中華民國第63屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

團隊合作獎

080408

蜂擁而至

學校名稱：新北市三峽區龍埔國民小學

作者：	指導老師：
小五 李晨均 小五 戴浚澔	龔凡凱

關鍵詞：速度、時刻

摘要

有 3 隻蜜蜂，同時從蜂巢出發，在一朵花與蜂巢間的連線上，來回等速直線飛行，牠們的飛行速度比為 1：2：4，問：在蜂巢與花之間，是否存在某個時刻，牠們飛到同一點？

上述問題取自《科學研習月刊》數學專欄，我們不但解決原題，還將原題推廣到任意隻數蜜蜂，給出求**滿足要求的時刻的方法**，獲得一般化的結果。

我們還能加以應用求**滿足要求的時刻的方法**，探討速度比滿足給定**一階線性遞迴數列**，得到若符合一些條件，就能同時飛到同一點。

壹、研究動機

我們平常對數學頗有興趣，常答對老師提出的數學小趣題，有次老師提出蜜蜂飛行的問題，我們思考良久，得到初步心得和結論，於是老師帶我們研究，參加科展。

貳、原始問題

本作品題目來自《科學研習月刊》61-01 期的森棚教官的數學專欄[1]，內容如下：

問題 1（本作品主要探討問題）**.** 三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為 1 單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要 1 分鐘。

Q1. 如果三隻蜜蜂的速度比是 1：2：4 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q2. 如果三隻蜜蜂的速度比是 1：3：9 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q3. 如果三隻蜜蜂的速度比是 1：$\frac{3}{2}$：$\frac{9}{4}$時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於花與蜂巢之間的同一點？

動動腦想想看吧～

參、研究目的

一、解決問題 1，研究是否存在蜜蜂經過同一點的時刻。

二、延伸問題 1，探討 k 隻蜜蜂，k 為任意正整數，在蜂巢與花之間，同一時刻經過同一地點的條件。

三、探討速度比滿足給定一階線性遞迴數列時，是否存在題目 1 要求的時刻。

肆、研究工具

一、計算紙、筆。

伍、研究過程與討論

一、名詞解釋

(一)本作品提到的 k 隻蜜蜂速度，配合問題 1 的設定——即最慢的蜜蜂速度為每分鐘 1 單位長，速度值依足碼由小到大排列：

$$V_1 = 1 < V_2 < V_3 < \cdots < V_k \text{。(1)}$$

(二)1 號蜜蜂指速度為 1 的蜜蜂，i號蜜蜂指速度為V_i的蜜蜂。

(三)如果存在題目 1 要求的時刻，稱為「有解」；如果不存在，則稱為「無解」。

二、解決問題 1

題目 1 問的是：「三隻蜜蜂能否在同一時刻，飛到介於蜂巢與花之間的同一點？」，其實蜜蜂們必能在同一時刻經過蜂巢。

(一) 必能同時經過蜂巢

1. 最小公倍數

如果 3 隻蜜蜂的速度比是 1：2：3，同樣在距離單位長的蜂巢與花之間來回飛行，則

一次來回飛回蜂巢的時間比為

$$2\times\frac{1}{1}：2\times\frac{1}{2}：2\times\frac{1}{3} = 2：1：\frac{2}{3}$$

每隻蜜蜂飛回蜂巢的時間分別累計如下：

2 的倍數有：2，4，6，8，……，

1 的倍數有：1，2，3，4，5，6，7，8，……，

$\frac{2}{3}$的倍數有：$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$，2，$\frac{8}{3}$，$\frac{10}{3}$，4，$\frac{14}{3}$，$\frac{16}{3}$，6，……，

命題 2.（必能同時回到蜂巢）.k 隻蜜蜂必能在同一時間回到蜂巢。

可知在第 2、4、6、……分鐘，三隻蜜蜂會同時經過蜂巢。

說明. k 隻蜜蜂的速度如（1），則從蜂巢出發，蜜蜂們第 1 次飛回蜂巢所花費的時間分別為：

$$\frac{2}{1}、\frac{2}{V_2}、\frac{2}{V_3}、\cdots、\frac{2}{V_k}，$$

經過上述每隻蜜蜂所需時間的最小公倍數時間後，k 隻蜜蜂就會在同一時間回到蜂巢，而且可知道同時回到蜂巢的最短時間為

$$2\left[\frac{1}{V_1},\frac{1}{V_2},\frac{1}{V_3},\cdots,\frac{1}{V_k}\right]。$$

（二）不一定能同時經過花朵

1. 不會同時經過花朵的情形.

考慮 2 隻速度分別為每分鐘 1 單位長和每分鐘 2 單位長的蜜蜂，速度為 2 的蜜蜂從蜂巢飛到花朵的累計時間為：

$$\frac{1}{2}，\frac{3}{2}，\frac{5}{2}，\frac{7}{2}，\ldots\ldots，$$

而速度為 1 的蜜蜂，飛到花朵的時間均是正整數，可知這 2 隻蜜蜂不會同一時間經過花朵。

2. 會同時經過花朵的情形.

如果三隻蜜蜂的速度比是 1：3：5，同樣在距離單位長的蜂巢與花之間來回飛行，則一次從蜂巢飛到花朵的時間比為

$$1:\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$$

3 隻蜜蜂飛到花朵累計的時間分別為：

1，3，5，7，9，……，

$\frac{1}{3}$，1，$1\frac{2}{3}$，$2\frac{1}{3}$，3，$3\frac{2}{3}$，$4\frac{1}{3}$，5，……，

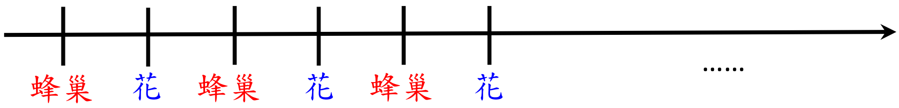
$\frac{1}{5}$，$\frac{3}{5}$，1，$1\frac{2}{5}$，$1\frac{4}{5}$，$2\frac{1}{5}$，$2\frac{3}{5}$，3，$3\frac{2}{5}$，$3\frac{4}{5}$，$4\frac{1}{5}$，$4\frac{3}{5}$，5，……，

可知在第 1、3、5、……分鐘，三隻蜜蜂會同時經過花朵。

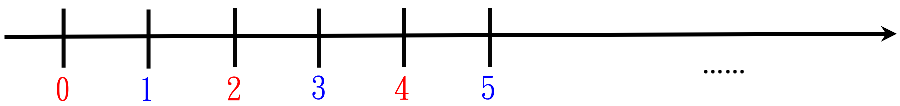
（三）分析

1. 採用數線觀點.

問題 1 的蜜蜂設定在蜂巢與花之間來回飛行，我們可以看成在如下的數線一直向飛行：



對照數線，則有：



蜂巢對應到數線的偶數，花對應到奇數，也就是

蜜蜂從蜂巢飛到花朵，在數線上就是從偶數飛到奇數；(2)

從花朵飛到蜂巢，在數線上就是從奇數飛到偶數。(3)

題目 1 要找的點在蜂巢與花之間，也就表示如果真的存在那一點，那麼蜜蜂們就是在**整數點之間的某點**相會，代表

> **命題 3**（題目 1 所求的點非整數點）. 如果 k 隻蜜蜂能達成題目 1 的要求，即在蜂巢與花之間同時經過同一點，則對應到數線，那一個點為**非整數點**。

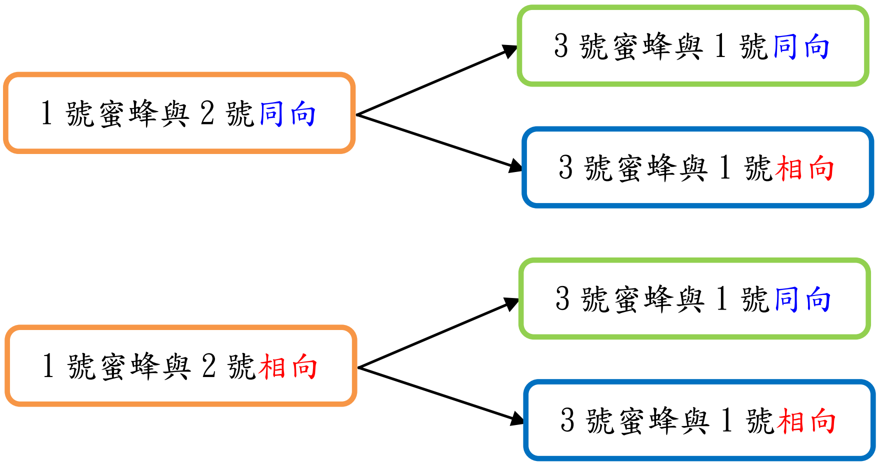
2.所求時刻值不是整數

已知蜂巢與花相距 1 個單位長，若要求在蜂巢與花之間碰面，由於飛行最慢的蜂設定速度為每分鐘 1 單位長，假設牠飛了 T 分鐘在蜂巢與花之間與其它蜂相遇，可知飛了 $1\times T = T$ 單位長，根據命題 3 推得問題 1 所求時間必不是整數。

> **命題 4**（問題 1 所求時間非整數）. 如果 k 隻蜜蜂能在某一時刻經過同一點，則該時刻不會是整數。

3. 飛行距離差/和

如果 3 隻蜜蜂自蜂巢出發後，在蜂巢與花之間同時經過同一點，則牠們三者相遇時的飛行方向共有以下四種關係：



接著分別來看 2 隻蜜蜂同向和相向時，距離的關係。

(1) 2 隻同向. 在蜂巢與花之間，如果 2 隻蜜蜂同時經過同一點，且方向為從蜂巢飛向花的情形如圖 1：

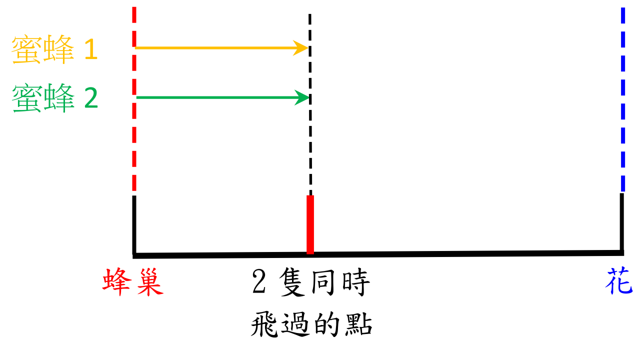


圖 1. 2 隻蜜蜂同向，同時飛經過一點，黃、綠 2 條射線分別表示 2 隻蜜蜂。

以數線的觀點，2 隻蜜蜂分別在數線上飛行的情形以圖 2-甲、乙呈現：

圖 2-甲. 黃色線代表的蜜蜂飛到 N_1 和 N_1+1 之間的某一點

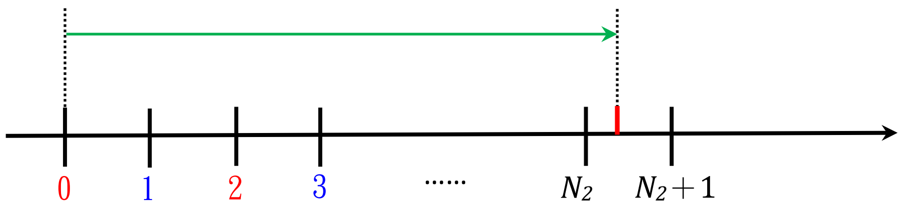


圖 2-乙. 綠色線代表的蜜蜂飛到 N_2 和 N_2+1 之間的某一點

圖 2. 在數線上，2 隻蜜蜂同向，同時飛經過同一點，這一點在兩整數之間。

由圖 1、2 可知，

這 2 隻蜜蜂飛的距離長度，**二者的非整數部份相等**。(4)

另外，注意到 2 隻蜜蜂同方向，表示 N_1、N_2 不是同為二奇(代表從花飛到蜂巢)，就是同為二偶(從蜂巢飛到花)，根據（4)，假設非整數部分為 b，$0 < b < 1$，則有

$$(N_2 + b) - (N_1 + b) = N_2 - N_1 \text{必為偶數} \quad (5)$$

因此我們得到

命題 5（若同向相遇，則距離差為偶數）. 如果 2 隻蜜蜂同向在某一時刻經過同一點，則這 2 隻蜜蜂飛行距離長度的**差必為偶數。**

其實若**差為偶數**，則也推得牠們同向相遇，當兩隻蜜蜂飛行距離差為偶數，表示

兩者飛行的長度**非整數部份相等**，(6)

因為如果非整數部份不相等，則差不會是整數。

由於差為偶數，表示

兩者的整數部份同為奇或同為偶。(7)

如果不是，一奇一偶的差只會是奇數，與條件不合，綜合(6)、(7)，便得到

命題 6（若距離差為偶數，則同向相遇）. 如果 2 隻蜜蜂飛行距離長度的**差為偶數**，則這 2 隻蜜蜂在某一時刻同向經過同一點。

補充說明 7. 命題 5 和命題 6 告訴我們一旦確認 2 隻蜜蜂同向經過同一點，則飛行距離差為偶數；反過來說也成立。

(2) 2 隻相向. 在蜂巢與花之間，如果 2 隻蜜蜂同時相向經過同一點，如圖 3：

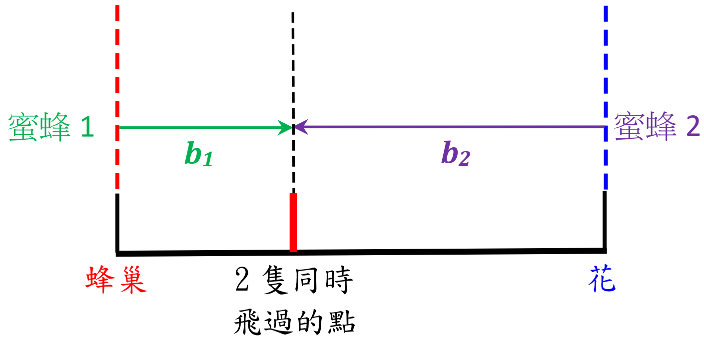


圖 3. 在數線上，2 隻蜜蜂相向如上圖，可知 $b_1+b_2=1$。

觀察圖 3 的蜜蜂 1 和蜜蜂 2，前者由蜂巢飛向花，在數線上是由偶數飛到奇數；後者由花飛向蜂巢，在數線上是由奇數飛到偶數。設蜜蜂 1 飛行距離的非整數部份為 b_1、蜜蜂 2 飛行距離的非整數部份為 b_2，$0<b_1$、$b_2<1$，容易看出

$$b_1+b_2=1，$$

則牠們的飛行距離分別表示成

$$蜜蜂\ 1\ 飛行的距離＝某偶數＋b_1 \quad (8)$$

$$蜜蜂\ 2\ 飛行的距離＝某奇數＋b_2 \quad (9)$$

（8）和（9）相加可得

$$蜜蜂\ 2\ 飛行的距離＋蜜蜂\ 3\ 飛行的距離＝(某偶數＋b_1)＋(某奇數＋b_2)＝$$

$$(某偶數＋某奇數)＋（b_1＋b_2）＝奇數＋1 \quad (10)$$

命題 8. 如果 2 隻蜜蜂相向在某一時間經過同一點，則牠們飛行距離長度和為偶數。

（10）的計算結果必為一偶數，所以我們有

類似命題 6，如果有兩隻蜜蜂飛行距離和為偶數，也能推得牠們相向相遇。當兩隻蜜蜂飛行距離和為偶數，表示

兩者飛行的長度**非整數部份和＝1**，(11)

因為如果非整數部份和不是 1，則兩飛行距離相加後不會是整數。

由於和為偶數，表示

兩者的整數部份分別為一奇一偶。(12)

如果不是，「兩奇數的和」以及「兩偶數的和」只會是偶數，再加 1 只會得到奇數，與距離和為偶數的條件不合，綜合(11)、(12)，便得到

命題 9.（若距離和為偶數，則相向相遇）如果 2 隻蜜蜂的飛行距離長度和為偶數，則牠們必相向，某時刻經過同一點。

補充說明 10. 命題 5、6、8、9 告訴我們，一旦兩隻蜜蜂飛行距離差/和為偶數，就能確定牠們同時經過同一點，且知道牠們相遇時的飛行方向模式。

（四）解問題 1 的計算過程

1.Q1.$V_1 = 1$，$V_2 = 2$，$V_3 = 4$.

以下分別計算 1 號蜜蜂和 2 號蜜蜂飛行的距離「差」和「和」，設飛了 T 分鐘，我們要利用命題 4—6，命題 8—9，檢驗牠們經過同一點的時刻是否存在。

（1）1 號和 2 號的飛行距離差（同向）

$$2\times T - 1\times T = T \tag{13}$$

看(13)，根據命題 5，如果 T 是牠們經過同一點的時刻，得知 T 需為整數，根據命題 4，T 必不是整數，矛盾！所以所求時刻不存在。

（2）1 號和 2 號的飛行距離和（相向）

$$2\times T + 1\times T = 3T \tag{14}$$

根據命題 8、9，$3T$ 是偶數，另外 T 不是整數，所以 $T=$

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, \ldots \tag{15}$$

用數學一般式表示如下

$$T=\frac{2m}{3}\text{，}m\text{是非 3 倍數的正整數。}\quad(16)$$

接著分別探討 3 號和1 號同向或相向時，經過同一點是否有解。

①如果 3 號和1 號同向（看距離差）

$$4\times T-1\times T=3T \quad (17)$$

由(14)的討論可知，(16)為(17)的解。

②如果 3 號和1 號相向（看距離和）

$$4\times T+1\times T=5T \quad (18)$$

由於將(16)代入 $5T$，所得不會是整數，所以此情況無解。

綜合前面的討論，Q1 所求的時刻為（16）。

2.Q2.$V_1=1$，$V_2=3$，$V_3=9$.

同樣先看 1 號和 2 號蜜蜂飛行的距離差/和。

（1）1 號和 2 號的飛行距離差（同向）

$$3\times T-1\times T=2T \quad (19)$$

如果 $2T$ 為偶數，表示 T 為整數，不符合 T 為非整數的條件，可知所求時刻不存在。

（2）1 號和 2 號的飛行距離和（相向）

$$3\times T+1\times T=4T \quad (20)$$

因為 $4T$ 需為偶數，T 為非整數，所以 T＝

$$\frac{2}{4}\text{，}\frac{6}{4}\text{，}\frac{10}{4}\text{，}\frac{14}{4}\text{，}\frac{18}{4}\text{，}\frac{22}{4}\text{，}\ldots \quad (21)$$

將(21)每一項約成最簡，用一般式表示：

$$T=\frac{m}{2}\text{，}m\text{是奇數。}\quad(22)$$

接著分別探討 3 號和1 號同向或相向時，經過同一點是否有解。

①如果 3 號和1 號同向（看距離差）

$$9\times T-1\times T=8T=2\times 4T \quad (23)$$

可知(22)是(23)的解。

②如果 3 號和1 號相向（看距離和）

$$9\times T+1\times T=10T$$

由於 10 乘以(22)的每一項，所得不會是偶數，所以此情況無解。

綜合前面的討論，Q2 所求的時刻為(22)。

3.Q3. $V_1=1$，$V_2=\frac{3}{2}$，$V_3=\frac{9}{4}$.

先看 1 號和 2 號蜜蜂飛行的距離差/和。

（1）1 號和 2 號的飛行距離差（同向）

$$\frac{3}{2}\times T-1\times T=\frac{1}{2}T \quad (24)$$

$\frac{1}{2}T$為整數，所以T為 2 的倍數，與命題 4 矛盾！所以此情形無解。

（2）1 號和 2 號的飛行距離和（同向）

$$\frac{3}{2}\times T+1\times T=\frac{5}{2}T=2\times\frac{5}{4}T \quad (25)$$

$\frac{5}{4}T$為整數，加上T為非整數，T為

$$\frac{4}{5}，\frac{8}{5}，\frac{12}{5}，\frac{16}{5}，\frac{24}{5}，\frac{28}{5}\cdots，(26)$$

用一般式表示：

$$T=\frac{4m}{5}，m\text{為非 5 的倍數之正整數。}(27)$$

接著分別探討 3 號和1 號同向或相向時，經過同一點是否有解。

①如果 3 號和1 號同向（看距離差）

$$\frac{9}{4} \times T - 1 \times T = \frac{5}{4}T \tag{28}$$

$\frac{5}{4}T$需為偶數，依(27)可知，當m是偶數時會是(28)要求的解，如下：

$$T = \frac{8m}{5}\text{，}m\text{為非 5 的倍數的正整數。}(29)$$

②如果 3 號和1 號相向（看距離和）

$$\frac{9}{4} \times T + 1 \times T = \frac{13}{4}T = 13 \times \frac{1}{4}T \tag{30}$$

由於$\frac{13}{4}$乘以(29)的每一項所得不會是整數，所以這情況無解。

綜合前述討論，Q3 所求的時刻為（29）

統整 Q1—Q3 的解答如表 1。

表 1. 問題 1 的 3 道子題的解答

問題 1 的三道子題	所求的時刻	經過同一點的飛行模式
Q1. $V_1 = 1$，$V_2 = 2$，$V_3 = 4$.	$T = \frac{2m}{3}$，其中m不是 3 的倍數	V_1和V_3同向， V_2和V_1、V_3相向。
Q2.$V_1 = 1$，$V_2 = 3$，$V_3 = 9$.	$T = \frac{m}{2}$，m為奇數	
Q3.$V_1 = 1$，$V_2 = \frac{3}{2}$，$V_3 = \frac{9}{4}$	$T = \frac{8m}{5}$，m不是 5 的倍數	

接著將前面計算過程，統整如下：

演算法 11（3 隻蜜蜂的計算過程）.

1. 先求 1 號和 2 號蜜蜂是否有解。
2. 承 1，如果有解，則再分 3 號蜜蜂與 1 號蜜蜂同向和相向兩種情形討論，以上述的解檢驗是否符合；如果都能符合，就是題目 1 要求的時刻。

三、一般化

（一）一般化問題

問題 12（問題 1 的一般化）**.** k 隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為 1 單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要 1 分鐘。

有沒有可能在某個時刻，k 隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

以下說明，依問題 1 的條件設定(最慢速度＝1、蜂巢與花距離 1 個單位長)，不影響所求時刻存不存在。

1. 將速度比換成相等的比。

例 13. 給定速度比為

$$2:6:10:14$$

我們可以將比的每一項÷2，使得最小項＝1：

$$1:3:5:7$$

如果「1：3：5：7」可以找到時刻滿足問題 12 的要求，則原來的比也可以。就兩個速度比來說，原來的速度是變換後速度的 2 倍，當後者可以在某一時刻相遇——就稱為 T，將牠們相遇的過程「變快」2 倍，就代表速度比「2：6：10：14」的四隻蜜蜂也必在某一時刻相遇，而且時間是 T 的一半；這裡我們有一個命題：

命題 14（相等的速度比與解存在的關係）. 兩個相等的速度比如下：

$$V_1 : V_2 : V_3 : \cdots : V_k \tag{31}$$

$$U_1 : U_2 : U_3 : \cdots : U_k \tag{32}$$

$U_i = MV_i$，$1 \leq i \leq k$，$M > 0$，若存在時刻T使速度比為（32）的k隻蜜蜂同時相遇，則存在時刻S使速度比為（31）的k隻蜜蜂同時相遇，反過來說也對；而且

$$S = MT$$

命題 14 的簡略說明. 用日常生活的說法，就好像看影片一樣，如果我看到速度比為（32）的k隻蜜蜂，從蜂巢出發飛行到相遇之間過程的影片，把影片播映速度調M倍，就等於看到速度比為（31）的k隻蜜蜂相遇的過程。□

2. 巢與花的距離固定為 1 個單位長.

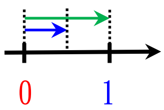


圖 4. 單位距離，速度比 1：2。

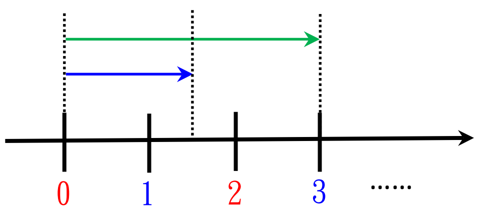


圖 5. 3 個單位長，速度比 1：2。

由圖 4 和圖 5 來看，蜂巢與花的距離變成 3 倍長，蜜蜂飛行的時間變成 3 倍長，但是就

比例圖的觀點來看，得知如果牠們在圖 4 中能在巢與花間同時經過同一點，在圖 5 也可以，反過來也是。

同樣用日常生活的說法，當我看到圖 4 蜜蜂們飛行相遇的「影片」，把播放影片的電視螢幕改為 3 倍放大的螢幕、播放速度調慢為 3 倍，就等同於看到圖 5 蜜蜂們飛行相遇的過程。

因此無論蜂巢與花的距離設定在 1 個單位長或其它長度，不影響所求時刻存在或不存在。

命題 15(可依問題 1 的設定研究一般化的情形). 設定速度比最慢為 1、蜂巢與花距離為單位長，不影響所求時刻存不存在。

（二）觀察. 以下分別就 1 隻、2 隻、4 隻蜜蜂進行數據觀察及討論。

1. 1 隻蜜蜂

（1）由於題目問的是：「是否有時刻使得蜜蜂飛到介於蜂巢與花之間的同一點？」，1 隻蜜蜂可看作自己和自己同時經過同一點，由原題的條件看來，除了經過蜂巢與花的當下之外，其它時刻都符合「經過同一點」。

（2）如果設定 1 隻蜜蜂為最慢的那一隻，即速度＝1，則**非整數的時刻**即為所求。

2. 2 隻蜜蜂

設給定速度比為

$$1：V_2$$

觀察此 2 隻蜜蜂飛行的距離和：

$$1 \times T + V_2 T = (1 + V_2)T \quad (33)$$

已知$V_2 > 1$，則

$$T = \frac{2}{1 + V_2}，(34)$$

代入(33)，等號右邊必為偶數。

又$V_2 > 1$，可知T的分母＞2，為真分數，符合命題 4，因此有

命題 16（2 隻蜜蜂必有解）. 2 隻蜜蜂必能在某一時刻，在蜂巢與花之間**相向**通過同一點。

補充說明 17. 2 隻蜜蜂同向飛行不一定能在蜂巢與花間相遇，例如速度比為 1：2，牠們相遇時不是相向就是在蜂巢相遇。

3. 4 隻蜜蜂. 試算 Q18 和 Q19。

(1)Q18.設給定 4 隻蜜蜂的速度比為

$$1：2：4：10$$

因為前 3 隻蜜蜂的速度就是問題 1 的 Q1 給的數據，現在依第 4 隻蜜蜂和 1 號蜜蜂飛行方向的關係，分成 2 類情形討論：

①如果4 號和 1 號同向.

$$V_4T - V_1T = (10-1)\times T = 9T = 3\times 3T，$$

所求時刻為$\dfrac{2}{9}m$，m為非 9 倍數的正整數，這包含在(16)的答案中。

②如果4 號和 1 號相向.

$$V_4T + V_1T = (10+1)\times T = 11T$$

然而 11 乘以（16）的每一項時刻，積不會是整數，根據命題 8，此情況無解。

(2)Q19.設給定 4 隻蜜蜂的速度比為

$$1：\frac{7}{3}：5：\frac{25}{3}$$

為了簡省篇幅，先求出前 3 隻蜜蜂同時相遇的時刻為

$$\frac{3}{2}\times(2m-1)，m\text{為正整數。}\quad(35)$$

相遇模式為 3 隻同向。

①如果4 號和 1 號同向

$$V_4T - V_1T = \left(\frac{25}{3}-1\right)\times T = \frac{22}{3}T = 11\times\frac{2}{3}T \quad (36)$$

看（29），將（28）的時刻代入$11\times\frac{2}{3}T$，積不會是偶數，根據命題 5，此情況無

解。

②如果4號和1號相向

$$V_4T+V_1T=\left(\frac{25}{3}+1\right)\times T=\frac{28}{3}T=7\times\frac{4}{3}T$$

所求時刻為(35)，相遇模式為1號至3號蜜蜂同向；4號和1號相向。

4. 一般化的演算法

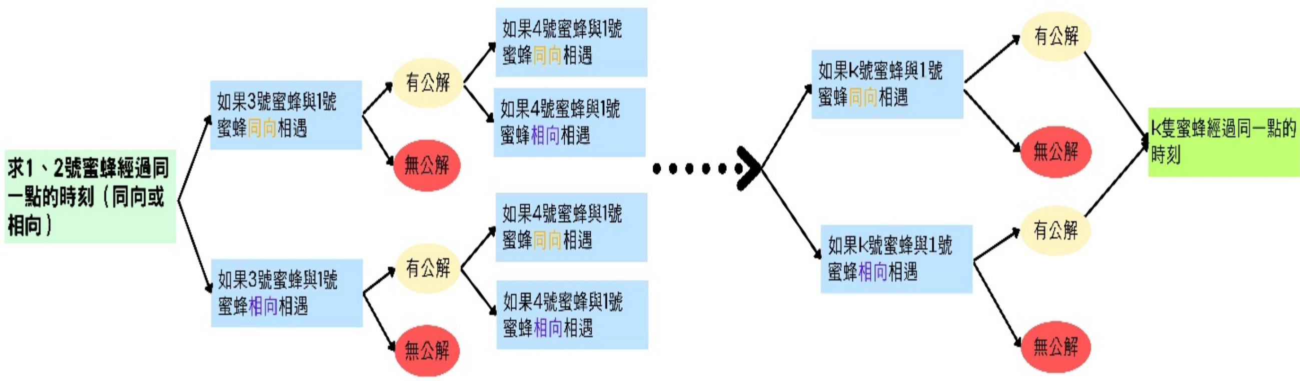
算法 20(求 k 隻蜜蜂經過同一點的時刻之計算過程)

Ⅰ. 先求1號和2號蜜蜂能通過同一點的時刻。

Ⅱ. 接著分「3號與1號同向相遇」和「3號與1號相向相遇」兩類求解，將求到的解與Ⅰ得出的時刻對比，是否有一致的部份。

Ⅲ. 承Ⅱ，如果有，接著分「4號與1號同向相遇」和「4號與1號相向相遇」兩類求解，與Ⅰ、Ⅱ的公解對比是否有一致的部份。

Ⅳ. 持續依序分成「「V_i與V_1同向相遇」和「V_i與V_1相向相遇」兩類求解，$5\le i\le k$，與前面的公解對比是否有一致的部份。



補充說明 21(問題12可能無解). 在本小組計算各種數據時，發現並非所有給定速度比都會有解，例如「1：2：3」就無解。

三、速度比為一階線性遞迴數列

(一)研究一階線性遞迴數列的理由.

在市展時，我們原本探討給定速度比為「等差」和「等比」數列，得到如下的結果，等差數列設定首項＝1、數列為正整數數列；等比數列設定首項＝1，公比為有理數。

命題 22（速度比為公差≠1、2 的等差數列）. 若給定速度比為公差≠1、2 的等差數列，則存在時刻使 k 隻蜜蜂在巢與花之間經過同一點，方向為全部同向。

命題 23（速度比為公差＝2 的等差數列）. 若給定速度比為公差＝2 的等差數列，則存在時刻使 k 隻蜜蜂在巢與花之間經過同一點，飛行方向為：奇數號蜜蜂同向、偶數號蜜蜂同向，奇數號和偶數號相向。

命題24(速度比為等比數列). 給定首項＝1，公比為 $\frac{q}{p} > 1$ 的等比數列，

（i）如果

$$T = \frac{2p^{k-1}m}{q-p} \tag{37.1}$$

不是整數，且m為正整數，則在(37.1)的時刻，k 隻蜜蜂在蜂巢與花之間同向飛行經過同一點。

（ii）給定

$$T = \frac{2p^{k-1}m}{q+p} \tag{37.2}$$

m為正整數，則在(37.2)的時刻，k 隻蜜蜂在蜂巢與花之間，編號同奇偶同向、不同奇偶相向，飛行經過同一點。

獲選進入全國展後，我們再求進步，探討速度比為包含等差和等比數列的「一階線性遞迴數列」，探討更一般化的結果。

（二）一階線性遞迴數列

定義 25(本作品探討的一階線性遞迴數列).

$$\begin{cases} a_{n+1} = c \times a_n + d \\ a_1 = b \end{cases} \tag{38}$$

根據命題 14，就算題目給定的速度比裡有分數，我們可以把比轉換成最簡整數比去求解，因此我們接下來要探討的一階線性遞迴數列，可以設定c、d、b都是正整數，不影響要求的時刻是否存在。

補充說明 26(等差數列和等比數列屬於一階線性遞迴數列). 看(38)，當$c = 1$，$d =$ 0 或是正整數，那麼就是等差數列的形式，而且d是公差；當$c > 0$，$d = 0$，那麼就是等比數列的形式，而且c是公比。

（三）觀察. 試算 6 隻蜜蜂的情形，來看 Q27。

Q27. 設給定 6 隻蜜蜂的速度比為

$$1：8：43：218：1093：5468$$

為下列數列的前 6 項

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5 \times a_n + 3 \\ a_1 = 1 \end{cases} \tag{39}$$

1. 分別計算相鄰編號兩隻蜜蜂的飛行距離差

$$V_2T - V_1T = (8-1) \times T = 7T \tag{40.1}$$

$$V_3T - V_2T = (43-8) \times T = 35T = 5 \times 7T \tag{40.2}$$

$$V_4T - V_3T = (218-43) \times T = 175T = 25 \times 7T \tag{40.3}$$

$$V_5T - V_4T = (1093-218) \times T = 875T = 125 \times 7T \tag{40.4}$$

$$V_6T - V_5T = (5468-1093) \times T = 4375T = 625 \times 7T \tag{40.5}$$

可知當

$$T=\frac{2m}{7}\text{，}m\text{為非 7 倍數的正整數。}\quad(41)$$

這 6 隻蜜蜂會同向飛經過同一點

2. 分別計算相鄰編號的飛行距離和

$$V_2T+V_1T=(8+1)\times T=9T=3\times 3T \quad (42.1)$$

$$V_3T+V_2T=(43+8)\times T=51T=17\times 3T \quad (42.2)$$

$$V_4T+V_3T=(218+43)\times T=261T=87\times 3T \quad (42.3)$$

$$V_5T+V_4T=(1093+218)\times T=1311T=437\times 3T \quad (42.4)$$

$$V_6T+V_5T=(5468+1093)\times T=6561T=2187\times 3T \quad (42.5)$$

可知當

$$T=\frac{2m}{3}\text{，}m\text{為非 3 倍數的正整數。}\quad(43)$$

這 6 隻蜜蜂編號同奇偶同向、不同奇偶相向同時飛到同一點。

（二）分析

1. 相鄰編號蜜蜂的速度差

$$V_6-V_5=5\times V_5+3-(5\times V_4+3)=5\times(V_5-V_4)$$

以此類推

$$V_5-V_4=5\times(V_4-V_3)$$

$$V_4-V_3=5\times(V_3-V_2)$$

$$V_3-V_2=5\times(V_2-V_1)$$

利用上面的關係，計算V_6-V_5

$$V_6-V_5=5\times[5\times(V_4-V_3)]=5^2\times(V_4-V_3)$$

$$=5^2\times[5\times(V_3-V_2)]=5^3\times(V_3-V_2)$$

$$=5^3\times[5\times(V_2-V_1)]=5^4\times(V_2-V_1)$$

同理上面的計算過程，可以得到

$$V_6 - V_5 = 5^4 \times (V_2 - V_1)(44.1)$$

$$V_5 - V_4 = 5^3 \times (V_2 - V_1)(44.2)$$

$$V_4 - V_3 = 5^2 \times (V_2 - V_1)(44.3)$$

$$V_3 - V_2 = 5^1 \times (V_2 - V_1)(44.4)$$

$$V_2 - V_1 \quad = \quad (V_2 - V_1)(44.5)$$

(44.1)—(44.5)告訴我們，相鄰速度差都是$V_2 - V_1 = 7$的倍數。

2. 相鄰編號蜜蜂的速度和

$$V_6 + V_5 = 5 \times V_5 + 3 + V_5 = (5+1)V_5 + 3 \qquad (45.1)$$

$$V_5 + V_4 = 5 \times V_4 + 3 + V_4 = (5+1)V_4 + 3 \qquad (45.2)$$

$$V_4 + V_3 = 5 \times V_3 + 3 + V_3 = (5+1)V_3 + 3 \qquad (45.3)$$

$$V_3 + V_2 = 5 \times V_2 + 3 + V_2 = (5+1)V_2 + 3 \qquad (45.4)$$

$$V_2 + V_1 = 5 \times V_1 + 3 + V_1 = (5+1)V_1 + 3 \qquad (45.5)$$

(45.1)—(45.5)告訴我們，相鄰速度和必是（5+1，3）＝3 的倍數，

（三）能同時相遇的條件

1. 全部同向

從(44.1)—(44.5)的計算可以得知：

$$V_{i+1} - V_i = c^{i-1} \times (V_2 - V_1) = c^{i-1} \times (cb + d - b)\text{，}1 \le i \le k-1 \qquad (46)$$

來看下列的T，當$cb + d - b \ge 3$，

$$T = \frac{2m}{cb + d - b}\text{，}m\text{為非}cb + d - b\text{倍數的正整數。}(47)$$

將(47)的T乘以(46)的速度差，便可得下列距離差

$$c^{i-1} \times (cb + d - b) \times \left(\frac{2m}{cb + d - b}\right) = 2c^{i-1} \times m(48)$$

(48)的值為偶數，因此得到

命題 28. 給定 k 隻蜜蜂的飛行速度比，為一階線性數列如(38)的前 k 項，如果 $cb+d-b\geq 3$，則 k 隻蜜蜂能在蜂巢與花之間，全部同向同時飛行經過同一點，所求時刻為(47)。

2. 同奇偶編號同向，奇偶編號相向

從(45.1)—(45.5)的計算得知：

$$V_{i+1}+V_i=(c\times V_i+d)+V_i=(c+1)V_i+d\text{，}1\leq i\leq k-1 \tag{49}$$

如果$(c+1)$和d的最大公因數$\left(c+1\text{，}d\right)\geq 3$，則下列時刻為所求的解：

$$T=\frac{2m}{\left(c+1\text{，}d\right)}\text{，}m\text{為非（}c+1\text{，}d\text{）倍數的正整數。} \tag{50}$$

設

$$c+1=e\times\left(c+1\text{，}d\right)\text{、}d=f\times\left(c+1\text{，}d\right)$$

將(49)的速度和乘以(50)的時間，便得到距離和：

$$[(c+1)V_i+d]\times\frac{2m}{\left(c+1\text{，}d\right)}=2m\times(eV_i+f) \tag{51}$$

(51)的計算結果為偶數，因此得到

命題 29. 給定 k 隻蜜蜂的飛行速度比，為一階線性數列如(38)的前 k 項，並且 $(c+1)$和d的最大公因數≥ 3，則 k 隻蜜蜂能在蜂巢與花之間，同奇偶編號同向，奇偶編號相向，同時飛行經過同一點，解為(50)

（四）包含等差數列及等比數列的結論

本節主要說明速度比滿足給定一階線性遞迴數列的研究結果，能包含速度比為等差數列和等比數列的研究結論。

1. 等差數列

我們在市展研究的等差數列就是當

$$b = c = 1，d = 0 \text{ 或是正整數}$$

的一階線性遞迴數列，於是有

$$cb + d - b = 1 + d - 1 = d，$$

d恰是等差數列的公差。

（1）公差≥ 3

根據命題 28，若$d \geq 3$，則蜜蜂們能在蜂巢與花之間，同向飛行經過同一點，對比命題 22 和命題 28，得到命題 22 是命題 28 的特例。

（2）公差＝2

當$d = 2$，也就是奇數數列，**每個V_i都是奇數**，由於

$$1 + 1 = 1 \times (1 + 1，2)、2 = 1 \times (1 + 1，2)$$

令 T 為（22），類似（51）求相鄰編號蜜蜂飛行距離和，便有

$$[(1 + 1)V_i + 2] \times \frac{m}{2} = m \times (V_i + 1)(52)$$

$V_i + 1$必為偶數，因而得到編號同奇同偶的蜜蜂同向相遇；編號不同奇偶的相向相遇。對比命題 23 和命題 29，如果在命題 29 再加上一個條件——每一個速度都是奇數，則當$(c + 1)$和d的最大公因數$= 2$，仍存在所求時刻為（22），此時命題 23 也屬於命題 29 的一種特例。

2. 等比數列

我們在市展研究的等比數列就是當

$$b = 1，c\text{為最簡分數} = \frac{q}{p} > 1，d = 0$$

的一階線性遞迴數列，c恰是等比數列的公比。

（1）同向相遇. 看下列式子：

$$cb+d-b=\frac{q}{p}\times 1+0-1=\frac{q}{p}-1。$$

如果$\frac{q}{p}-1\geq 3$，推得$q-p\geq 3p>3$，此時的(37.1)不是整數，因為$\frac{q}{p}$是最簡分數，

p 和 q 互質，p 也和$q-p$互質，可知(37.1)不會是整數，符合所求時刻，表示命題 24-（i）是命題 28 的特例。

（2）同奇偶同向、異奇偶相向相遇. 根據命題 14，我們可以探討速度比為首項＝1，公比 r 為正整數的等比數列，首先有

$$(c+1，d)=(r+1，0)=r+1，$$

如果$r+1\geq 3$，注意到可以把r看作 q＝r，p＝1 的分數，同時有 $q+p=r+1\geq 3$，代入(37.2)，可知它不是整數，符合所求時刻，表示命題 24-（ii）是命題 29 的特例。

陸、結論

一、我們給出原始問題要求的解答。

二、將原問題一般化，如果所求時刻存在，得出求蜜蜂們經過同一點的時刻之計算方法。

三、速度比滿足給定一階線性遞迴數列，當滿足某些條件，必有時刻使得 k 隻蜜蜂經過同一點。

柒、討論

一、一般化的作法

本作品給出算法去解決原題的一般化問題，主要利用「逐步檢驗」的方式，若存在某時刻使得前 i 隻蜜蜂經過同一點，由於前 i 隻蜜蜂相遇的飛行方向分別已定，接下來分種兩種情形討論：第 i＋1 隻蜜蜂與第 1 隻蜜蜂同向，或相向，繼續確認前 i＋1 隻蜜蜂是否有解。

二、所求時刻的存在性

根據我們的研究，速度比滿足給定一階線性遞迴數列，在某些條件下，存在所求的時刻；不過對於**任意給定的速度比**，還可以有更多探討的空間，例如：如何判斷所求時

刻的存在性？如果能先確定解存在，再使用算法 20 就能更有效率的計算此題。

捌、引用文獻

[1]游森棚(2022)。飛到西飛到東。**科學研習月刊，第61卷第1期**。2022/11/01。取自：
https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?a=6829&cat=0&lsid=19206&preview=Y

[2]翰林文教事業教科書編輯委員會(民 111)最大公因數與最小公倍數。國民小學數學課本第十一冊。臺南市。國家教育研究院。

[3]翰林文教事業教科書編輯委員會(民 112)速率。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。國家教育研究院。

【評語】080408

作品取材自科學月刊，除了解答原始問題外並加以推廣，包括蜜蜂數量的一般化與探討特殊蜜蜂速度比，解的存在性。研究過程將蜜蜂來回路徑展開成數線來刻畫蜜蜂們同時通過某一點的可能性，其中包括探討存在性的條件與性質來加深研究的內容，若能先探索該問題初步的型態再發展到月刊的題目可提高對研究問題掌握的程度且 K 隻蜜蜂的論述略有不足，除了數學性的延伸，亦可再加思考研究結果的可應用性。

作品海報

蜂擁而至

摘要

我們研究k隻蜜蜂在蜂巢與花之間等速來回飛行，在給定條件下，求是否存在時刻使得這k隻在蜂巢與花之間經過同一點。本作品給出求解的演算法，並探討速度比滿足給定一階線性遞迴數列的情形。

壹、研究問題

三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為1單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要1分鐘。

Q1. 如果三隻蜜蜂速度比是1：2：4 ，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q2. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：3：9 ，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

Q3. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：$\frac{3}{2}$：$\frac{9}{4}$ ，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

貳、研究目的與名詞解釋

一、目的

（一）解決原題，研究是否存在蜜蜂經過同一點的時刻。
（二）延伸原題，探討k隻蜜蜂，k為任意正整數，在蜂巢與花之間，同一時刻經過同一地點的條件。
（三）探討給定速度比滿足給定一階線性遞迴數列時，是否存在原題要求的時刻。

二、名詞解釋

（一）本作品提到的k隻蜜蜂速度，配合原題的設定—即最慢的蜜蜂速度為每分鐘1單位長，速度值依足碼由小到大排列：

$$V_1 = 1 < V_2 < V_3 < \cdots < V_k。 \tag{1}$$

（二）1號蜜蜂指速度為1的蜜蜂，i號蜜蜂指速度為V_i的蜜蜂。
（三）如果存在原題要求的時刻，稱為「有解」；如果不存在，則稱為「無解」。

參、研究結果

一、原題的求解過程

（一）分析

命題2（必能同時回到蜂巢）. k隻蜜蜂必能在同一時間回到蜂巢。

➢不一定能同時經過花朵

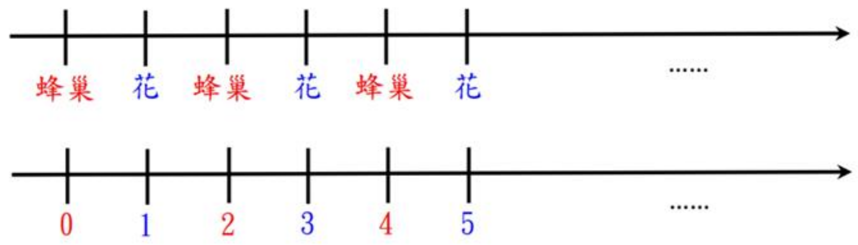


圖2-甲. 黃色線代表的蜜蜂飛到N_1和N_1+1之間的某一點

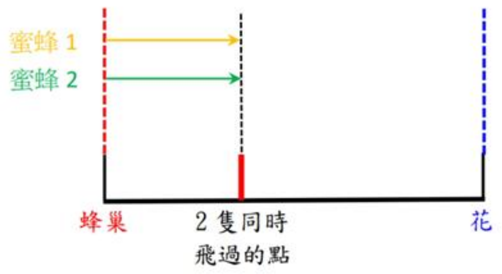


圖1. 2隻蜜蜂同向，同時飛經過一點，黃、綠2條射線分別表示2隻蜜蜂。

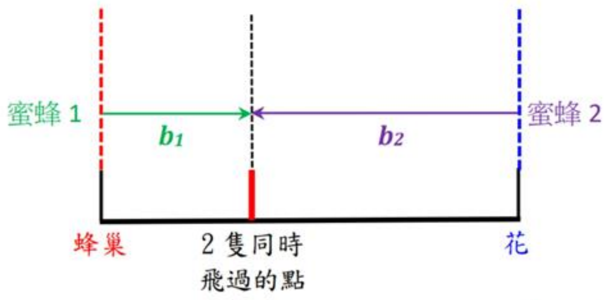


圖3. 在數線上，2隻蜜蜂相向如上圖，可知$b_1+b_2=1$。

命題5、6：兩隻蜜蜂飛行距離差為偶數⇔同向經過同一點

命題8、9：兩隻蜜蜂飛行距離和為偶數⇔相向經過同一點

（二）解決原題的Q1—Q3

1. Q1. $V_1 = 1$，$V_2 = 2$，$V_3 = 4$.

（1）1號和2號的飛行距離差（同向）

$$2T-T=T \tag{13}$$

所求時刻不存在。

（2）1號和2號的飛行距離和（相向）

$$2T+T=3T \tag{14}$$

$$T=\frac{2m}{3}，其中m不是3的倍數 \tag{16}$$

①如果3號和1號同向（看距離差）

$$4T-T=3T \tag{17}$$

(16)為(17)的解。

②如果3號和1號相向（看距離和）

$$4T+T=5T \tag{18}$$

將(16)代入$5T$，所得非整數，無解。

綜合前面的討論，Q1所求的時刻為（16）。

2. Q2. $V_1 = 1$，$V_2 = 3$，$V_3 = 9$.

（1）1號和2號的飛行距離差（同向）

$$3T-T=2T \tag{19}$$

如果$2T$為偶數，表示T為整數，所求時刻不存在。

（2）1號和2號的飛行距離和（相向）

$$3T+T=4T \tag{20}$$

$$T=\frac{m}{2}，其中m是奇數 \tag{22}$$

①如果3號和1號同向（看距離差）

$$9T-T=8T=2\times 4T \tag{23}$$

可知(22)是(23)的解。

②如果3號和1號相向（看距離和）

$$9T+T=10T$$

由於 10乘以(22)的每一項，所得不會是偶數，所以此情況無解。

綜合前面的討論，Q2所求的時刻為(22)。

3. Q3. $V_1 = 1$，$V_2 = \frac{3}{2}$，$V_3 = \frac{9}{4}$.

（1）1號和2號的飛行距離差（同向）

$$\frac{3}{2}T-T=\frac{1}{2}T， \tag{24}$$

$\frac{1}{2}T$為整數，推得T為2的倍數，無解。

（2）1號和2號的飛行距離和（同向）

$$\frac{3}{2}T+T=\frac{5}{2}T=2\times\frac{5}{4}T \tag{25}$$

$$T=\frac{4m}{5}，m為非5的倍數之正整數 \tag{27}$$

①如果3號和1號同向（看距離差）

$$\frac{9}{4}T-1T=\frac{5}{4}T \tag{28}$$

$$T=\frac{8m}{5}，m為非5倍數的正整數。 \tag{29}$$

②如果3號和1號相向（看距離和）

$$\frac{9}{4}T+T=\frac{13}{4}T=13\times\frac{1}{4}T \tag{30}$$

由於$\frac{13}{4}$乘以（29）的每一項所得不會是整數，所以這情況無解。

綜合前述討論，Q3所求的時刻為（29）

二、一般化

（一）問題

問題12. k隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為1單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要1分鐘。

有沒有可能在某個時刻，k隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

（二）不失一般性的條件

1. 換成最簡整數比

命題14（相等的速度比與解存在的關係）. 兩個相等的速度比如下：

$$V_1 : V_2 : V_3 : \cdots : V_k \tag{31}$$

$$U_1 : U_2 : U_3 : \cdots : U_k \tag{32}$$

$U_i = MV_i$，$1 \le i \le k$，$M > 0$，若存在時刻T使速度比為（32）的k隻蜜蜂同時相遇，則存在時刻S使速度比為（31）的k隻蜜蜂同時相遇，反過來說也對；而且

$$S = MT$$

2. 蜂巢與花的距離固定為1個單位長.

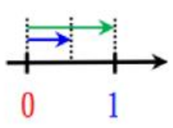


圖4. 1個單位長距離，速度比1：2。

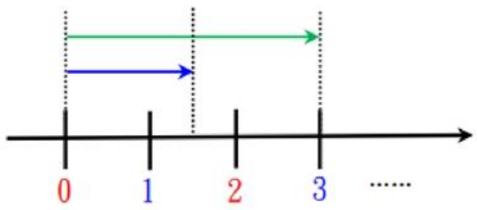


圖5. 3個單位長，速度比1：2。

（三）k隻蜜蜂

1隻蜜蜂 如果設定1隻蜜蜂速度＝1，則**非整數的時刻**即為所求。

2隻蜜蜂 設給定速度比為$1 : V_2$， 如果存在時刻使得兩隻蜜蜂相向時經過一點：

$$1 \times T + V_2 T = (1 + V_2)T \tag{33}$$

$$T = \frac{2}{1 + V_2}, \tag{34}$$

代入(34)，等號右邊必為偶數，所以有

命題16（2隻蜜蜂必有解）. 2隻蜜蜂必能在某一時刻**相向**通過同一點。

$k \geq 3$隻蜜蜂 計算所求時刻的演算法（算法20）

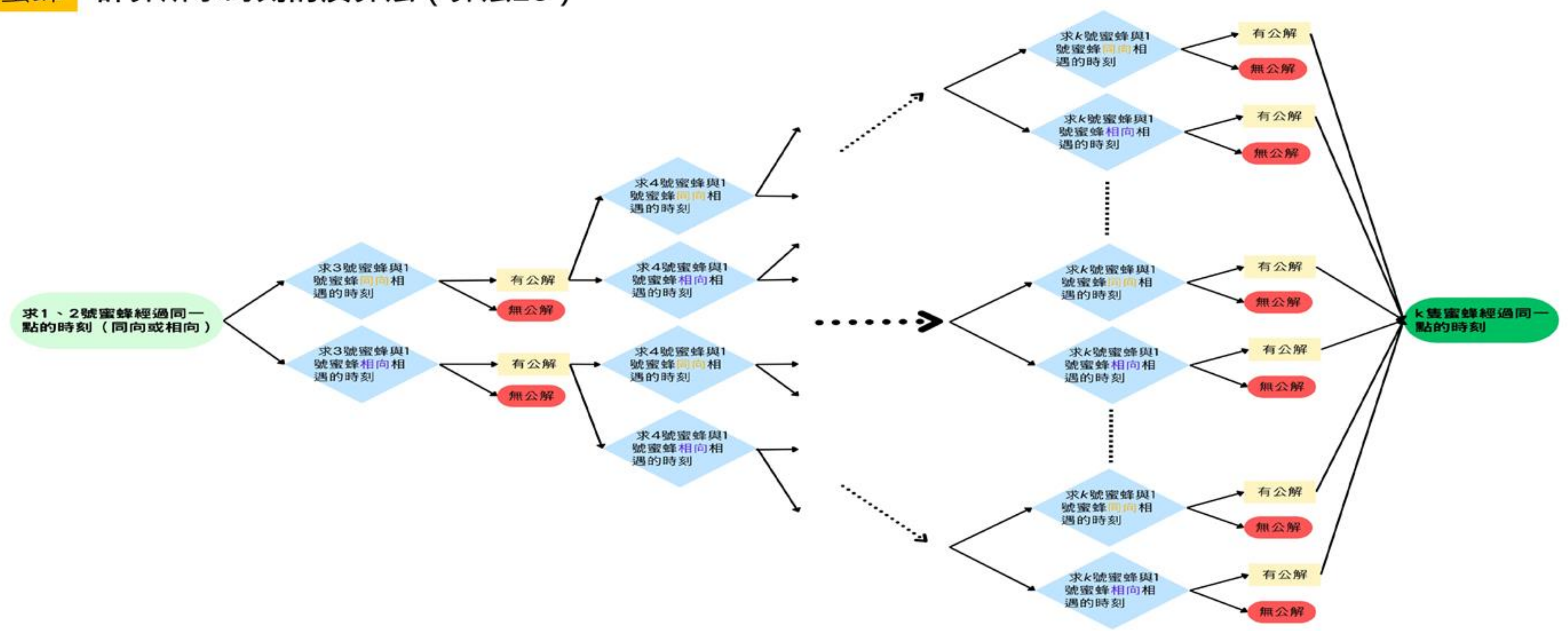


圖6. 求k隻蜜蜂在蜂巢與花朵間經過同一點的時刻之計算方法

三、速度比給定滿足一階線性遞迴數列

（一）定義

$$\begin{cases} a_{n+1} = c \times a_n + d \\ a_1 = b \end{cases} \tag{38}$$

（二）全部同向相遇

1.數據觀察

Q27. 設給定6隻蜜蜂的速度比為

$$1 : 8 : 43 : 218 : 1093 : 5468$$

為下列數列的前6項

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5 \times a_n + 3 \\ a_1 = 1 \end{cases} \tag{39}$$

$$V_6 - V_5 = 5^4 \times (V_2 - V_1) \tag{44.1}$$

$$V_5 - V_4 = 5^3 \times (V_2 - V_1) \tag{44.2}$$

$$V_4 - V_3 = 5^2 \times (V_2 - V_1) \tag{44.3}$$

$$V_3 - V_2 = 5^1 \times (V_2 - V_1) \tag{44.4}$$

$$V_2 - V_1 = (V_2 - V_1) \tag{44.5}$$

2.分析

$$V_{i+1} - V_i = c^{i-1} \times (V_2 - V_1) = c^{i-1} \times (cb + d - b)，1 \le i \le k - 1 \tag{46}$$

來看下列的T，當$cb + d - b \geq 3$，

$$T = \frac{2m}{cb + d - b}，m\text{為非}cb + d - b\text{倍數的正整數。} \tag{47}$$

將(47)的T乘以 (46)的速度差，便可得下列距離差

$$c^{i-1} \times (cb + d - b) \times \left(\frac{2m}{cb + d - b}\right) = 2c^{i-1} \times m \tag{48}$$

3.滿足給定條件則可全部同向相遇

命題28. 給定k隻蜜蜂的飛行速度比，為一階線性數列如(38)的前k項，如果$cb + d - b \geq 3$，則k隻蜜蜂能在蜂巢與花之間，全部同向同時飛行經過同一點，所求時刻為(47)。

（三）同奇偶編號同向、異奇偶編號相向相遇

1.數據觀察

$$V_6+V_5=5\times V_5+3+V_5=(5+1)V_5+3 \quad (45.1)$$
$$V_5+V_4=5\times V_4+3+V_4=(5+1)V_4+3 \quad (45.2)$$
$$V_4+V_3=5\times V_3+3+V_3=(5+1)V_3+3 \quad (45.3)$$
$$V_3+V_2=5\times V_2+3+V_2=(5+1)V_2+3 \quad (45.4)$$
$$V_2+V_1=5\times V_1+3+V_1=(5+1)V_1+3 \quad (45.5)$$

2.分析與討論

$$V_{i+1}+V_i=(c\times V_i+d)+V_i=(c+1)V_i+d，1\le i\le k-1 \quad (49)$$

如果$(c+1)$和d的最大公因數$(c+1，d)\ge 3$，則下列時刻為所求的解：

$$T=\frac{2m}{(c+1，d)}，m為非（c+1，d）倍數的正整數。 \quad (50)$$

設

$$c+1=e\times(c+1，d)、d=f\times(c+1，d)$$

將(49)的速度和乘以(50)的時間，便得到距離和：

$$[(c+1)V_i+d]\times\frac{2m}{(c+1，d)}=2m\times(eV_i+f) \quad (51)$$

3.滿足條件可相遇

命題29. 給定k隻蜜蜂的飛行速度比，為一階線性數列如(38)的前k項，並且$(c+1)$和d的最大公因數≥ 3，則k隻蜜蜂能在蜂巢與花之間，同奇偶編號同向，奇偶編號相向，同時飛行經過同一點，解為(50)

四、包含等差數列和等比數列的成果

（一）等差數列與等比數列的研究結果

命題22（速度比為公差≠1、2的等差數列）. 若給定速度比為公差≠1、2的等差數列，則存在時刻使k隻蜜蜂在巢與花之間經過同一點，方向為全部同向。

命題23（速度比為公差＝2的等差數列）. 若給定速度比為公差＝2的等差數列，則存在時刻使k隻蜜蜂在巢與花之間經過同一點，飛行方向為：奇數號蜜蜂同向、偶數號蜜蜂同向，奇數號和偶數號相向。

命題24(速度比為等比數列). 給定首項＝1，公比為$\frac{q}{p}>1$的等比數列，

（i）如果

$$T=\frac{2p^{k-1}m}{q-p} \quad (37.1)$$

不是整數，且m為正整數，則在(37.1)的時刻，k隻蜜蜂在蜂與花之間同向飛行經過同一點。

（ii）給定

$$T=\frac{2p^{k-1}m}{q+p} \quad (37.2)$$

m為正整數，則在(37.2)的時刻，k隻蜜蜂在蜂巢與花之間，編號同奇偶同向、不同奇偶相向，飛行經過同一點。

（二）包含縣市展的成果

等差數列

$$b=c=1，d=0或是正整數$$
$$cb+d-b=1+d-1=d，$$
d恰是等差數列的公差。

1.公差≥ 3

根據命題28，若$d\ge 3$，得到命題22是命題28的特例。

2.公差＝2

當$d=2$，也就是奇數數列，**每個V_i都是奇數**，由於

$$1+1=1\times(1+1，2)、2=1\times(1+1，2)$$

令T為（22），類似（51）求相鄰編號蜜蜂飛行距離和，便有

$$[(1+1)V_i+2]\times\frac{m}{2}=m\times(V_i+1) \quad (52)$$

V_i+1必為偶數，因而得到編號同奇同偶的蜜蜂同向相遇；編號不同奇偶的相向相遇，得到命題23是命題28的特例。

等比數列

$$b=1，c為最簡分數=\frac{q}{p}>1，d=0$$

1.同向相遇. 看下列式子：

$$cb+d-b=\frac{q}{p}\times1+0-1=\frac{q}{p}-1。$$

如果$\frac{q}{p}-1\ge 3$，此時的(37.1)不是整數，符合所求時刻，表示命題24-（i）是命題28的特例。

2.同奇偶同向、異奇偶相向相遇. 根據命題14，我們可以探討速度比為首項＝1，公比r為正整數的等比數列，首先有

$$(c+1，d)=(r+1，0)=r+1，$$

如果$r+1\ge 3$，注意到可以把r看作$q=r$，$p=1$的分數，同時有$q+p=r+1\ge 3$，代入(37.2)，可知它不是整數，符合所求時刻，表示命題24-（ii）是命題29的特例。

肆、討論

一、一般化的計算方式

主要利用「逐步檢驗」的方式，若存在某時刻使得前i隻蜜蜂經過同一點，再檢查第$i+1$隻蜜蜂是否有解。

二、所求時刻的存在性

待研究判斷所求時刻存在性的方法，如果能先確定解存在，再使用算法20就能更有效率的計算此題。

伍、結論

一、我們給出原始問題要求的解答。
二、將原問題一般化，如果所時刻存在，得出求蜜蜂們經過同一點的時刻之計算方法。
三、給定速度比給滿足給定一階線性遞迴數列，必有時刻使得k隻蜜蜂經過同一點。

陸、引用文獻

[1]游森棚(2022)。飛到西飛到東。**科學研習月刊，第61卷第1期**。2022/11/01。取自：https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?a=6829&cat=0&lsid=19206&preview=Y

[2]翰林文教事業教科書編輯委員會(民111)最大公因數與最小公倍數。國民小學數學課本第十一冊。臺南市。國家教育研究院。

[3]翰林文教事業教科書編輯委員會(民112)速率。國民小學數學課本第十二冊。臺南市。國家教育研究院。