中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第一名

080407

穿梭 2D 與 3D~數形合一解構嵌合立方體之研究

學校名稱：國立高雄師範大學附屬高級中學

作者：	指導老師：
小五 吳佳瑾	歐志昌
小五 鄧岩滂	余尚芸

關鍵詞：嵌合立方體、角量判別式、同構稜值

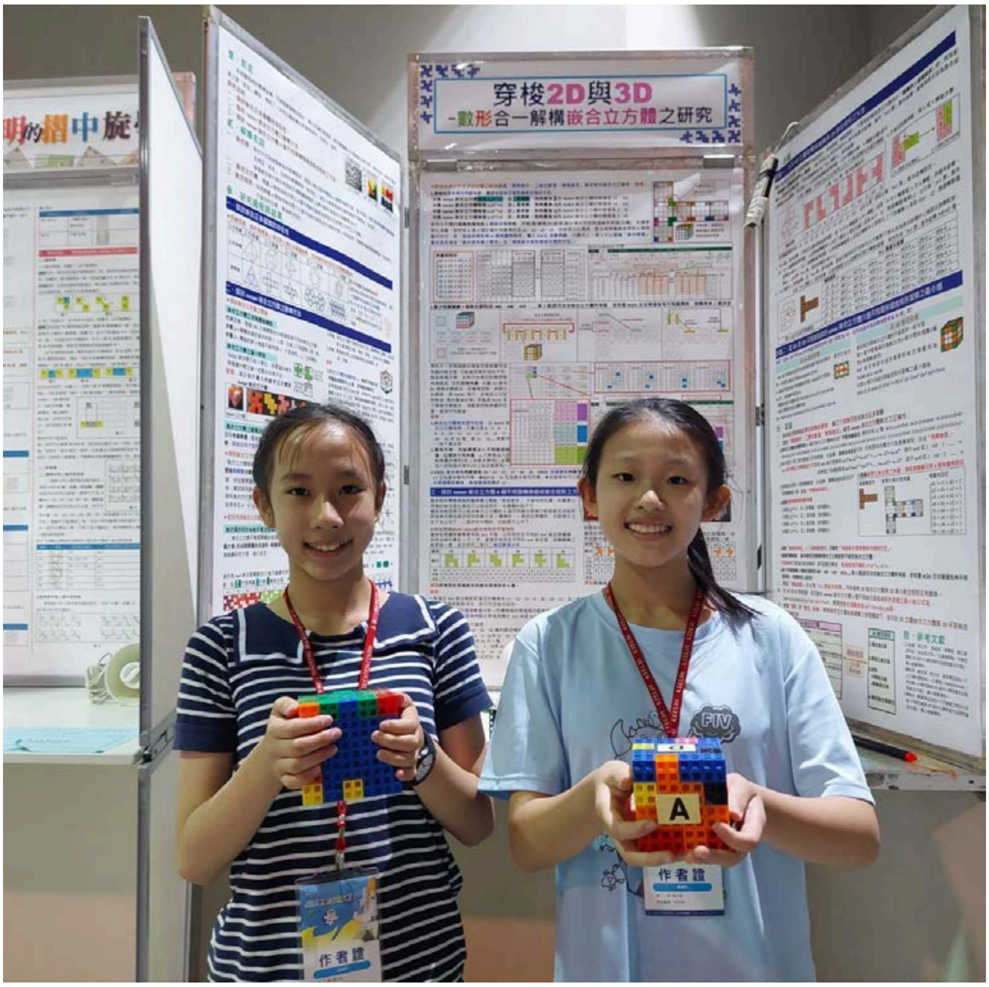
得獎感言

穿梭2D與3D的奇幻之旅

去年，是我第一次參賽全國數學科科展，我和我的小伙伴做了圖形密鋪和路徑有關的研究，可惜的是，只拿到一個小小的獎。我不甘心，決定和小伙伴再次挑戰。今年，我們用積木進行建構「嵌合立方體」和「嵌合矩形」的研究，一開始「實際拼」已經很困難，要「記錄整個立方體的拼法」時，每次都是燒腦!羅素說：「數學就是符號加邏輯。」我靈機一動，或許圖形可以轉換數值來記錄，於是開始絞盡腦汁地想，在老師與伙伴共同的腦力激盪之後，得到突破，那瞬間興奮到讓我手舞足蹈，更期待下次研究和挑戰。經過一整年的努力，終於到了比賽現場。杜蘇芮颱風讓比賽提了前，原本就已經緊張萬分，沒想到我竟然生病了，整個喉嚨痛，一方面怕增加小伙伴的負擔，另一方面擔心評審老師聽不懂我說的話，但我還是很賣力地強調作品的特色。當頒獎典禮上唸到我們是第一名時，我忍不住大叫了出來!真是有甘、有苦、有喜、有樂的兩年啊!研究和發現的奧秘是一座無法估量的豐富礦坑，等著我們去挖掘!我未來還想繼續挑戰!(佳瑾)

「第一名080407」聽到我們作品的編號，興奮地跳起來，我們得獎了！心臟砰砰跳個不停，一切努力終於有好結果。能得到這個獎項，要感謝歐志昌老師及余尚芸老師的辛苦指導，老師常跟我們說：「偉大的作品靠的不只是知識力量，還有堅持到底的毅力，才能完成。」我們抱著對幾何及積木的熱忱開始這項研究，過程中我們遇到許多困難，但是每個困難都是突破點，解決後就是許多驚喜的發現，更重要是學會用系統的數學方法解決幾何問題。這些大突破現在想想還是很雀躍，很有成就感，我們兩位夥伴的默契也增進不少。準備比賽過程不輕鬆，但是有老師指導，有小伙伴共同努力，這些時光都是甜蜜的！我們並肩作戰，賽程中的經驗也相當寶貴，讓我體會能完成比賽真是不容易，每個細節都不容忽視，要不斷努力才能有好成果。賽後的作者交流也十分有趣，看到各家精彩介紹，來到全國科展的殿堂，果然不同凡響。這次科展比賽加上杜蘇芮颱風來湊一腳，真是精彩萬分，驚險刺激。這份榮耀不只是我們，更屬於一路上曾經幫助過我們的老師們，沒有他們辛苦協助，就沒有這份榮耀，這一趟穿梭2D與3D嵌合立方體的旅程真是收穫滿滿，絕對刻骨銘心。(岩滂)

與指導老師合影



作品展示與海報1

作品展示與海報2

穿梭2D與3D~數形合一解構嵌合立方體之研究

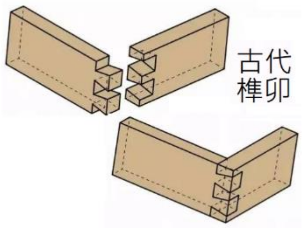
摘要

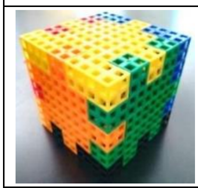
從研習問題出發，數學模型化使用積木方塊組成嵌合面，聚焦在每個嵌合面與面間「咬合」關係。先探討存在性，發現基本嵌合面受限於單位結構，僅**正六面體**滿足嵌合正多面體條件。接續，透過「**數值**」搭配「**圖形**」分析，找到「**n×n×n 嵌合立方體建構方法」，稜值奇偶性+8 個角量判別式**寫入 EXCEL，代入即可確定是否滿足「**嵌合面角量之要求**」及「**每個嵌合面對應嵌合稜的方位**」；再配合**稜值—同構稜值、嵌配稜和判斷值**可確認 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同嵌合面組成的正確性。

最後，透過「**旋轉運算」**得到「**3+1 連基本結構」，**可在 3D 嵌合立方體與 2D 嵌合矩形快速組裝轉換；解構 n×n×n 嵌合立方體有 $\boldsymbol{6n^2-12n+8}$個方塊，重組成 2D 嵌合矩形面積最小值公式為$\boldsymbol{n^4-3n^3-2n^2+7n+3}$，其中 n≧4。

壹、前言

一次 FUN 手玩積木的數學研習活動提到，生活中有許多建築結構（如下圖），設計十分精妙，像這類多面體堆積的數學結構，可透過數學模型探討，簡化討論的複雜度，使用實體積木方塊組裝成嵌合面，聚焦在**每個嵌合面與面的「咬合**」關係。研習中教授提供 **6 個 5×5 不同的面**，要我們組成**中空的立方體**(右下積木)，類似古代**榫卯**不用釘子一樣；接著又要我們利用這 **6 個不同的面**，**拼成面積最小的矩形**，這實在有趣又非常不容易，啟發我們興趣，開始了我們一系列立體結構的探索與研究。



生活中實際的多面體堆砌結構例子★		➔	簡易數學模型	面與面拆解咬合
		模型簡化		
		➔	嵌合立方體	6 個不同榫卯嵌合面

註：上述★圖片取自 https://hk.trip.com/travel-guide/attraction/beijing/water-cube-10559020/及 yahoo.com/lifestyle/【-奇特建築-】-不會破的泡泡屋-探訪外星人基地-1923249.html

根據以上，列出三個研究問題為：

一、探討嵌合正多面體的存在性與限制條件。

二、探討 n×n×n 嵌合立方體之建構方法。

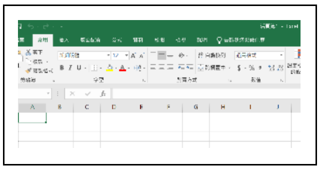
三、探討 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同面轉換組成嵌合矩形之方法。

貳、研究設備、解釋名詞與研究架構

一、研究設備

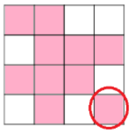
USL 方塊

文書處理軟體（EXCEL）



二、解釋名詞

1.嵌合面：組成立方體的面稱為「嵌合面」。嵌合面上的每個方塊都須相連(如右圖)。



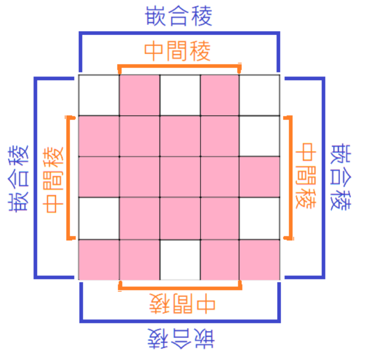
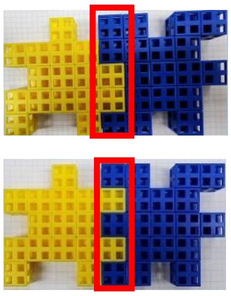
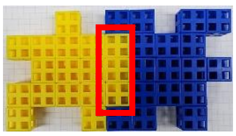
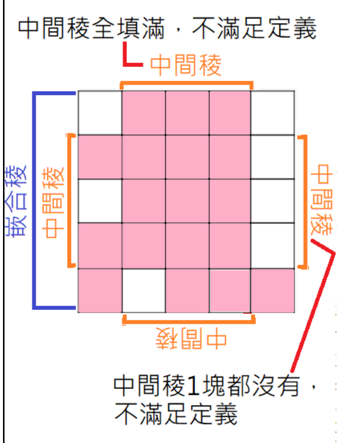
不滿足嵌合面

2.嵌合稜：每個嵌合面的稜邊，稱為「嵌合稜」，為了能讓嵌合面組合時，每個**嵌合稜**能相互**咬合緊密不脫落**，設定嵌合稜的條件如下：

(1)中間(n-2)個**非角落方塊至少 1 個，最多(n-3)個**，也就是嵌合稜中間不能全填滿。

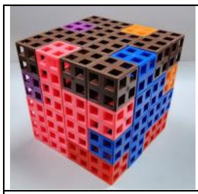
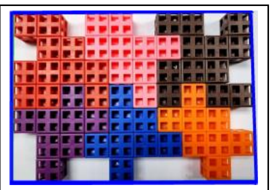
(2)每個嵌合稜中間非角落的方塊數量範圍是： **1 ≤稜中間非角落的方塊數量≤ (n-3)**

以 5×5 嵌合面為例：每個 5 單位「嵌合稜」中間的稜塊要最少 1 個、最多 2 個方塊可與相鄰嵌合面的稜彼此相互「咬合」。單 1 個嵌合面上的每個方塊都是相連的。

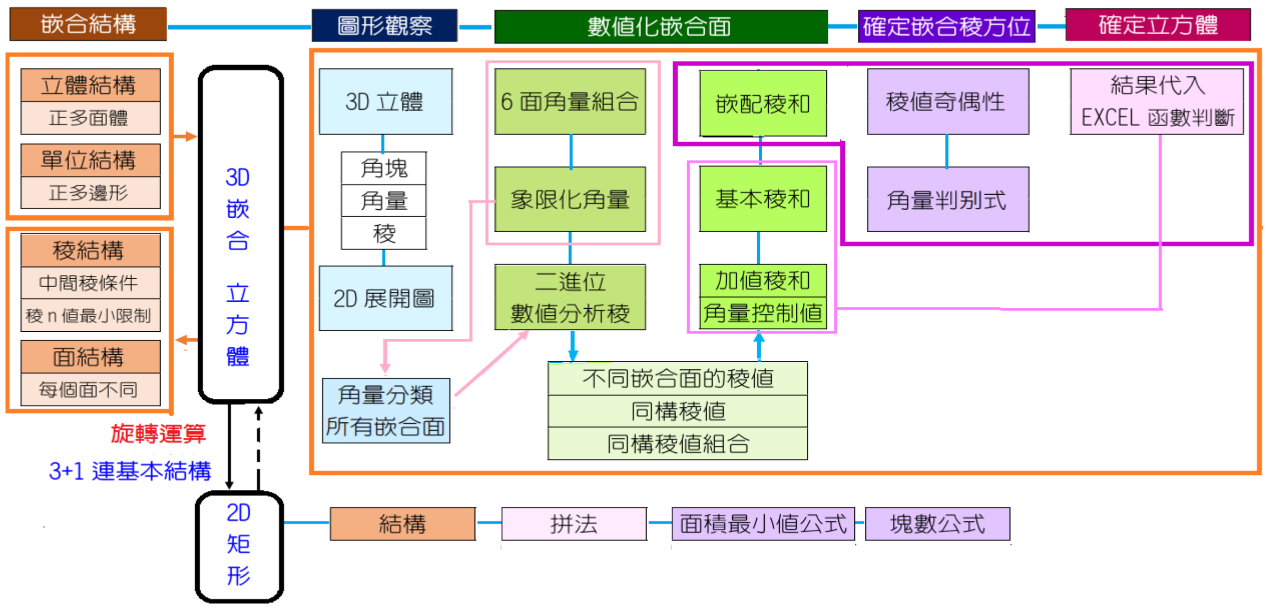
	嵌合稜示例	不是嵌合稜	
		 紅框圈選的黃稜中間 3 塊全填滿，雖然可以拼，但實際組裝立體時**容易脫落**，因此限制**中間稜最少有 1 塊，最多不能全部填滿**，嵌合時才可緊密不脫落	
5×5 上右下左 4 個中間稜都至少 1 塊，且中間沒有全部填滿，滿足嵌合稜的條件	紅框圈選的黃稜與藍稜都滿足嵌合稜條件		

3.嵌合立方體：由 6 個不同嵌合面組成，表面完全封閉的中空正六面體，稱為嵌合立方體。

4.嵌合矩形：用 6 個不同嵌合面組成方塊，延伸後 4 角為「直角」，且相接的邊與邊能「**完全密合**」，不留空的位置，稱為嵌合矩形。

	
嵌合立方體	嵌合矩形

三、研究架構



參、研究過程與結果

文獻探討對本研究的啟發

我們查找以「**嵌合方式**」**組成立方體與平面**的相關研究，發現並無相關內容，而以**方塊拼接組合**的研究很多，雖然沒有完全切合的資料，但其中有幾篇啟發我們一些想法與做法，將其中啟發與本研究差異羅列如下：

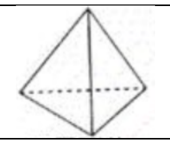
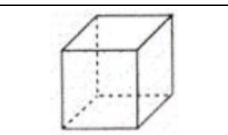
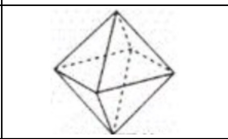
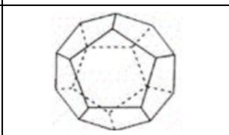
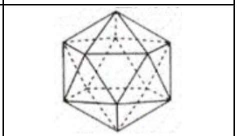
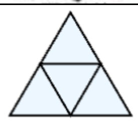
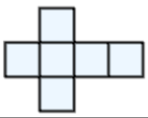
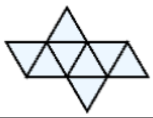
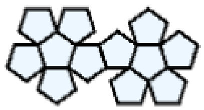
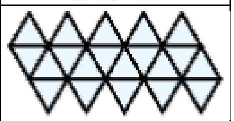
文獻名稱	與本研究內容**相關的摘要**	對本研究的**啟發與差異處**
拼成矩形 ---五連塊探秘 (55 屆國小組)	研究五連方塊是否可拼成矩形，研究方法採 1.四角定位法、2.座標數值法、3.情境數值法，對五連方塊數值化討論	**1.啟發**：將嵌合面「圖形轉化透過數值分析系統」組成嵌合立方體與矩形。 **2.差異**：一般解析幾何是將圖形轉為座標，本研究是將**圖形轉為二進位數值分析**。
正立方體的變裝秀--五連塊拼拼樂(45 屆國小組)	用 12 種五連塊不重疊地拼出一個正立方體的表面，探討有幾種不同排列樣式	**啟發**：利用展開圖，將不同嵌合面組成正立方體。
六方連塊 之矩形大拼排 (60 屆國小組)	透過六方連塊 35 種組合矩形，探討幾種不同排列樣式	**1.啟發**：將嵌合立方體組成的表面進行拼排、重組成矩形。 **2.差異**：本研究**以「數、形」2 個面向，剖析如何形成矩形之原理，及在何情況下構成最小值**。

研究一、探討嵌合正多面體的存在性與限制條件

我們好奇除了研習提到的正立方體，其他的正多面體也可以像立方體一樣做嵌合嗎?

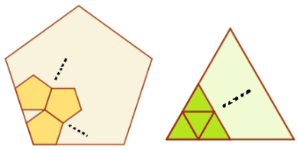
研究一(一)、從結構探討嵌合正多面體的存在性

根據定義，從**立體結構**及**單位結構**探討稜邊為 n 單位的 5 個正多面體結構，可做**榫卯嵌合**的正多面體是哪些？

正多面體	**正四面體**	**正六面體**	**正八面體**	**正十二面體**	**正二十面體**
正多面體					
展開圖					

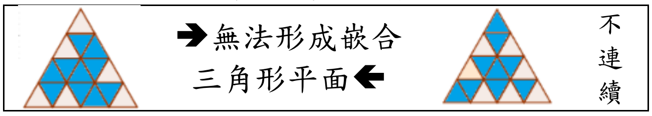
將正多面體切割稜邊後**發現**：

1.正四、正八、正十二、正二十面體皆無法形成嵌合正多面體，



❶正十二面體∵組成平面是正五邊形，而 360÷108=3…36，如右圖，∴小單位正五邊形角度結構無法密鋪成每邊 n 單位的大正五邊形。

❷正四、八、二十面體的每個組成面是正△，雖然小正△可以密鋪成 n 單位的大正△(如右上圖)，但兩兩嵌合時，基本嵌合面受限於單位結構的厚度，無法兩兩嵌合，且形成嵌合面時常有方塊不連續，不滿足嵌合面的情況(如圖)。



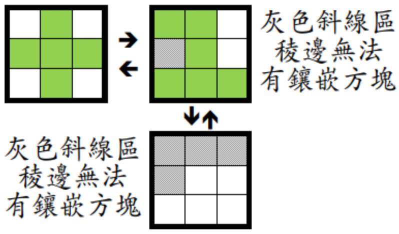
2.基本嵌合面受限於**單位結構的厚度**，僅正六面體可形成嵌合正多面體。

★小結： 受限於單位結構的厚度，正多面體中僅**正六面體可形成 n×n×n 嵌合正多面體**。

研究一(二)、探討嵌合立方體之限制條件

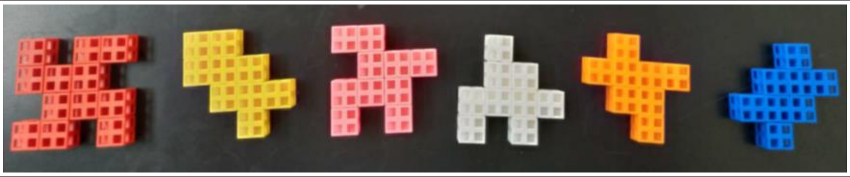
嵌合立方體之最小限制

∵3×3×3 嵌合面的稜邊只有 3 單位，若一嵌合稜中間有嵌合方塊，則與其嵌合的另一個稜邊中間就無法有嵌合方塊，且這面的其他稜邊結構亦會受影響，最後無法成功。



發現：滿足條件**最小**的嵌合立方體是 **4×4×4 嵌合立方體**，

4×4×4 嵌合立方體示例如下：

	
圖 3-1-1　4×4×4 嵌合立方體	圖 3-1-2　4×4×4 嵌合立方體組成之不同面

嵌合立方體之初始構造機制

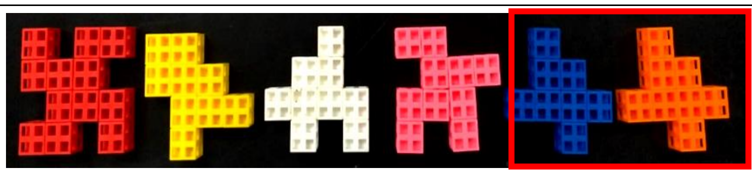
根據嵌合立方體定義，透過 USL 方塊實際拼出每個面都不同的嵌合立方體，初始構造的機制：

步驟 1—隨機找出滿足條件的第 1 個面，再找第 2 個面，且第 2 個面不能跟第 1 個面一樣；

步驟 2—構造的第 3 個面不能和第 1、2 面相同……」，以此類推。

但是一面一面拼的作法，起初拼時容易，到最後很容易會發生「嵌合面重複」的問題：

如：圖 3-1-3 是 4×4×4 嵌合立方體，但拆開立體後有兩個面是相同的，見圖 3-1-4 中藍色與橘色平面。

		兩面相同
圖 3-1-3　4×4×4 嵌合立方體圖	圖 3-1-4　4×4×4 嵌合立方體組成之 6 個面	

嵌合立方體之 6 個面都不同及重複性分析

排除每面中間(n-2)×(n-2)不和其他面嵌合的部分，

依每個嵌合稜去討論嵌入方塊不同的方式可能高達$(2^n)^4\times6=6\times2^{4n}$種，

最小可滿足的 4×4×4 嵌合立方體可能嵌合面就有$(2^4)^4\times6=65536\times6=393216$種。

但透過嵌合立方體初始構造機制卻常發生組成的第 6 個面和其他面重複的情況。

★小結:

1.可找到 n≧4 的 n×n×n 嵌合立方體。

2.若只考慮嵌合方塊的數量，而**未考慮方塊位置配置的情況**，就易發生嵌合面重複的情況，即要找到滿足 6 個面都不同的 n×n×n 嵌合立方體，並非如 6×2^{4n} 種排列呈現這麼容易找到。

到底要怎麼做，才能系統地拼出 6 個面都不同的嵌合立方體呢?

研究二、探討 n×n×n 嵌合立方體之建構方法

研究二(一)、探討嵌合立方體立體 3D 構造與其 2D 展開圖之關係

∵嵌合立方體每個面的組成方式不同，但**立體圖形無法看到全貌，∴透過展開圖去觀察**，發現不管如何展開變成 11 種展開圖的哪一種(圖 3-2-1)，還是同一個嵌合立方體，故從展開圖系統地探討嵌合立方體之組成。

為方便研究，選定左上第 1 個做為本研究嵌合立方體展開圖，並將每個平面依序命名為 A、B、C、D、E、F。

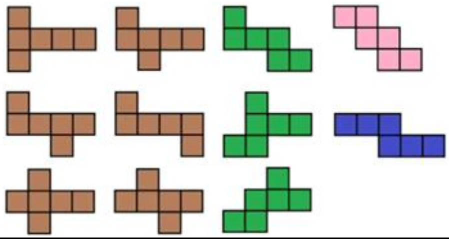


圖 3-2-1 正方體 11 種展開圖

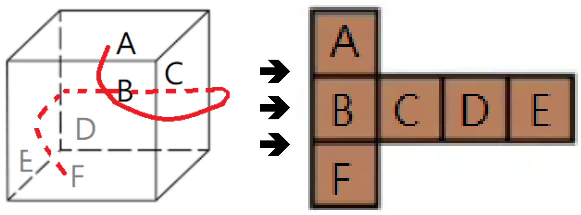


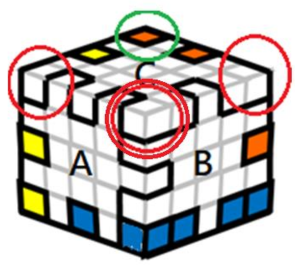
圖 3-2-2 正方體展開平面命名

探討如何利用嵌合立方體角塊特性構造嵌合立方體展開平面?

研究二(二)、探討嵌合立方體角塊特性構造 6 個不同面角量組合之情形

嵌合面的初步系統分類方式為角塊

發現嵌合立方體不管展開圖的各面如何，組成立體時，**僅有角落 8 個方塊**，拆成**展開圖的各面**時，每個面角落**方塊的總和也只有 8 個**，為後續研究方便，進行命名。



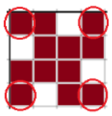
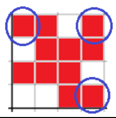
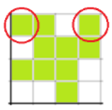
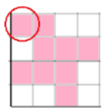
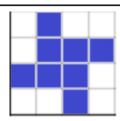
1.角塊：嵌合立方體之頂點角落所在的方塊，簡稱為「角塊」，∵同時影響 3 個稜，是分析之關鍵。

如右圖圓圈處為嵌合立方體其中 4 個角塊(紅色、綠色圈圈)，而紅色雙圈標記的角塊同時影響 ABC 共 3 個面。

2.角量：每個嵌合面上的角塊(角落方塊)數量，稱為「角量」。

如 A 面、B 兩面角量皆為 0；C 面角量為 3 (右圖紅色圈圈)。

嵌合面依角量進行分類，
平面分類有 5 種，如舉例：

角量 4 的面	角量 3 的面	角量 2 的面	角量 1 的面	角量 0 的面
				

發現:

1. 6 個不同嵌合面角量組合之情形

從角塊數量分配至各嵌合面，得到所有 n×n×n 嵌合立方體的 6 個不同「**嵌合面角量組合情形**」共有 **13 種**：

❶平面角量最大為 4 的有：
4+4+0+0+0+0、4+3+1+0+0+0、4+2+2+0+0+0、4+2+1+1+0+0、4+1+1+1+1+0

❷平面角量最大為 3 的有：
3+3+2+0+0+0、3+3+1+1+0+0、3+2+2+1+0+0、3+2+1+1+1+0、3+1+1+1+1+1

❸平面角量最大為 2 的有：2+2+2+2+0+0、2+2+2+1+1+0、2+2+1+1+1+1

❹平面角量最大為 1 的**不存在**此組合。

2. **實際符合條件的平面角量組合為 12 種**

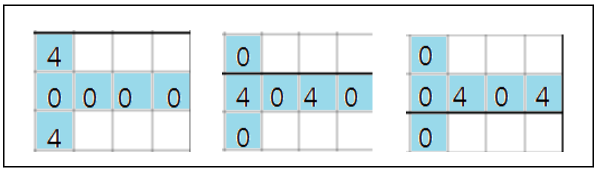
∵嵌合立方體必須 6 個面不同，而其 13 種平面角量組合情形中的 4+4+0+0+0+0 會出現 2 個角量 4 的平面，但角量 4 的嵌合面只有 1 種，會造成嵌合面重複，∴4+4+0+0+0+0 情形不滿足，需要排除。

3. **6 個不同嵌合面角量組合配對展開圖不同位置之情形**

值得注意的是，平面角量組合會**依實際能組合的嵌合立方體**，而**配對展開圖的不同位置**，這 3 種雖然外觀排列不同，但還是為同一種展開圖，稱為「**同構角量組合**」。

避免重複，找出角量組成可滿足對面填入的 2 個面(A、F；B、D；C、E)之角量，填入組成中最大或較大 2 個角量。後續研究分類不同嵌合面角量組成後，再以每種分類的 A 角量值最大的作為「**同構角量組合代表**」進行討論。

如嵌合面角量組成的其中一種情況 4+4+0+0+0+0 中角量 4 的 2 個面分布在展開圖的對面，展開圖(A，B，C，D，E，F)配對角量位置情況有 3 種，(4，0，0，0，0，4)、(0，4，0，4，0，0)、(0，0，4，0，4，0)。

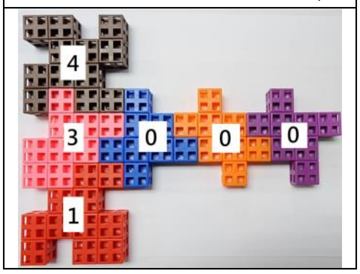


再討論剩下 4 面角量的排列。

以 4+3+1+0+0+0 為例，A、F 可填入較大角量 4、3，剩下的 4 個角量為 1+0+0+0，則排列後有$\frac{4!}{3!}=4$種，再配合原來可以填入面的種類 3 種，共$\frac{4!}{3!}\times 3=12$，羅列如下：

(4,1,0,0,0,3)、(4,0,1,0,0,3)、(4,0,0,1,0,3)、(4,0,0,0,1,3)、(1,4,0,3,0,0)、(0,4,1,3,0,0)、(0,4,0,3,1,0)、(0,4,0,3,0,1)、(1,0,4,0,3,0)、(0,1,4,0,3,0)、(0,0,4,1,3,0)、(0,0,4,0,3,1)。這些立體展開圖的角量組合旋轉翻轉後都一樣，以同構角量組合代表(4,1,0,0,0, 3)實際拼出一例如右。

4+3+1+0+0+0/(4,1,0,0,0,3)



依上述方法得到「**同構角量組合**(共 3+12+36+90+15+60+90+90+60+3+36+90+15=600 種)」及「**同構角量組合代表**」其餘詳見手稿或附件。

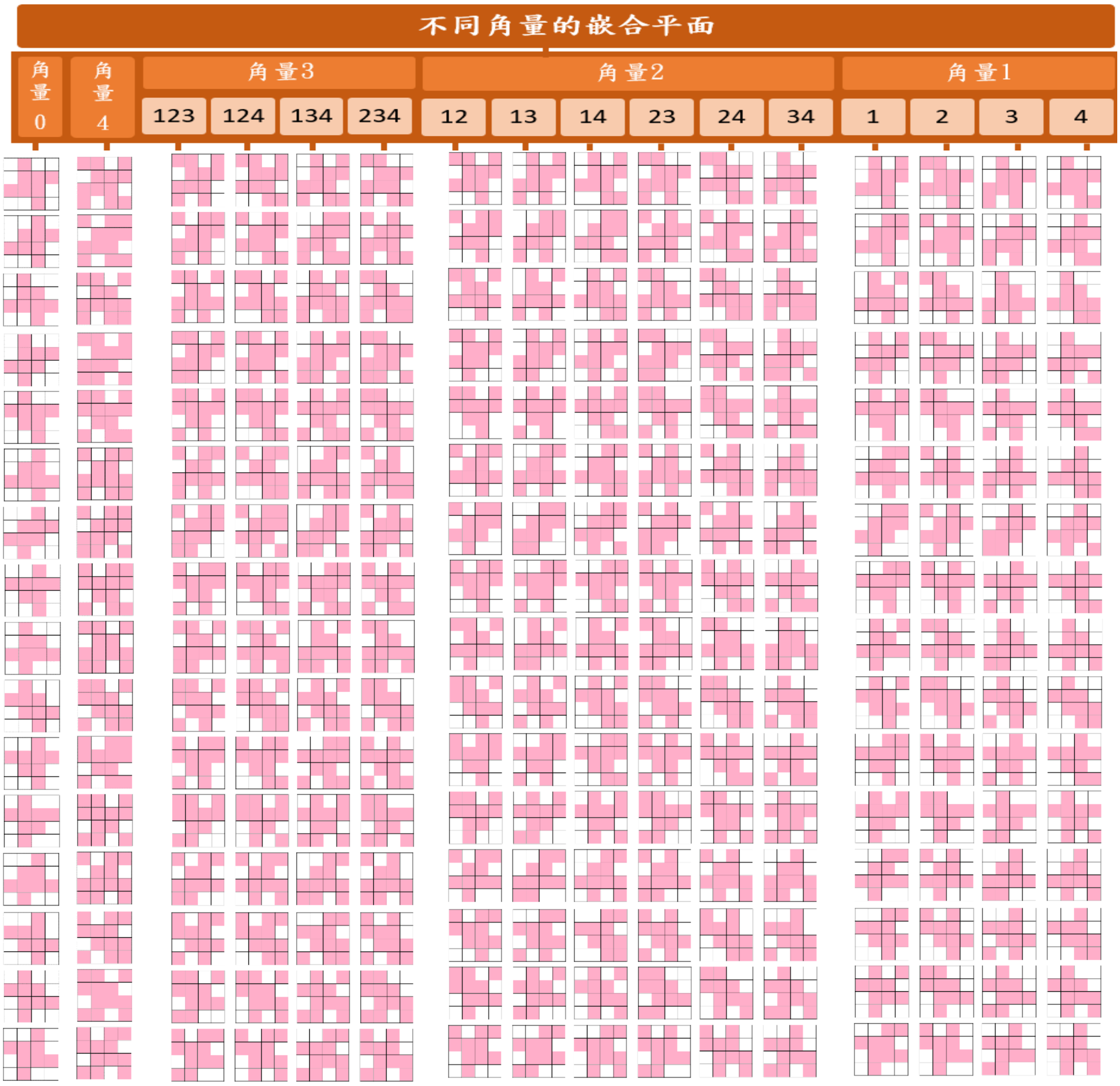
研究二(三)、依角量分類不同嵌合面

以 4×4 嵌合面為例：

我們先系統地找到角量 0 的 4×4 嵌合面，依定義角量 0 的 4×4 嵌合面共有 2^4=16 種；再依序尋找角量 4、3、2、1 的嵌合面。

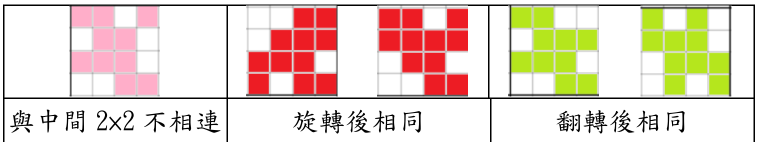
依每個嵌合面角量 0、1、2、3、4 分類不同嵌合面，整理得到下表 3-2-1 所有 4×4 嵌合面種類(含方塊不連續的情況)。

表 3-2-1 4×4 嵌合面種類(含方塊不連續的情況)



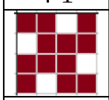
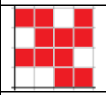
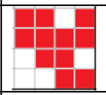
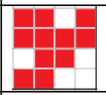
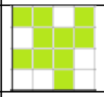
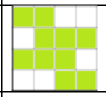
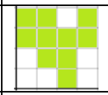
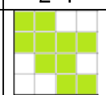
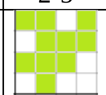
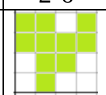
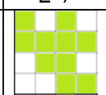
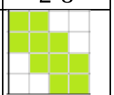
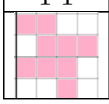
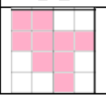
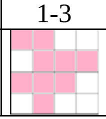
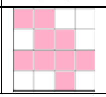
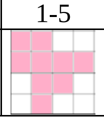
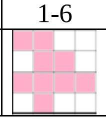
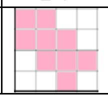
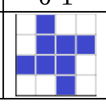
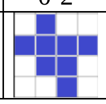
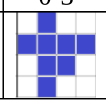
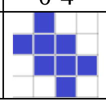
從上面圖可以看出，角量 0 的 4×4 嵌合面其 4 個角落都沒有方塊，考慮中間稜的情況有 2 種情況(01、10)，每面有 4 稜，故角量 0 的 4×4 嵌合面共有 2^4=16 種，以此類推，可以得到角量 0 的 5×5 嵌合面中間稜的情況有 6 種情況(100、010、001、110、101、011)，嵌合面共有 6^4=1296 種，……，角量 0 的 n×n 嵌合面共有$(2^n-2)^4$種。接續可以將角量 0 的嵌合面，再加入角量 4、3、2、1 的情況。

將表 3-2-1 上圖中「**與中間 2×2 不相連**」及「**旋轉或翻轉後相同**」的平面去除後重新編號，如右圖說明：



依「角量—第幾種」編號，如 **2**-**3** 代表角量 **2** 的第 **3** 種嵌合面，下為所有 4×4 嵌合面種類。

表 3-2-2　所有完全不同的 4×4 嵌合面種類表

4-1	3-1	3-2	3-3	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6	2-7	2-8
											
1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	0-1	0-2	0-3	0-4	
											

∵角塊是分析的關鍵點，依角塊存在數量的幾種可能，象限化嵌合面的不同角量，這樣做的好處是能將各嵌合面角量的對應位置確定下來：

研究二(四)、探討象限化嵌合面的不同角量之情形

系統尋找不同角量的嵌合面

∵嵌合面會出現的角量情形為 4、3、2、1、0，加上嵌合稜中間部分至少要有 1 個嵌合方塊，**系統尋找不同角量的嵌合面，步驟**如下：

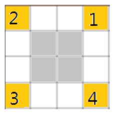
步驟①角塊先不填，將(n-2)×(n-2)旁的嵌合稜中間依排列順序填入嵌合方塊，找到角量 0 的所有平面，

步驟②再將角量 0 的所有不同平面不同角量下，依序填入不同角塊的位置。

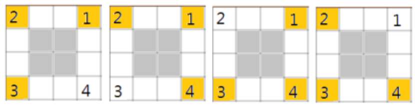
以 4×4×4 嵌合立方體為例如下：

步驟①—找到角量 0 的所有平面。

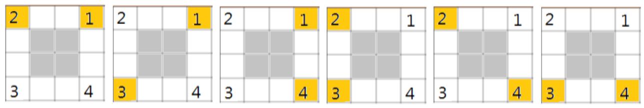
步驟②-2—承步驟①，依序填入角量 4 不同角塊(1234)的位置，得到角量 4 的所有平面。其中位置 1234 分別是角塊相對位置是左上右上右下左下(如右圖)，下面步驟②-3、4、5 以此類推，不再敘述。



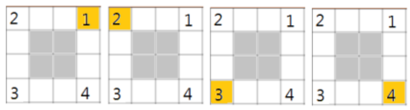
步驟②-3—承步驟①，依序填入角量 3 不同角塊(123、124、134、234)的位置(如右)，得到角量 3 的所有平面。



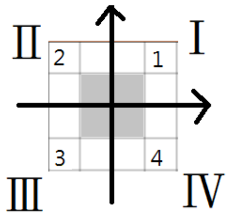
步驟②-4—承步驟①，填入角量 2 不同角塊(12、13、14、23、24、34)的位置(如右)，得到角量 2 的所有平面。



步驟②-5—承步驟①，依序填入角量 1 不同角塊(1、2、3、4)的位置(如右)，得到角量 1 的所有平面。



以象限暨數值化標記嵌合面 4 個角塊的存在性



角塊 1234 的位置分別坐落在第I、II、III、IV象限，

「有角量」為 1，「沒有角量」為 0，

依第I、II、III、IV象限出現的順序，

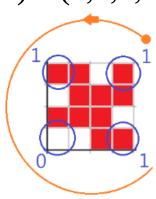
角量 0 嵌合面的 4 個角塊可表示為(0,0,0,0)，

角量 4 各可表示為(1,1,1,1)，角量 3 各可表示為(1,1,1,0)、(1,1,0,1)、(1,0,1,1)、(0,1,1,1)，

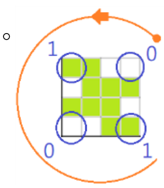
角量 2 各可表示為(1,1,0,0)、(1,0,1,0)、(1,0,0,1)、(0,1,1,0)、(0,1,0,1)、(0,0,1,1)，

角量 1 的平面為(1,0,0,0)、(0,1,0,0)、(0,0,1,0)、(0,0,0,1)。

以角量 3 其中一種嵌合面為例，



就是(1,1,0,1)。右圖這個就是(0,1,0,1)。



綜合研究二(二)(三)(四)得到結果如下。

★小結：

1. 嵌合立方體的角量和為 8。
2. 滿足嵌合立方體條件的「平面角量組合」情形共有 12 種，如下：

❶平面角量最大為 4 的有：4+3+1+0+0+0、4+2+2+0+0+0、4+2+1+1+0+0、4+1+1+1+1+0

❷平面角量最大為 3 的有：3+3+2+0+0+0、3+3+1+1+0+0、3+2+2+1+0+0、3+2+1+1+1+0、3+1+1+1+1+1

❸平面角量最大為 2 的有：2+2+2+2+0+0、2+2+2+1+1+0、2+2+1+1+1+1

3. 平面角量組合會依實際能組合的嵌合立方體，而配對展開圖的不同位置，得到「同構角量組合」及「同構角量組合代表」，往後研究因旋轉都會一樣，研究將以「同構角量組合代表」進行討論。
4. 象限數值化 n×n 嵌合面各種角量，依四個象限角塊存在的有無，得到角量 0 表示為(0,0,0,0)，角量 4 為(1,1,1,1)，角量 3 為(1,1,1,0)、(1,1,0,1)、(1,0,1,1)、(0,1,1,1)，角量 2 為 1(1,1,0,0)、(1,0,1,0)、(1,0,0,1)、(0,1,1,0)、(0,1,0,1)、(0,0,1,1)，角量 1 為(1,0,0,0)、(0,1,0,0)、(0,0,1,0)、(0,0,0,1)。
5. 依角量分類不同嵌合面，可得所有完全不同的 4×4 嵌合面共 23 種。

困難：即使已經算得同構角量組合代表，但是只能確定每個嵌合面的角量多寡，無法確定嵌合面角量的方位，及面與面是否能成功嵌合。我們思考嵌合面的角量可以象限數值化，**是否嵌合稜也能用數值化的方式處理?**是否能透過數值分析，找出嵌合立方體的 6 個不同嵌合面?

突破：發現構成 n×n×n 嵌合立方體的 4 個嵌合稜，分別由 n 個嵌合方塊組成，每個單位方塊組成也和象限角塊一樣是「有」或「無」，**就像控制電腦的「010101……」**，因此嘗試**透過二進位表示每個稜**，再將每個稜**轉譯成十進位**。

研究二(五)、「二進位數值方法」搭配「圖形」解構不同嵌合面稜值及角量之同構特徵

圖形轉譯二進位數值產生嵌合面稜值

以 4×4×4 嵌合立方體中角量 3 的嵌合面 3-2 為例，說明利用二進位數值方法解構嵌合立方體的嵌合面：

嵌合稜依序為上右下左，嵌合方塊依順時針方向及外圍對應位置，

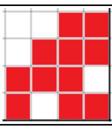
判別上稜為「無無有有」，右稜為「無無有有」，下稜為「有有無有」，左稜為「有有無無」

此時二進位可以表示為 0011 1101 1101 1100，轉譯成十進位可以表示為 3 13 13 12，

而嵌合面中間 2×2 不影響外面稜上的數值，完全可忽略不計。

1.依順時針序去填寫上右下左 4 個嵌合稜上的單位方塊對應位置的「有或無」為「1 或 0」。

如角量 3 的嵌合面 3-2

形	數值
3-2	3-2
	(見下表)

0	0	1	1
0			1
1			0
1	0	1	1

➔

二進位															
上稜				右稜				下稜				左稜			
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0

➔

十進位稜值			
上	右	下	左
3	13	13	12
詳見步驟 2			

2.利用 EXCEL 寫入二進位公式轉譯成十進位數值，進行轉譯。部分內容示例如下：

T8 =G8*8+H8*4+I8*2+J8*1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1			順時針排列																十進位			
2	角量	編號																				
3	0	0-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4	4	4	4
4		0-2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4	4	4	2
5		0-3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	4	4	2	2
6		0-4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	4	2	4
7	4	4_1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	13	13	13	13
8	3	3_1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	13	13	12	5

2.依序找到角量 0→4→3→2→1 的所有嵌合面二進位數值，搭配圖形，排除不連續的情形，可以得到全部 4×4 嵌合面。詳見手稿。

旋轉、翻轉嵌合面後對稜值的影響

同構稜值：因立方體在旋轉、翻轉後是同一種立方體，翻轉後仍為同一個嵌合面，每個嵌合稜對應的稜值雖然不同，但翻轉後仍為同一個嵌合面，這樣的稜值稱為「**同構稜值**」。

以 4×4 嵌合面為例，其嵌合稜對應二進位數值若為 1101，翻轉後圖形對應的二進位數值會變成 1011，再轉譯成十進位數值。如下表 3-2-3。

表 3-2-3 形數轉換 4×4 嵌合稜值之同構稜值表

形	數			形	數			互為同構稜值		
嵌合稜	對應二進位數值	嵌合稜值		翻轉後嵌合稜	對應二進位數值	嵌合稜值				
	1101	13	➡		1011	11	➡	13	↔	11
	1100	12	⬅		0011	3	➡	12	↔	3
	1010	10			0101	5	➡	10	↔	5
	0100	4			0010	2		4	↔	2

最後得到 4×4 嵌合面互為同構稜值的有 <u>13 和 11</u>、<u>12 和 3</u>、<u>10 和 5</u>、<u>4 和 2</u>。

旋轉、翻轉嵌合面後，嵌合面整體稜值組合的變化

同構稜值組合

∵在拼嵌合立方體時，雖然是固定了一種展開圖進行討論(圖 3-2-1)，但立方體在旋轉、翻轉後卻是同一種立方體，此時

❶展開圖的稜值雖會做順序上的差別，可視為同一種嵌合面，

❷翻轉後的稜值雖然數值不同，但在圖形上的意義卻是相同的，僅是排列順序或是出現翻轉後同構稜值的排列不同而已；

∴雖然嵌合面的 4 稜連續數值看起來不同，對應的稜值也不同，但在旋轉、翻轉後都和原來的平面一樣，故這些連續稜值之組合視為「**同構稜值組合**」。

例如：下表 3-2-4 的圖，分別是原來嵌合面 3-2 右旋 1、2、3 次得到的平面，看起來不同，對應的稜值也不同，但在旋轉、翻轉後都和原來平面一樣，這些稜值視為同構稜值組合即 3 13 13 12↔ 12 3 13 13↔ 13 12 3 13↔ 13 13 12 3↔ 12 3 11 11↔ 11 12 3 11↔ 11 11 12 3↔ 3 11 11 12 互為同構稜值組合。

表 3-2-4

	原 3-2				右旋 1 次				右旋 2 次				右旋 3 次				翻轉 3-2				翻轉 3-2 右旋 1 次				翻轉 3-2 右旋 2 次				翻轉 3-2 右旋 3 次			
形																																
稜位	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左
稜值	3	13	13	12	12	3	13	13	13	12	3	13	13	13	12	3	12	3	11	11	11	12	3	11	11	11	12	3	3	11	11	12

進一步分析所有 4×4×4 嵌合立方體 23 種嵌合面的稜值，得到下表 3-2-5，發現完全不重複的情形，和研究二(三)表 3-2-2 所有完全不同的 4×4 嵌合面種類表對應完全相同(以同樣的方式進行編碼)，**確認了我們以二進位數值分析嵌合面稜值的方式的正確性與價值**。

表 3-2-5 所有完全不同的 4×4 嵌合面數值分析種類

		二進位順時針排列																十進位正				十進位翻			
角量	編號	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左
0	0-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4	4	4	4	2	2	2	2
	0-2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4	4	4	2	4	2	2	2
	0-3	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	4	4	2	2	2	2	4	4
	0-4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	4	2	4	4	2	4	2
4	4-1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	13	13	13	13	11	11	11	11
3	3-1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	13	13	12	5	11	11	3	10
	3-2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	13	13	12	3	11	11	3	12
	3-3	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	13	12	3	11	11	3	12	13
2	2-1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	13	12	4	5	11	3	2	10
	2-2	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	12	5	12	5	3	10	3	10
	2-3	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	13	12	4	3	11	3	2	12
	2-4	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	12	5	12	3	3	10	3	12
	2-5	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	13	12	4	5	11	3	2	10
	2-6	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	13	12	2	3	11	3	4	12
	2-7	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	12	3	10	5	3	12	5	10
	2-8	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	12	3	12	3	3	12	3	12
1	1-1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	12	4	4	5	3	2	2	10
	1-2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	12	4	4	3	3	2	2	12
	1-3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	12	4	2	5	3	2	4	10
	1-4	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	12	2	4	5	3	4	2	10
	1-5	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	12	4	2	3	3	2	4	12
	1-6	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	12	2	2	5	3	4	4	10
	1-7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	12	2	4	3	3	4	2	12

★小結：

1. 4×4 嵌合面互為同構稜值的有 13 和 11，12 和 3，0 和 5，4 和 2。

2.整個嵌合面的 4 稜連續數值，在旋轉、翻轉後會和原來的平面連續數值一樣，視為「**同構稜值組合**」。

3. n×n 嵌合稜值之同構稜值公式為

若 **n×n 嵌合稜值為** $a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + +\ldots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$，其中 $a_i=0$ 或 1，i=0、1、……、n

該**稜值之同構稜值為** $a_0 \times 2^n + a_1 \times 2^{n-1} + +\ldots + a_{n-1} \times 2^1 + a_n \times 2^0$，其中 $a_i=0$ 或 1，i=0、1、……、n

接著透過「實際操作、二進位數值、稜值組合」確定嵌合組合之正確性，觀察並分析透過數值找出嵌合立方體的 6 個不同嵌合面的方法。

研究二(六)、數值系統分析嵌合立方體之組成

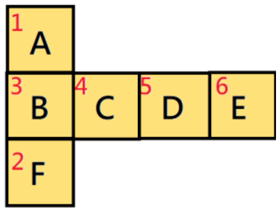
透過「實際操作、二進位數值、稜值組合」確定嵌合組合之正確性

展開圖以圖 3-2-2 為主，進入二進位數值與稜值填寫，∵組合之後的立方體上右下左旋轉後亦是同一個立方體，故為避免重複，面 AFBCDE 依序填入平面角量組合情形中值最大，接續次大，……，以此類推。

為了確定嵌合組合是正確的，同時搭配「**實際操作、二進位數值、稜值組合**」進行記錄，利用樹狀圖原理系統尋找步驟：

1.決定平面角量組合情形 12 種中的其中一種

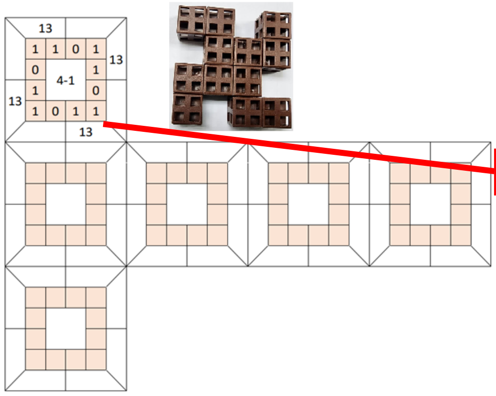
依(第 1 填的面)➔(第 2 填的面)➔…順序填入面 A➔F➔B➔C➔D➔E。



2.填面 A

2-❶在面 A 填入組成情形中角量最大值的嵌合面，並取正面(同構稜值較大者)

如：4×4×4 嵌合立方體中，平面角量組合第 1 種情形 4+3+1+0+0+0，面 A 先填入角量最大值 4，嵌合面只有編號 4-1 的嵌合面滿足，取正面(同構稜值為 13131313)，作紀錄。



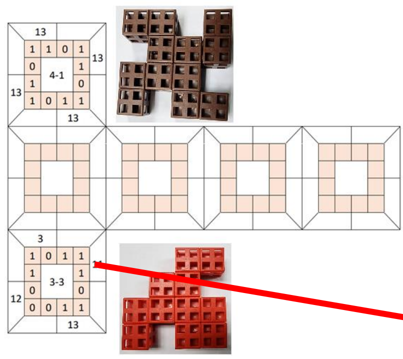
			D	C	B	E
角量	編號	展開	上	右	下	左
4	1	A	13	13	13	13
1	2	B	4	4	3	12
0	3	C	4	4	2	2
0	4	D	4	2	4	2
0	2	E	4	4	4	2
3	3	F	3	11	13	12
8			B	C	D	E

3.填面 F

在立方體面 A 的對面是面 F，此時取角量組成情形中次大值作為填入面。

如 4+3+1+0+0+0，面 F 則填入角量 3，而角量 3 有 3 種情形，依序討論嵌合面編號 3-1、3-2、3-3。右圖是 F 嵌合面 3-1 正面示例。

F 嵌合面 3-1 正面示例



			D	C	B	E
角量	編號	展開	上	右	下	左
4	1	A	13	13	13	13
1	2	B	4	4	3	12
0	3	C	4	4	2	2
0	4	D	4	2	4	2
0	2	E	4	4	4	2
3	3	F	3	11	13	12
8			B	C	D	E

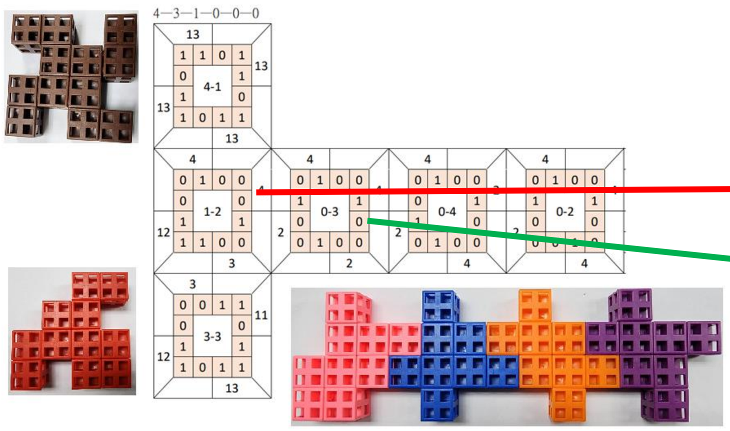
4.填面 B 或 C 或 D 或 E

4-❶從面 A 和 F 的角量及位置，決定平面角量組合情形的第 3 大角量值，填上嵌合面及對應稜值。如: 4+3+1+0+0+0，則再可以填入第 3 大角量(1)的嵌合面在第 3 面。

4-❷當第 3 面決定後，再填入第 4、5、6 面。

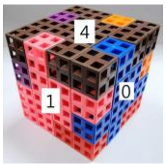
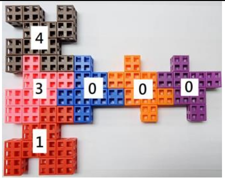
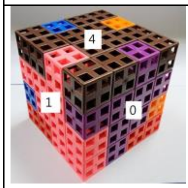
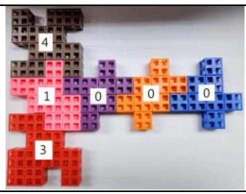
此時除非剛好左右稜值有不同選擇，否則其實當第 3 面決定時，其他第 4、5、6 面會因為上下稜值確定，有一面左右稜值確定，而決定第 4、5、6 面。

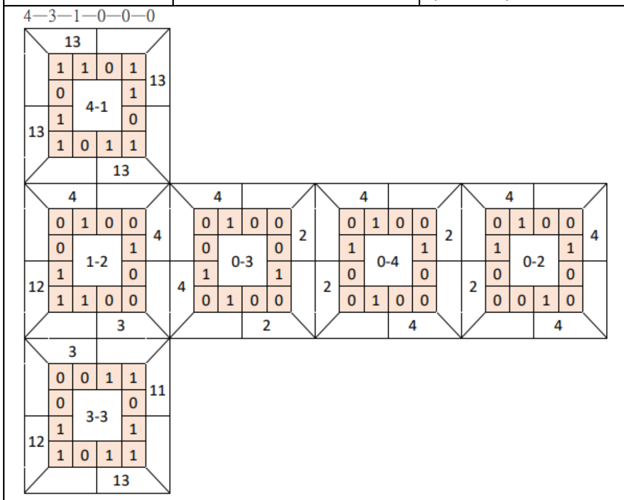
如：4+3+1+0+0+0 分別在 BCDE 面填入 1-2、0-3、0-4、0-2。

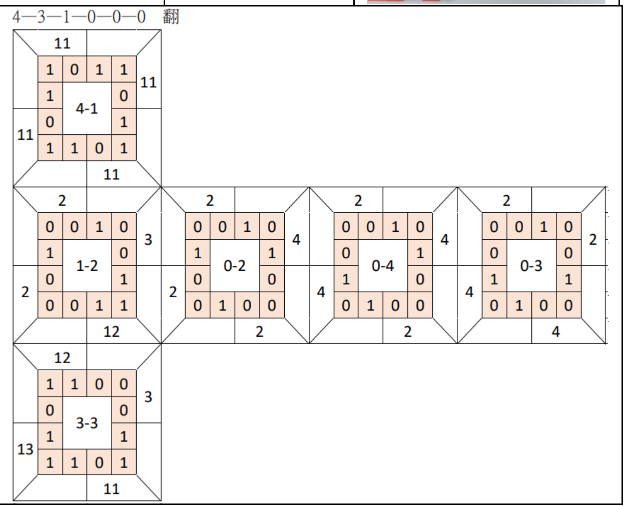


			D	C	B	E
角量	編號	展開	上	右	下	左
4	1	A	13	13	13	13
1	2	B	4	4	3	12
0	3	C	4	4	2	2
0	4	D	4	2	4	2
0	2	E	4	4	4	2
3	3	F	3	11	13	12
8			B	C	D	E

注意：除了第一填入的面，如果遇到將每一種嵌合面稜值組合旋轉、翻面、翻面旋轉後不同時，會一併進行填入討論。「系統尋找」指從**展開圖第 1 個面 A 的正面**為基準，搭配**同構角量組合代表**，逐一往下探討。為避免重複，面 A 翻面的情形(如下圖)配翻面、正面旋轉、翻面旋轉的會形成同構稜值組合，不列入討論。

<table>
<tr><td colspan="2">4-3-1-0-0-0 正面</td><td rowspan="3">雖然這兩個嵌合立方體的稜值不同(如圖)，
但進行同構稜值轉換，仍是同一種嵌合立方體，
其實是正面跟翻面的差別(如右)。</td><td colspan="2">4-3-1-0-0-0 翻面</td></tr>
<tr><td>嵌合立方體</td><td>展開圖</td><td>嵌合立方體</td><td>展開圖</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>



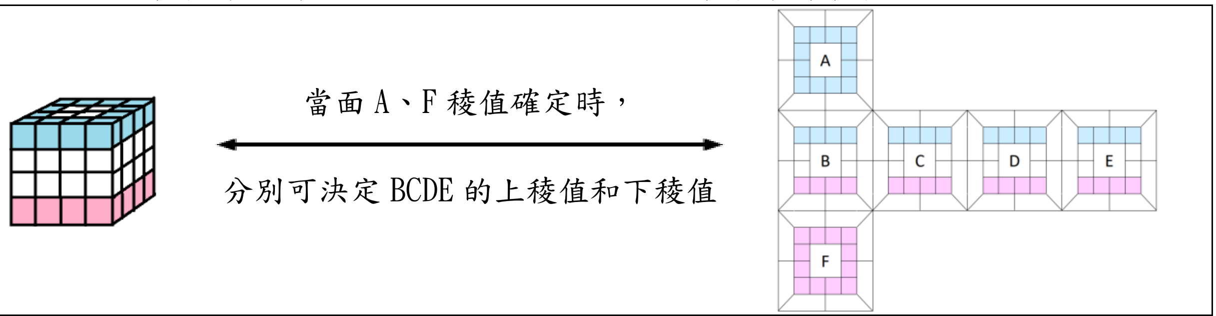


發現：

1.知道最少**連續 3 個嵌合面時**(如 ABC、ABF、ADF、BCD……等 3 面)即可**決定嵌合立方體所有面**，但若遇 **BCDE 左右稜值恰有不同**選擇時，則**需再多 1 面決定**。

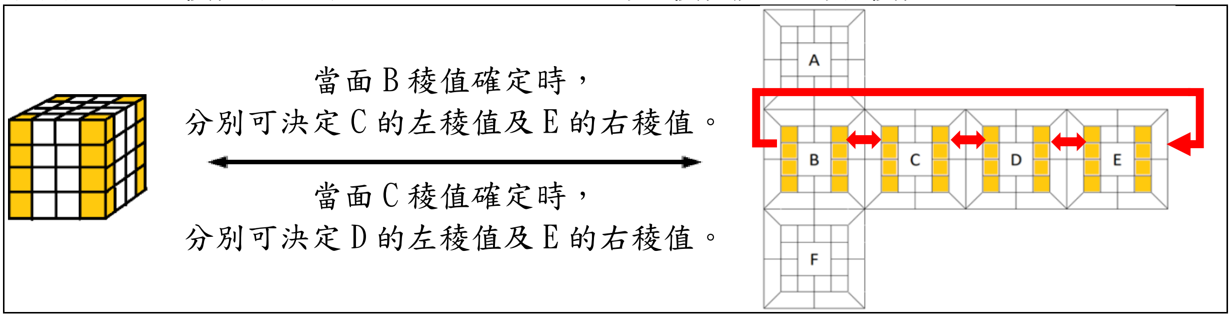
以 ABF 連續 3 面為例說明：

①當面 A、F 稜值確定時，分別可以決定 BCDE 的上稜值和下稜值。



②當面 **B 稜值**確定時，分別可以決定 **C 的左稜值及 E 的右稜值**。

其餘當面 **C 稜值**確定時，分別可以決定 **D 的左稜值及 E 的右稜值**。



此時除非剛好左右稜值有不同選擇，否則其實當第 3 面決定時，其他第 4、5、6 面會因為上下稜值確定，加上嵌合立方體需每面不同，每種嵌合面亦不同，故有一面左右稜值確定，就可決定第 4、5、6 面。

③當面 C 稜值確定時，分別可以決定 C 的左稜值及 E 的右稜值。

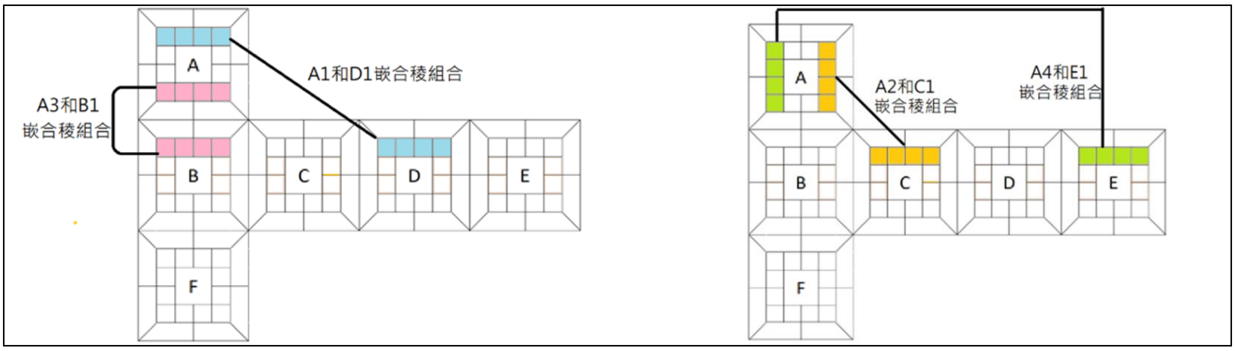
後續為方便在 EXCEL 能做紀錄及運算表示，將每面的上右下左分別標記名為 1234，如面 A 的上右下左，分別標記為 A1A2A3A4，其餘以此類推。

2.每 2 個不同面上嵌合稜組合時二進位數值必為 | 1 | 1 | 1 | …… | 1 | 1 | ，轉成十進位稜值和為 $2^n+2^{n-1}+\ldots\ldots+2^1+2^0$，以 4×4×4 嵌合立方體為例，則嵌合稜組合的二進位數值必為 1111，轉成十進位稜值和為 **$2^3+2^2+2^1+2^0=15$**。

3.透過 EXCEL 公式運算與控制，找到所有符合條件之嵌合立方體組合。

將上述所有結果，搭配圖形、二進位數值、稜值組合，寫入 EXCEL 公式運算與控制，

①在面 BCDE 上稜部分，觀察可得 A3 和 B1、A2 和 C1、A1 和 D1、A4 和 E1 需要分別做嵌合稜組合。

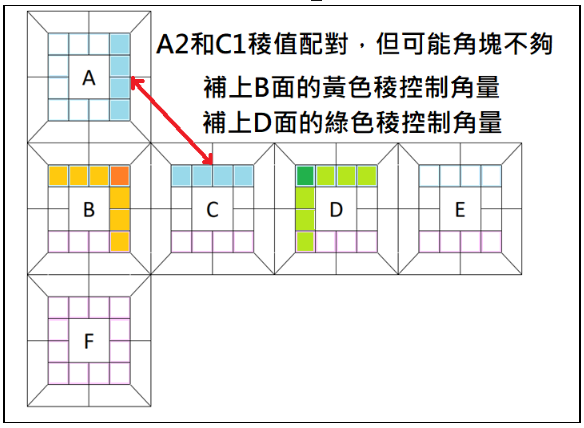


同樣做法，針對面 BCDE

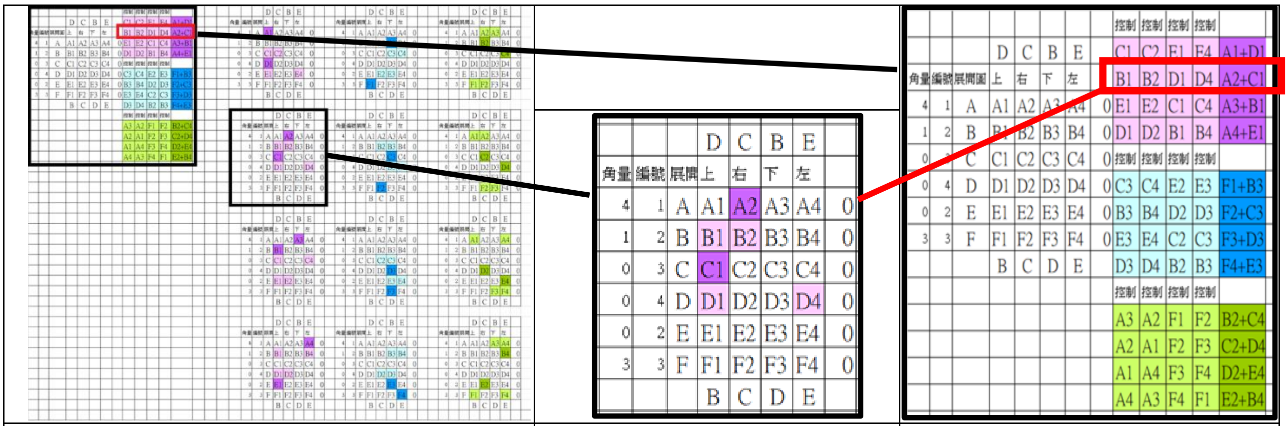
②下稜部分，可得 F1 和 B3、F2 和 C3、F3 和 D3、F4 和 E3 需要分別做嵌合稜組合。

③左右稜部分，可得 B2 和 C4、C2 和 D4、D2 和 E4、E2 和 B4 需要分別做嵌合稜組合。

④但卻不一定兩個嵌合稜組合之後就會完成完整的嵌合稜，可能會因為稜形成的不同，造成角塊不夠，此時可由相交的稜控制角塊組成，亦即「**控制角量**」。



為方便 EXCEL 判斷，若是控制稜 1 稜可提供角量 1，上下稜分別各由 4 稜控制(綠稜跟黃稜)。如 A2 會和 C1 做嵌合稜組合，但會被「D 面的 D1、D4」和「B 面的 B1、B2」控制。將所有稜值及控制角量的情況寫入 EXCEL 發現「**是否提供角量」由稜值的奇偶性決定**，此時由 EXCEL 函數 MOD 先判斷 4 個控制稜的稜值奇偶性，若是**奇數則回傳 1(有角塊)**，若是**偶數則回傳 0(無角塊)**。為分辨是哪一面的稜控制角量，若是**左面**的稜控制，則**值* (8)**；若是**右面**的稜控制，則**值* (1)**。



所有稜值及控制角量的情況寫入 EXCEL	控制角量稜值的函數位置	輸出角量控制值及稜值加總

至此，透過 EXCEL 公式運算與控制，找到所有符合條件之嵌合立方體組合。

下面舉「4+3+1+0+0+0」及「2+2+2+1+1+0」各一例，其餘見手稿或附件。

4+3+1+0+0+0 示例

								控制	控制	控制	控制		稜和	控制值	總和
								0	0	0	0	A1+D1	17	0	17
角量	編號	展開	上	右	下	左		0	0	0	0	A2+C1	17	0	17
4	1	A	13	13	13	13	52	0	0	0	0	A3+B1	17	0	17
1	2	B	4	4	3	12	23	0	0	0	0	A4+E1	17	0	17
0	3	C	4	2	2	4	12	控制	控制	控制	控制		稜和	控制值	總和
0	4	D	4	2	4	2	12	0	0	0	0	F1+B3	6	0	6
0	2	E	4	4	4	2	14	0	1	0	0	F2+C3	13	8	21
3	3	F	3	11	13	12	39	0	0	0	0	F3+D3	17	0	17
8								1	0	0	0	F4+E3	16	8	24
								控制	控制	控制	控制		稜和	控制值	總和
								1	1	1	1	B2+C4	8	18	26
								1	1	1	1	C2+D4	4	18	22
								1	1	1	0	D2+E4	4	17	21
								1	1	0	1	E2+B4	16	17	33

2+2+2+1+1+0 示例

								控制	控制	控制	控制		稜和	控制值	總和
								0	0	0	0	A1+D1	17	0	17
角量	編號	展開	上	右	下	左		0	1	0	0	A2+C1	24	8	32
2	1	A	13	12	4	5	34	0	1	0	0	A3+B1	16	8	24
2	2	B	12	5	12	5	34	1	0	0	0	A4+E1	9	8	17
1	1	C	12	4	4	5	25	控制	控制	控制	控制		稜和	控制值	總和
1	2	D	4	4	3	12	23	0	1	0	0	F1+B3	24	8	32
0	1	E	4	4	4	4	16	1	0	1	0	F2+C3	8	9	17
2	3	F	12	4	3	13	32	0	0	0	0	F3+D3	6	0	6
8								0	1	0	1	F4+E3	17	9	26
								控制	控制	控制	控制		稜和	控制值	總和
								0	0	0	0	B2+C4	10	0	10
								0	1	0	1	C2+D4	16	9	25
								1	1	1	1	D2+E4	8	18	26
								1	0	1	0	E2+B4	9	9	18

接續以 EXCEL 得到的數據進行全面分析**數值特徵**。

發現：

1.嵌合立方體的稜和是特定值，以 4x4x4 嵌合立方體為例，發現只會出現 4、5、6、7、8、9、10、12、13、14、15、16、17、20、24 共 15 種；像 11、18……等數字一定不會出現。

原因探討分析：為什麼只會出現特定稜和?

從 4×4×4 嵌合立方體所有稜值來看，總共有 2、3、4、5、10、11、12、13 共 8 種，正常來說，稜值配對之後的稜和應該有$\frac{8\times 8}{2}=32$種，但卻只有 21 種。

發現如果照上面稜值進行配對，稜和最小為 4(=2+2)，最大為 26(=13+13)，為什麼出現 4 卻沒有出現 26 的稜和？進一步判斷配對稜和是否符合嵌合立方體之定義，排除配對加法交換時一樣的情況(如 2+4=4+2 視為 1 種)，列出所有配對稜和情況如下表，搭配圖形去分析，**排除不能嵌合**的情況(如表中斜線)，一併整理在下表 3-2-6

表 3-2-6　稜和配對表

配對情形 / 稜和	稜值配對	稜值配對	稜值配對	稜值配對	稜值配對	稜值配對	稜值配對	稜值配對
4	2+2							
5	2+3							
6	2+4	3+3						
7	2+5	3+4						
8		~~3+5~~	4+4					
9			4+5					

10				5+5				
11								
12	2+10							
13	2+11	~~3+10~~						
14	2+12	~~3+11~~	4+10					
15	2+13	3+12	4+11	5+10				
16		~~3+13~~	4+12	~~5+11~~				
17			4+13	~~5+12~~				
18				~~5+13~~				
19								
20					10+10			
21					~~10+11~~			
22					~~10+12~~	~~11+11~~		
23					~~10+13~~	~~11+12~~		
24						~~11+13~~	12+12	
25							~~12+13~~	
26								~~13+13~~
種類和	8	3	6	2	1	0	1	0

2.以 4×4×4 嵌合立方體為例

①**大於 8 以上的奇數稜(11、13)，只能配稜值為 2 或 4 的稜，**主要原因是嵌合立方體角量最多為 2。

②**大於 8 以上的偶數稜(10、12)，分別只能配稜值為 2 或 4 的稜，或相等稜值(10、12)、或同構稜值(3、12)，**主要原因是嵌合立方體角量最多為 2。

③**稜控制值不同，提供的角量不同**

為方便 EXCEL 判斷，若是控制稜 1 稜可提供角量 1，上下稜分別各由 2 稜控制，為做區隔，若是上稜左右控制各提供 1 角量，則值* (8)；若是下稜左右控制各提供 1 角量，則值* (1)；共有下列情形:

❶稜控制值 1、2、8、16，提供角量是 0 或 1，分別是 1*(1)+ 0* (8)、2*(1)+0*(8)、0*(1)+ 1* (8)、0*(1)+2*(8)，組成，其中加號前後分別各控制 1 個角量。

❷稜控制值 9，提供角量是 0 或 1 或 2，分別是 1*(1)+ 1* (8)，組成，其中加號前後分別各控制 1 個角量。

❸稜控制值 10、17、18，提供角量是 1 或 2，分別是 2*(1)+1*(8)、1*(1)+2* (8)、2*(1)+2*(8)、，組成，其中加號前後分別各控制 1 個角量。

④**稜和不同，可能需要加入不同稜控制值，以提供不同角量**

A.不需要加入控制角量的情形(命之為基本稜和)

❶當稜和為 10、13、15、17、20、24，此時稜值配對分別為 5+5、2+11、2+13 或 3+12 或 4+11 或 5+10、4+13、10+10、12+12，顯示圖形為 4 個連續角塊，不需要補角量。

❷當稜和為 6 且配對稜值為奇數(3+3)，亦不需要補角量。

B.需加入控制值的情形(命之為加值稜和)

❶當稜和為 8、6 或 4，此時稜值配對分別為 4+4、4+2 或 2+2，顯示圖形為中間兩塊，需補角量為 2；此時會控制角量有 4 個稜，需要的稜控制值為 9、18、10 和 17，提供共 2 個角量，分別是 1*(1)+ 1* (8)、2*(1)+2*(8)、2*(1)+ 1* (8)、1* (1)+2*(8)組成，其中加號前後分別各控制 1 個角量。

接著，EXCEL 上出現稜和為 8 加上控制值對應的判斷值為 17、26、18、25，而稜和為 6 加上控制值對應的判斷值為 15、24、16、23，而稜和為 4 加上控制值對應的

判斷值為 13、22、14、21。

❷當稜和為 5、7、9、12、14、16，此時稜值配對分別為 2+3、3+4 或 2+5、4+5、2+10、2+12 或 4+10、4+12，顯示圖形為連續 3 個方塊，需補角量為 1；此時會控制角量有 4 個稜，需要的稜控制值為 1、2、8、16、9、10、17、18，提供 1 個角量。

將上述所有結果，加上控制值，進一步找出判斷值如下表 3-2-7。

表 3-2-7　4×4×4 嵌合立方體稜和與稜值配對對應表

		稜值配對情形	原本組合角量	加值控制	判斷值	稜和
基本稜和	6★	3+3	2	配對稜值為奇數時不需要補角量	**6(再加配對稜值是否是奇數)**	同構 15
	10	5+5	2	不需要加值控制	10	
	13	2+11	2		13	
	15	2+13、3+12、4+11、5+10	2		15	
	17	4+13	2		17	
	20	10+10	2		20	
	24	12+12	2		24	
加值稜和	8	4+4	0	9、18、10 和 17	17、26、18、25	同構 15
	6★	4+2	0		15、24、16、23	
	4	2+2	0		13、22、14、21	
	5	2+3	1	1、2、8、16、9、10、17、18	6、7、13、21、14、15、22、23	
	7	3+4、2+5	1		8、9、15、23、16、17、24、25	
	9	4+5	1		10、11、17、25、18、19、26、27	
	12	2+10	1		13、14、20、28、21、22、29、30	
	14	2+12、4+10	1		15、16、22、30、23、24、31、32	
	16	4+12	1		17、18、24、32、25、26、33、34	

由上可知:

EXCEL 基本稜和判斷值為 6、10、13、15、17、20、24，

EXCEL 加值稜和判斷值為 6、7、……、34(除了 12)

其中❶10、15、20 互為基本稜和同構；❷13、17 互為基本稜和同構

❸6(組合為 3+3)、24 互為基本稜和同構；❹加值稜和可以透過控制，填滿所有角塊。但不管哪個稜和，只要滿足嵌合稜條件，最後都可以經過圖形轉換，數值變換同構於 15。

如果透過「基本稜和、加值稜和」搭配 EXCEL 函數輸入，就可以得到 6 個不同嵌合面組成的嵌合立方體，但仍會出現基本稜和與加值稜和值相同(像 4×4 嵌合稜稜和為 6★)，需要進一步判斷的情況。

因此進一步觀察，發現會出現這樣的情況是因為稜配對時稜值雖然圖形是對稱的，但卻有奇數、偶數的差異，是否將「角塊」與「中間稜」分開處理?後續先處理「角塊」的部分。

研究二(七)、確定每個嵌合面對應嵌合稜的方位

1.可以透過稜值奇偶性判斷嵌合面每個稜的角量

①**當 nxnxn 嵌合立方體稜值 L≧2^{n-1}+2，且 L 是奇數，則角量為 2**，即角落填滿 2 個方塊。
如 4x4x4 嵌合立體的稜值 L 為 13、11 時，L 是奇數，角量為 2，即角落填滿 2 個方塊。

②**當 nxnxn 嵌合立方體稜值 L≧2^{n-1}+2，且 L 是偶數，則角量為 1**，代表角落填滿 1 個方塊。
如 4x4x4 嵌合立體的稜值 L 為 12、10 時，L 是偶數，角量為 1，即角落填滿 1 個方塊。

③**當 nxnxn 嵌合立方體稜值 L<2^{n-1}+2，且 L 是奇數，則角量為 1**，代表角落填滿 1 個方塊，
如 4x4x4 嵌合立體的稜值 L 為 3、5 時，L 是奇數，角量為 1，代表角落填滿 1 個方塊。

④**當 nxnxn 嵌合立方體稜值 L<2^{n-1}+2，且 L 是偶數，則角量為 0**，代表角落沒有填方塊，
如 4x4x4 嵌合立方體的稜值 L 為 2、4 時，L 是偶數，角量為 0，角落沒有填方塊。

2.由展開圖與立體相對位置，得到角量判別式

發現嵌合立方體的**每個角塊均由 3 個嵌合面控制**(圖 3-2-3)，如：角塊由深稜(黃)橫稜(灰)縱稜(藍)3 稜共同控制淺綠角塊(圖 3-2-4)，依據研究二(四)象限化角量，將 A 面 4 個位置的角量標記成a_1、a_2、a_3、a_4，其餘以此類推(圖 3-2-5)，得到角量判別式$a_4+b_1+c_2=1$：

圖 3-2-3

嵌合立方體的每個角塊均由 3 個嵌合面控制

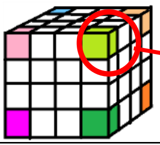


圖 3-2-4

深稜(黃)、橫稜(灰)、縱稜(藍)3 個稜共同控制淺綠色角塊

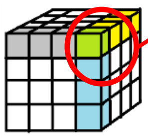
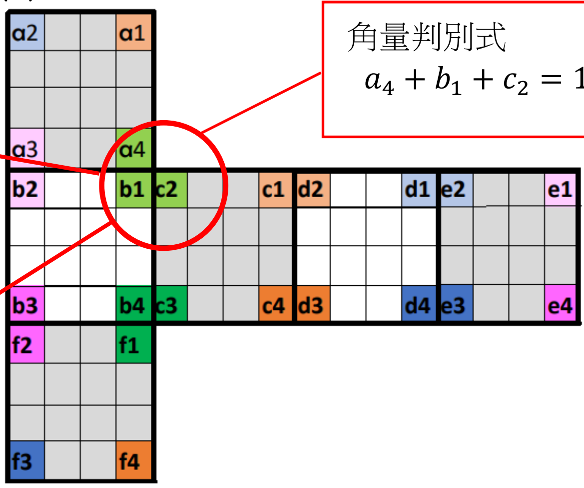


圖 3-2-5



角量判別式
$a_4+b_1+c_2=1$

角量判別式

$$\begin{cases} a_1+c_1+d_2=1 \\ a_2+d_1+e_2=1 \\ a_3+e_1+b_2=1 \\ a_4+b_1+c_2=1 \\ f_1+b_4+c_3=1 \\ f_2+e_4+b_3=1 \\ f_3+d_4+e_3=1 \\ f_4+c_4+d_3=1 \end{cases}$$

透過先前**研究二(四)象限化的角量**，配合展開圖可以得到 **8 個角量判別式**(如上橘框內)，再加上前述稜值進行奇偶性質判斷角量；若 8 個角量判別式分別等於 1，就可以確定每個嵌合面對應嵌合稜的方位。

★小結：

將兩者**稜值奇偶性質+8 個角量判別式**寫入 EXCEL 函數，只要代入，馬上可以透過「嵌合稜值」確定是否滿足「**嵌合面角量之要求**」及「**每個嵌合面對應嵌合稜的方位**」。

角量	編號	展開圖序	上	右	下	左	稜值奇偶判斷				對照←→確定	稜值奇偶判斷				角量判別式	
							第一象限	第二象限	第三象限	第四象限		第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	$a_1+c_1+d_2$	1
4	1	A	A1	A2	A3	A4	a_1	a_2	a_3	a_4		a_1	a_2	a_3	a_4	$a_2+d_1+e_2$	1
1	2	B	B1	B2	B3	B4	b_1	b_2	b_3	b_4		b_1	b_2	b_3	b_4	$a_3+e_1+b_2$	1
0	3	C	C1	C2	C3	C4	c_1	c_2	c_3	c_4		c_1	c_2	c_3	c_4	$a_4+b_1+c_2$	1
0	4	D	D1	D2	D3	D4	d_1	d_2	d_3	d_4		d_1	d_2	d_3	d_4	$f_1+b_4+c_3$	1
0	2	E	E1	E2	E3	E4	e_1	e_2	e_3	e_4		e_1	e_2	e_3	e_4	$f_2+e_4+b_3$	1
3	3	F	F1	F2	F3	F4	f_1	f_2	f_3	f_4		f_1	f_2	f_3	f_4	$f_3+d_4+e_3$	1
8																$f_4+c_4+d_3$	1

4+3+1+0+0+0 示例如下：

K4　=MOD(F4,2)　=IF((F4>2^3+2),1,0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1				稜	值				奇偶	判斷				奇偶	判斷				
2	角量	編號	展開圖	上	右	下	左	和	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限		第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	角量判斷式	角量
3	4	1	A	13	13	13	13	52	1	1	1	1	對照	1	1	1	1	a1+c1+d2	1
4	1	2	B	4	2	3	12	21	0	0	1	0	確定	0	0	1	0	a2+d1+e2	1
5	0	3	C	4	2	2	4	12	0	0	0	0		0	0	0	0	a3+e1+b2	1
6	0	4	D	4	2	4	2	12	0	0	0	0		0	0	0	0	a4+b1+c2	1
7	0	2	E	4	4	4	2	14	0	0	0	0		0	0	0	0	f1+b4+c3	1
8	3	3	F	3	11	13	12	39	1	0	1	1		1	0	1	1	f2+e4+b3	1
9	8																	f3+d4+e3	1
10																		f4+c4+d3	1

確定角量方位後，再分析嵌合稜中間非角落方塊的配對情形。

研究二(八)、每個嵌合面嵌合稜中間部分的配對數值分析

利用二進位數值分析，

嵌配稜和：嵌合立方體的中間稜塊須密合，**中間稜值配對的和是特定值**，命為嵌配稜和。以 4x4x4 嵌合立方體為例，**中間稜只有 2 種(1 0 、 0 1)，旋轉翻轉後的中間稜值是 2、4(0 1 、 1 0)，嵌配稜和有 4(=2+2)、6(=2+4)、12(=4+8)等 3 種，均同構於 6。**

同樣做法，5x5x5 嵌合立方體非角落方塊中間稜只有 6 種情形(如下左)；

中間稜組合是情形 1、3 配情形 4、6；情形 2 配情形 5，共 2 x 2+1=5 種組合，

嵌配稜和只有 20(=8+12)、14(=2+12、8+6、10+4)、8(=2+6)等 3 種數值，均同構於 14。

•5x5x5 嵌合立方體中間稜情形

情形	角塊	中	間	稜	角塊	中間稜值
1		1	0	0		8
2		0	1	0		4
3		0	0	1		2
4		1	1	0		12
5		1	0	1		10
6		0	1	1		6

•5x5 中間稜值配對表

	12	6	10
8	20	14	
2	14	8	
4			14

•6x6x6 嵌合立方體中間稜情形

情形	角塊		中	間	稜	角塊	中間稜值
1		1	0	0	0		16
2		0	1	0	0		8
3		0	0	1	0		4
4		0	0	0	1		2
5		1	1	0	0		24
6		1	0	1	0		20
7		1	0	0	1		18
8		0	1	1	0		12
9		0	1	0	1		10
10		0	0	1	1		6
11		1	1	1	0		28
12		1	1	0	1		26
13		1	0	1	1		22
14		0	1	1	1		14

而 6×6×6 嵌合立方體中間稜有 14 種情形(如上右表及右表)；中間稜組合是情形 1、4 配情形 11、14；情形 2、3 配情形 12、13、…..等共(2 × 2) × 4+1=17 種組合，

嵌配稜和有 44(=16+28)、16(=12+4)、34(=26+8)、26(=22+4)、48(=24+24)、12(=6+6)、40(=20+20)、20(=10+10)、30(=14+16、2+28、26+4、6+24、20+10、12+18)等 9 種數值，均同構於 30。整理得到表 3-2-8

• 6X6中間稜值配對表

配對 中間稜值 \ 中間稜值	28	14	26	22	24	6	20	10	12
16	44	30							
2	30	16							
8			34	30					
4			30	26					
24					48	30			
6					30	12			
20							40	30	
10							30	20	
18									30

表 3-2-8　4×4×4、5×5×5、6×6×6 嵌合立方體中間稜之和嵌配稜和對應表

	嵌配稜和判斷值	中間稜值配對情形	稜和
4×4×4	8	4+4	同構於 6
	6	4+2	
	4	2+2	
5×5×5	20	8+12	同構於 14
	14	2+12、8+6、10+4	
	8	2+6	
6×6×6	48	24+24	同構於 30
	44	16+28	
	40	20+20	
	34	26+8、22+4	
	30	14+16、2+28、26+4、6+24、20+10、12+18	
	26	22+4	
	20	10+10	
	16	12+4	
	12	6+6	

從圖形面向觀察發現，

1.若稜塊 n 為奇數，中間稜塊 n-2 亦為奇數，稜塊配對的情況為 k 配上 n-2-k，一定是奇配偶，配對稜塊無對稱性，則不會產生相同稜塊組合因旋轉翻轉可以配對的情形。

2.若稜塊 n 為偶數，中間稜塊 n-2 亦為偶數，稜塊配對的情況為 k 配上 n-2-k，若是偶配偶，產生配對稜塊的對稱情形，則可能出現相同稜塊組合可以配對的情況。但若為奇配偶，配對稜塊無對稱性。則不會產生相同稜塊組合因旋轉翻轉可以配對的情形。

★小結：

1. 從圖形面向觀察發現，

❶若稜塊 n 為奇數，中間稜塊 n-2 亦為奇數，稜塊配對的情況為 k 配上 n-2-k，一定是奇配偶，配對稜塊無對稱性，則不會產生相同稜塊組合因旋轉翻轉可以配對的情形。

❷若稜塊 n 為偶數，中間稜塊 n-2 亦為偶數，稜塊配對的情況為 k 配上 n-2-k。若是偶配偶，產生配對稜塊的對稱情形，則可能出現相同稜塊組合可以配對的情況。但若為奇配偶，配對稜塊無對稱性，則不產生相同稜塊組合因旋轉翻轉可以配對的情形。

2. ❶ n×n×n 中間稜的情形有 $\mathbf{2^{n-2}}$-2 種

❷n×n 中間稜值的公式為

若 n×n 中間稜值為 $0\times2^n+a_{n-1}\times2^{n-1}+\ldots\ldots+a_1\times2^1+0\times2^0$，其中 $a_i=0$ 或 1，i=0、1、……、n

該值的同構中間稜值為 $0\times2^n+a_1\times2^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}\times2^1+0\times2^0$，其中 $a_i=0$ 或 1，i=0、1…、n

❸中間稜值配對滿足嵌合條件時，**嵌配稜和判斷值**均同構於**嵌配稜和** $2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots+2^1$。

❹4×4×4 的嵌配稜和判斷值有 8、6、4，均同構於嵌配稜和 6

5×5×5 的嵌配稜和判斷值有 20、14、18，均同構於嵌配稜和 14

6×6×6 的嵌配稜和判斷值有 48、44、40、34、30、26、20、16、12，均同構於嵌配稜和 30。n 值更大時亦可用同樣的方法處理。

3. 4×4 嵌合面嵌配稜和判斷值 8、6、4，只有 3 種，遠少於研究二(六)4×4 基本稜和、加值稜和判斷值的量與複雜程度；若是 n 值更大，判斷值的量與複雜程度更大。

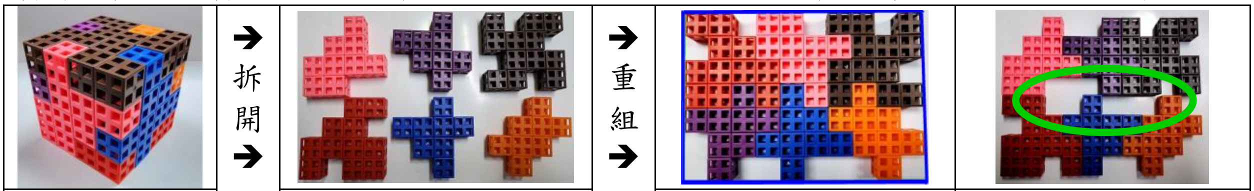
4. 搭配研究二(七)**稜值奇偶性+角量判別式確定嵌合面方位**後，透過**嵌配稜和判斷值，**再大的 n 值，**都可確定 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同嵌合面組成的正確性**。

成功解決嵌合立方體建構的問題後，進一步思考如何 3D 轉 2D，用嵌合立方體 6 個不同面拼成嵌合矩形？最小面積是多少?

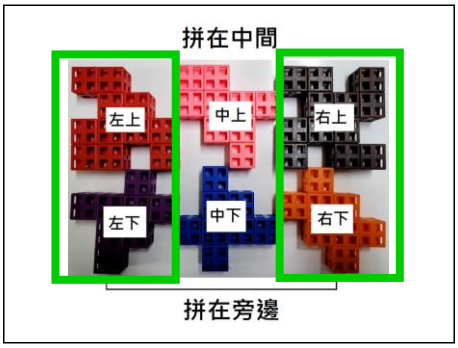
研究三、探討 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同面轉換組成嵌合矩形之方法

嵌合矩形需要相接的邊與邊之間能「完全密合」，不留空的位置。

像下圖是以同樣的嵌合面組成嵌合立方體，左邊就可以組成矩形，右邊圖的就不行。



嵌合立方體　6 個不同嵌合面　嵌合矩形　失敗(中間沒密合)



嘗試系統地將可以組成的 6 個不同嵌合面進行配對組合成矩形，

進一步分析(以 4×4×4 嵌合立方體為例)

觀察 p.7 表 3-2-2 中所有完全不同的 4×4 嵌合面種類。

∵嵌合面去組合矩形時會分成 2 種情形，

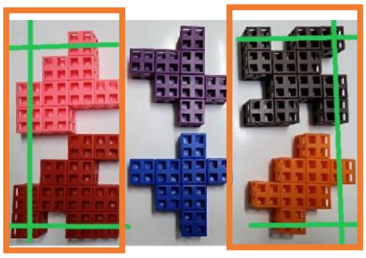
1.拼在旁邊的，也就是左上左下右上右下，

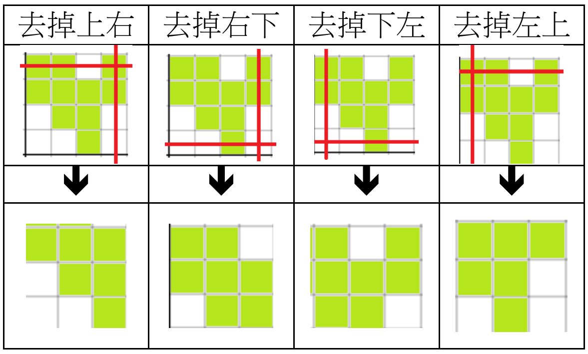
2.拼在中間的，也就是中上中下。

①兩側拼在旁邊組成矩形的嵌合面情形

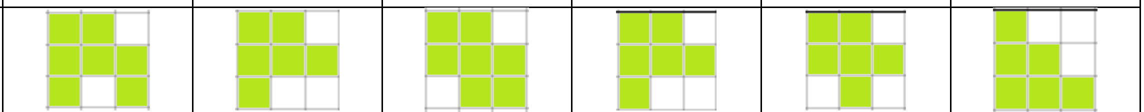
觀察兩側拼在旁邊組成矩形的嵌合面。

當拼在旁邊時需要用到 3×3 平面，∴以所有完全不同的 4×4 嵌合面種類，依序去掉外圍各 1 行 1 列(綠線處)，有 4 種情況，以 2-3 為例如右上。





處理所有完全不同的 4x4 嵌合面，旋轉翻轉之後視為一樣，得到共 6 種情況：

編號	S1				S2				S3				S4				S5				S6			
圖形																								
3x3 同構稜值	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左	上	右	下	左
	6	6	5	7	6	2	1	7	6	3	6	3	6	2	1	7	6	2	2	6	1	1	7	7
	3	3	5	7	3	2	4	7	3	6	3	6	3	2	4	7	3	2	2	3	4	4	7	7

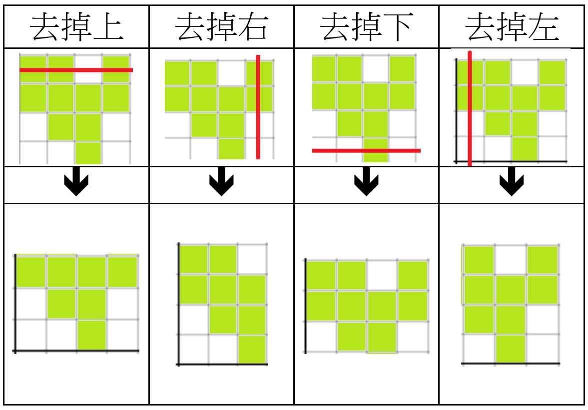
仿研究二(四)進行二進位數值分析，**得到**

❶所有拼在旁邊組合的嵌合面情形共 6 種。

❷兩側拼在旁邊組成矩形的嵌合面的 3x3 同構稜值為 <u>6、3</u>；5；2；<u>1、4</u>。

此時 6、3 可以跟 1、4 配對，2 和 5 配對。組合後的稜和不管是 10、4、7 均同構於 7。當 3x3 出現稜和同構於 7 時代表嵌合成功。

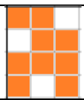
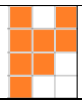
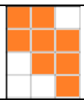
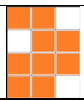
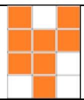
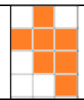
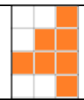
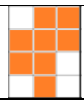
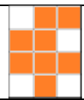
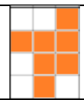
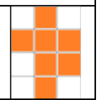
②拼在中間(middle)組成矩形的嵌合面情形



觀察拼在中間組成矩形的嵌合面。

拼在中間時需要用到 4×3 平面，∴以所有完全不同的 4×4 嵌合面種類，依序去掉最外圍 1 行(綠線處)，以 2-3 為例如右：

處理所有完全不同的 4×4 嵌合面，旋轉翻轉之後視為一樣，得到共情況：

編號	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		M11		M12	
圖形																								
4×3	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右	左	右
同構	13	7	15	12	12	7	13	6	13	12	10	7	2	7	2	15	6	12	6	10	2	14	2	14
稜值	11	14	15	3	3	14	11	6	11	3	5	14	4	14	4	15	6	3	6	5	4	7	4	7
3×3	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下	上	下
同構	6	5	5	1	6	1	6	6	2	5	6	1	2	1	1	1	6	2	6	2	1	2	2	2
稜值	3	5	5	4	3	4	3	3	2	5	3	4	2	4	4	4	3	2	3	2	4	2	2	2

得到：

❶所有拼在中間組合矩形的嵌合面情形共 12 種。

❷中間組合矩形的嵌合面 4x4 同構稜值為 7、14；11、13；6、6；2、4；10、5；12、3。
此時 13、11 可以跟 2、4 配對，12 和 3 配對，10 和 5 配對，6、7、14 無配對組合。組合後的稜和不管是 17、13、24、6、20、10、15 均同構於 15。
當 4x4 出現稜和同構於 15 時即代表嵌合成功。

❸中間組合矩形的嵌合面 3x3 同構稜值為 6、3；5；2；1、4。此時 6、3 可以跟 1、4 配對，2 和 5 配對。組合後的稜和不管是 10、4、7 均同構於 7。
當 3x3 出現稜和同構於 7 時即代表嵌合成功。

發現：

1.當滿足 4×4 嵌合稜配對滿足同構稜和 17、13、24、6、20、10、15，加上配對成功面的其他 4×4 嵌合稜再跟其他配對滿足 3×3 同構稜和 10、4、7，若 5 個連接稜都配對成功，則可完成嵌合矩形。

2.雖然嵌合矩形亦可透過同構稜值的稜值組合配對，最後得知是否嵌合成功，但配對過程發現平面部分要考慮 4×3 及 3×3 同構稜值，而在**中間組合矩形及拼在兩側**的稜值卻會重複出現，**難以直接判斷**此稜值隸屬於 3×3 或是 4×3 嵌合稜。導致看到同樣重複出現的值時，難以直接判斷此稜值隸屬於 3×3 或是 4×3 嵌合。故透過稜值判斷嵌合矩形之組成雖然可行，但須多了一道先判斷稜值隸屬哪種嵌合面之程序。

因此，我們嘗試從另一個做法進行處理：

可再將 S1、S2、S3、S4、S5、S6 邊的組合情形分類成

①空邊 1 格(0，0，1)、(1，0，0)有 S1、S2、S3、S4、S5 共 5 種

②空中間 1 格(0，1，0)有 S1 共 1 種

③空邊兩格(0，1，1)、(1，1，0)有 S2、S4、S6 共 3 種

④跳格空兩格(1，0，1)有 S2、S4、S5 共 3 種

接著，先進行中間組合嵌合矩形的配對

情形 1-1.二配二—跳連兩空格的配對，

即(0，0，1，1)+(1，1，0，0)有 M2、M3、M5、M9，此時配對有 4×3 種。

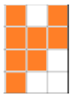
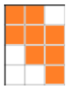
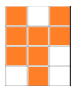
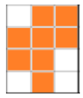
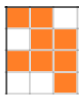
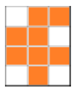
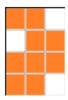
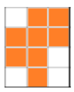
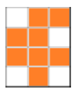
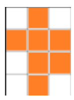
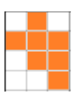
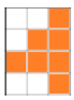
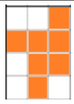
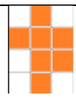
情形 1-2.二配二—空 1 跳 1 兩空格跳格的配對，

即(1，0，1，0)+(0，1，0，1)有 M6、M10，此時配對有 2×1 種。

情形 1-3.二配二—空 1 跳 2 兩空格跳格的配對，

即(0，1，1，0)+(1，0，0，1)有 M4、M9、M10、M12，此時配對有 4×3 種。

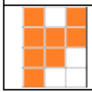
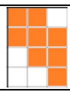
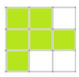
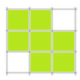
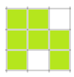
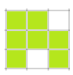
情形 2 一配三—即(0，0，1，0)+(1，1，0，1)有 M7、M8、M11、M12 配 M1、M4，此時配對有 4×2 種。

M2	M3	M5	M9
			
		M6	M10
			
M4	M9	M10	M12
			
M7	M8	M11	M12
			

故中間配對共有 12+2+12+8=34 種，

接續我們將中間配對可以的組合再與兩側適合配對的嵌合矩形進行組合。

如(0，0，1，1)+(1，1，0，0)的 M2+M3 就需要「配對空邊 1 格(0，0，1)、(1，0，0)」及「空中間 1 格(0，1，0)」的，故這個配對組合可以搭成 1 ×5 ×1 ×1=5 種，若以此類推考慮 5 個稜全部配對組合有 142 種，若再配對原 4×4 嵌合稜外圍之 10 個稜的種類，數量更複雜。

(0，0，1，1)+(1，1，0，0)		空邊 1 格(0，0，1)、(1，0，0)					空中間 1 格(0，1，0)	
M2	M3	S1	S2	S3	S4	S5	S1	S1
								

依此方法，將可組成之嵌合立方體拼成矩形，依 12 種平面角量組合情形逐一列出一例見手稿，右呈現 4+3+1+0+0+0 之例：

4+3+1+0+0+0

★小結：

1.建構嵌合矩形可透過數值分析—同構稜值的稜值組合配對，最後得知是否嵌合成功，但配對過程發現平面部分要考慮 4×3 及 3×3 同構稜值，而在**中間組合矩形及拼在兩側**的稜值卻會重複出現，**難以直接判斷**此稜值隸屬於 3×3 或是 4×3 嵌合稜。故透過稜值判斷嵌合矩形之組成雖然可行，但須多了一道先判斷稜值隸屬哪種嵌合面之程序。

2.建構嵌合矩形可透過圖形分析，進行配對組合，但考慮嵌合矩形中間 5 個稜全部配對組合有 142 種，若再搭上原 4×4 嵌合稜外圍之 10 個稜的種類配對，數量更複雜。

肆、討論

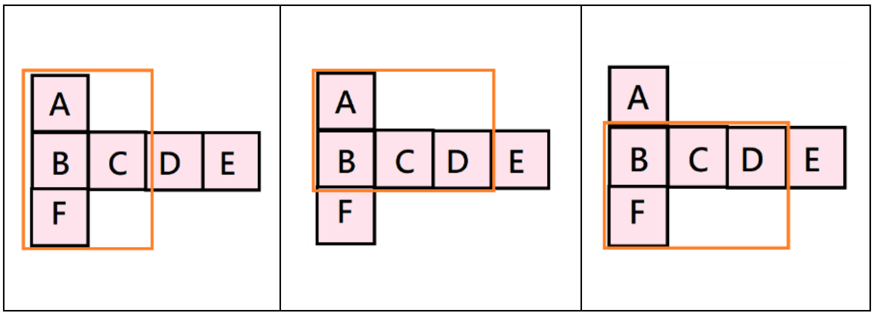
困難：若要判斷 6 個不同嵌合面是否能組成嵌合矩形，根據研究三結果，透過拆解平面、數值分析的方式過程仍繁複，因此思考**是否有更快速轉換的方法?**

突破：利用研究一及研究二結果，在 3D 嵌合立方體的基礎下，透過**展開圖+旋轉運算快速組成矩形。**

討論一、利用 3D 立體結構快速轉換 2D 嵌合矩形之方法

透過展開圖的分析與拆解進行結構轉換

觀察 3D 嵌合立方體及展開圖，發現研究三中的嵌合矩形面的組合為 3x2，若搭配展開圖看，可知**重疊最多是展開圖其中 4 面**，如右上圖舉例。



進一步發現，找出展開圖其中「**連續的 3 個面**」（如 A、B、F 面），再從這 3 個面連接的其中一面（如 C 面），透過「**旋轉運算**」，就可行成 2D 矩形中 4 塊基本結構，命為「**3＋1 連」基本結構**，最後再將剩下的 2 個面（如面 D、E）旋轉配對，可快速轉換成 2D 矩形，形成「**3＋1 連配 2**」**矩形結構**。

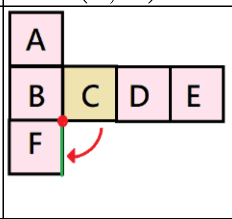
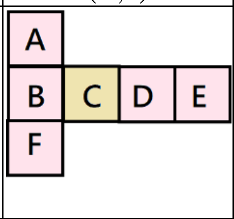
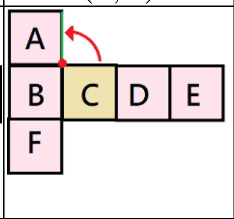
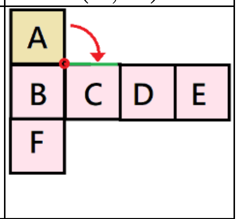
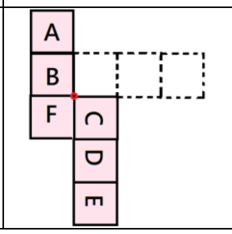
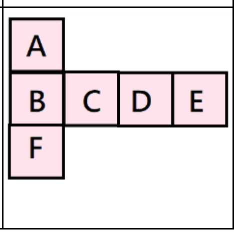
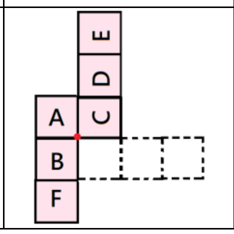
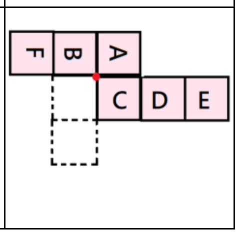
1.旋轉(rotate)運算：以展開圖的某 1 面為旋轉面，沿著相鄰面的邊做旋轉，形式有 3，

①順時針旋轉運算為正，

②逆時針旋轉為負，

③不動為 0；當靠到 1 次邊時算旋轉步數 1 次，

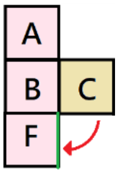
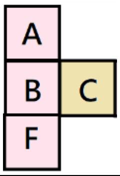
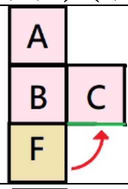
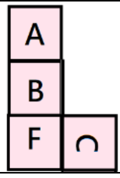
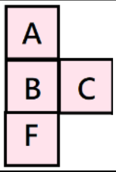
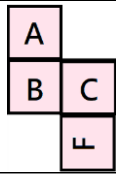
以(面代號，旋轉運算步數)表示。如下圖所示

(面代號，旋轉步數)	(C,+1)	(C,0)	(C,-1)	(A,+1)
旋轉運算				
運算後				

旋轉運算主要想透過運算找出展開圖中 4 個連續的面結構。

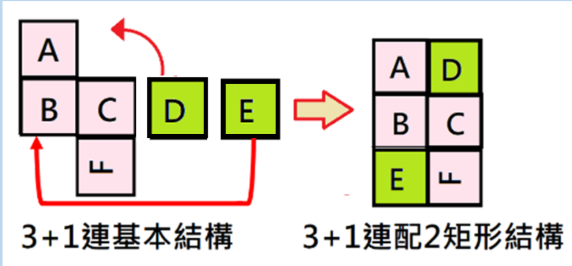
2.「3+1 連」基本結構：嵌合立方體的展開圖中某連續 3 面為固定不動面，再選原連續 3 面之外連接的其中 1 個面做旋轉運算。得到「**3+1 連」基本結構**，以**(面代號，面代號，面代號)+(面代號，旋轉運算步數)**表示。

如下圖所示

「3+1 連」基本結構 (面,面,面)+(面,旋轉運算步數)	「3+1 連」基本結構 (A,B,F)+(C,+1)	「3+1 連」基本結構 (A,B,F)+ (C, 0)	「3+1 連」基本結構 (A,B,C)+(F,-1)
旋轉運算			
「3+1 連」 基本結構圖			

3.「3+1 連配 2」矩形結構

從「3+1 連」基本結構，如右是(A,B,C)+(F,-1)，最後再從可行的嵌合立方體剩下將未成為基本結構的 2 個面，拆下來去組合配對，成為「3+1 連配 2」矩形結構。

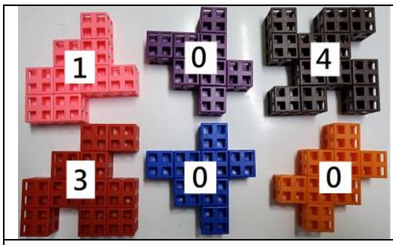
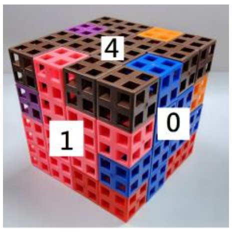
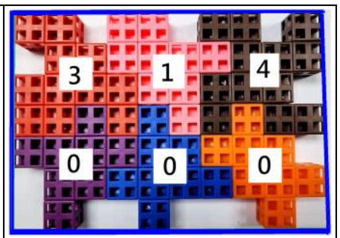


3D 嵌合立方體轉換組成 2D 嵌合矩形之討論

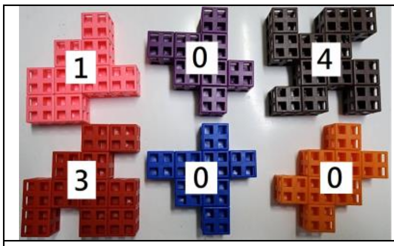
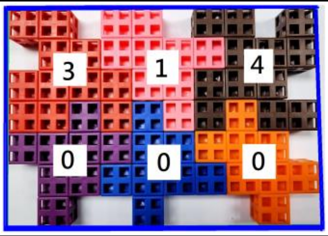
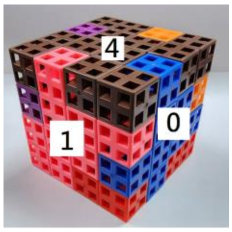
【6 個不同嵌合面$\xrightarrow{組成}$3D 嵌合立方體】可轉換組成【2D 嵌合矩形】

由下**發現：**透過 6 個不同嵌合面成功組合的 3D 嵌合立方體，可以組成 2D 嵌合矩形。

例：4+3+1+0+0+0 的其中一例說明。

	➔ 組 成 ➔		➔➔ 拆開 / 重組 ➔➔	
6 個不同嵌合面		嵌合立方體		嵌合矩形

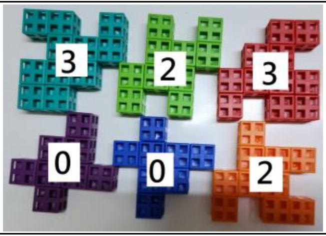
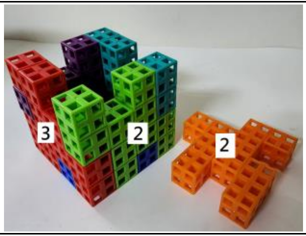
此時 2D 嵌合矩形 6 個不同嵌合面亦可組成 3D 嵌合立方體(見下圖)。

	➔ 組 成 ➔		➔➔ 拆開 / 重組 ➔➔	
6 個不同嵌合面		嵌合矩形		嵌合立方體

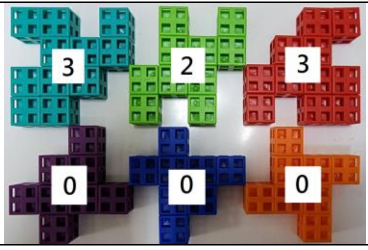
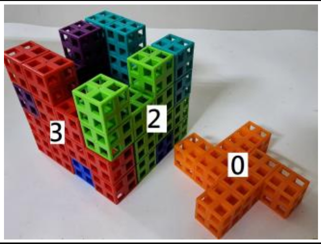
【6 個不同嵌合面$\xrightarrow{組成}$2D 嵌合矩形】不一定可轉換組成【3D 嵌合立方體】

由下**發現**：透過 6 個不同嵌合面成功組合的 2D 嵌合矩形，這 6 個面卻不一定可以組成 3D 嵌合立方體。

例 1：3+3+2+2+0+0 的其中一例可組成 2D 嵌合矩形，但角量總和超過 8，無法組成立方體。

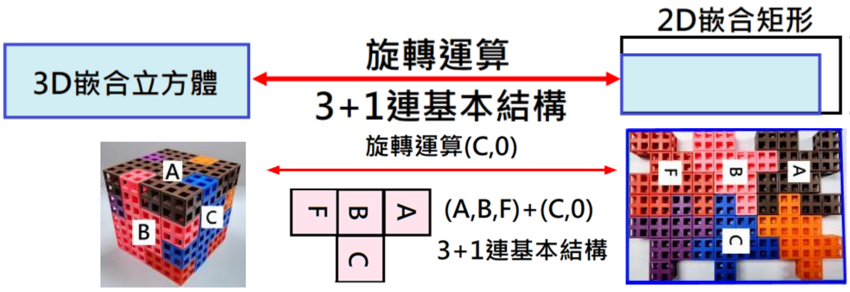
	➔ 組成 ➔		➔➔ 拆開 重組 ➔➔	
6 個不同嵌合面		嵌合矩形		嵌合立方體

例 2：3+2+3+0+0+0 的其中一例可組成 2D 嵌合矩形，但角量總和=8，也無法組成立方體。

	➔ 組成 ➔		➔➔ 拆開 重組 ➔➔	
6 個不同嵌合面		嵌合矩形		嵌合立方體

★小結：

從可行的 3D 嵌合立方體，透過「旋轉運算」，從「3+1 連基本結構」快速組成 2D 嵌合矩形。反之，**部分** 2D 嵌合矩形可由「旋轉運算」得到「3+1 連基本結構」快速組成 3D 嵌合立方體。



示例如右：

思考如何拼才能嵌合矩形面積最小?

討論二、從 3D 及 2D 不同面向探討 n×n×n 嵌合立方體六個不同面所組成矩形面積之最小值

嵌合面組成矩形面積最小值

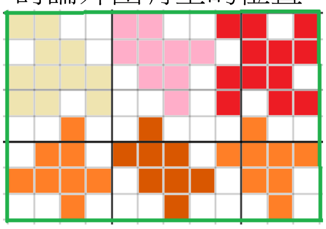
本研究針對可組成嵌合立方體的嵌合面如何組成最小面積的矩形進行探討，

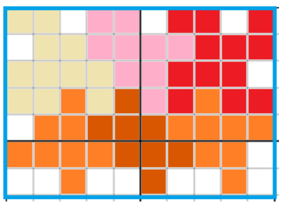
多方嘗試，發現

如果是 4×4 平面去拼接，不做嵌合，加入空的位置，最大面積為 4×4×(3×2)=96(左下圖)，

同理，n×n 平面去拼接，不做嵌合，加入空的位置，最大面積為 $n \times n \times (3\times2)= 6n^2$，

加入嵌合條件，不討論外圍有空的位置，最大面積為(4×3-2)×(4×2-1)=70(右下圖)，



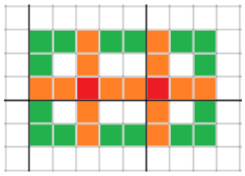


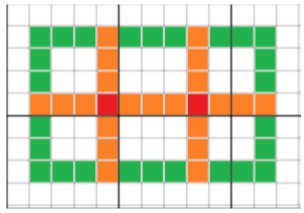
同理，n×n 平面去拼接，不做嵌合，加入空的位置，最大面積為(3n-2)(2n-1)。
但∵是嵌合面組成，還要考慮外圍有空的位置；且這些嵌合面要組成最小面積的矩形，需要相接的邊與邊之間能「完全密合」，不留空的位置。
不管怎麼拼，4×4×4 嵌合立方體會形成 2 種完全密合的矩形：
第 1 種矩形面積(含空白處)為 70，不管怎麼拼，這種嵌合矩形的嵌合面總塊數為 56
第 2 種矩形面積(含空白處)為 70，不管怎麼拼，這種嵌合矩形的嵌合面總塊數為 56
得到：6 個不同 4×4 嵌合面組成矩形面積之最小值為 70，而形成嵌合面的總塊數恆為 56。

令人費解的是，為何「這些 6 個不同 4×4 嵌合面組成矩形面積之最小值恆為 70，而形成嵌合面的總塊數恆為 56 個」呢?

從嵌合面組成矩形的 2D 面向來看

∵是嵌合面組成，還要考慮外圍有空的位置；且這些嵌合面要組成最小面積的矩形，需要相接的邊與邊之間能「完全密合」，不留空的位置。
∴4×4 嵌合面組成矩形內部除最外圍可能有空隙外，是完全密合的
此時內部全滿矩形為(4×3-4)×(4×2-3)=40
不管是拼在旁邊組合或是中間組合矩形的嵌合面情形，先扣除中間嵌合恆為橘+紅色的區域，配上原本尚未組矩形時包含角塊的所有的嵌合稜塊數(稜中間塊+角塊)，如右：





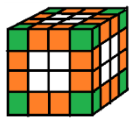
從 12 種平面角量組合情形配對可知 6 個嵌合面的稜中間塊數和恆為 1×4×6(也可以想為 2×12)、角塊數和恆為 8，以 4×4 的 4+3+1+0+0+0 為例，其餘詳見手稿。

平面角量組合情形	嵌合面不同角塊數						稜中間塊數和	角塊和
4+3+1+0+0+0	4	3	1	0	0	0	4	8
嵌合面不同角塊數對應稜的中間塊數	1	1	1	1	1	1		

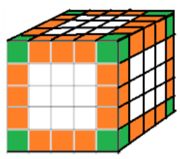
不管是旁邊組合矩形或是中間組合矩形的平面情形，
∴需要的嵌合塊數和為 40-[2×(3+2×2)+2]+2 ×12+8=56
同理，如果是 5×5 嵌合面組合矩形需要的嵌合塊數和為 77-[3×(3+2×2)+2]+3 ×12+8=98，其中 77 =(5×3-4)×(5×2-3)=11×7
推廣到一般式需要的嵌合塊數和為(3n -4)(2n-3) -[(n-2)×(3+2×2)+2]+(n-2) ×12+8=6n^2-12n+8

從嵌合立方體組成矩形的 3D 面向來看

組成矩形跟嵌合立方體的平面是同一組平面，
嵌合立方體的每一面中間填滿的塊數(白色)+稜中間的塊數(橘色)+角塊數(綠)



4×4 嵌合面組合矩形需要的嵌合塊數和為 2×2×6+2×12 +8=56
同理，5×5 嵌合面組合矩形需要的嵌合塊數和為 3×3×6+3×12 +8=98，



推廣到一般式需要的嵌合塊數和為(n-2)^2×6+(n-2)×12 +8=6n^2-12n+8
此時 6 個不同嵌合面組成矩形面積之最小值為
[n(n-1)-3] ×[n(n-2)-1]=(n^2-n-3)(n^2-2n-1)=n^4-3n^3-2n+7n+3

★小結：

不管是從 2D 或 3D 的面向去討論，皆可以確定 6 個不同嵌合面組成矩形**面積之最小值為 [n(n-1)-3] ×[n(n-2)-1]=n^4-3n^3-2n^4+7n+3，需要的嵌合塊數恆為 6n^2-12n+8，其中 n≧4。**

伍、結論

綜合整體研究結果與討論，得到:

一、基本嵌合面受限於單位結構的厚度，僅正六面體可形成嵌合正多面體。

二、透過「實際操作、二進位數值、稜值組合」確定 n×n×n 嵌合立方體組合之正確性：

1.嵌合立方體的角量和為 8，滿足嵌合立方體條件的「**平面角量組合**」情形共有 12 種：

4+3+1+0+0+0、4+2+2+0+0+0、4+2+1+1+0+0、4+1+1+1+1+0、3+3+2+0+0+0、3+3+1+1+0+0、3+2+2+1+0+0、3+2+1+1+1+0、3+1+1+1+1+1、2+2+2+2+0+0、2+2+2+1+1+0、2+2+1+1+1+1。

2.嵌合面的 4 稜二進位數值化形成稜值，在旋轉、翻轉後雖數值不同，但和原來的圖形代表意義相同，形成「**同構稜值**」。

n×n 嵌合稜值之同構稜值公式為

若 n×n 嵌合稜值為 $a_n\times2^n+a_{n-1}\times2^{n-1}++\ldots+a_1\times2^1+a_0\times2^0$，其中 a_i=0 或 1，i=0、1、……、n

該稜值之同構稜值為 $a_0\times2^n+a_1\times2^{n-1}++\ldots+a_{n-1}\times2^1+a_n\times2^0$，其中 a_i=0 或 1，i=0、1、……、n

其中 4×4 嵌合面互為同構稜值的有 <u>13 和 11</u>、<u>12 和 3</u>、<u>10 和 5</u>、<u>4 和 2</u>。

3.整個嵌合面的 4 稜連續數值，在旋轉、翻轉後會和原來的平面連續數值一樣，視為「**同構稜值組合**」。

4.透過同構稜值、基本稜和及加值稜和判斷值集合的元素配對可確定嵌合立方體，任意稜和只要滿足嵌合稜條件，都可經圖形轉換，數值變換同構於 $2^n+2^{n-1}+\ldots+2^1+1$。但會出現基本稜和與加值稜和值相同，需要進一步判斷的情況。

5.透過稜值奇偶性質判斷角量

①稜值 L≧2^{n-1}+2(4×4 嵌合面的有 12、10)，且 L 是偶數，則角量為 1。

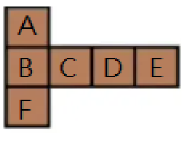
②稜值 L≧2^{n-1}+2(4×4 嵌合面的有 13、11)，且 L 是奇數，則角量為 2。

③稜值 L<2^{n-1}+2(4×4 嵌合面的有 3、5)，且 L 是奇數，則角量為 1。

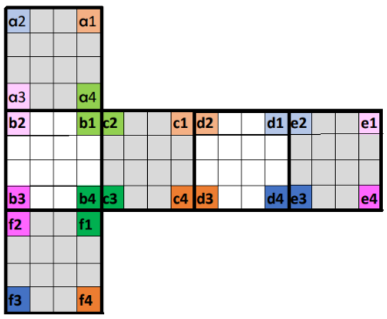
④稜值 L<2^{n-1}+2(4×4 嵌合面的有 2、4)，且 L 是偶數，則角量為 0。

6.透過象限化嵌合面之角量，搭配展開圖得到 8 個角量判別式

展開圖面序



象限化嵌合面角量



角量判別式

$$\begin{cases} a_1+c_1+d_2=1 \\ a_2+d_1+e_2=1 \\ a_3+e_1+b_2=1 \\ a_4+b_1+c_2=1 \\ f_1+b_4+c_3=1 \\ f_2+e_4+b_3=1 \\ f_3+d_4+e_3=1 \\ f_4+c_4+d_3=1 \end{cases}$$

7.透過嵌配稜和判斷值集合的元素配對可確定嵌合立方體中間稜配對。

❶ n×n 中間稜值的公式為

若 n×n 中間稜值為 $0\times2^n+a_{n-1}\times2^{n-1}+\ldots\ldots+a_1\times2^1+0\times2^0$，其中 a_i=0 或 1，i=0、1、…、n

該值的同構中間稜值為 $0\times2^n+a_1\times2^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}\times2^1+0\times2^0$，其中 a_i=0 或 1，i=0、1、…、n

❷中間稜值配對滿足嵌合條件時，**嵌配稜和判斷值**均同構於 $2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots\ldots+2^{1}$。其中 4×4×4 的嵌配稜和判斷值有 8、6、4，均同構於嵌配稜和 6。n 值更大時亦可用同樣的方法處理。

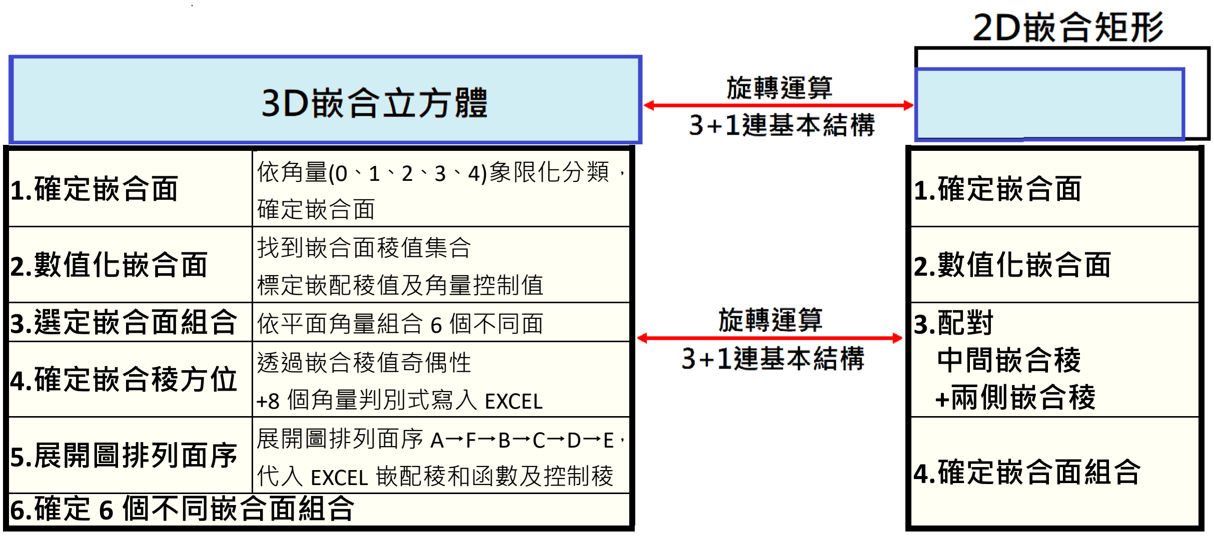
8.透過「稜值奇偶性」+「8 個角量判別式」可確定「每個嵌合面對應嵌合稜的方位」；再配合「嵌配稜和」判斷值，再大的 n 值，都可確定 n×n×n 嵌合立方體的 6 個不同嵌合面組成的正確性。

9.最少知道連續 3 個嵌合面時(如 ABC、ABF、ADF、BCD……等 3 面)即可決定嵌合立方體所有面，但若遇 BCDE 左右稜值恰有不同選擇時，則需再多 1 面決定。

三、**透過「旋轉運算」可得「3+1 連基本結構」**，快速將 3D 嵌合立方體與部分 2D 最小嵌合矩形轉換。

四、**從 2D 或 3D 面向討論，皆可確定 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同嵌合面組成矩形面積之最小值公式為 $[n(n-1)-3]\times[n(n-2)-1]=n^4-3n^3-2n^2+7n+3$，需要的嵌合塊數恆為 $6n^2-12n+8$，(n≧4)**。其中 4×4 嵌合面組成最小嵌合矩形的塊數不變量為 56。

五、透過「圖形」與「數值」解構，得到 6 個不同嵌合面組成 n×n×n 嵌合立方體系統建構流程圖如下，並可從 3D 立體嵌合立方體與部分 2D 平面嵌合矩形轉換。



陸、參考文獻

1.王俞量、吳立宇、郭庭妤、張雯棋、鄧又宸(2016)。拼成長方形---五連塊探秘。中華民國第 56 屆中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科。

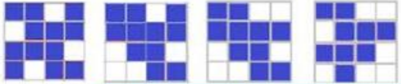
2.楊貽潯、謝佳淩、吳光宇、黃冠博(2005)。正立方體的變裝秀---五連塊（Pentominoes）拼拼樂。中華民國第 45 屆中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科。

3.劉峻永、鄭富鴻(2020)。六方連塊之矩形大拼排。中華民國第 60 屆中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科。

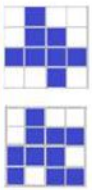
【評語】080407

該研究以立方體的可嵌合性出發，探討 n×n×n 嵌合立方體的建構方法。依照其定義的可嵌合不斷嘗試其可能性並運用角量、象限化與二進位數值紀錄與描述可嵌合立方體的性質，最後在探討可嵌合立方體六個面展開組合成矩形的方法。研究過程須不斷嘗試操作並作記錄，透過 EXCEL 公式運算與控制，找到所有符合條件之嵌合立方體組合，精神可嘉。立體嵌合在表達上難度較高，研究者以文字搭配模型與圖示，使研究的推論過程清楚呈現、條理分明，也獲得豐富的研究結果，值得稱許。

作品海報



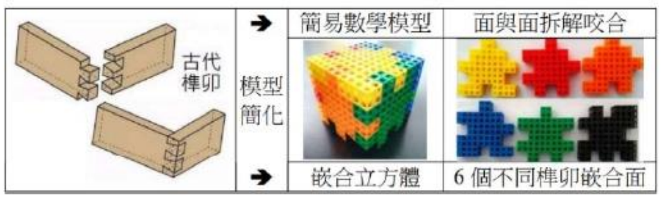
穿梭2D與3D
~數形合一解構嵌合立方體之研究



壹、前言

數學研習中教授提供 6 個 5×5 不同的面，要我們挑戰類似古代榫卯，將每個嵌合面與面「咬合」成中空立方體；又利用這 6 個不同的面，拼成面積最小的矩形，有趣又不容易，開始了一系列立體結構的探索。**研究目的**：

一、探討嵌合正多面體的存在性與限制條件。
二、探討 n×n×n 嵌合立方體之建構方法。
三、探討 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同面轉換組成嵌合矩形之方法。



貳、解釋名詞

一、**嵌合面**：組成立方體的面稱為「嵌合面」。嵌合面上的每個方塊都須相連(如右下圖)。

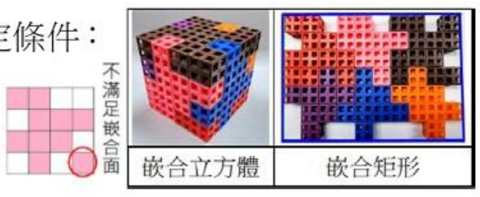
二、**嵌合稜**：嵌合面的稜邊稱為「嵌合稜」，嵌合面組合時每個稜相互咬合緊密不脫落，設定條件：

1.嵌合稜**中間稜至少填 1 個，不能全填滿**。

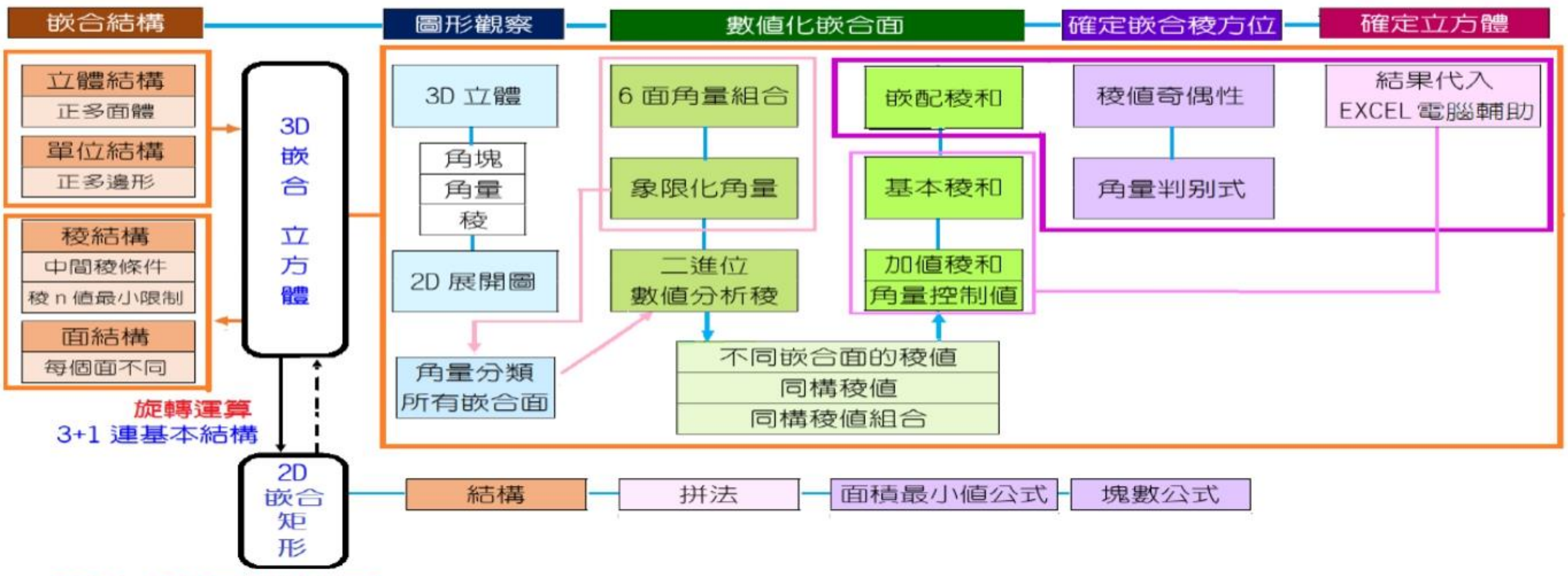
2.嵌合稜中間(n-2)個非角落的方塊數量範圍：1≦稜中間方塊數量≦(n-3)

三、**嵌合立方體**：由 **6 個不同嵌合面**組成，表面完全封閉的中空正六面體。

四、**嵌合矩形**：用 6 個不同嵌合面組成方塊，**延伸後 4 角為「直角」**，且相接的邊與邊能**「完全密合」**，不留空的位置。



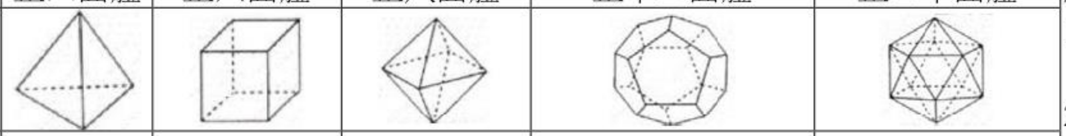
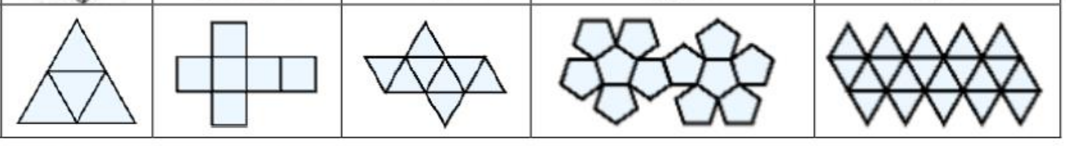
參、研究架構



肆、研究過程與結果

一、探討嵌合正多面體的存在性與限制條件

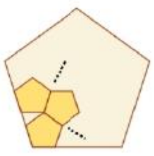
★根據定義，探討稜邊為 n 單位的 5 個正多面體結構，可做嵌合的正多面體是哪些?

正多面體	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
正多面體					
展開圖					

將正多面體切割稜邊後**發現**：

1.嵌合面受限單位結構的厚度，**僅正六面體可形成嵌合正多面體**。

2.從 2D 或 3D 面向看嵌合面的組成，正四、正八、正十二、正二十面體皆無法形成嵌合正多面體。

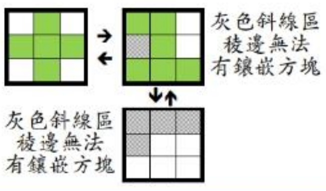


★探討嵌合立方體之限制條件

嵌合立方體之最小限制

∵3×3×3 嵌合稜只有 3 單位，若要滿足嵌合時稜邊中間方塊必要存在，則不合。

發現:滿足條件**最小的是 4×4×4 嵌合立方體**。



嵌合立方體之建構及重複性分析

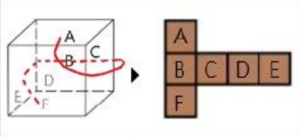
根據定義，透過 USL 方塊實際拼出**每個面都不同**的嵌合立體。若**未考慮方塊位置配置，就易發生嵌合面重複。**

到底如何才能有效地構造出嵌合立方體?

二、探討 n×n×n 嵌合立方體之建構方法

★探討嵌合立方體與其展開圖的關係

∵嵌合立體每面組成不同，**立體無法看到全貌，∴透過展開圖觀察**，依序命名 A、B、C、D、E、F。

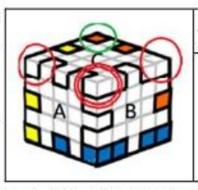


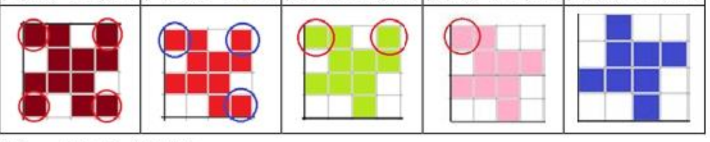
★如何利用嵌合立方體角塊特性構造嵌合面

嵌合面的初步系統分類方式為角塊

嵌合立方體不管各面如何，**組成立體或拆成展開圖，6 個面角落方塊的總和都是 8 個**，為研究方便進行命名。

1.角塊：嵌合立方體之頂點所在的方塊。**同時影響 3 個稜**，為分析之關鍵點。



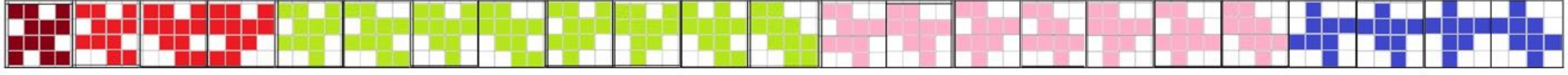
角量 4 的面	角量 3 的面	角量 2 的面	角量 1 的面	角量 0 的面
				

2.角量：每個嵌合面上的角塊(角落方塊)數量。嵌合面依角量進行分類有 5 種，如上舉例：

發現：嵌合立方體的角量和為 8，實際符合不同嵌合面角量組成情形共 12 種。

依角量分類不同嵌合面

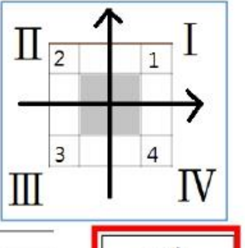
先系統找到角量 0 的嵌合面，再尋找角量 4、3、2、1 的面。將所有 4×4 嵌合面(含方塊不連續的狀況)**去除「與中間 2×2 不相連」**及「**旋轉或翻轉後相同**」，依「**角量—第幾種**」編號，如 **2-3** 代表角量 **2** 的第 **3** 種嵌合面。得到所有 4×4 嵌合面種類

4-1	3-1	3-2	3-3	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6	2-7	2-8	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6	1-7	0-1	0-2	0-3	0-4
																						

★象限並數值化標記嵌合面 4 個角塊的有無

角塊 1234 的位置分別坐落在第I、II、III、IV象限，「有角量」為 1，「沒有角量」為 0，

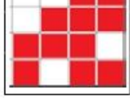
依第I、II、III、IV象限出現的順序，依四個象限角塊存在的有無，得到角量 0 表示為 0000，角量 4 為 1111，角量 3 為 1110、1101、1011、0111，角量 2 為 1100、1010、1001、0110、0101、0011，角量 1 為 1000、0100、0010、0001。



★「圖形」搭配「二進位數值方法」解構不同嵌合面稜值及角量之同構特徵

依順時針填寫上右下左 4 個嵌合稜單位方塊對應位置的「**有或無**」為「**1 或 0**」，利用 EXCEL 輔助進行二進位對十進位的轉譯。如嵌合面 3-2：

形 3-2



數值 3-2

0	0	1	1
0			1
1			0
1	0	1	1

二進位															
上稜				右稜				下稜				左稜			
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0	2^3	2^2	2^1	2^0

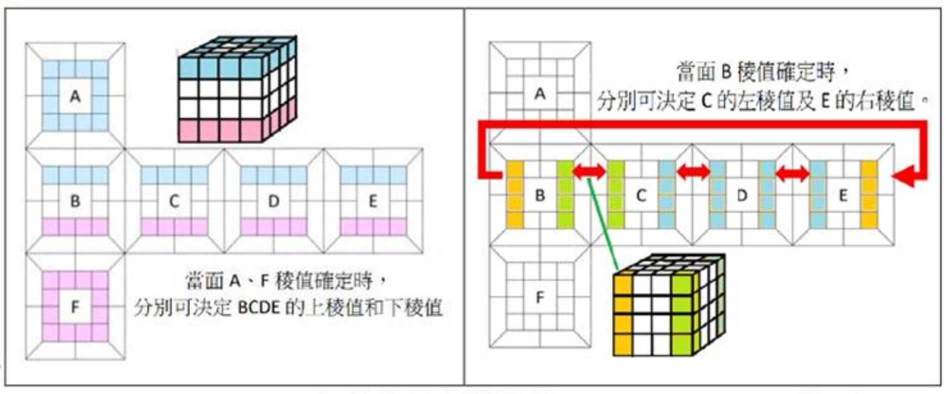
十進位稜值			
上	右	下	左
3	13	13	12
EXCEL 轉換			

形	數	
嵌合稜	對應二進位數值	嵌合稜值
	1101	13
	1100	12
	1010	10
	0100	4

形	數	
翻轉後嵌合稜	對應二進位數值	嵌合稜值
	1011	11
	0011	3
	0101	5
	0010	2

互為同構稜值		
13	↔	11
12	↔	3
10	↔	5
4	↔	2

★**數值系統分析嵌合立方體之組成**透過「**實際操作、二進位數值、棱值組合**」確定嵌合組合之正確性



發現：1. 最少知道連續 3 個嵌合面時(例如 ABF 3 面)，可決定嵌合立方體所有面，但若遇 BCDE 左右棱值恰有不同選擇時，則需再多 1 面(例如 D 面)決定。

2. 電腦 EXCEL 輔助，全面分析嵌合立方體數值特徵：

❶**嵌合立方體稜和是特定值**，以 4×4×4 嵌合立方體為例，只會出現 4、5、6、7、8、9、10、12、13、14、15、16、17、20、24 共 15 種；像 **11、18……等數字一定不會出現**。

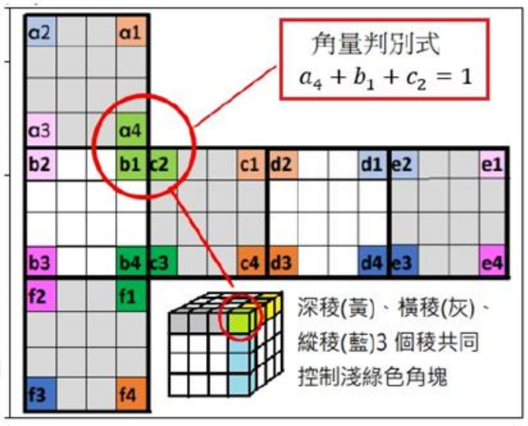
❷**稜和不同，需要加入不同稜控制值以提供不同角量**，情形有：A.**基本稜和**—不需加入控制角量；B.**加值稜和**—需加入控制值。

3. 4×4×4 嵌合立方體的 EXCEL 基本稜和判斷值為 **6**、10、13、15、17、20、24，EXCEL 加值稜和判斷值為 **6**、7、……、34(除了 12)；其中加值稜和可以透過控制，填滿所有角塊。不管哪個稜和，**只要滿足嵌合稜條件，都可以經過圖形轉換，數值變換同構於 15**。

困難：透過「基本稜和、加值稜和」判斷嵌合立方體是否成立，判斷值過多，還會出現基本稜和與加值稜和值相同，需要進一步判斷的情況。

突破：原先基本稜和跟加值稜和是「整個稜」配對，現在將「角塊」與「中間稜」個別來看。先處理「角塊」部分。

★**確定每個嵌合面對應嵌合稜的方位**



1.透過稜值奇偶性判斷角量，確定每個嵌合面對應嵌合稜的方位

①當 n×n×n 嵌合立方體**稜值 L≧2^{n-1}+2，且 L 是偶數，則角量為 1**(如 4×4×4 嵌合立體的稜值為 12、10)

②當 n×n×n 嵌合立方體**稜值 L≧2^{n-1}+2，且 L 是奇數，則角量為 2**(如 4×4×4 嵌合立體的稜值為 13、11)

③當 n×n×n 嵌合立方體**稜值 L<2^{n-1}+2，且 L 是奇數，則角量為 1**(如 4×4×4 嵌合立體的稜值為 3、5)

④當 n×n×n 嵌合立方體**稜值 L<2^{n-1}+2，且 L 是偶數，則角量為 0**(如 4×4×4 嵌合立體的稜值為 2、4)

嵌合立方體的**每個角塊均由 3 個嵌合稜**控制，深稜(黃)橫稜(灰)縱稜(藍)3 稜共同控制淺綠色角塊(右圖)，依據象限化角量，依序將 A 面 4 個位置的角量標記成 a_1、a_2、a_3、a_4，其餘面以此類推，配合展開圖最後得到 8 個角量判別式。將「**稜值奇偶性質+8 個角量判別式**」結果寫入 EXCEL，可以**透過「嵌合稜值」確定是否滿足「嵌合面角量之要求」及「每個嵌合面對應嵌合稜的方位」**。

角量判別式

$$\begin{cases} a_1+c_1+d_2=1 \\ a_2+d_1+e_2=1 \\ a_3+e_1+b_2=1 \\ a_4+b_1+c_2=1 \\ f_1+b_4+c_3=1 \\ f_2+e_4+b_3=1 \\ f_3+d_4+e_3=1 \\ f_4+c_4+d_3=1 \end{cases}$$

角量	編號	展開圖序	上	右	下	左	稜值奇偶判斷 第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	對照↔確定	稜值奇偶判斷 第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	角量判別式	
																$a_1+c_1+d_2$	1
4	1	A	A1	A2	A3	A4	a_1	a_2	a_3	a_4		a_1	a_2	a_3	a_4	$a_2+d_1+e_2$	1
1	2	B	B1	B2	B3	B4	b_1	b_2	b_3	b_4		b_1	b_2	b_3	b_4	$a_3+e_1+b_2$	1
0	3	C	C1	C2	C3	C4	c_1	c_2	c_3	c_4		c_1	c_2	c_3	c_4	$a_4+b_1+c_2$	1
0	4	D	D1	D2	D3	D4	d_1	d_2	d_3	d_4		d_1	d_2	d_3	d_4	$f_1+b_4+c_3$	1
0	2	E	E1	E2	E3	E4	e_1	e_2	e_3	e_4		e_1	e_2	e_3	e_4	$f_2+e_4+b_3$	1
3	3	F	F1	F2	F3	F4	f_1	f_2	f_3	f_4		f_1	f_2	f_3	f_4	$f_3+d_4+e_3$	1
8																$f_4+c_4+d_3$	1

電腦 EXCEL 輔助(4+3+1+0+0+0 示例)

K4 =MOD(F4,2) =IF((F4>2^3+2),1,0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1				稜	值				奇偶	判斷				奇偶	判斷				
2	角量	編號	展開圖	上	右	下	左	和	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限		第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	角量判斷式	角量
3	4	1	A	13	13	13	13	52	1	1	1	1	對照	1	1	1	1	a1+c1+d2	1
4	1	2	B	4	2	3	12	21	0	0	1	0	確定	0	0	1	0	a2+d1+e2	1
5	0	3	C	4	2	2	4	12	0	0	0	0		0	0	0	0	a3+e1+b2	1
6	0	4	D	4	2	4	2	12	0	0	0	0		0	0	0	0	a4+b1+c2	1
7	0	2	E	4	4	4	2	14	0	0	0	0		0	0	0	0	f1+b4+c3	1
8	3	3	F	3	11	13	12	39	1	0	1	1		1	0	1	1	f2+e4+b3	1
9	8																	f3+d4+e3	1
10																		f4+c4+d3	1

★**每個嵌合面嵌合稜中間部分的配對數值分析**

嵌配稜和：嵌合立方體的中間稜塊須密合，**中間稜值配對的和是特定值**，命為嵌配稜和。

以 4×4×4 嵌合立方體為例，中間稜只有 2 種(、)，旋轉翻轉後的中間稜值是 2、4(0 1、1 0)，嵌配稜和有 4(=2+2)、6(=2+4)、8(=4+4)等 3 種，均同構於 6。同樣做法，5×5×5 嵌合立方體中間稜只有 6 種情形(如最右圖)；中間稜組合是情形 1、3 配情形 4、6；情形 2 配情形 5，共 2×2+1=5 種組合，嵌配稜和只有 20(=8+12)、14(=2+12、8+6、10+4)、8(=2+6)等 3 種數值，均同構於 14。

•5×5 中間稜值配對表

	12	6	10
8	20	14	
2	14	8	
4			14

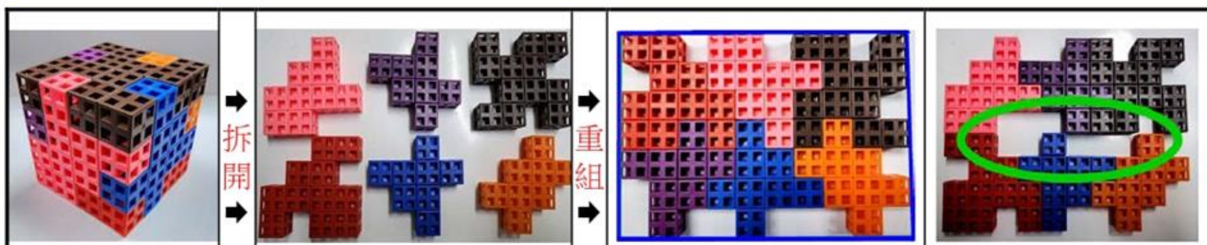
•5×5×5 嵌合立方體中間稜情形

情形	角塊	中	間	稜	角塊	中間稜值
1		1	0	0		8
2		0	1	0		4
3		0	0	1		2
4		1	1	0		12
5		1	0	1		10
6		0	1	1		6

發現：1. 4×4 嵌合面**嵌配稜和判斷值 8、6、4，只有 3 種**，遠少於 4×4 基本稜和、加值稜和判斷值的量與複雜程度；若 n>4，可降低基本稜和、加值稜和判斷值的量。

2. 搭配**稜值奇偶性+角量判別式確定嵌合面方位**後，透過**嵌配稜和判斷值**，n 值再大，**都可確定 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同嵌合面組成的正確性**。

三、探討 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同面轉換組成嵌合矩形之方法



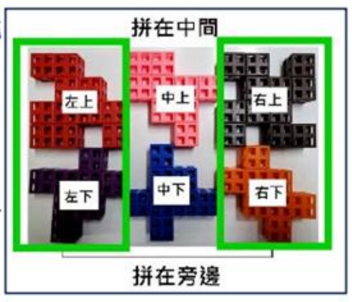
嵌合立方體 | 6 個不同嵌合面 | 嵌合矩形(可) | 失敗(沒密合)

嵌合矩形需要**相接的邊與邊能「完全密合」**，不留空的位置。如左欄所示，左邊圖滿足條件，右邊圖的就失敗。

嵌合面組合矩形時分成：

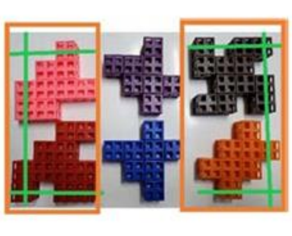
1.拼在旁邊的，即左上左下右上右下。

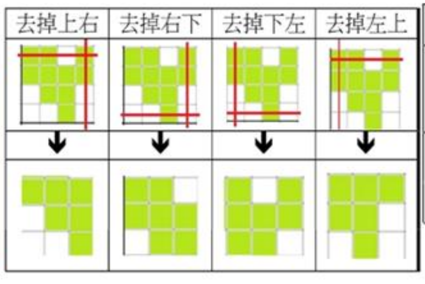
2.拼在中間的，即中上中下。



1.拼在旁邊組合矩形的平面情形

當拼在旁邊時需要用到 3×3 平面，將所有 4×4 嵌合面，依序去掉外圍各 1 行 1 列(如右)，旋轉翻轉後視為一樣，進行**二進位數值分析**：



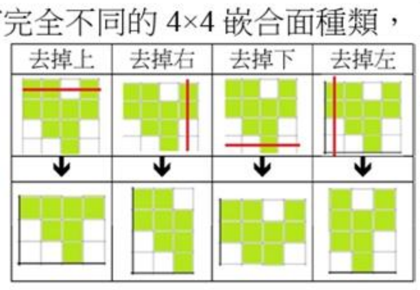


編號	S1				S2				S3				S4				S5				S6			
圖形																								
3×3 同構稜值	6	3	5	7	6	2	1	7	6	3	6	3	6	2	1	7	6	2	2	6	1	1	7	7
	3	6	5	7	3	2	4	7	3	6	3	6	3	2	4	7	3	2	2	3	4	4	7	7

得到：所有拼在旁邊組合的嵌合面情形共 6 種。

2.拼在中間組合矩形的平面情形

當拼在中間時需要用到 4×3 平面，將所有完全不同的 4×4 嵌合面種類，依序去掉外圍 1 行(如右)，處理所有 4×4 完全不同的面，旋轉翻轉後視為一樣，進行**二進位數值分析**：



編號	M1		M2		M3		M4		M5		M6		M7		M8		M9		M10		M11		M12	
圖形																								
4×3 同構稜值	13	7	15	12	12	7	13	6	13	12	10	7	2	7	2	15	6	12	6	10	2	14	2	14
	11	14	15	3	3	14	11	6	11	3	5	14	4	14	4	15	6	3	6	5	4	7	4	7
3×3 同構稜值	6	5	5	1	6	1	6	6	2	5	6	1	2	1	1	1	6	2	6	2	1	2	2	2
	3	5	5	4	3	4	3	3	2	5	3	4	2	4	4	4	3	2	3	2	4	2	2	2

得到：所有拼在中間組合矩形的嵌合面情形共 12 種。

發現：1.當中間兩面橫向連接 4×3 嵌合稜配對除自己搭配需成功，滿足同構稜和 17、13、24、6、20、10、15；同時要配對拼在旁邊滿足 3×3 同構稜和 10、4、7；若 7 個連接稜都配對成功，則可完成嵌合矩形。

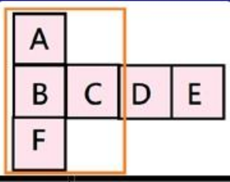
2.建構嵌合矩形可透過「數值分析—同構稜值的稜值組合配對」得知是否成功，配對要考慮 4×3 及 3×3 同構稜值，但在**中間組合**及**拼在旁邊**的稜值卻會重複出現，**難以直接判斷**此稜值隸屬於 3×3 或 4×3 嵌合稜。故透過稜值判斷嵌合矩形的組成多了**須先判斷稜值隸屬哪種嵌合面的程序**。

3.嘗試從另一個圖形做法進行處理(詳見作品說明書)，也很複雜。

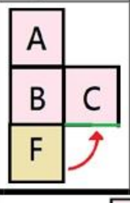
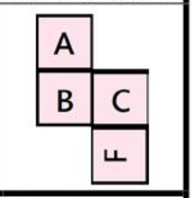
伍、討論

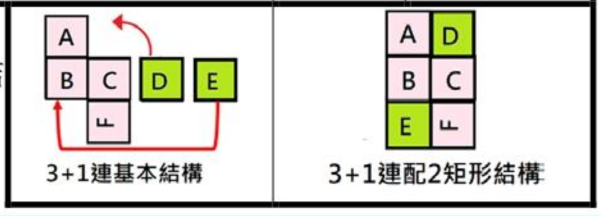
討論一、利用 3D 立體結構快速轉換 2D 嵌合矩形之方法

嵌合矩形面的組合為 **3×2**， 過 3D 嵌合立方體及展開圖，**重疊最多是展開圖其中 4 面**(如右例)。展開圖其中「**連續的 3 個面**」(如 A、B、F 面)，再從這 3 個面連接的其中一面（如 C 面），透過「**旋轉運算**」，就可行成 2D 矩形中 4 塊基本結構，命為「**3＋1 連**」**基本結構**，最後再將剩下的 2 個面（如面 D、E）旋轉配對，可快速轉換成 2D 矩形，形成「**3＋1 連配 2**」**矩形結構**。



1. **旋轉(rotate)運算：**以展開圖某 1 面為旋轉面，沿著相鄰面的邊做旋轉，形式有❶順時針旋轉運算為正(+)，❷逆時針旋轉為負(-)，❸不動為 0；當靠到 1 次邊時算旋轉步數 1 次，以(面代號，旋轉運算步數)表示。
2. **「3+1 連」基本結構：**嵌合立方體的展開圖某連續 3 面為固定不動面，再選原連續 3 面之外連接的其中 1 個面做旋轉運算。得到「**3+1 連」基本結構**，以(面代號，面代號，面代號)+(面代號，旋轉運算步數)表示。(A,B,C)+(F,-1)為例。
3. **「3+1 連配 2」矩形結構：**將可行的嵌合立方體中剩下未成為「3+1 連」基本結構的 2 個面，拆下來進行組合配對，成為「3+1 連配 2」矩形結構。

「3+1 連」基本結構 (面,面,面)+(面,旋轉運算步數)	旋轉運算	「3+1 連」基本結構圖
「3+1 連」基本結構 (A,B,C)+(F,-1)		



★ 3D 嵌合立方體轉換組成 2D 嵌合矩形之討論

【6 個不同嵌合面$\xrightarrow{\text{組成}}$3D 嵌合立方體】可轉換組成【2D 嵌合矩形】

舉 4+3+1+0+0+0 一例說明。(此時從 2D 變 3D 也可以)

【6 不同嵌合面$\xrightarrow{\text{組成}}$2D 嵌合矩形】不一定可組成【3D 嵌合立方體】

舉例 3+3+2+2+0+0 可組成嵌合矩形，無法組成立體(角量和>8)

亦有例子可組成嵌合矩形，但角量總和=8，也無法組成立方體。

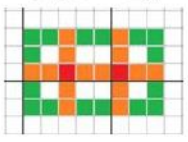
討論二、從 3D 及 2D 不同面向探討 n×n×n 嵌合立方體六個不同面所組成矩形面積之最小值

為何「這些 6 個不同 4×4 嵌合面組成矩形面積之最小值恆為 70，而形成嵌合面的總塊數恆為 56 個」呢?

從 2D 嵌合面組成矩形的面向來看

∵4×4 嵌合面組成矩形內部除最外圍可能有空隙外，須完全密合。

內部全滿矩形為(4×3-4)×(4×2-3)=40。6 面的稜中間塊數和恆為 1×4×6、角塊數和為 8，



∴需要的嵌合塊數和為

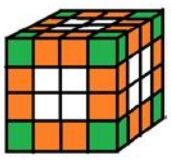
40-[2×(3+2×2)+2]+2 ×12+8=56

一般化需要的嵌合塊數和公式為

$(3n-4)(2n-3)-[(n-2)\times(3+2\times2)+2]+(n-2)\times12+8=6n^2-12n+8=n^3-(n-2)^3$

從 3D 嵌合立方體組成矩形的面向來看

組成矩形跟嵌合立方體的平面是同一組平面，每面中間填滿的塊數(白色)+稜中間的塊數(橘色)+角塊數(綠色) ，



4×4 嵌合面組合矩形需要的嵌合塊數和為

2×2×6+2×12 +8=56

6 個不同嵌合面組成矩形面積之最小值公式為

$(3n-2)(2n-1)=6n^2-7n+2$

陸、結論

一、基本嵌合面受限於單位結構的厚度，僅正六面體可形成嵌合正多面體。

二、透過「實際操作、二進位數值、稜值組合」確定 n×n×n 嵌合立方體組合之正確性：

1.嵌合立方體的角量和為 8，滿足嵌合立方體條件的「**平面角量組合**」情形共有 12 種：4+3+1+0+0+0、4+2+2+0+0+0、4+2+1+1+0+0、4+1+1+1+1+0、3+3+2+0+0+0、3+3+1+1+0+0、3+2+2+1+0+0、3+2+1+1+1+0、3+1+1+1+1+1、2+2+2+2+0+0、2+2+2+1+1+0、2+2+1+1+1+1。

2.二進位數值化嵌合面的 4 稜形成稜值，在旋轉、翻轉後雖數值不同，但圖形結構相同，形成「**同構稜值**」。

n×n 嵌合稜值的同構稜值公式為若 n×n 嵌合稜值為 $a_{n-1}\times2^{n-1}+a_{n-2}\times2^{n-2}+\ldots\ldots+a_1\times2^1+a_0\times2^0$，

該稜值得同構稜值為 $a_0\times2^{n-1}+a_1\times2^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}\times2^1+a_{n-1}\times2^0$，其中 $a_i=0$ 或 1，i=0、1、…、n-1。

3.整個嵌合面的 4 稜連續數值，在旋轉、翻轉後會和原來的平面連續數值一樣，視為「**同構稜值組合**」。

4.透過同構稜值、基本稜和及加值稜和判斷值進行配對可確定嵌合立方體，但仍需要進一步判斷。

5.透過稜值奇偶性質判斷角量

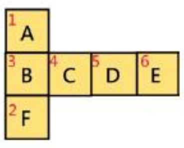
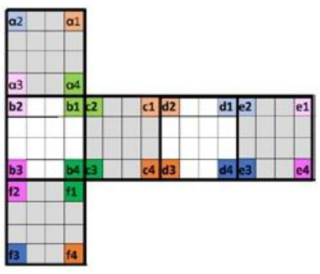
❶稜值 $L\geqq2^{n-1}+2$，且 L 是偶數，則角量為 1。

❷稜值 $L\geqq2^{n-1}+2$，且 L 是奇數，則角量為 2。

❸稜值 $L<2^{n-1}+2$，且 L 是奇數，則角量為 1。

❹稜值 $L<2^{n-1}+2$，且 L 是偶數，則角量為 0。

6.透過象限化嵌合面的角量，搭配展開圖得 8 個角量判別式

展開圖面序	象限化嵌合面角量	角量判別式
		$\begin{cases} a_1+c_1+d_2=1 \\ a_2+d_1+e_2=1 \\ a_3+e_1+b_2=1 \\ a_4+b_1+c_2=1 \\ f_1+b_4+c_3=1 \\ f_2+e_4+b_3=1 \\ f_3+d_4+e_3=1 \\ f_4+c_4+d_3=1 \end{cases}$

7.透過嵌配稜和判斷值配對可確定嵌合立方體中間稜配對。n×n 中間稜值公式：若 n×n 中間稜值為 $0\times2^{n-1}+a_{n-2}\times2^{n-2}+\ldots\ldots+a_1\times2^1+0\times2^0$；該值的同構中間稜值為 $0\times2^{n-1}+a_1\times2^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-2}\times2^1+0\times2^0$，其中 $a_i=0$ 或 1，i=0、1、…、n-1。

8.透過「稜值奇偶性」+「8 個角量判別式」可確定「每個嵌合面對應嵌合稜的方位」；
再配合「嵌配稜和」判斷值，再大的 n 值，都可確定 n×n×n 嵌合立方體 6 個不同嵌合面組成的正確性。

三、從 2D 或 3D 面向，皆可確定 n×n×n 嵌合立方體 6 面不同組成矩形面積的最小值公式為 $6n^2-7n+2$，需要的嵌合塊數恆為 $6n^2-12n+8=n^3-(n-2)^3$ 個，其中 n≧4。

四、透過「旋轉運算」可得「3+1 連基本結構」，快速將 3D 嵌合立方體與部分 2D 最小嵌合矩形轉換。

總結: 透過「圖形」與「數值」解構，得到嵌合立方體系統建構之流程圖，並可從 3D 立體嵌合立方體與部分 2D 平面嵌合矩形轉換。

3D嵌合立方體 ⟷（旋轉運算 3+1連基本結構）⟷ 2D嵌合矩形

3D嵌合立方體	
1.分類與尋找嵌合面	依角量(0、1、2、3、4)象限化分類，確定嵌合面
2.數值化嵌合面	找到嵌合面稜值集合 標定嵌配稜值及角量控制值
3.選定嵌合面組合	依平面角量組合 6 個不同面
4.確定嵌合稜方位	透過嵌合稜值奇偶性 +8 個角量判別式
5.展開圖排列面序	展開圖排列面序 A→F→B→C→D→E，利用嵌配稜和判斷
6.確定 6 個不同嵌合面組合	

旋轉運算
3+1連基本結構

2D嵌合矩形
1.確定嵌合面
2.數值化嵌合面
3.配對 中間+兩側嵌合稜
4.確定嵌合面組合

柒、應用

改良現有遊戲，利用結果設計多功能益智遊戲組，內含**所有不同的嵌合遊戲面**，變化更多，可組合成立體、拼成平面，讓遊戲不只是遊戲，還可將益智遊戲組「**直接使用**」，當杯墊、筆筒、面紙盒......，好玩又實用。

捌、參考文獻

1.王俞量、吳立宇、郭庭妤、張雯棋、鄧又宸(2016)。拼成長方形---五連塊探秘。中華民國第 56 屆中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科。

2.楊貽淂、謝佳凌、吳光宇、黃冠博(2005)。正立方體的變裝秀---五連塊（Pentominoes）拼拼樂。中華民國第 45 屆中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科。

3.劉峻永、鄭富鴻(2020)。六方連塊之矩形大拼排。中華民國第 60 屆中小學科展作品說明書(未出版)。國小組數學科。