光源的數量？(與康軒出版社數學科第十冊第五元「線對稱圖形」有關)。

因此我們想研究探討以下幾點：

1. 不同尺寸的正方形與放入的最少燈泡數量的關係。
2. 不同尺寸的長方形與放入的最少燈泡數量的關係。

二、研究設備及器材

我們利用 WORD 畫出表格，利用表格製作出不同尺寸的長方形及正方形的方格，利用圓形符號代替燈泡、箭頭符號代表燈泡可照射的位置，無法照射到的位置再陸續放置其他的燈泡，並用不同顏色的圓形及箭頭符號作區別，直到全部方格都照射到，如下圖一所示。



圖一

此外，由於不同尺寸的方格，最少燈泡數量的放置方式多樣化，因此我們在實驗中將只

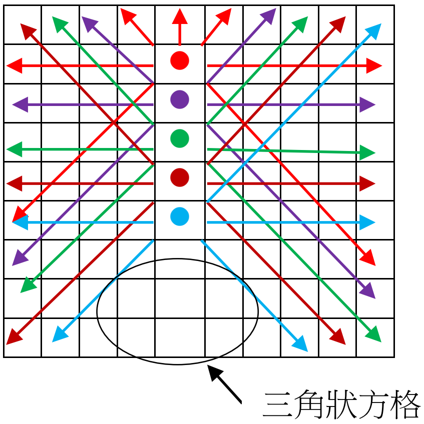
呈現 2～3 種燈泡的放置方式，其餘最少燈泡數量的放置方式會整理成實驗記錄本。

- 名詞解釋：

1. 方格的定位代號：正方形或長方形裡的方格數多，為了能清楚說明指的是哪一格，我們將對角線上的方格由左上到右下，依序命名第 1 格、第 2 格……以此類推，如下圖所示。

1				
	2			
		3		
			4	
				5

2. 三角狀的方格：當最少燈泡數量都放置完畢後，方格下方剩下一個類似三角形的方格未照射到，我們稱為三角狀的方格。



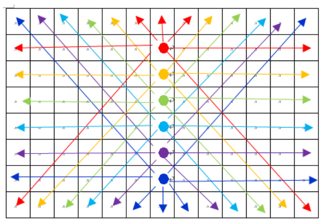
3. 「斜線」數列：如下圖所示，每一個箭頭的方向，都是一個連續的數列，由於數字是斜線的方向依序增加，因此我們稱為「斜線」數列。

1	1	2	3	4	5	6
1	2	2	3	4	5	6
1	2	3	3	4	5	6
2	2	3	4	4	5	6
2	3	3	4	5	5	6
2	3	4	4	5	6	6
2	3	4	5	5	6	7

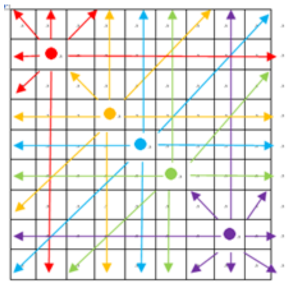
4. 直線對稱軸：

燈泡放置的方式都在尺寸的中間直線位置，因此我們稱燈泡放置方式為「直線對稱軸」的方式。如下圖所示，燈泡放置的位置都是在尺寸中間的方格，也就是我們所稱的「直線對

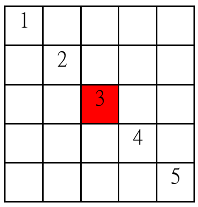
稱軸」的放置方式。



5. 對角線對稱軸：燈泡放置的方式都在尺寸的對角線位置，因此我們稱燈泡放置方式為「對角線對稱軸」的方式。如下圖所示，燈泡放置的位置都是在尺寸對角線的方格，也就是我們所稱的「對角線對稱軸」的放置方式。



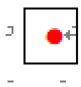
6. 正方形的中心格：邊長偶數的正方形，正中央的位置是 1 個交叉點，不是方格；邊長奇數的正方形，正中央的位置是 1 個方格，我們命名為正方形「中心格」，如下圖所示，第三格的位置是邊長 5cm 正方形的「中心格」。



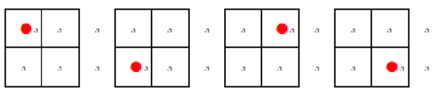
三、研究過程或方法

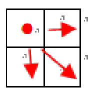
（一）尋找不同尺寸的正方形放置最少燈泡的方法一（適用於尺寸較小的正方形）

1. 邊長 1cm 的正方形，燈泡可能放置的方式只有 1 種，如下圖所示，放置的最少燈泡數量是 1 顆。



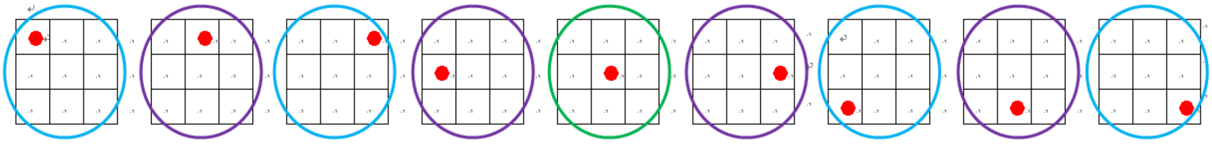
2. 邊長 2cm 的正方形，雖然方格有 4 格，燈泡可能放置的方式會有 4 種，但將方格旋轉之後，它們只是擺放方向不同，所以屬於同 1 種放置方式，如圖所示，因此放置的最少燈泡數量是 1 顆。



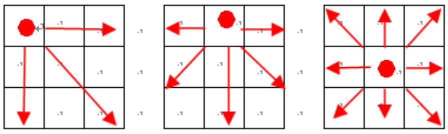


3. 邊長 3cm 的正方形，燈泡放置的方式非常多種，因此我們先從放置 1 顆燈泡的方式開始，

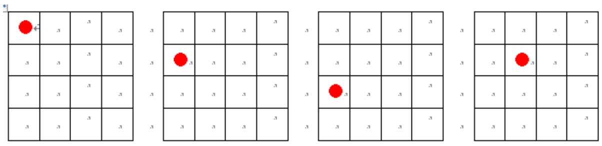
會有 9 種放置方式，如下圖所示：



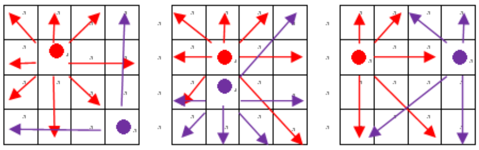
但藍色圈起來的是同一種，紫色圈起來的是同一種，所以實際上只有 3 種藍色、紫色和綠色的放置方式，因此我們只需針對 3 種放置方式去操作即可。操作結果發現第三種的放置方式以將全部方格都照射完，而其他 2 種放置方式都還要放置第 2 顆燈泡，因此操作至此，我們可以知道邊長 3cm 的正方形，最少燈泡數量是 1 顆。



4. 邊長 4cm 的正方形，燈泡放置的方式也非常多種，因此我們也先從放置 1 顆燈泡的方式開始，會有 16 種放置方式，排除相同放置方式後，只剩下 4 種放置方式，如下圖所示。



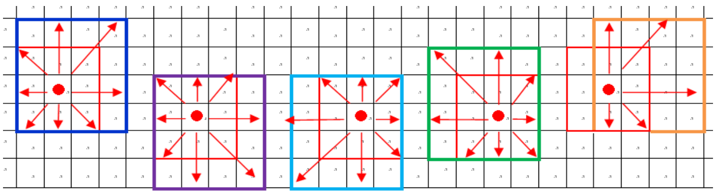
由於 4 種放置方式都無法將全部方格照射，所以我們針對上面的 4 種放置方式，再放置第 2 顆燈泡，這 4 種放置方式各有 15 種放置第 2 顆燈泡的不同放置放式，我們一一操作，至此，我們已發現了可以用 2 顆燈泡就可以照射全部方格的放置方式，所以接下來排除無法用 2 顆燈泡的放置方式及相同方式之後，我們可以發現邊長 4cm 的正方形有 3 種最少燈泡數量的放置方式，我們也可以確定邊長 4cm 的正方形，最少燈泡數量是 2 顆，如下圖所示。



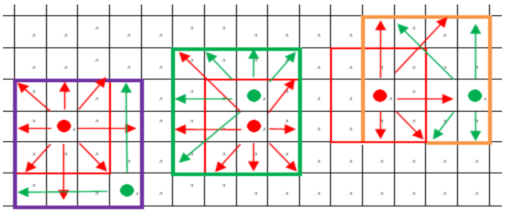
由於我們是從最少數量開始操作，因此當發現可以照射全部方格的數量時，就是此尺寸的最少燈泡數量。

（二）尋找不同尺寸的正方形放置最少燈泡的方法二（適用於尺寸較大的正方形）

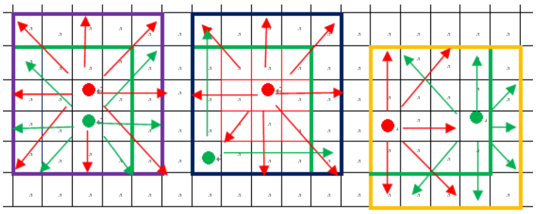
1. 邊長 4cm 的正方形，燈泡放置的方式非常多種，因此我們從邊長 3cm 正方形的最少燈泡的放置方式中，將箭頭從四面方向延長，如圖所示：



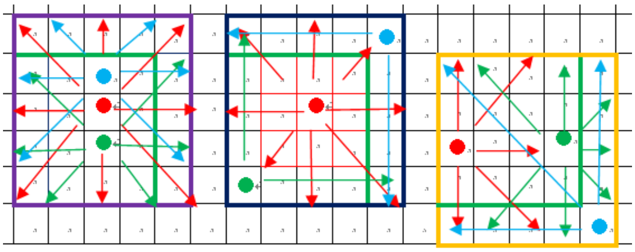
從上圖可知，邊長 4cm 的正方形方格無法用 1 顆燈泡就將全部方格照射到，所以我們可以針對上圖匡列出邊長 4cm 的正方形的五種放置方式，再放置第 2 顆燈泡，放置第 2 顆燈泡後，就可以將全部方格照射到，因此我們可以確定邊長 4cm 的正方形，最少燈泡數量是 2 顆，放置方式只有 3 種，如下圖所示，



5、邊長 5cm 的正方形，燈泡放置的方式也非常多種，因此我們也按照相同方式，從邊長 4cm 正方形的最少燈泡的放置方式中，將箭頭從四面方向延長，如圖所示：



由於邊長 4cm 正方形的 3 種放置方式的延長都無法將全部方格照射，所以我們針對上面的 2 種放置方式，再放置第 3 顆燈泡，放置第 3 顆燈泡後，就可以將全部方格照射到，因此我們可以確定邊長 5cm 的正方形，最少燈泡數量是 3 顆，如下圖所示。



因此以下的實驗研究過程，我們將利用上述的方式找出不同尺寸正方形的最少燈泡數量，不過隨著邊長增加，尺寸越來越大的正方形，最少燈泡放置的方式會隨之大增，因此邊長 5cm 之後正方形將只呈現 2～3 種最少燈泡的放置方式，其餘燈泡的放置方式會呈現在實驗紀錄本。

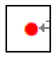
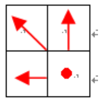
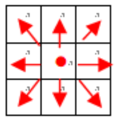
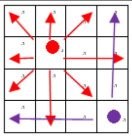
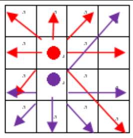
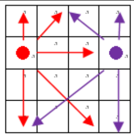
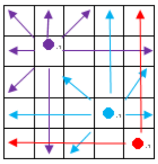
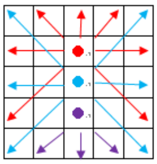
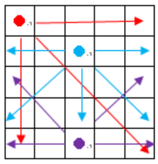
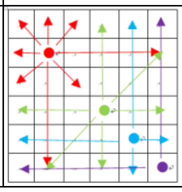
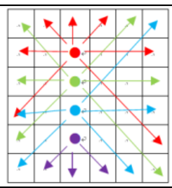
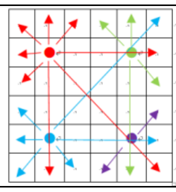
<u>實驗(一)</u>：當正方形邊長是 1cm～6cm 時，不同尺寸的正方形方格與最少燈泡數量的關係。

實驗步驟：

1. 找出可以將邊長 1cm～6cm 正方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。

實驗結果：

表一：邊長是 1cm～6cm 時，不同尺寸的正方形最少燈泡的數量表

正方形尺寸(cm)	最少燈泡的數量（顆）	燈泡將全部方格都照射的各種放置方式
1x1	1	
2x2	1	
3x3	1	
4x4	2	  
5x5	3	  
6x6	4	  

實驗討論：

1. 由表一的結果可知，用 1 顆燈泡可以將邊長 1cm、2cm 及 3cm 的正方形方格全都照射到。
2. 最少燈泡數量的擺放方式有很多種，正方形尺寸越大，最少燈泡的擺放方式會越多樣化。
3. 由於尚未發現最少燈泡放置的規律性，我們繼續操作邊長 7cm～12cm 的正方形，看看燈泡放置的方式及數量是否有規律性。

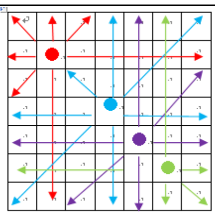
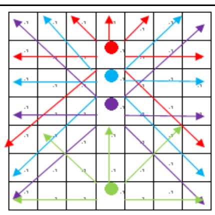
<u>實驗(二)</u>：當正方形邊長是 7cm～12cm 時，不同尺寸的正方形方格與最少燈泡數量的關係。

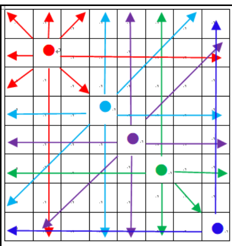
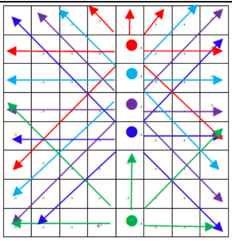
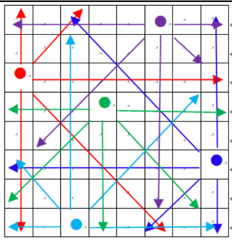
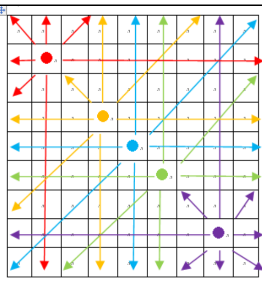
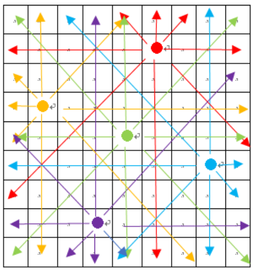
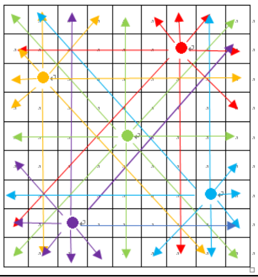
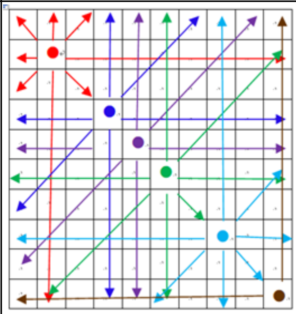
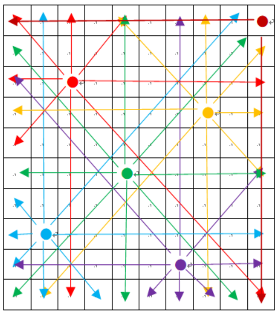
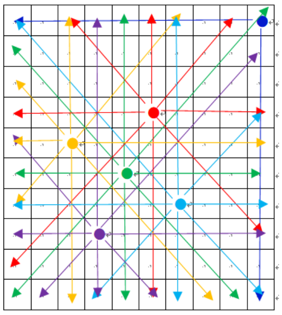
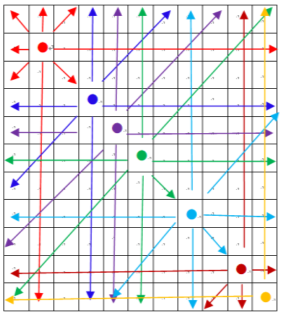
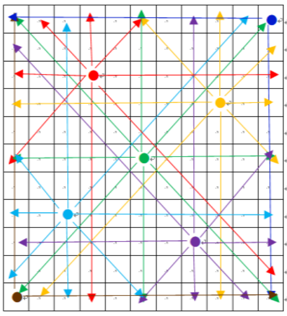
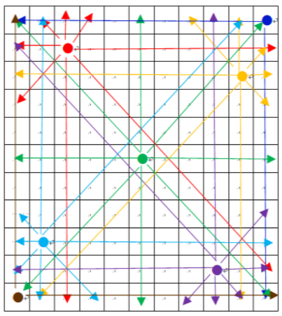
實驗步驟：

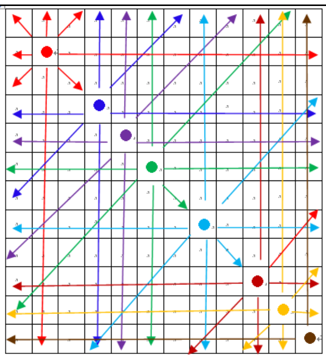
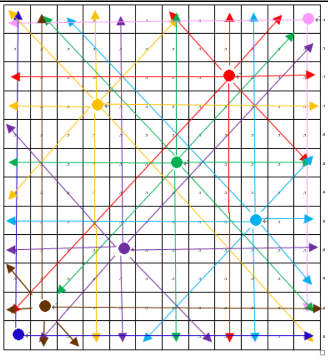
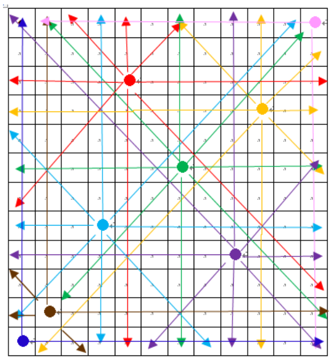
1. 找出可以將邊長 7cm～12cm 正方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。
2. 再與實驗（一）的結果做比較。

實驗結果：

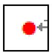
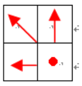
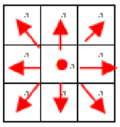
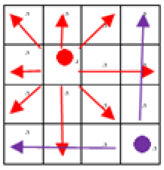
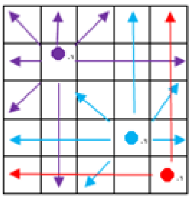
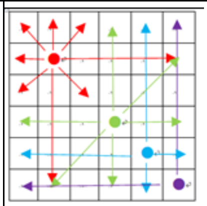
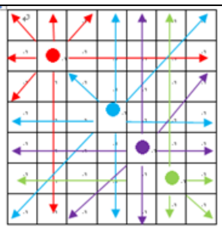
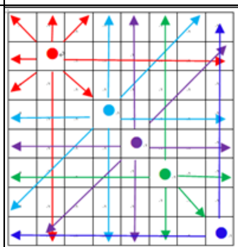
表二：邊長是 7cm～12cm 時，不同尺寸的正方形最少燈泡的數量表

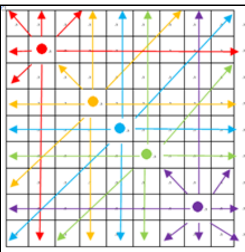
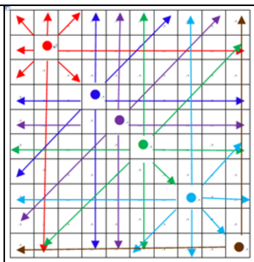
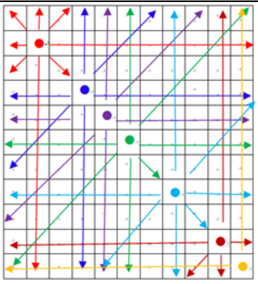
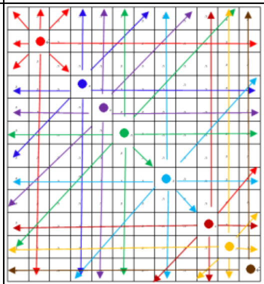
正方形尺寸（cm）	最少燈泡的數量（顆）	用最少燈泡將全部方格都照射的放置方式
7x7	4	 

8×8	5	  
9×9	5	  
10×10	6	  
11×11	7	  

12x12	8	  

表三：邊長是 1cm～12cm 時，不同尺寸的正方形可放置最少燈泡數量比較表

正方形尺寸（cm）		寶石數量（顆）	正方形尺寸（cm）		寶石數量（顆）
1x1		1	2x2		1
3x3		1＝3－2 （第 2 格中心格有放置燈泡，所以對角線上最後 1 格不用放置燈泡。）	4x4		2＝4－2
5x5		3＝5－2 （第 3 格中心格沒有放置燈泡，所以對角線上最後 1 格要放置燈泡。）	6x6		4＝6－2
7x7		4＝7－3 （第 4 格中心格有放置燈泡，所以對角線上最後 1 格不用放置燈泡。）	8x8		5＝8－3

9×9		5＝9－4 （第 5 格中心格有放置燈泡，所以對角線上最後 1 格不用放置燈泡。）	10×10		6＝10－4
11×11		7＝11－4 （第 6 格中心格雖有放置燈泡，但第 7、9 格沒有放置燈泡，所以對角線上最後 1 格要放置燈泡。）	12×12		8＝12－4
觀察所有尺寸在對角線上的放置方式，我們可以發現對角線上第 1、3、7、9 格（名詞解釋 1）都可以不用放燈泡就可以將該尺寸的所有方格都照射到。因此最少燈泡的數量可以用邊長－4 顆來計算出最少燈泡數量，而邊長＜9cm 的正方形，則視尺寸是否有 1、3、7、9 格來決定最少燈泡數量，例如：邊長 4cm 的正方形，對角線上沒有第 7 和第 9 格的位置，因此它的最少燈泡數量只能減第 1 格和第 3 格不放燈泡的 2 顆，所以最少燈泡數量是邊長－2 顆。					

實驗討論：

1. 由表二的結果可知，不同尺寸的正方形最少燈泡的放置方式都會有「對角線對稱軸」或「直線對稱軸」（名詞解釋 4 和 5）的放置方式，所以將燈泡以「對角線對稱軸」或「直線對稱軸」放置時，可用最少燈泡數量將全部方格都照射到，但中間「直線對稱軸」的放置方式到邊長 9cm 的正方形之後就無法以最少燈泡數量來放置了，放置到最後會剩下「三角狀方格」（名詞解釋 2）無法被照射到。
2. 因此我們觀察分析不同尺寸正方形的「對角線對稱軸」的放置方式，發現對角線上第 1、3、7、9 格可以不放置燈泡就可以將全部方格照射。我們發現到這些不放置燈泡的位置，都是奇數的格子，都會被其他對角線上放置的燈泡所照射，所以可以不放置燈泡。
3. 隨著正方形尺寸增加，邊長偶數的正方形，沒有「中心格」（名詞解釋 6）的位置，所以對角線上的最後 1 格都一定要放 1 顆燈泡來照射角落的方格；奇數的正方形，對角線上會有「中心格」，只要「中心格」有放置燈泡，且「中心格」之後的格子如果也有放置燈泡的條件下，對角線上的最後 1 格也許就可以不增加燈泡數量來照射。
4. 因此也許隨著正方形的尺寸增加，邊長奇數的正方形可以不放置燈泡的位置應該也會增加，那倒底是到哪一個尺寸的正方形時，開始又會有不放置燈泡的格子出現呢？我們推想第 9 格之後就一直要放置燈泡，會是 9 格一個循環嗎？因此我們覺得操作邊長 20cm 的正方形來找出其中的規律性。

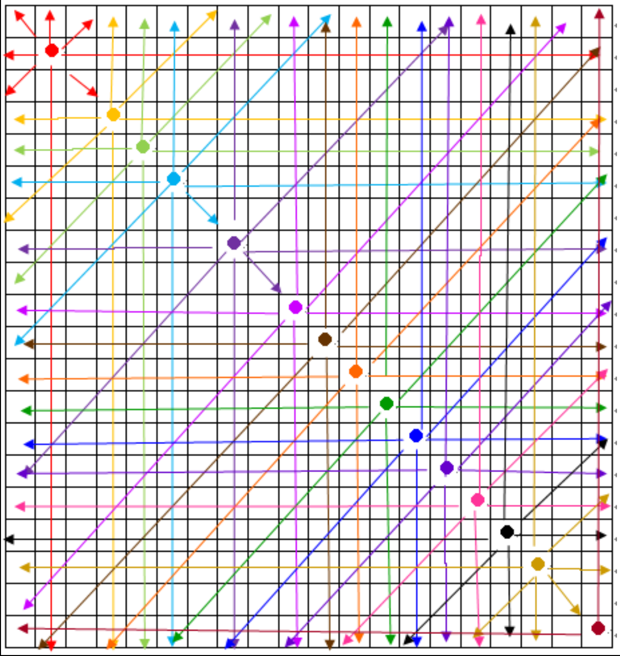
<u>實驗(三)</u>：邊長 20cm 的正方形方格與最少燈泡數量的關係。

實驗步驟：

1. 畫出邊長 20cm 正方形最少燈泡數量的對角線放置方式。

實驗結果：

表四：邊長 20cm 正方形用對角線對稱軸的放置方式的最少燈泡數量表

<table>
<tr><td>正方形尺寸（cm）</td><td>寶石數量(顆)</td><td></td></tr>
<tr><td>20×20</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">我們假設放置正方形尺寸最少燈泡的數量是邊長 18cm 為一個循環，所以當正方形邊長為 n＜19cm 時，所需的最少燈泡數量為 s 顆。
0cm＜n≦1cm　　s＝n－0 顆
1cm＜n＜3cm　　s＝n－1 顆
3cm≦n＜7cm　　s＝n－2 顆
7cm≦n＜9cm　　s＝n－3 顆
9cm≦n＜19cm　　s＝n－4 顆
以此推論，n÷18＝k…h，用剩餘的 h 去計算在第一個循環裡可以減少的燈泡數量 k_1，
所以 s＝n－k×4－k_1
例如：n＝41cm 的正方形，41÷18＝2…5，
邊長 5cm 的正方形在第一個循環裡，可以－2 顆，所以 k_1＝2 顆，
因此邊長 41cm 正方形最少燈泡數量 s＝n－k×4－k_1＝41－2×4－2＝31 顆。</td></tr>
</table>

實驗討論：

1. 由表四的結果可知，邊長 20cm 正方形最少燈泡數量是 15 顆，就能照射正方形全部方格，對角線上第 19 格可以不放置燈泡。
2. 我們發現邊長 19cm 正方形的「中心格」第 10 格有放置燈泡，且第 10 格之後陸續又放置了 8 顆燈泡，可以將新增的一行列的方格都照射到，所以對角線上最後 1 格可以不放置燈泡，因此我們假設 1：正方形尺寸最少燈泡數量放置方式第 1、3、7、9 格不放置燈泡

的規律性，是邊長 18cm 之後就會再一次循環增加，因此當正方形的邊長為 n，n÷18＝k…h 時，放置最少燈泡數量 s＝n－k×4－k_1（k_1＝h 在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。

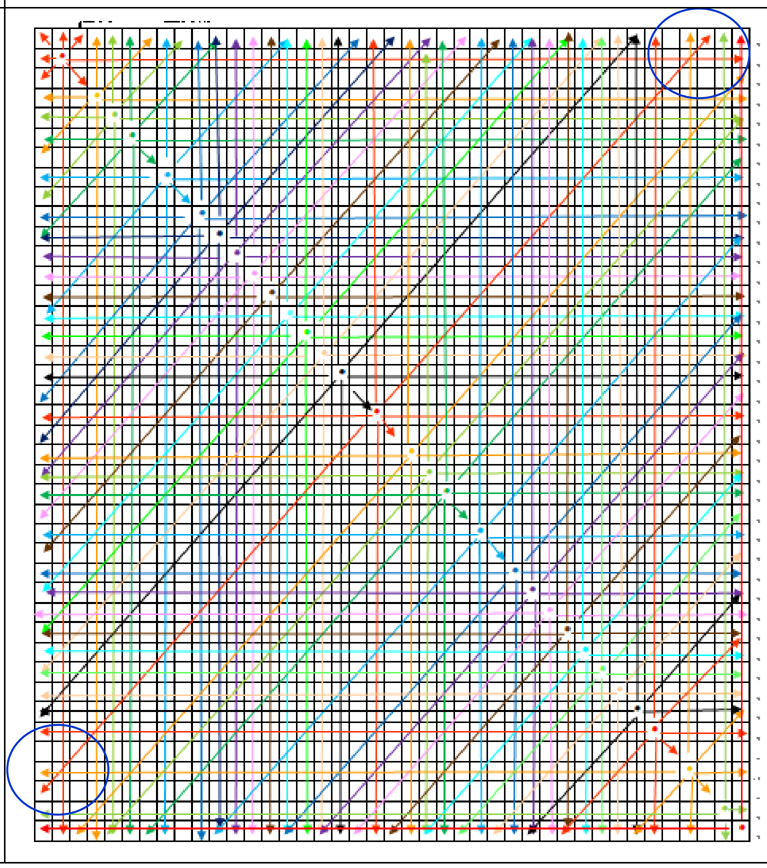
<u>實驗(四)</u>：用邊長 41cm 正方形驗證假設 1 的公式

實驗步驟：

1. 畫出邊長 41cm 正方形最少燈泡數量的對角線放置方式，並記錄最少燈泡的數量。

實驗結果：

表五：邊長 41cm 正方形最少燈泡對角線放置方式的數量表

正方形尺寸（cm）	最少燈泡數量（顆）	
41×41	33	

實驗討論：

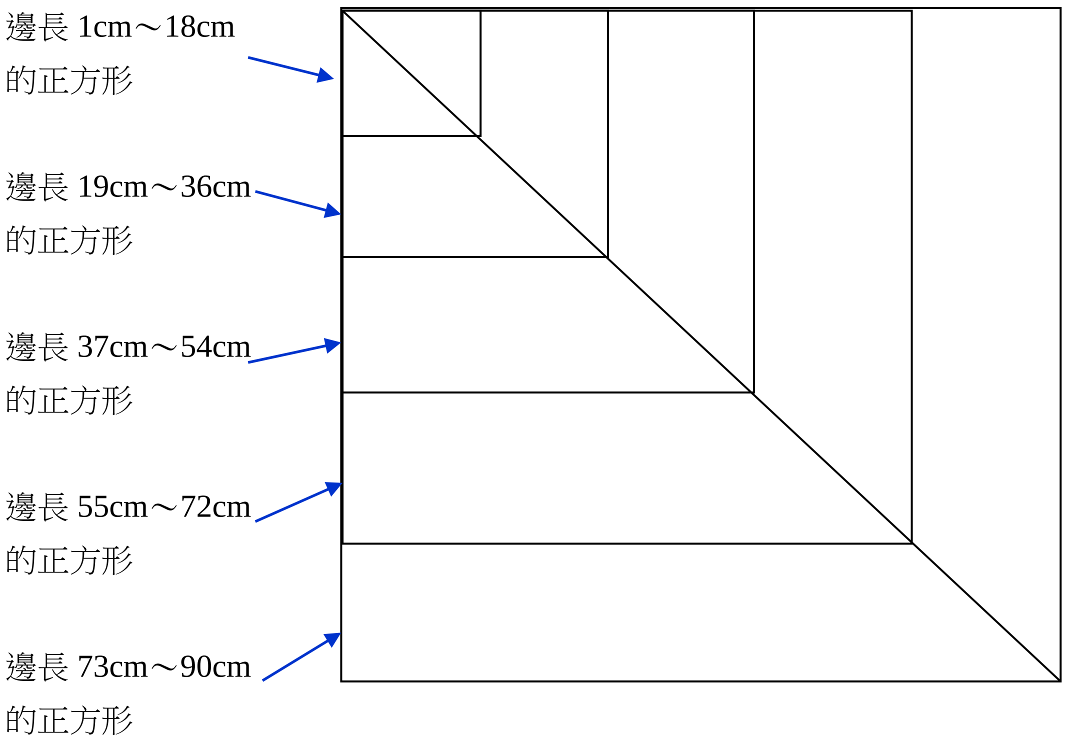
1. 由表五的結果可知，邊長 41cm 正方形放置最少燈泡數量是 33 顆，與我們的假設 1 所計算出來的 31 顆的數量是不相符的，會有右上和左下各有 2 格方格無法照射到。
2. 因此為了了解要照射正方形全部方格所放置的最少燈泡數量的規律性，我們繼續操作更大尺寸的正方形。

<u>實驗(五)</u>：邊長 41cm 之後的正方形方格與最少燈泡數量的關係

1. 將列印出的方格紙，用拼貼的方式拼貼出尺寸更大的正方形，畫出最少燈泡數量的對角線放置方式，並記錄邊長 41cm 之後的正方形的最少燈泡數量。

實驗結果：

表六：邊長 41cm 之後的正方形最少燈泡對角線放置方式的數量關係圖



上圖是邊長 90ｃｍ正方形的簡易圖，如上圖所示：
邊長 1cm～18cm 是第一個的循環，對角線上第 1、3、7、9 格可不放置燈泡。
邊長 19cm～36cm 是第二個循環，對角線上第 19、21、25、27 格（依舊是第一個循環的第 1、3、7、9 格）可不放置燈泡。
邊長 37cm～54cm 是第三個循環，對角線上的位置都要放置燈泡。
邊長 55cm～72cm 是第四個循環，對角線上第 55、57、61、63 格（依舊是第一個循環的第 1、3、7、9 格）可不放置燈泡。
邊長 73cm～90cm 是第五個循環，對角線上第 73、75、79、81 格（依舊是第一個循環的第 1、3、7、9 格）可不放置燈泡。

實驗討論：

1. 由實驗結果可知，正方形最少燈泡的數量規律性是邊長 18ｃｍ之後為一個循環，對角線上第 1、3、7、9 格可不放置燈泡，所以第一個循環是邊長≦18ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長－4 顆，若邊長＜9ｃｍ，則視尺寸對角線上是否有第 1、3、7 格可不放置燈泡，再決定邊長要減幾顆燈泡。
2. 第二個和第三個循環是 18ｃｍ＜邊長≦54ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長－８顆；第四個循環是 55ｃｍ＜邊長≦72ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長－１２顆；第五個循環是 73ｃｍ＜邊長≦90ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長１６顆。
3. 因此我們可以將假設１修正為：在正方形的邊長≦90ｃｍ的條件下，正方形邊長為ｎ，ｎ

÷18＝k…h 時，放置最少燈泡數量 s＝n－k×4－k_1（因第三個循環無法減 4 顆，所以若 k ≧3 時，s＝n－（k－1）×4－k_1，k_1＝h 在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。例如：邊長 76cm 的正方形，76÷18＝4…4，所以最少燈泡數量 s＝n－（k－1）×4－k_1＝76－（4－1）×4－2＝62 顆。

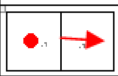
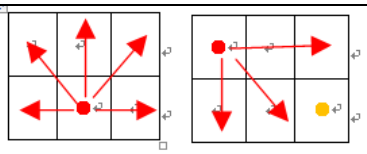
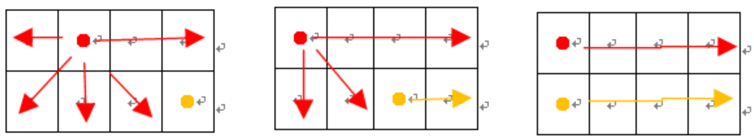
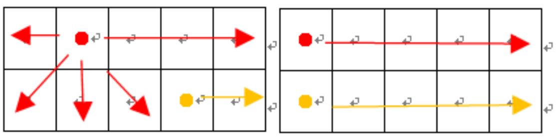
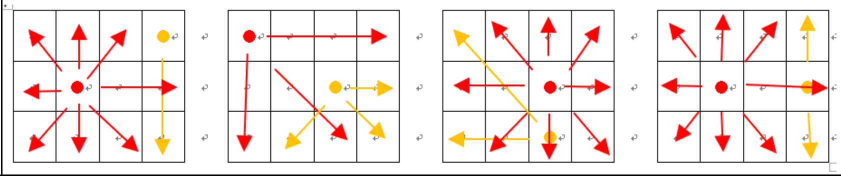
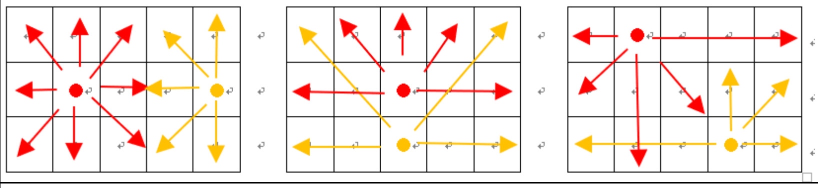
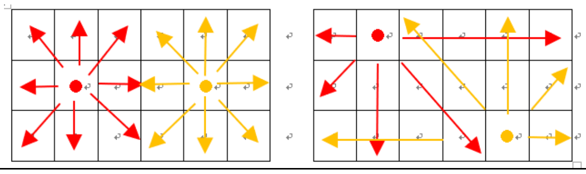
實驗(六)：寬為 1cm～6cm 時，不同尺寸的長方形方格與最少燈泡數量的關係

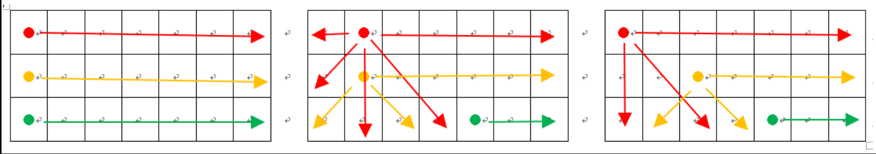
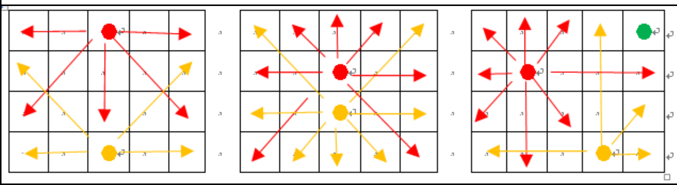
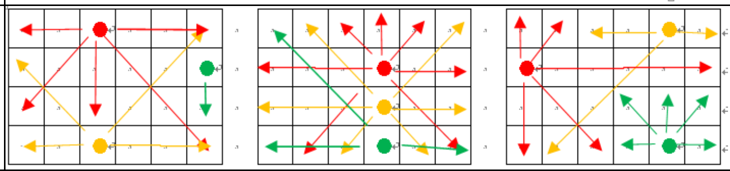
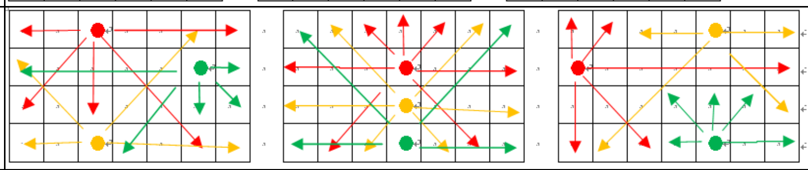
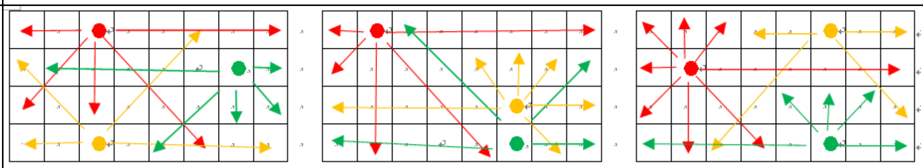
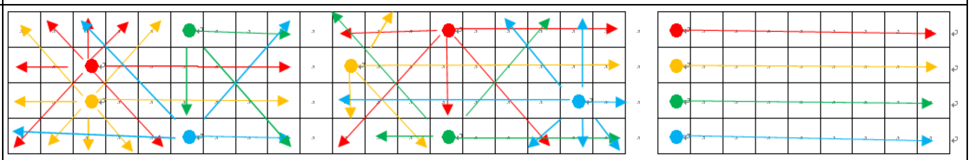
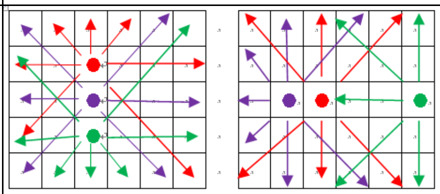
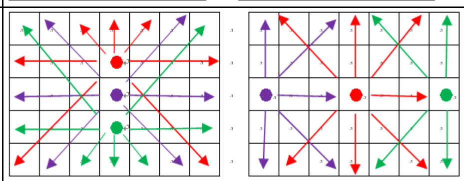
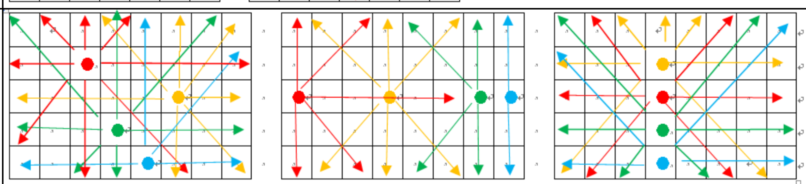
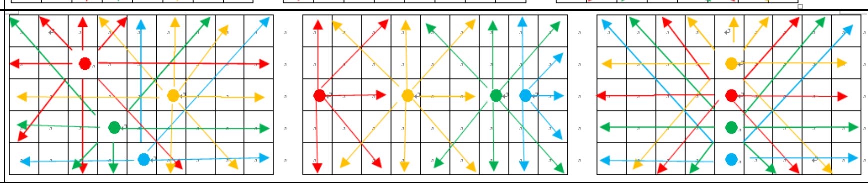
實驗步驟：

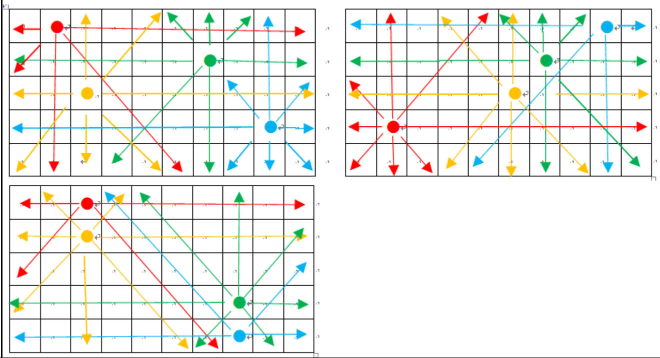
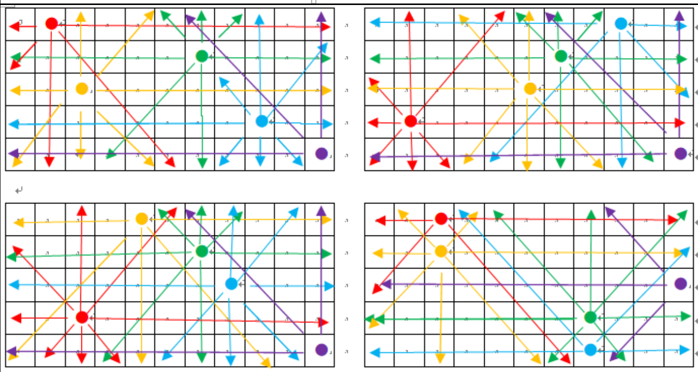
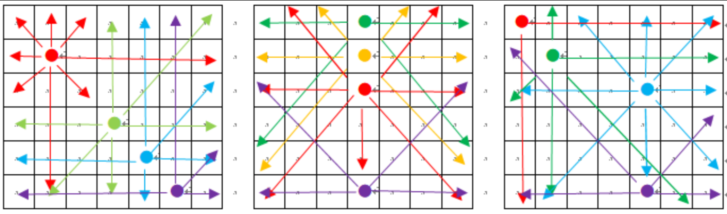
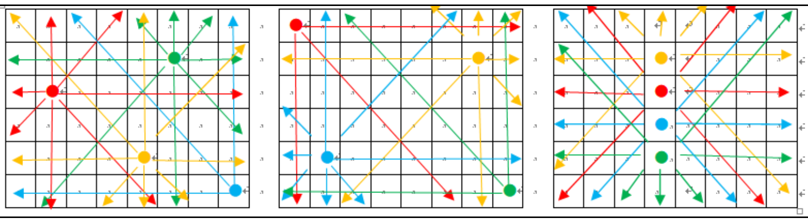
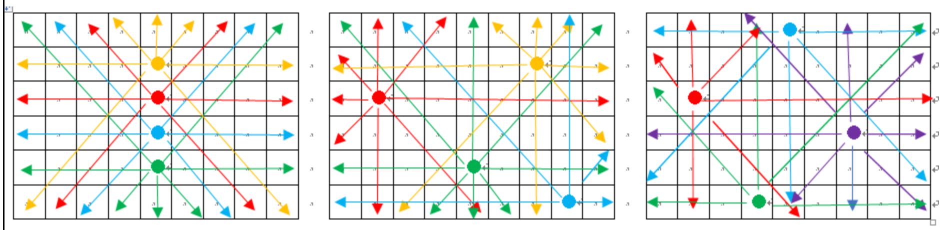
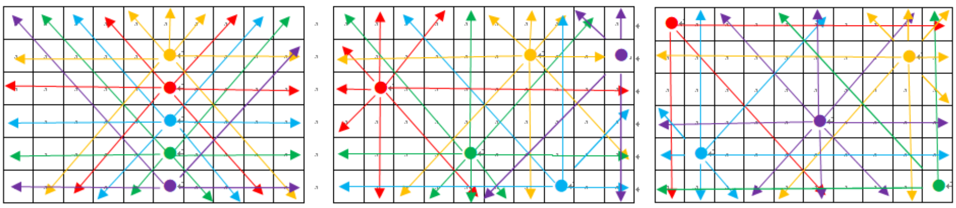
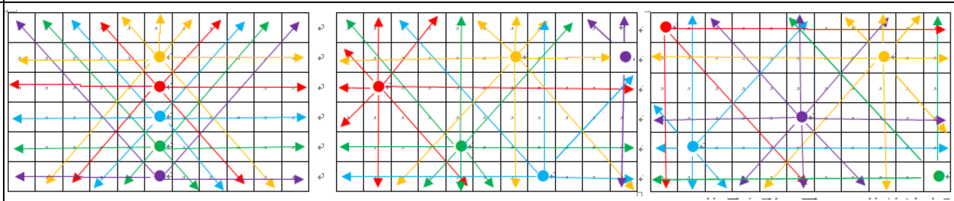
1. 找出寬 1cm～6cm 時，可以將不同尺寸的長方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。

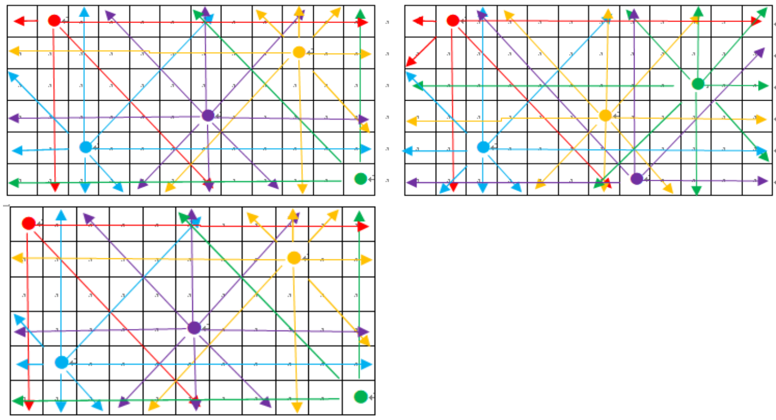
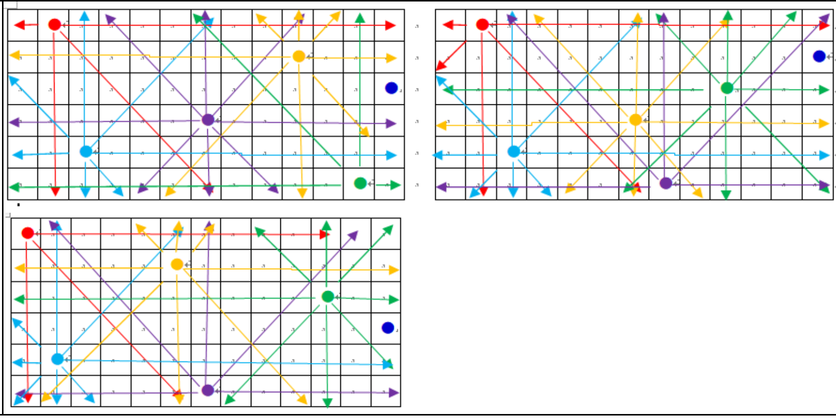
實驗結果：

表六：寬為 1cm～6cm 時，不同尺寸的長方形可放置最少寶石的數量表

長方形尺寸（cm）		最少燈泡數量（顆）	
寬為 1cm 的長方形	1×2	1	
	1×3～1×n	1	
寬為 2cm 的長方形	2×3	1	
	2×4	2	
	2×5～2×n	2	
寬為 3cm 的長方形	3×4	2	
	3×5	2	
	3×6	2	

	3x7～3xn	3	
寬為4cm 的長方形	4x5	2	
	4x6	3	
	4x7	3	
	4x8	3	
	4x9～4xn	4	
寬為5cm 的長方形	5x6	3	
	5x7	3	
	5x8	4	
	5x9	4	

	5x10	4	
	5x11～5xn	5	
寬為6cm的長方形	6x7	4	
	6x8	4	
	6x9	4	
	6x10	5	
	6x11	5	

	6x12	5	
	6x13～6xn	6	

表七：寬為 1cm～6cm 時，長≦寬x2 的長方形放置最少燈泡數量呈現斜線數列的關係表

長方形的寬 n ＼ 長方形的尺寸	1	2	3	4	5	6
nxn	1	1	1	2	3	4
nx（n+1）	1	1	2	2	3	4
nx（n+2）	1	2	2	3	3	4
nx（n+3）	1	2	2	3	4	4
nx（n+4）	1	2	3	3	4	5
nx（n+5）	1	2	3	4	4	5
nx（n+6）	1	2	3	4	5	5

實驗討論：

1. 由表六的結果可知，寬為 1cm 的長方形是一個橫列，所以無論長是多少，只要用 1 顆燈泡就可以照射到長方形全部方格。
2. 長方形的寬固定，當長≧寬x2＋1 時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量＝長方形的寬度，會是一個定值。

3. 那當長≦寬x2 時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量又存著怎樣的規律性？如果用長方形「直線」對稱軸的放法，似乎可以找出最少燈泡數量，但當長＝寬x2 時，用長方形「直線」對稱軸的放法，卻不是最少燈泡數量的放置方式。
4. 不過我們發現長方形的寬固定，長≦寬x2 時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量似乎存在著一個「斜線」數列（名詞解釋 3）的關係，如上面表七所示。
5. 因此我們依據這樣一個「斜線」數列，去推算寬為 7cm 和 8cm 的長≦寬x2 的長方形尺寸的最少燈泡的數量，並實際操作驗證其最少燈泡數量是否符合。

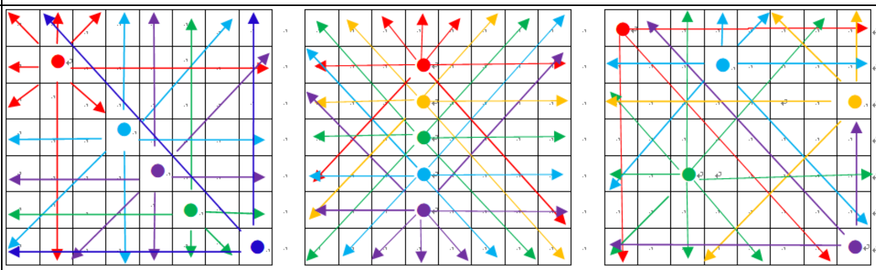
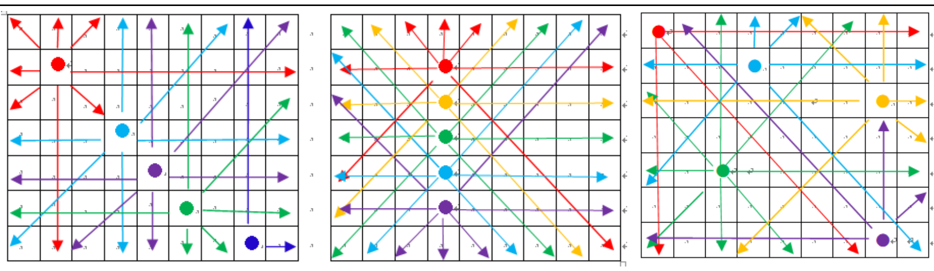
<u>實驗(五)</u>：用寬為 7cm～8cm 時，長≦寬x2 的長方形方格驗證「斜線」數列與最少燈泡數量的關係

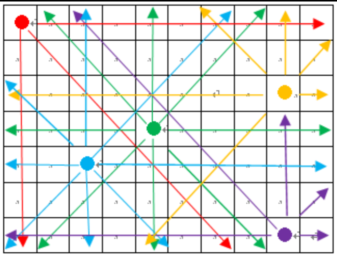
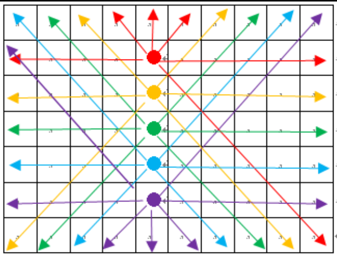
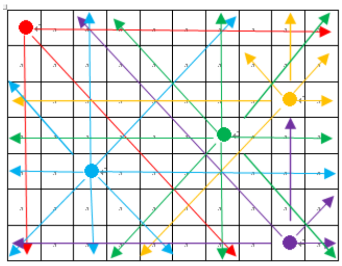
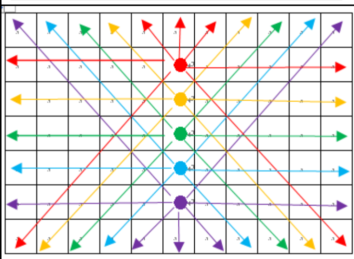
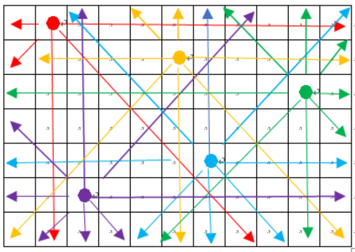
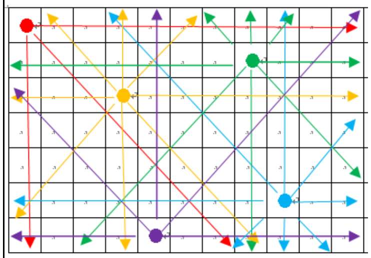
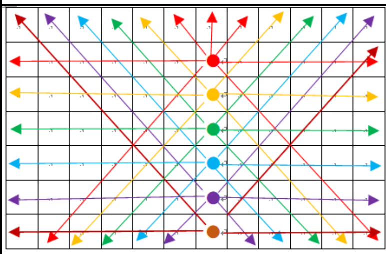
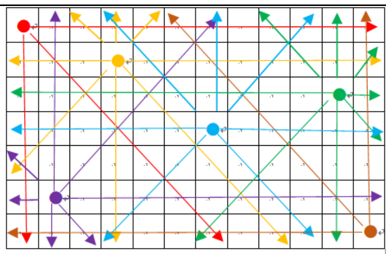
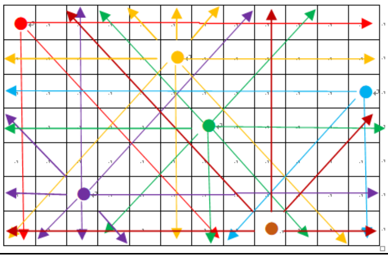
實驗步驟：

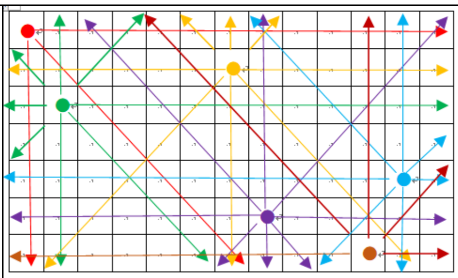
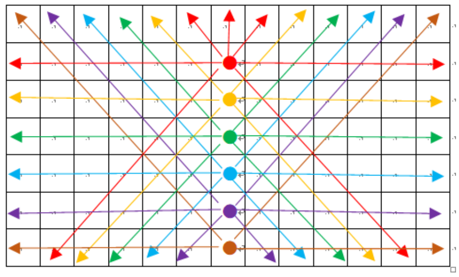
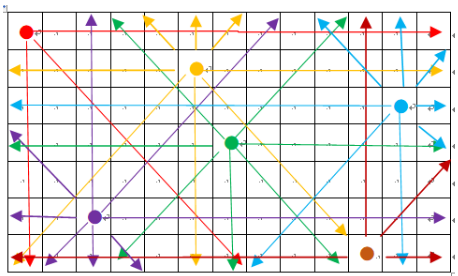
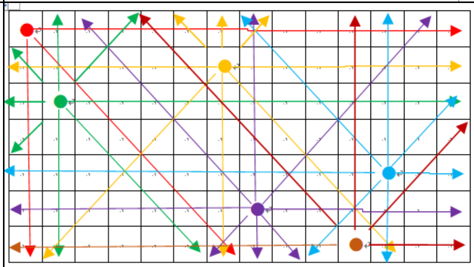
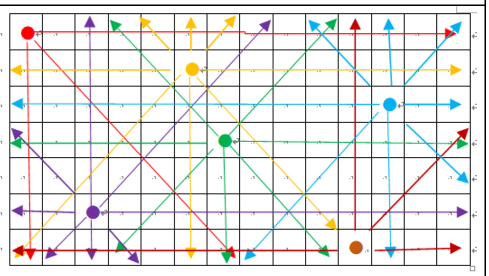
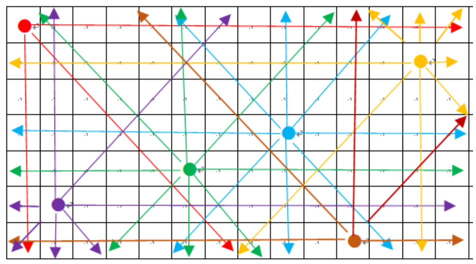
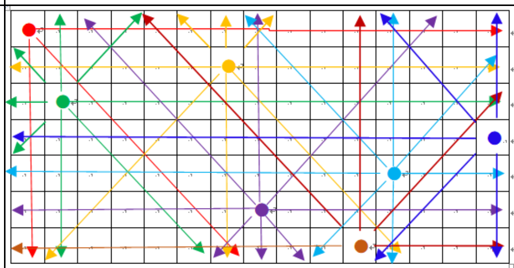
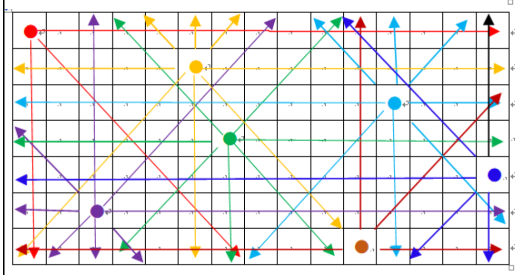
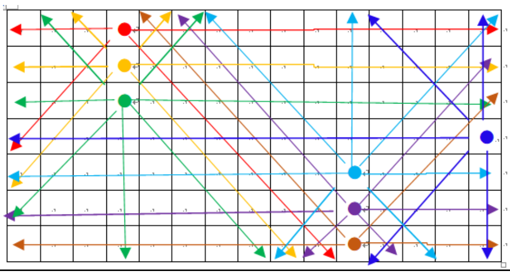
1. 找出寬 7cm 和 8cm 時，可以將不同尺寸的長方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。
2. 再與實驗（四）的結果作比較。

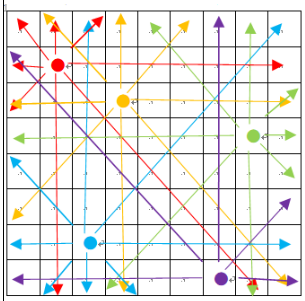
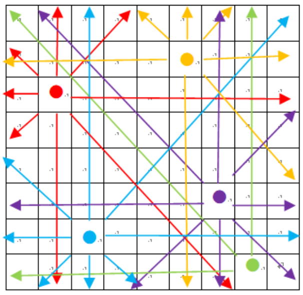
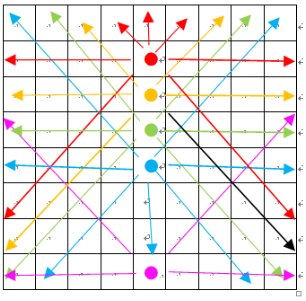
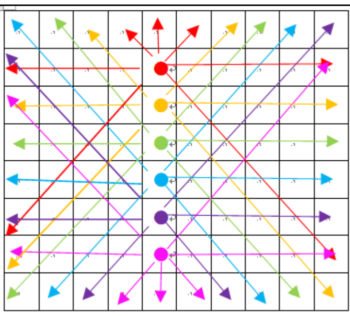
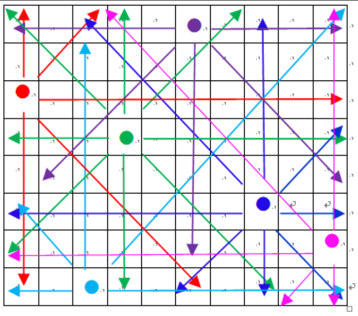
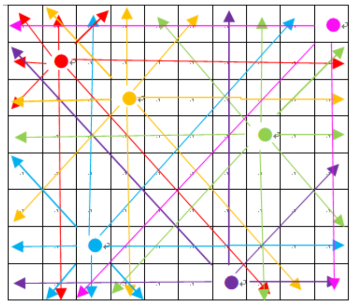
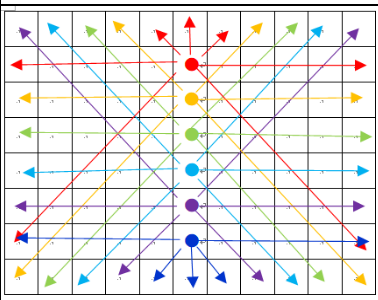
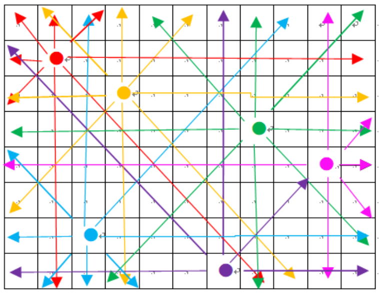
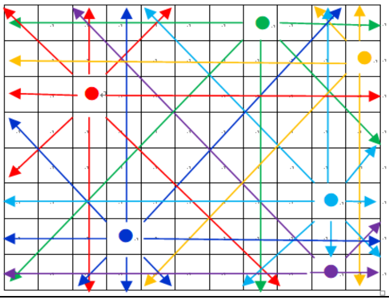
實驗結果：

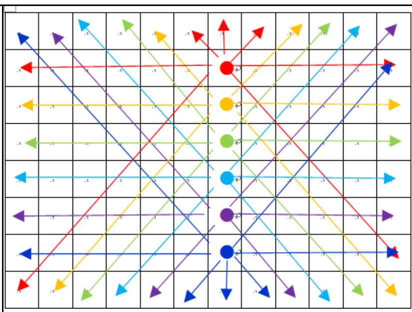
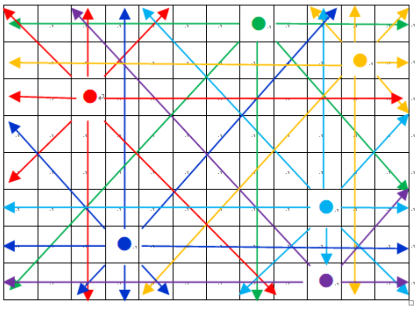
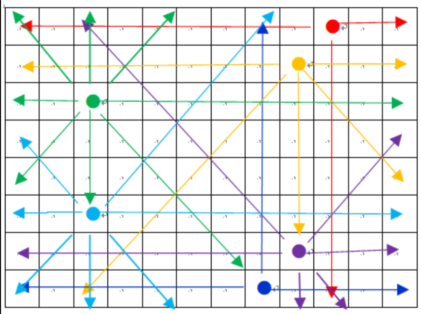
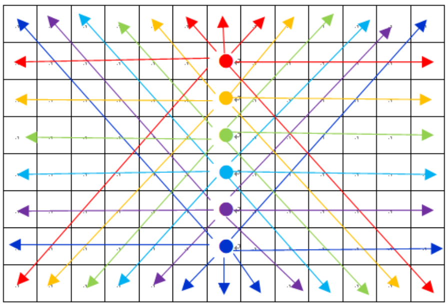
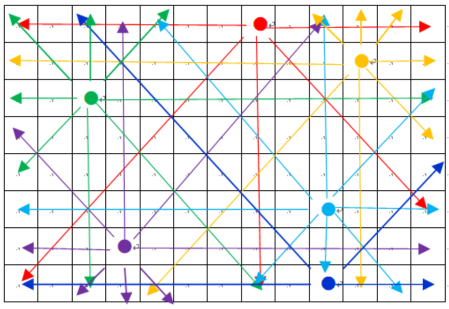
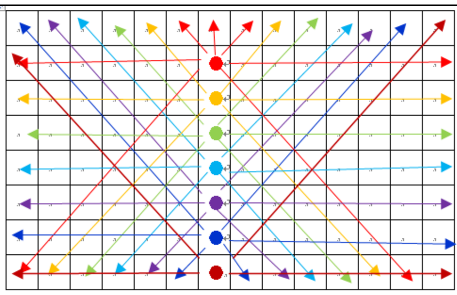
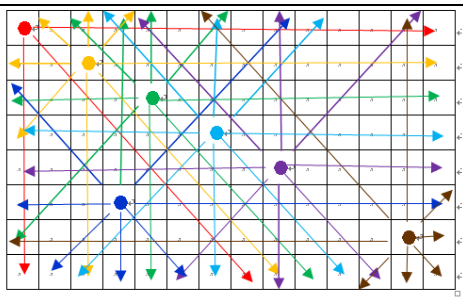
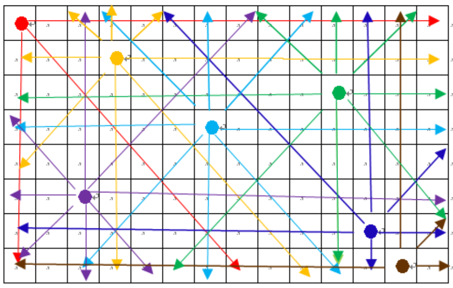
表八：寬為 7cm～8cm 時，長≦寬x2 的長方形可放置最少燈泡的數量表

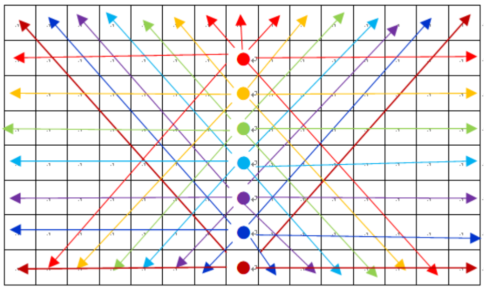
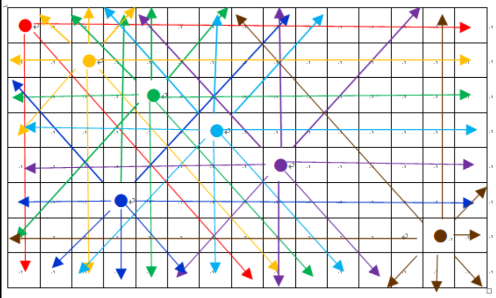
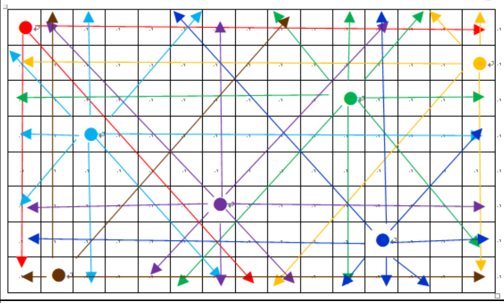
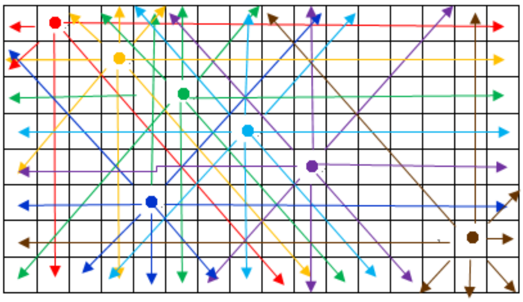
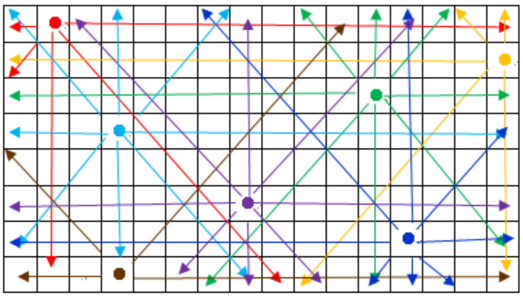
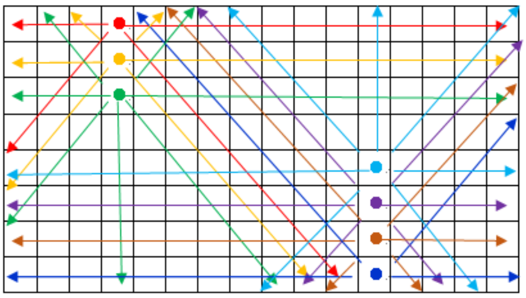
長方形尺寸（cm）		最少燈泡數量（顆）	
寬為 7cm 的長方形	7x8	5	
	7x9	5	

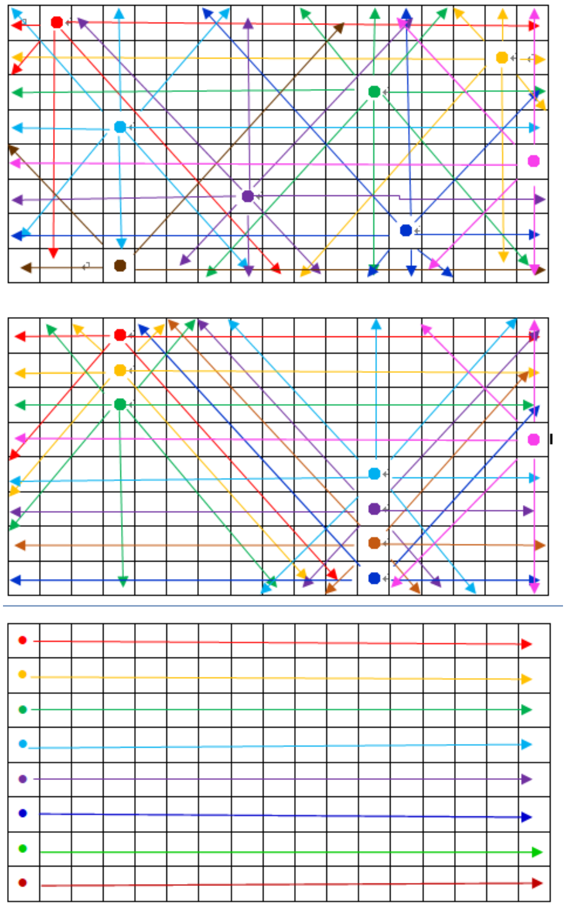
	7×10	5	  
	7×11	5	  
	7×12	6	  

	7×13	6	  
	7×14	6	  
	7×15～7×n	7	  

寬為8cm 的長方形	8×9	5	  
	8×10	6	  
	8×11	6	  

	8×12	6	  
	8×13	6	 
	8×14	7	  

	8×15	7	  
	8×16	7	  

	8×17～8×n	8	

表八：寬為 1cm～8cm 時，長≦寬×2 的長方形放置最少燈泡數量呈現斜線數列的關係表

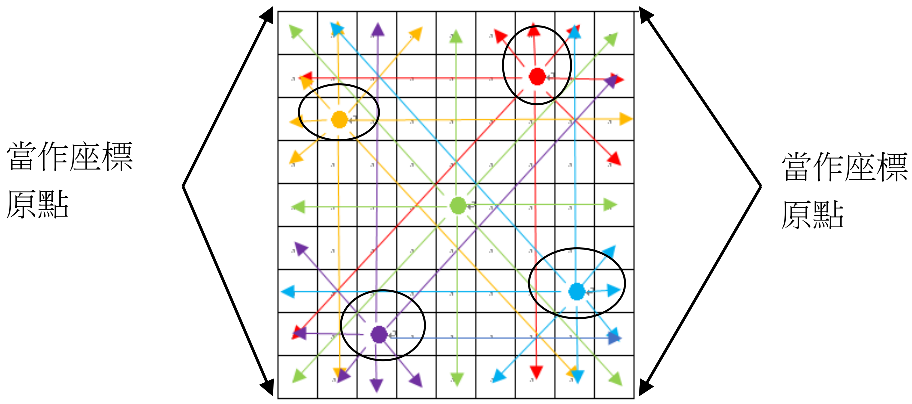
長方形的寬 n ／ 長方形的尺寸	1	2	3	4	5	6	7	8
n×n	1	1	1	2	3	4	4	5
n×（n+1）	1	1	2	2	3	4	5	5
n×（n+2）	1	2	2	3	3	4	5	6
n×（n+3）	1	2	2	3	4	4	5	6
n×（n+4）	1	2	3	3	4	5	5	6
n×（n+5）	1	2	3	4	4	5	6	6
n×（n+6）	1	2	3	4	5	5	6	7
n×（n+7）	1	2	3	4	5	6	6	7
n×（n+8）	1	2	3	4	5	6	7	7

實驗討論：

1. 由表七的結果可知，長方形的長 $n \leqq n\times 2$ 時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量，，與我們用斜線數列推算出的數量相符合。
2. 從 $n\times n$ 的尺寸開始，將長方形尺寸的全部方格都照射到的最少燈泡數量，會有「斜線」數列的關係，因此只要算出正方形 $n\times n$ 的最少燈泡數量，再用「斜線」數列，依序增加數量，就能找出長方形尺寸的最少燈泡數量了。

四、討論

1. 邊長 1cm～5cm 等尺寸小的正方形要找出最少燈泡的數量很快，可以將所有放置的方式都嘗試看看，比較能確保最少燈泡數量，但燈泡放置的方式比較少。
2. 但邊長超過 6cm 的正方形，如果要將所有放置的方式都嘗試看看，會有好多種可能性，因此用尺寸小的正方形去延伸，雖然也可以確認出最少燈泡數量，但可能會漏掉一些其他最少燈泡數量的放置方式，就會間接影響到後面尺寸尋找最少燈泡數量，因為不是每種放置方式都能順利以最少燈泡數量延伸到下一個尺寸，因此我們也嘗試用「隨機」放置的方式去找出其他最少燈泡數量的放置方式。
3. 正方形的尺寸除了「對角線對稱軸」的放置方式有明顯的規律性外，其他延伸或隨機放置的方式很難看出明確的規律性，但放置的方式大都是正方形四個角落相互對稱的位置，若將正方形的四個角都當成是座標的原點，我們會發現最少燈泡的位置，在四個角落會是一樣或相對應的座標，如下圖邊長 9cm 的正方形，在四個角的燈泡位置，如果以四個直角做為原點，這四顆圈起來的燈泡的位置都是座標（3，2）的位置。



4. 由於長方形的放置方式，大都是用正方形尺寸去延伸，因此最少燈泡數量或是燈泡放置的位置，我們一直找不出數量或位置明確的規律性，後來想起有些數字的規律性不一定是數字上加減乘除的變化，也有可能是圖形上的數字變化，例如金字塔數列，於是我們也試著將所得到的最少燈泡數量以斜線的方式排列，結果數字竟然出現了完整的數列。
5. 本研究在生活上的貢獻，我們認為可以應用在平面的牆面設計或是商品的展示櫃，若要將一個平面的牆面照亮，就可以用最省電的方式放置最少的點光源來照亮整面牆面，或是商品的展示櫃，照射整個展示櫃的底面，將商品呈現。

五、結論

1. 邊長 n 的正方形，將燈泡放置在對角線對稱軸上，可以照射正方形全部方格的燈泡數量會是最少的。
2. 正方形邊長 n＜18cm，第 1、3、7、9 格不放置燈泡的規律性，是邊長 18cm 之後就會再一次循環增加，因此在第一個循環裡，

   0cm＜n≦1 cm　　　s＝n－0 顆（只有 1 格，一定要放置燈泡）

   1 cm＜n＜3 cm　　　s＝n－1 顆（只有第 1 格不放燈泡）

   3 cm≦n＜7 cm　　　s＝n－2 顆（只有第 1、3 格不放燈泡）

   7 cm≦n＜9 cm　　　s＝n－3 顆（只有第 1、3、7 格不放燈泡）

   9 cm≦n＜19 cm　　　s＝n－4 顆（第 1、3、7、9 格不放燈泡）
3. 正方形的邊長 n＞18cm，n÷18＝k…h 時，放置最少燈泡數量 $s=n-k\times4-k_1$（若 k ≧3 時，$s=n-(k-1)\times4-k_1$，$k_1=h$ 在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。
4. 寬為 n 的長方形，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量，從正方形 n×n 開始會以「斜線」數列依序增加，所以可以用「斜線」數列來推算長方形尺寸最少燈泡的數量。

六、參考資料及其他

1. 打擊數學怪獸 27，作者：芳澤光雄，出版社：時報文化出版企業股份有限公司

【評語】080409

本研究嘗試將一個「寶石」遊戲轉化為點光源的討論，探討不同尺寸正方形上最少燈泡照亮全部格子的個數逐步推廣到不同尺寸長方形上。透過不斷實驗找出答案後再描述與歸納這些答案的模式與一般性，雖然探討細膩，但無法確定沒有遺漏。研究內容具可操作性，可將研究方法推廣到實際環境區塊且考慮燈光的環狀範圍將更具意涵。

作品海報

以少勝多

摘要

本次實驗的目的是在探討若要將方格全部照射到，不同尺寸的正方形及長方形與放置最少點光源數量的關係。研究結果發現：正方形尺寸最少燈泡數量放置方式第1、3、7、9格不放置燈泡的規律性，是邊長18cm之後就會再一次循環增加，因此當正方形的邊長為n，n÷18＝k…h時，放置最少燈泡數量s＝n－k×4－k_1（若k ≧3時，s＝n－（k－1）×4－k_1，k_1＝h在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。寬為n的長方形，當長≧寬×2＋1時，放置最少燈泡數量s＝寬度，而當長＜寬×2＋1時，最少燈泡數量，從n×n開始會以「斜線」數列依序增加。

一、前言

一本數學書上有個有趣的遊戲：在6cm×6cm的正方形任何一個格子裡，最少要放入多少顆寶石時，寶石散發出的橫線、直線或斜線的光芒可以照射到正方形的全部格子。我們試著在方格子裡畫了起來，發現大家寶石擺放的方式都不太一樣，但有些人使用的寶石數量有些是相同，有些則是使用了更多的寶石數量才將全部的格子都照射到，但最少寶石數量都是4顆。

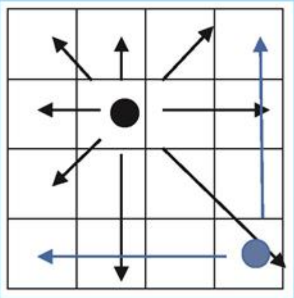
因此我們設想如果寶石換成點光源，每個方格只要有光線照射到，不考慮方格的每個位置的亮度是否均勻的條件下，就可以用最少的電將一個正方形的平面全部照亮，就可以達到省電的效果，那我們是否可以從一個正方形的尺寸來計算最少的點光源數量呢？如果換成是長方形的尺寸，點光源的數量是否也有規律性可以計算出來呢？點光源擺放的方式又要如何擺放，才能達到最少點光源的數量？（與康軒出版社數學科第十冊第五元「線對稱圖形」有關）。

因此我們想研究探討以下幾點：

1. 不同尺寸的正方形與放入的最少燈泡數量的關係。
2. 不同尺寸的長方形與放入的最少燈泡數量的關係。

二、研究設備及器材

我們利用WORD畫出表格，利用表格製作出不同尺寸的長方形及正方形的方格，利用圓形符號代替燈泡、箭頭符號代表燈泡可照射的位置，無法照射到的位置再陸續放置其他的燈泡，並用不同顏色的圓形及箭頭符號作區別，直到全部方格都照射到，如下圖一所示。

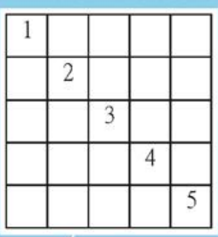


圖一

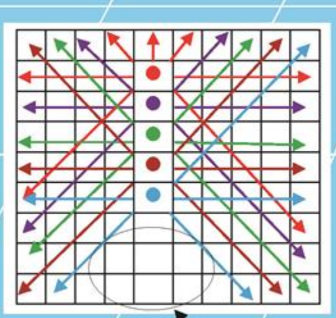
此外，由於不同尺寸的方格，最少燈泡數量的放置方式多樣化，因此我們在實驗中將只呈現2～3種燈泡的放置方式，其餘最少燈泡數量的放置方式會整理成實驗紀錄本。

●名詞解釋：

1. 方格的定位代號：
正方形或長方形裡的方格數多，為了能清楚說明指的是哪一格，我們將對角線上的方格由左上到右下，依序命名第1格、第2格……以此類推，如下圖所示。

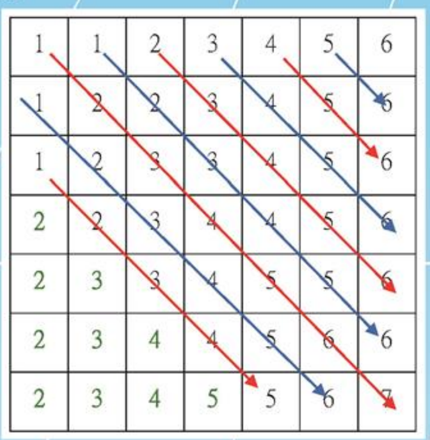


2. 三角狀的方格：
當最少燈泡數量都放置完畢後，方格下方剩下一個類似三角形的方格未照射到，我們稱為三角狀的方格。

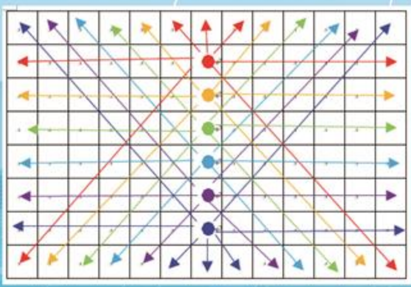


三角狀方格

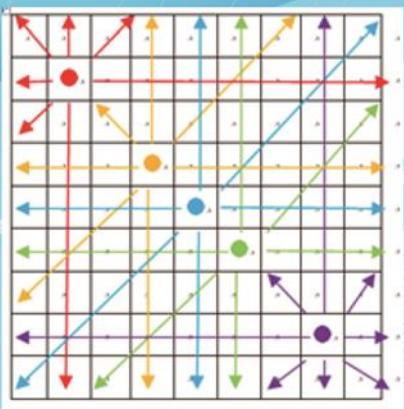
3. 「斜線」數列：
如下圖所示，每一個箭頭的方向，都是一個連續的數列，由於數字是斜線的方向依序增加，因此我們稱為「斜線」數列。



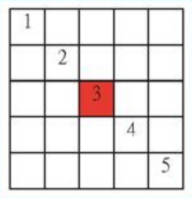
4. 直線對稱軸：
燈泡放置的方式都在尺寸的中間直線位置，因此我們稱燈泡放置方式為「直線對稱軸」的方式。如下圖所示，燈泡放置的位置都是在尺寸中間的方格，也就是我們所稱的「直線對稱軸」的放置方式。



5. 對角線對稱軸：
燈泡放置的方式都在尺寸的對角線位置，因此我們稱燈泡放置方式為「對角線對稱軸」的方式。如下圖所示，燈泡放置的位置都是在尺寸對角線的方格，也就是我們所稱的「對角線對稱軸」的放置方式。



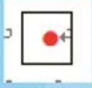
6. 正方形的中心格：
邊長偶數的正方形，正中央的位置是1個交叉點，不是方格；邊長奇數的正方形，正中央的位置是1個方格，我們命名為正方形「中心格」，如下圖所示，第三格的位置是邊長5cm正方形的「中心格」。



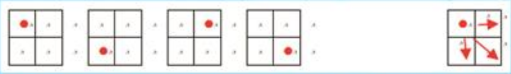
三、研究過程或方法

（一）尋找不同尺寸的正方形放置最少燈泡的方法一（適用於尺寸較小的正方形）

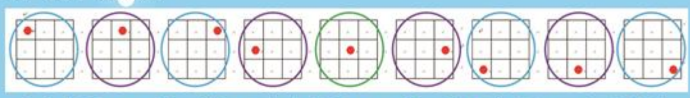
1. 邊長1cm的正方形，燈泡可能放置的方式只有1種，如下圖所示，放置的最少燈泡數量是1顆。



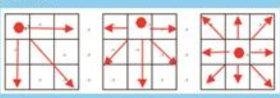
2. 邊長2cm的正方形，雖然方格有4格，燈泡可能放置的方式會有4種，但將方格旋轉之後，它們只是擺放方向不同，所以屬於同1種放置方式，如圖所示，因此放置的最少燈泡數量是1顆。



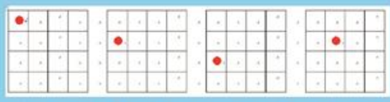
3. 邊長3cm的正方形，燈泡放置的方式非常多種，因此我們先從放置1顆燈泡的方式開始，會有9種放置方式，如下圖所示：



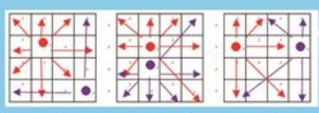
但藍色圈起來的是同一種，紫色圈起來的是同一種，所以實際上只有3種藍色、紫色和綠色的放置方式，因此我們只需針對3種放置方式去操作即可。操作結果發現第三種的放置方式以將全部方格都照射完，而其他2種放置方式都還要放置第2顆燈泡，因此操作至此，我們可以知道邊長3cm的正方形，最少燈泡數量是1顆。



4. 邊長4cm的正方形，燈泡放置的方式也非常多種，因此我們也先從放置1顆燈泡的方式開始，會有16種放置方式，排除相同放置方式後，只剩下4種放置方式，如下圖所示。



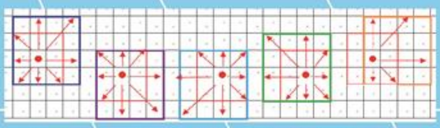
由於4種放置方式都無法將全部方格照射，所以我們針對上面的4種放置方式，再放置第2顆燈泡，這4種放置方式各有15種放置第2顆燈泡的不同放置放式，我們一一操作，至此，我們已發現了可以用2顆燈泡就可以照射全部方格的放置方式，所以接下來排除無法用2顆燈泡的放置方式及相同方式之後，我們可以發現邊長4cm的正方形有3種最少燈泡數量的放置方式，我們也可以確定邊長4cm的正方形，最少燈泡數量是2顆，如下圖所示。



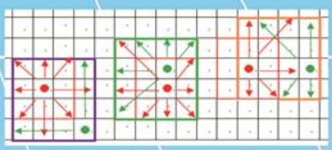
由於我們是從最少數量開始操作，因此當發現可以照射全部方格的數量時，就是此尺寸的最少燈泡數量。

（二）尋找不同尺寸的正方形放置最少燈泡的方法二（適用於尺寸較大的正方形）

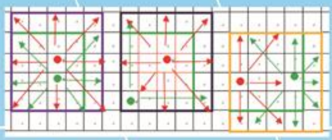
1. 邊長4cm的正方形，燈泡放置的方式非常多種，因此我們從邊長3cm正方形的最少燈泡的放置方式中，將箭頭從四面方向延長，如圖所示：



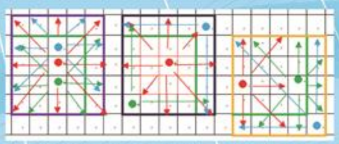
從上圖可知，邊長4cm的正方形方格無法用1顆燈泡就將全部方格照射到，所以我們可以針對上圖逐列出邊長4cm的正方形的五種放置方式，再放置第2顆燈泡，放置第2顆燈泡後，就可以將全部方格照射到，因此我們可以確定邊長4cm的正方形，最少燈泡數量是2顆，放置方式只有3種，如下圖所示，



5、邊長5cm的正方形，燈泡放置的方式也非常多種，因此我們也按照相同方式，從邊長4cm正方形的最少燈泡的放置方式中，將箭頭從四面方向延長，如圖所示：



由於邊長4cm正方形的3種放置方式的延長都無法將全部方格照射，所以我們針對上面的2種放置方式，再放置第3顆燈泡，放置第3顆燈泡後，就可以將全部方格照射到，因此我們可以確定邊長5cm的正方形，最少燈泡數量是3顆，如下圖所示。



因此以下的實驗研究過程，我們將利用上述的方式找出不同尺寸正方形的最少燈泡數量，不過隨著邊長增加，尺寸越來越大的正方形，最少燈泡放置的方式會隨之大增，因此邊長5cm之後正方形將只呈現2～3種最少燈泡的放置方式，其餘燈泡的放置方式會呈現在實驗紀錄本。

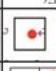
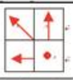
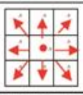
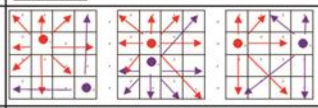
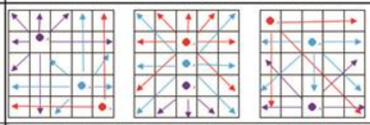
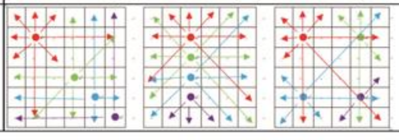
實驗(一)：當正方形邊長是1cm～6cm時，不同尺寸的正方形方格與最少燈泡數量的關係。

實驗步驟：

1. 找出可以將邊長1cm～6cm正方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。

實驗結果：

表一：邊長是1cm～6cm時，不同尺寸的正方形最少燈泡的數量表

正方形尺寸(cm)	最少燈泡的數量（顆）	燈泡將全部方格都照射的各種放置方式
1x1	1	
2x2	1	
3x3	1	
4x4	2	
5x5	3	
6x6	4	

實驗討論：

1. 由表一的結果可知，用1顆燈泡可以將邊長1cm、2cm及3cm的正方形方格全都照射到。
2. 最少燈泡數量的擺放方式有很多種，正方形尺寸越大，最少燈泡的擺放方式會越多樣化。
3. 由於尚未發現最少燈泡放置的規律性，我們繼續操作邊長7cm～12cm的正方形，看看燈泡放置的方式及數量是否有規律性。

實驗(二)：當正方形邊長是7cm～12cm時，不同尺寸的正方形方格與最少燈泡數量的關係。

實驗步驟：

1. 找出可以將邊長7cm～12cm正方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。
2. 再與實驗（一）的結果做比較。

實驗結果：

表二：邊長是7cm～12cm時，不同尺寸的正方形最少燈泡的數量表

正方形尺寸（cm）	最少燈泡的數量（顆）	用最少燈泡將全部方格都照射的放置方式
7×7	4	
8×8	5	
9×9	5	
10×10	6	
11×11	7	
12×12	8	

表三：邊長是1cm～12cm時，不同尺寸的正方形可放置最少燈泡數量比較表

正方形尺寸（cm）		寶石數量（顆）	正方形尺寸（cm）		寶石數量（顆）
1×1		1	2×2		1
3×3		1＝3－2（第2格中心格有放置燈泡，所以對角線上最後1格不用放置燈泡。）	4×4		2＝4－2
5×5		3＝5－2（第3格中心格沒有放置燈泡，所以對角線上最後1格要放置燈泡。）	6×6		4＝6－2
7×7		4＝7－3（第4格中心格有放置燈泡，所以對角線上最後1格不用放置燈泡。）	8×8		5＝8－3
9×9		5＝9－4（第5格中心格有放置燈泡，所以對角線上最後1格不用放置燈泡。）	10×10		6＝10－4
11×11		7＝11－4（第6格中心格雖有放置燈泡，但第7、9格沒有放置燈泡，所以對角線上最後1格要放置燈泡。）	12×12		8＝12－4
觀察所有尺寸在對角線上的放置方式，我們可以發現對角線上第1、3、7、9格（名詞解釋1）都可以不用放燈泡就可以將該尺寸的所有方格都照射到。因此最少燈泡的數量可以用邊長－4顆來計算出最少燈泡數量，而邊長＜9cm的正方形，則視尺寸是否有1、3、7、9格來決定最少燈泡數量，例如：邊長4cm的正方形，對角線上沒有第7和第9格的位置，因此它的最少燈泡數量只能減第1格和第3格不放燈泡的2顆，所以最少燈泡數量是邊長－2顆。					

實驗討論：

1. 由表二的結果可知，不同尺寸的正方形最少燈泡的放置方式都會有「對角線對稱軸」或「直線對稱軸」（名詞解釋4和5）的放置方式，所以將燈泡以「對角線對稱軸」或「直線對稱軸」放置時，可用最少燈泡數量將全部方格都照射到，但中間「直線對稱軸」的放置方式到邊長9cm的正方形之後就無法以最少燈泡數量來放置了，放置到最後會剩下「三角狀方格」(名詞解釋2)無法被照射到。
2. 因此我們觀察分析不同尺寸正方形的「對角線對稱軸」的放置方式，發現對角線上第1、3、7、9格可以不放置燈泡就可以將全部方格照射。我們發現到這些不放置燈泡的位置，都是奇數的格子，都會被其他對角線上放置的燈泡所照射，所以可以不放置燈泡。
3. 隨著正方形尺寸增加，邊長偶數的正方形，沒有「中心格」（名詞解釋6）的位置，所以對角線上的最後1格都一定要放1顆燈泡來照射角落的方格；奇數的正方形，對角線上會有「中心格」，只要「中心格」有放置燈泡，且「中心格」之後的格子如果也有放置燈泡的條件下，對角線上的最後1格也許就可以不增加燈泡數量來照射。
4. 因此也許隨著正方形的尺寸增加，邊長奇數的正方形可以不放置燈泡的位置應該也會增加，那倒底是到哪一個尺寸的正方形時，開始又會有不放置燈泡的格子出現呢？我們推想第9格之後就一直要放置燈泡，會是9格一個循環嗎？因此我們覺得操作邊長20cm的正方形來找出其中的規律性。

實驗(三)：邊長20cm的正方形方格與最少燈泡數量的關係。

實驗步驟：

1. 畫出邊長20cm正方形最少燈泡數量的對角線放置方式。

實驗結果：

表四：邊長20cm正方形用對角線對稱軸的放置方式的最少燈泡數量表

正方形尺寸（cm）	寶石數量（顆）	
20×20	15	

我們假設放置正方形尺寸最少燈泡的數量是邊長18cm為一個循環，所以當正方形邊長為$n<19$cm時，所需的最少燈泡數量為s顆。

$0\text{cm}<n\leq1\text{cm}$　　$s=n-0$顆

$1\text{cm}<n<3\text{cm}$　　$s=n-1$顆

$3\text{cm}\leq n<7\text{cm}$　　$s=n-2$顆

$7\text{cm}\leq n<9\text{cm}$　　$s=n-3$顆

$9\text{cm}\leq n<19\text{cm}$　　$s=n-4$顆

以此推論，$n\div18=k\cdots h$，用剩餘的h去計算在第一個循環裡可以減少的燈泡數量k_1，

所以$s=n-k\times4-k_1$

例如：$n=41$cm的正方形，$41\div18=2\cdots5$。

邊長5cm的正方形在第一個循環裡，可以－2顆，所以$k_1=2$顆。

因此邊長41cm正方形最少燈泡數量$s=n-k\times4-k_1=41-2\times4-2=31$顆。

實驗討論：

1. 由表四的結果可知，邊長20cm正方形最少燈泡數量是15顆，就能照射正方形全部方格，對角線上第19格可以不放置燈泡。
2. 我們發現邊長19cm正方形的「中心格」第10格有放置燈泡，且第10格之後陸續又放置了8顆燈泡，可以將新增的一行列的方格都照射到，所以對角線上最後1格可以不放置燈泡，因此我們假設1：正方形尺寸最少燈泡數量放置方式第1、3、7、9格不放置燈泡的規律性，是邊長18cm之後就會再一次循環增加，因此當正方形的邊長為n，$n\div18=k\cdots h$時，放置最少燈泡數量$s=n-k\times4-k_1$（$k_1=h$在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。

實驗(四)：用邊長41cm正方形驗證假設1的公式

實驗步驟：

1. 畫出邊長41cm正方形最少燈泡數量的對角線放置方式，並記錄最少燈泡的數量。

實驗結果：

表五：邊長41cm正方形最少燈泡對角線放置方式的數量表

正方形尺寸（cm）	最少燈泡數量（顆）	
41×41	33	

實驗討論：

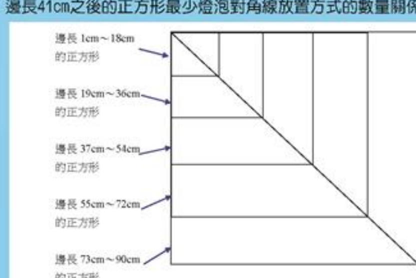
1. 由表五的結果可知，邊長41cm正方形放置最少燈泡數量是33顆，與我們的假設1所計算出來的31顆的數量是不相符的，會有右上和左下各有2格方格無法照射到。
2. 因此為了了解要照射正方形全部方格所放置的最少燈泡數量的規律性，我們繼續操作更大尺寸的正方形。

實驗(五)：邊長41cm之後的正方形方格與最少燈泡數量的關係

1. 將列印出的方格紙，用拼貼的方式拼貼出尺寸更大的正方形，畫出最少燈泡數量的對角線放置方式，並記錄邊長41cm之後的正方形的最少燈泡數量。

實驗結果：

表六：邊長41cm之後的正方形最少燈泡對角線放置方式的數量關係圖



上圖是邊長90ｃｍ正方形的簡易圖，如上圖所示：
邊長1cm～18cm是第一個的循環，對角線上第1、3、7、9格可不放置燈泡。
邊長19cm～36cm是第二個循環，對角線上第19、21、25、27格（依舊是第一個循環的第1、3、7、9格）可不放置燈泡。
邊長37cm～54cm是第三個循環，對角線上的位置都要放置燈泡。
邊長55cm～72cm是第四個循環，對角線上第55、57、61、63格（依舊是第一個循環的第1、3、7、9格）可不放置燈泡。
邊長73cm～90cm是第五個循環，對角線上第73、75、79、81格（依舊是第一個循環的第1、3、7、9格）可不放置燈泡。

實驗討論：

1. 由實驗結果可知，正方形最少燈泡的數量規律性是邊長18cm之後為一個循環，對角線上第1、3、7、9格可不放置燈泡，所以第一個循環是邊長≦18cm的正方形，最少燈泡數量是邊長－4顆，若邊長＜9ｃｍ，則視尺寸對角線上是否有第1、3、7格可不放置燈泡，再決定邊長要減幾顆燈泡。
2. 第二個和第三個循環是18ｃｍ＜邊長≦54ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長－8顆；第四個循環是55ｃｍ＜邊長≦72ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長－12顆；第五個循環是73ｃｍ＜邊長≦90ｃｍ的正方形，最少燈泡數量是邊長－16顆。
3. 因此我們可以將假設１修正為：在正方形的邊長≦90ｃｍ的條件下，正方形邊長為n，$n\div18=k\cdots h$時，放置最少燈泡數量$s=n-k\times4-k_1$（因第三個循環無法減4顆，所以若$k\geq3$時，$s=n-(k-1)\times4-k_1$，$k_1=h$在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。例如：邊長76cm的正方形，$76\div18=4\cdots4$，所以最少燈泡數量$s=n-(k-1)\times4-k_1=76-(4-1)\times4-2=62$顆。

實驗(六)：寬為1cm～6cm時，不同尺寸的長方形方格與最少燈泡數量的關係

實驗步驟：

1. 找出寬1cm～6cm時，可以將不同尺寸的長方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。

實驗結果：

表六：寬為1cm～6cm時，不同尺寸的長方形可放置最少寶石的數量表

長方形尺寸（cm）		最少燈泡數量（顆）	
寬為1cm的長方形	1×2	1	
	1×3～1×n	1	
寬為2cm的長方形	2×3	1	
	2×4	2	
	2×5～2×n	2	
寬為3cm的長方形	3×4	2	
	3×5	2	
	3×6	2	
	3×7～3×n	3	
寬為4cm的長方形	4×5	2	
	4×6	3	
	4×7	3	
	4×8	3	
	4×9～4×n	4	
寬為5cm的長方形	5×6	3	
	5×7	3	
	5×8	4	
	5×9	4	
	5×10	4	
	5×11～5×n	5	
寬為6cm的長方形	6×7	4	
	6×8	4	
	6×9	4	
	6×10	5	
	6×11	5	
	6×12	5	
	6×13～6×n	6	

表七：寬為1cm～6cm時，長≦寬×2的長方形放置最少燈泡數量呈現斜線數列的關係表

長方形的寬n／長方形的尺寸	1	2	3	4	5	6
n×n	1	1	1	2	3	4
n×（n+1）	1	1	2	2	3	4
n×（n+2）	1	2	2	3	3	4
n×（n+3）	1	2	2	3	4	4
n×（n+4）	1	2	3	3	4	5
n×（n+5）	1	2	3	4	4	5
n×（n+6）	1	2	3	4	5	5

實驗討論：

1. 由表六的結果可知，寬為1cm的長方形是一個橫列，所以無論長是多少，只要用1顆燈泡就可以照射到長方形全部方格。
2. 長方形的寬固定，當長≧寬×2＋1時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量＝長方形的寬度，會是一個定值。
3. 那當長≦寬×2時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量又存著怎樣的規律性？如果用長方形「直線」對稱軸的放法，似乎可以找出最少燈泡數量，但當長＝寬×2時，用長方形「直線」對稱軸的放法，卻不是最少燈泡數量的放置方式。
4. 不過我們發現長方形的寬固定，長≦寬×2時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量似乎存在著一個「斜線」數列（名詞解釋3）的關係，如上面表七所示。
5. 因此我們依據這樣一個「斜線」數列，去推算寬為7cm和8cm的長≦寬×2的長方形尺寸的最少燈泡的數量，並實際操作驗證其最少燈泡數量是否符合。

實驗(七)：用寬為7cm～8cm時，長≦寬×2的長方形方格驗證「斜線」數列與最少燈泡數量的關係

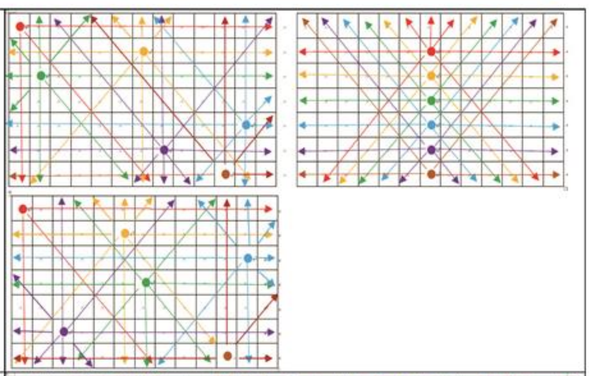
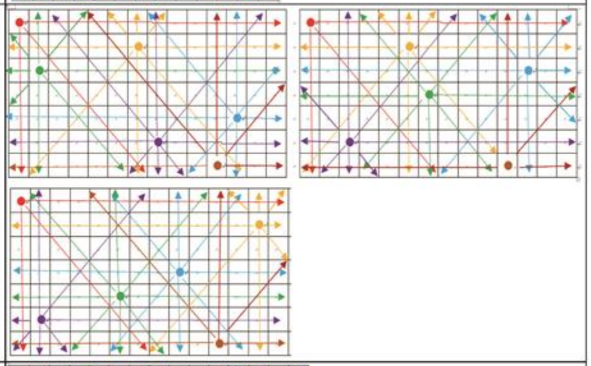
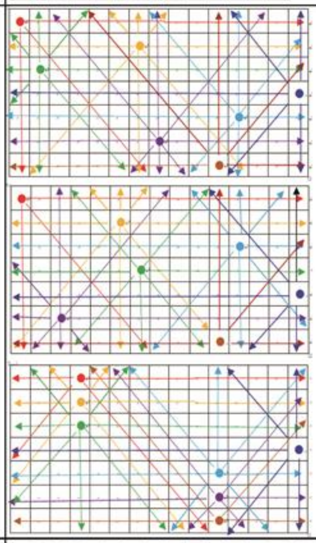
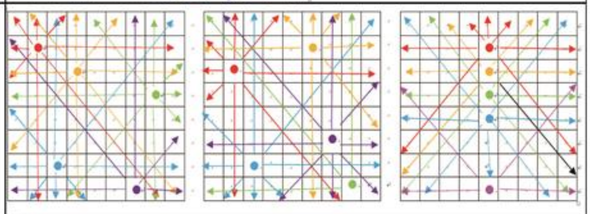
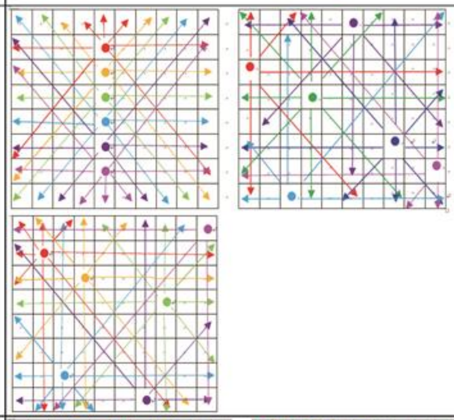
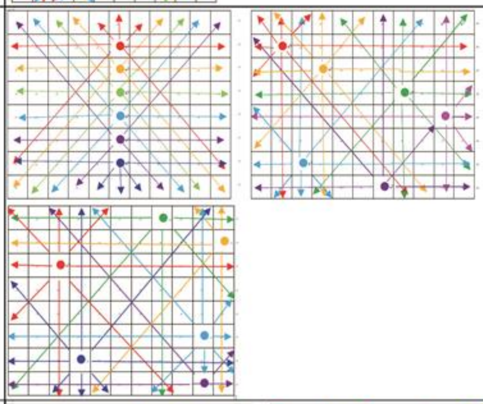
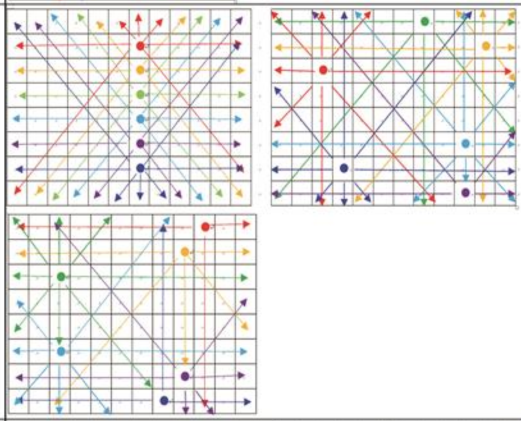
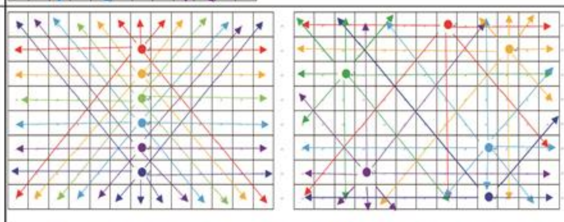
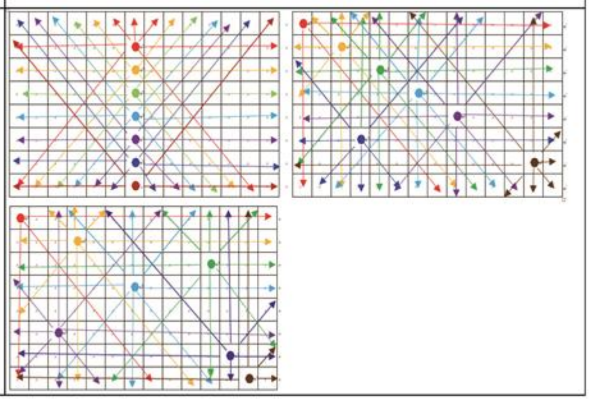
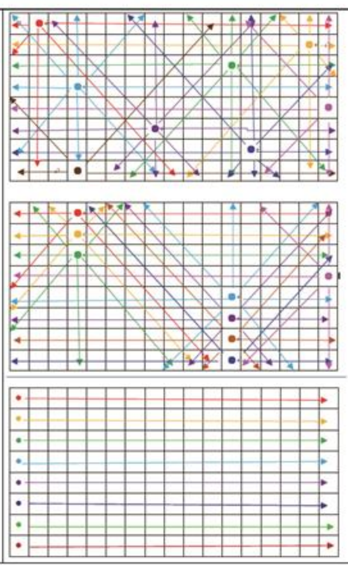
實驗步驟：

1. 找出寬7cm和8cm時，可以將不同尺寸的長方形全部方格都照射到的最少燈泡數量，並記錄下來。
2. 再與實驗（四）的結果作比較。

實驗結果：

表八：寬為7cm～8cm時，長≦寬×2的長方形可放置最少燈泡的數量表

長方形尺寸（cm）		最少燈泡數量（顆）	
寬為7cm的長方形	7×8	5	
	7×9	5	
	7×10	5	
	7×11	5	
	7×12	6	

	7x13	6	
	7x14	6	
	7x15～7xn	7	
寬為8cm的長方形	8x9	5	
	8x10	6	
	8x11	6	
	8x12	6	
	8x13	6	
	8x14	7	
	8x17～8xn	8	

表八：寬為1cm～8cm時，長≦寬×2的長方形放置最少燈泡數量呈現斜線數列的關係表

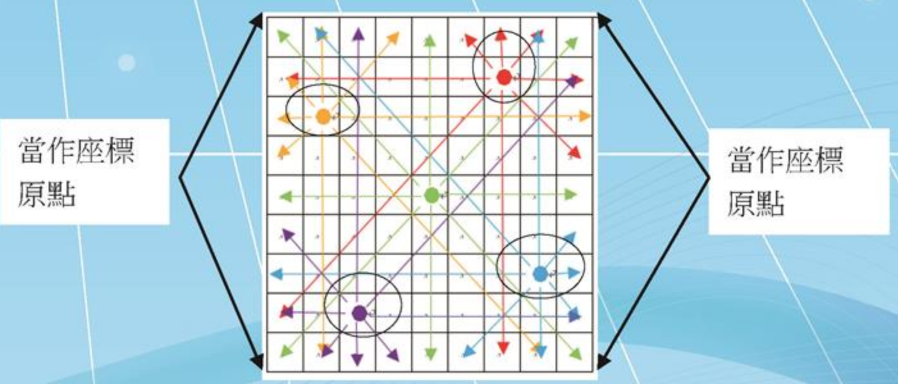
長方形的寬n / 長方形的尺寸	1	2	3	4	5	6	7	8
n×n	1	1	1	2	3	4	4	5
n×（n+1）	1	1	2	2	3	4	5	5
n×（n+2）	1	2	2	3	3	4	5	6
n×（n+3）	1	2	2	3	4	4	5	6
n×（n+4）	1	2	3	3	4	5	5	6
n×（n+5）	1	2	3	4	4	5	6	6
n×（n+6）	1	2	3	4	5	5	6	7
n×（n+7）	1	2	3	4	5	6	6	7
n×（n+8）	1	2	3	4	5	6	7	7

實驗討論：

1. 由表七的結果可知，長方形的長n≦n×2時，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量，與我們用斜線數列推算出的數量相符合。
2. 從n×n的尺寸開始，將長方形尺寸的全部方格都照射到的最少燈泡數量，會有「斜線」數列的關係，因此只要算出正方形n×n的最少燈泡數量，再用「斜線」數列，依序增加數量，就能找出長方形尺寸的最少燈泡數量了。

四、討論

1. 邊長1cm~5cm等尺寸小的正方形要找出最少燈泡的數量很快，可以將所有放置的方式都嘗試看看，比較能確保最少燈泡數量，但燈泡放置的方式比較少。
2. 但邊長超過6cm的正方形，如果要將所有放置的方式都嘗試看看，會有好多種可能性，因此用尺寸小的正方形去延伸，雖然也可以確認出最少燈泡數量，但可能會漏掉一些其他最少燈泡數量的放置方式，就會間接影響到後面尺寸尋找最少燈泡數量，因為不是每種放置方式都能順利以最少燈泡數量延伸到下一個尺寸，因此我們也嘗試用「隨機」放置的方式去找出其他最少燈泡數量的放置方式。
3. 正方形的尺寸除了「對角線對稱軸」的放置方式有明顯的規律性外，其他延伸或隨機放置的方式很難看出明確的規律性，但放置的方式大都是正方形四個角落相互對稱的位置，若將正方形的四個角都當成是座標的原點，我們會發現最少燈泡的位置，在四個角落會是一樣或相對應的座標，如下圖邊長9cm的正方形，在四個角的燈泡位置，如果以四個直角做為原點，這四顆圈起來的燈泡的位置都是座標（3，2）的位置。



4. 於長方形的放置方式，大都是用正方形尺寸去延伸，因此最少燈泡數量或是燈泡放置的位置，我們一直找不出數量或位置明確的規律性，後來想起有些數字的規律性不一定是數字上加減乘除的變化，也有可能是圖形上的數字變化，例如金字塔數列，於是我們也試著將所得到的最少燈泡數量以斜線的方式排列，結果數字竟然出現了完整的數列。
5. 本研究在生活上的貢獻，我們認為可以應用在平面的牆面設計或是商品的展示櫃，若要將一個平面的牆面照亮，就可以用最省電的方式放置最少的點光源來照亮整面牆面，或是商品的展示櫃，照射整個展示櫃的底面，將商品呈現。

五、結論

1. 邊長n的正方形，將燈泡放置在對角線對稱軸上，可以照射正方形全部方格的燈泡數量會是最少的。
2. 正方形邊長n＜18cm，第1、3、7、9格不放置燈泡的規律性，是邊長18cm之後就會再一次循環增加，因此在第一個循環裡，
   - 0cm＜n≦1 cm　　s=n－0顆（只有1格，一定要放置燈泡）
   - 1cm＜n＜3 cm　　s=n－1顆（只有第1格不放燈泡）
   - 3cm≦n＜7 cm　　s=n－2顆（只有第1、3格不放燈泡）
   - 7cm≦n＜9 cm　　s=n－3顆（只有第1、3、7格不放燈泡）
   - 9cm≦n＜19 cm　　s=n－4顆（第1、3、7、9格不放燈泡）
3. 正方形的邊長n＞18cm，n÷18=k…h時，放置最少燈泡數量s=n－k×4－k_1（若k ≧3時，s =n－（k－1）×4－k_1，k_1=h在第一個循環裡可以減少的燈泡數量）。
4. 寬為n的長方形，可以照射長方形全部方格的最少燈泡數量，從正方形n×n開始會以「斜線」數列依序增加，所以可以用「斜線」數列來推算長方形尺寸最少燈泡的數量。

六、參考資料及其他

1. 打擊數學怪獸27，作者：芳澤光雄，出版社：時報文化出版企業股份有限公司