中華民國第 63 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

探究精神獎

080406

成雙成對

學校名稱：康橋學校財團法人新北市康橋高級中學

作者：	指導老師：
小六 王苡馨	楊錦花
小六 洪宥緹	林東岳
小六 陳楷鈞	
小六 張呈瑞	

關鍵詞：遞迴、對偶型、黑白相間

摘要

本作品源自澳洲 AMC 2017 考題，原題要求在 8X8 方格中塗黑色或白色，但在任一 2X2 的方格中都需符合 2 黑 2 白的要求有幾種排法。

我們用黑、白棋排列方法與前一行相關的特性，找出對偶型連接與自身連接策略，求出原始問題的一般化公式。並延伸至立體方塊時在各方向剖面中皆滿足任意 2X2X1 的方塊皆有 2 黑 2 白的排列數公式。

最後討論以正三角形組成的平行四邊形中，任意 4 個小正三角形組成的「成雙三角形」中也需符合 2 黑 2 白的要求。雖然三角形的組成模式與方格不同，但仍然有排列方法與前一行相關的特性，最終將由三角形組成的 2 列 1 行與 3 列 1 行的平行四邊形分成數個類型，並求出各類型的相互連接關係，進而找出在 2 列與 3 列三角形成雙成對排列數的遞迴關係式。

壹、前言

一、研究動機

老師介紹我們一個兩人對壘的遊戲--「成雙成對」，非常的有趣。

玩法是這樣，兩人分別執黑、白棋，輪流在棋盤上下棋，每次下完需保證每 4 格中出現 2 黑 2 白，下著下著，似乎棋盤上總會出現一些常見的棋譜，於是我們就針對這個遊戲做深入的探討，找出棋譜的奧秘。

二、研究目的

(一) 方格「成雙成對」遊戲排列模式與排列數的探討。

(二) 立體「成雙成對」遊戲排列模式與排列數的探討。

(三) 三角形「成雙成對」遊戲排列模式與排列數的探討。

三、文獻探討

(一) 相關作品分析

58 屆數學科高中組作品左手畫「方」右手畫「矩」(曾祥宇等)[1]探討方向有二：

1、基本型，以列舉 3×3、4×4、5×5 圖形，猜測出 2×2 的方格中塗 2 黑 2 白的公式。

2、以基本題為基模推出旋轉後相異均衡與相同均衡的方塊數。

(二)與本作品的異同

1、基本型

(1) 我們由單行的排列出發，發現「黑、白相間的排列」每增加 1 行，排列數就增為原來的兩倍，是影響排列數的關鍵。

(2) 除了黑、白相間的排列外，唯有「對偶型的連接」才能符合成雙成對要求(即每個 2×2 的方格中呈現 2 黑 2 白)。

(3) 由連接模式的差異性我們找出 m×n 中任何可能排列的特性與排列數。

2、我們的研究由方格轉為「立體的方塊堆疊」與斜棋盤三角形格中 2 黑 2 白的探討，研究難度提高不少。

3、我們將原題轉為在棋盤上黑、白棋的下法，將嚴肅的數學轉為黑、白棋的新玩法，將不同的排列方法看成一個個相異的棋譜，增加數學研究的趣味性。

四、遊戲說明

(一) 方格成雙成對遊戲

在每 2×2 的方格中排出 2 黑 2 白的棋子。

如圖 1-1 為合格「成雙成對」排列；

圖 1-2 為不合格排列，紅框的 2×2 的方格中沒掌握 2 黑 2 白原則。

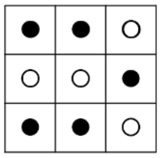


圖 1-1

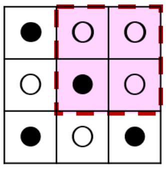


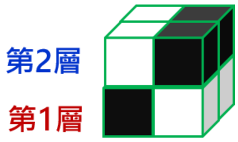
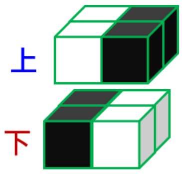
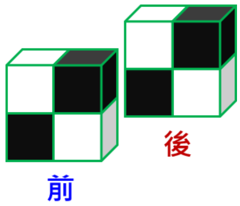
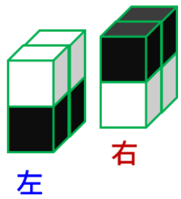
圖 1-2

(二) 立體成雙成對遊戲

每 2×2×1 的方塊中排出 2 黑 2 白的方塊。(如表 1-1)

立體方塊需掌握的面相較複雜，以 2×2×2 組成的兩層方塊而言，需考慮上、下、前、後、左、右，6 個面向都需符合成雙成對的要求(2 黑 2 白)。

表 1-1：立體成雙成對遊戲示意圖

兩層方塊	上、下	前、後	左、右
			

(三) 三角形成雙成對遊戲

在每 4 個三角形中排出 2 黑 2 白的棋子。

如圖 1-3 為合格「成雙成對」排列；

圖 1-4 為不合格排列，藍框 4 個三角形格中沒掌握 2 黑 2 白原則。

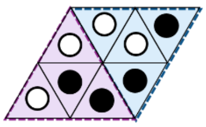


圖 1-3

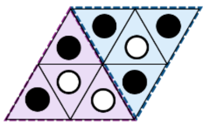


圖 1-4

五、名詞解釋

(一) 起始行：本研究以棋盤上排列最左邊的第一行為起始行。(圖 1-5 箭頭所指)

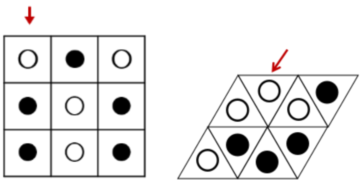


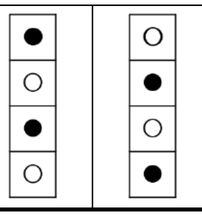
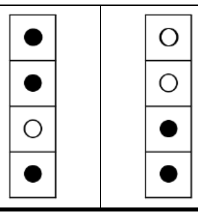
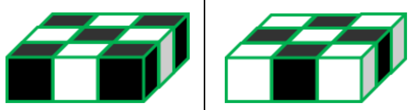
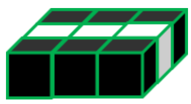
圖 1-5

(二) 黑白相間(方格)：以直行觀察，由上而下排列為黑、白、黑、白、…，

或白、黑、白、黑、…(表 1-2)。

(三) 黑白相間(立體)：立體黑白相間需同一層整個盤面皆為黑、白、相、間。(表 1-2)

表 1-2：黑白相間示例

方格		立體	
黑白相間	非黑白相間	黑白相間	非黑白相間
			

(四) 對偶型(方格)：以行為單位，黑、白排列模式相反的黑、白棋排列方式。

表 1-3 左圖：左行與右行排列由上而下方格中黑、白棋完全相反。

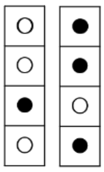
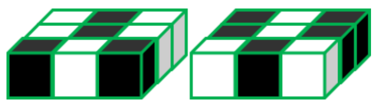
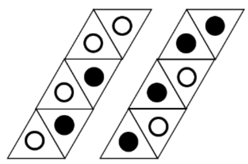
(五) 對偶型(立體)：以面為單位，黑、白排列模式相反的黑、白方塊排列方式。

表 1-3 中圖：每一個 2 維座標位置黑、白方塊完全相反。

(六) 對偶型(三角形)：以行為單位，黑、白排列模式相反的黑、白棋排列方式。

表 1-3 右圖：左右兩種排列，由上而下三角形中黑、白棋完全相反。

表 1-3：對偶型示例

對偶型(方格)	對偶型(立體)	對偶型(三角形)
		

(七) 成雙三角形：

在三角形成雙成對遊戲中，判斷是否為合格的 4 個三角形組成的一組三角形，我們將成組的三角形稱為「成雙三角形」。圖 1-6 的粉紅色三角形與淺藍色三角形為 2 組「成雙三角形」。

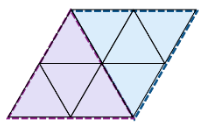


圖 1-6

貳、研究設備與器材

方格圍棋、自製斜棋盤、圍棋黑白子、紙、筆、電腦。

參、研究過程或方法

方格	由2列、3列、4列圖形連接，發現排列規律。	n行m列排列數為 2^m+2^n-2
立體	以黑白方塊排列發現立體模式及排列規律。	n行m列r層排列數為 $2^m+2^n+2^r-4$
三角形 (2列)	以2列連接模式，發現排列規律，並推出遞迴式。	2列n行排列數為 $2(n+1)+4B_n+2E_n$
三角形 (3列)	以3列連接模式、樹狀圖、及關係式推算出排列數。	3列n行排列數為 $12+4n$ $+4MS_n+2NS_n+2OS_n+2PS_n$

肆、研究結果

一、方格成雙成對研究

(一) 方格成雙成對性質探討

性質 1：「成雙成對」的排列模式除黑白相間的模式外，呈對偶型的連接模式。

說明：

1、以 4 列為例，起始行有 4 格，每一格皆有黑或白兩個選擇，共有$2^4=16$種排列模式。

表 2-1： 1×4 黑、白棋排列編號圖示

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
圖示	○ ○ ○ ○	● ● ● ●	○ ○ ○ ●	● ● ● ○	○ ○ ● ○	● ● ○ ●	○ ● ○ ○	● ○ ● ●	● ○ ○ ○	○ ● ● ●	○ ○ ● ●	● ● ○ ○	● ○ ○ ●	○ ● ● ○	○ ● ○ ●	● ○ ● ○

2、黑、白棋排列，都可找出與自身成對偶型(即同列黑白相反)的排列模式。

3、當行數增加時，要達成「成雙成對」的排列模式，除編號 15 與編號 16，唯有與自身成對偶型的排列模式輪流出現，才能呈現合乎要求的「成雙成對」模式。(見表 2-2)

4、由表 2-2 的對偶型連接模式可發現相鄰兩行同一列黑、白棋必為 1 黑 1 白，故相鄰兩行兩列的 4 格(2×2)中必出現 2 黑 2 白，符合成雙成對要求。

表 2-2：對偶型及非對偶型排列模式與成雙成對關係

	符合成雙成對模式(對偶型連接)			不符成雙成對模式(非對偶型連接)			
圖示	○●○● ○●○● ○●○● ○●○●	○●○● ○●○● ○●○● ●○●○	○●○● ○●○● ●○●○ ○●○●	○● ○● ○● ○○	○● ○● ○○ ○●	○● ○○ ○● ○●	○● ●○ ●● ○○

性質 2：黑白相間的排列，有兩種連接模式都能呈現「成雙成對」的排列模式。

(1) 對偶型的連接模式。(2) 自身連接。

說明：

1、以起始行編號 15 為例，黑白相間相臨兩列的排列為 1 黑 1 白，故無論「對偶型連接」或「自身連接」，相鄰兩行兩列的 4 格(2×2)中必出現 2 黑 2 白，符合成雙成對要求。

表 2-3：方格黑白相間排列連接模式

	連接 2 行		連接 3 行			
模式	對偶	自身	對偶+對偶	對偶+自身	自身+對偶	自身+自身
圖示	(15,16) ○● ●○ ○● ●○	(15,15) ○○ ●● ○○ ●●	(15,16,15) ○●○ ●○● ○●○ ●○●	(15,16,16) ○●● ●○○ ○●● ●○○	(15,15,16) ○○● ●●○ ○○● ●●○	(15,15,15) ○○○ ●●● ○○○ ●●●

性質 3：黑白相間的排列，每增加 1 行，排列數就增為原來的 2 倍。

說明：

1、根據性質 2，黑白相間的排列連接模式有 2：(1)與對偶型排列連接。(2) 與自身連接，故每增加一行，排列數就增為原來的 2 倍。(如圖 2-1)

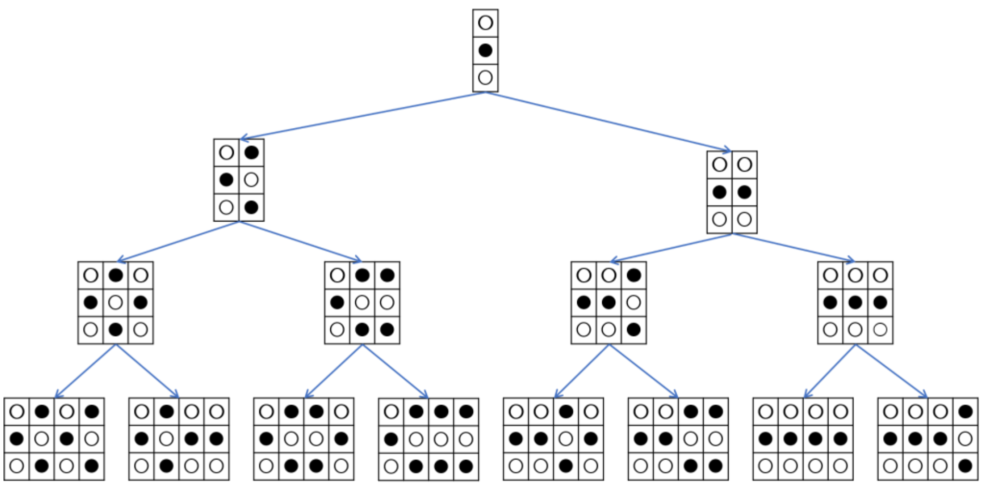


圖 2-1：黑白相間連接模式

2、黑白相間排列數增加模式為 1→2→4→8→⋯→2^{n-2}→2^{n-1}。

(二) 方格成雙成對排列數探討

定理 1：n 行 m 列成雙成對的排列數為 2^m+2^n-2。

說明：

1、m列時，由於每一格皆可放置白棋或黑棋，故起始行(行數為 1)有2^m種排列模式。

2、無論列數增為幾列，起始行都只會出現 2 種黑、白相間的排列模式。

3、根據性質 2，除黑、白相間排列的 2 種以外，其餘的2^m-2種連接模式都需以對偶型模式連接，排列數不會隨著行數而增加，故 m 列 n 行的排列模式為2^m-2。

4、根據性質 3，黑白相間排列數會隨著行數成倍增加，這兩種起始行為黑、白相間模式 n 行有$2\times 2^{n-1}=2^n$種排列方式。

5、由以上可得 n 行 m 列「成雙成對」的排列數$=(2^m-2)+2^n=2^m+2^n-2$。

二、立體成雙成對研究

(一) 立體成雙成對性質探討

性質 4：立體成雙成對的排列模式除黑白相間的模式外，呈對偶型的連接模式。

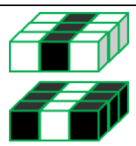
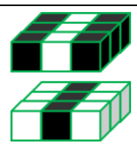
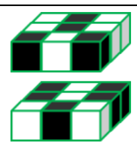
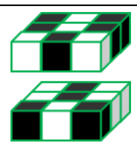
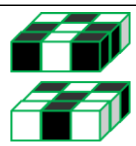
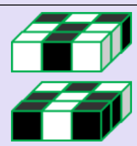
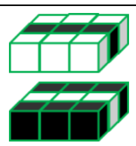
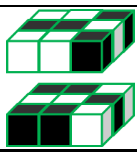
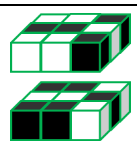
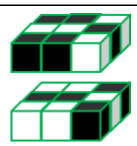
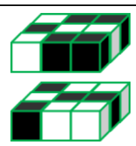
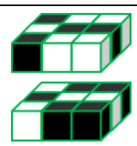
說明：

1、以單層盤面 3×3×1 為例，共有$2^3+2^3-2=14$種排列模式。

扣除 2 種黑、白相間的模式，盤面非黑白相間連接模式有$(2^3+2^3-2)-2=12$種。

2、這 12 種，層與層間的連接唯有做對偶型連接，才能符合成雙成對要求。(表 2-4)

表 2-4：盤面非黑白相間模式連接方式

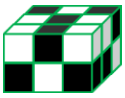
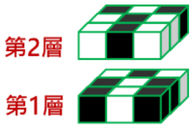
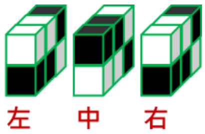
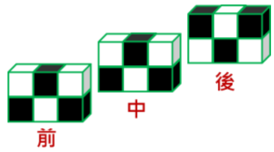
1	2	3	4	5	6
					
7	8	9	10	11	12
					

3、相鄰上、下層因做對偶型連接，故上、下關係必為 1 黑 1 白或 1 白 1 黑，故兩層中每 4 個方塊必為 2 黑 2 白符合成雙成對要求。

4、以表 2-4 編號 6 的連接模式為例，連接的 2 層方塊(3×3×2)，無論從橫剖面、縱剖面或

前後剖面，都保證每 4 個方塊都包括 2 黑 2 白。(見表 2-5)

表 2-5：表 2-4 編號 6 橫剖面、縱剖面或前後剖面

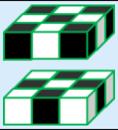
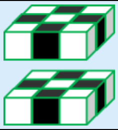
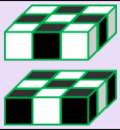
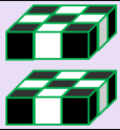
連接成方塊	橫剖面	縱剖面	前後剖面
			

性質 5：方塊黑白相間的排列，有兩種連接模式 (1) 對偶型的連接模式。(2) 自身連接。都能呈現立體「成雙成對」的排列模式。

說明：

1、延續單層盤面 3×3×1 為例，盤面黑白相間(單層編號 13 與 14)連接模式。(表 2-6)

表 2-6：盤面黑白相間模式連接方式

13-1 對偶型連接	13-2 自身連接	14-1 對偶型連接	14-2 自身連接
			

2、對偶型與非黑白相間模式相同，兩層中每 4 個方塊必為 2 黑 2 白符合成雙成對要求。

3、自身連接

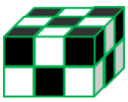
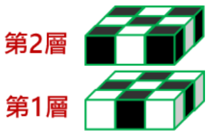
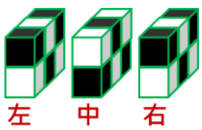
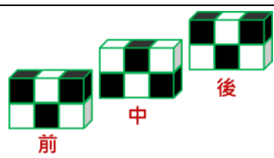
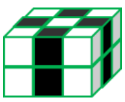
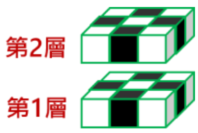
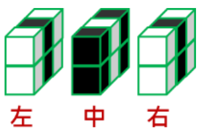
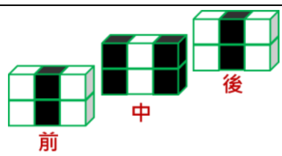
(1) 橫剖面：黑白相間模式每一層皆為黑白相間，故每 2×2，4 個方塊必為 2 黑 2 白。

(2) 縱剖面：單層相鄰兩行(以上、下為行)為 1 黑行、1 白行或 1 白行 1 黑行連接，故每 4 塊必為 2 黑 2 白。

(3) 前後剖面：與縱剖面相同，相鄰兩行為 1 黑、1 白，故每 4 塊必為 2 黑 2 白。

4、以表 2-6 編號 13-1 與 13-2 的連接模式為例，連接的 2 層方塊，無論從橫剖面、縱剖面或前後剖面，對偶型與自身連接模式都能保證每 4 個方塊都包括 2 黑 2 白。(見表 2-7)

表 2-7：表 2-6 編號 13-1 與 13-2 橫剖面、縱剖面或前後剖面

編號	連接成方塊	橫剖面	縱剖面	前後剖面
13-1 對偶				
13-2 自身				

性質 6：黑白相間的排列，每增加 1 層，排列數就增為原來的 2 倍。

說明：

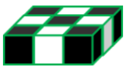
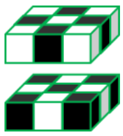
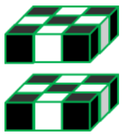
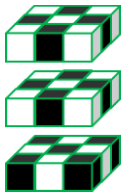
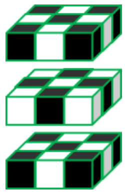
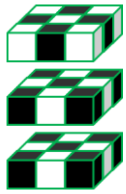
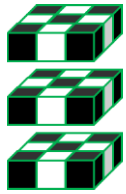
1、由性質 5 得知：黑白相間的排列，有兩種呈現「成雙成對」的排列模式。

(1) 對偶型的連接模式。(2) 自身連接。

2、以表 2-8 單層首行為黑、白、黑，連接而成的單層黑白相間模式為例。

連接模式的排列數：1→2→4→⋯；即每增加一層，排列數就增為原來的 2 倍。

表 2-8：黑白相間成雙成對連接模式變化

1 層(1 種)	2 層(2 種)		3 層(4 種)			
						

(二) 立體成雙成對排列數探討

定理 2：n 行 m 列 r 層成雙成對的排列數為 $2^m+2^n+2^r-4$。

說明：

1、單層非黑白相間模式呈對偶型連接(性質 4)，故排列數不會隨著層數增加。

n 行 m 列「成雙成對」的排列數為 2^m+2^n-2，扣除單層 2 種黑、白相間模式，

非黑白相間的排列數為$(2^m+2^n-2)-2=2^m+2^n-4$。

2、黑白相間的排列，每增加 1 層，排列數就增為原來的 2 倍，故 r 層排列數為 1 層的2^{r-1}倍，單層有 2 種黑白相間的排列模式，故黑白相間排列數為$2^{r-1}\times 2=2^r$種。

3、n 行 m 列 r 層「成雙成對」的排列數＝$(2^m+2^n-4)+2^r$＝$2^m+2^n+2^r-4$。

三、三角形成雙成對研究

(一) 列數(m)為 2 時三角形成雙成對性質探討。

性質 7：行數每增加 1，所增加的成雙三角形黑、白棋排列，只受該行與前一行的影響。

說明：

1、當列數為 2 時，行數每增加 1，就會增加 2 組成雙三角形，且這兩組成雙三角形的黑、白棋排列，只受該行與前一行的影響。

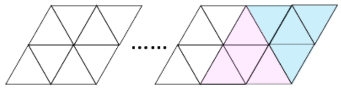


圖 3-1

2、相同的情形也發生在當列數 m 為 3 時的狀況，增加的成雙三角形是否符合成雙成對規定，只受該行與前一行影響。

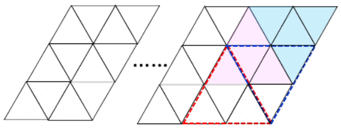


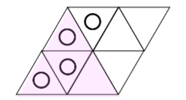
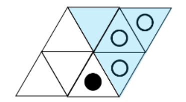
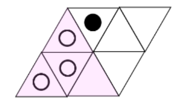
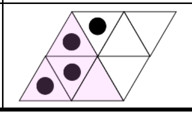
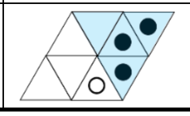
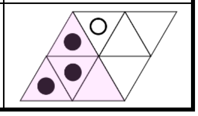
圖 3-2

性質 8：三角形成雙成對模式不能出現 3 顆白棋或 3 顆黑棋連在一起。

說明：

1、連續 3 顆同色的棋子，會佔去成雙三角形的 3 格，則此成雙三角形就無法達成 2 黑 2 白成雙成對要求，故三角形成雙成對模式，不能出現 3 顆白棋或 3 顆黑棋連在一起。

表 3-1：三角形成雙成對不具延續性 1×2 黑、白棋排法

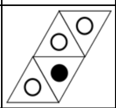
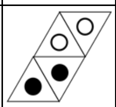
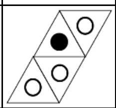
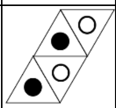
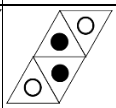
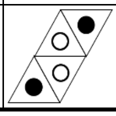
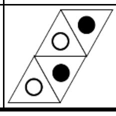
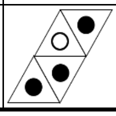
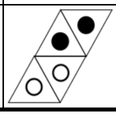
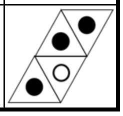
編號	1	2	3	4	5	6
圖示						

(二) 整理 2 列起始行具成雙成對延續性的黑白棋排法，以 A~J 加以編號。(表 3-2)

1、將白棋「○」視為「0」，黑棋「●」視為「1」，以二進位由上而下編碼。

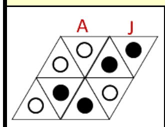
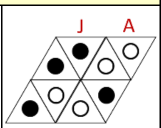
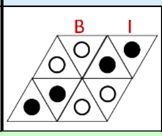
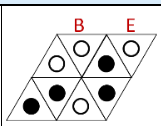
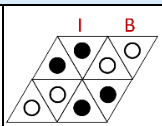
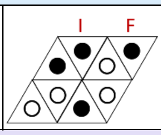
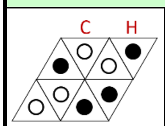
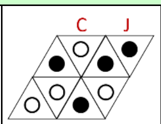
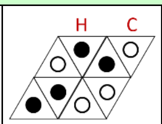
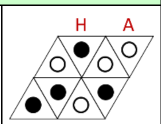
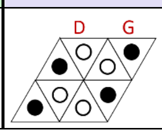
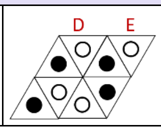
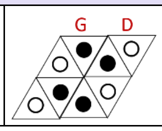
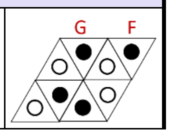
依編碼大小(由小而大)以 A、B、C、D、……編號。

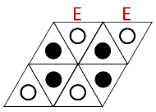
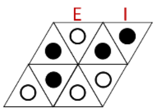
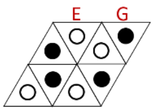
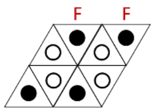
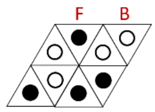
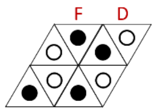
表 3-2：斜棋盤具延續性，1×2 黑、白棋排法

編碼	0010	0011	0100	0101	0110	1001	1010	1011	1100	1101
編號	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
圖示										

(三) 以第 1 行呈「對偶型」排列的排法整理其連接模式。(表 3-3)

表 3-3：起始行為對偶型系列的連接模式

AJ 系列		BI 系列					
							
CH 系列				DG 系列			
							

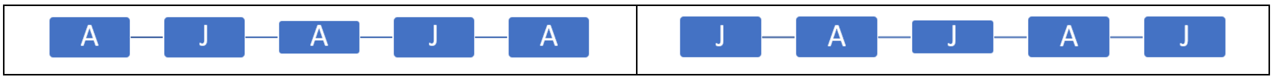
EF 系列							
							

(四) 各系列連接模式與排列數

1、A 與 J：

如表 3-4，排列模式成單純的對偶型排列，故不會隨著行數而增加排列數。

表 3-4：AJ 系列連接模式



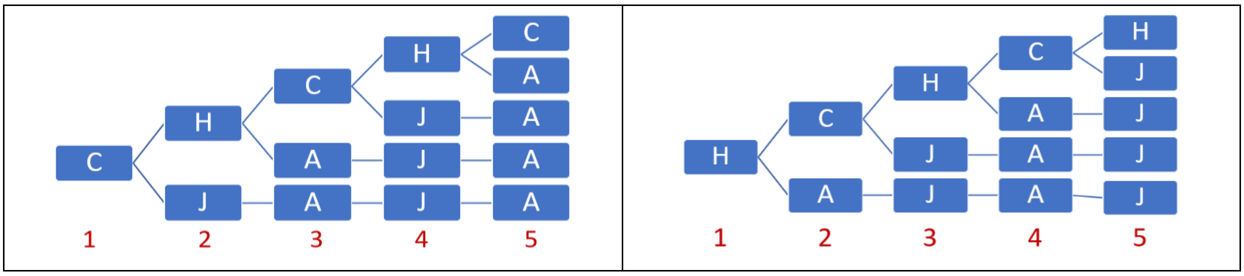
2、C 與 H：

連接模式有 2：(1)對偶型。(2)AJ 系列。(表 3-5)

行數(n)每增加一行，排列數增加一個；即成雙成對的排列數＝行數。

如表 3-5，排列數為 1→2→3→4→5→⋯。

表 3-5：CH 系列連接模式



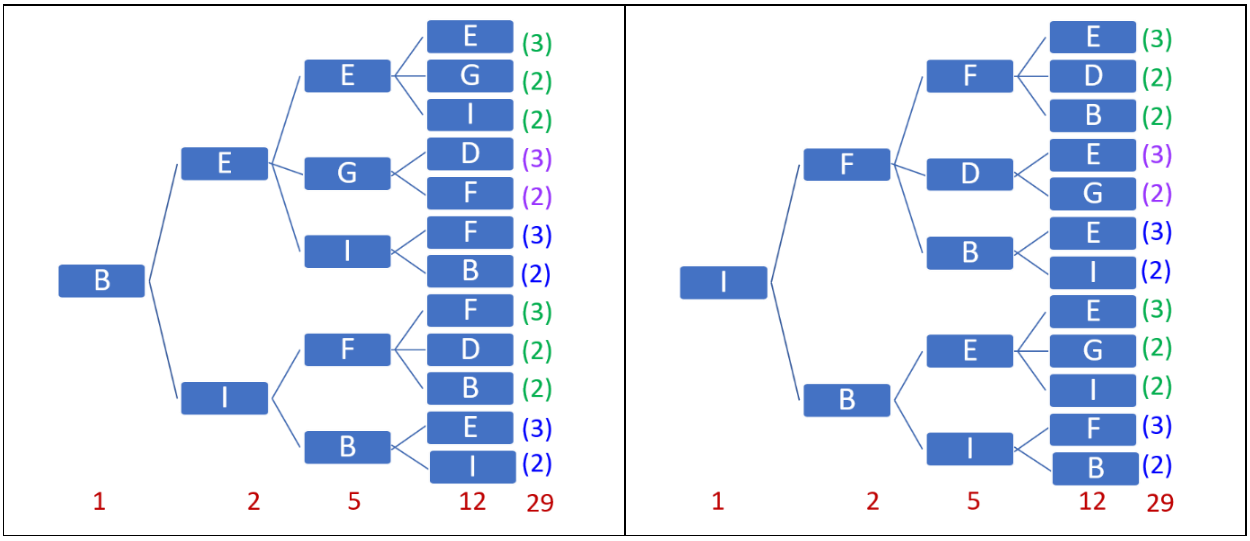
3、B 與 I、D 與 G：

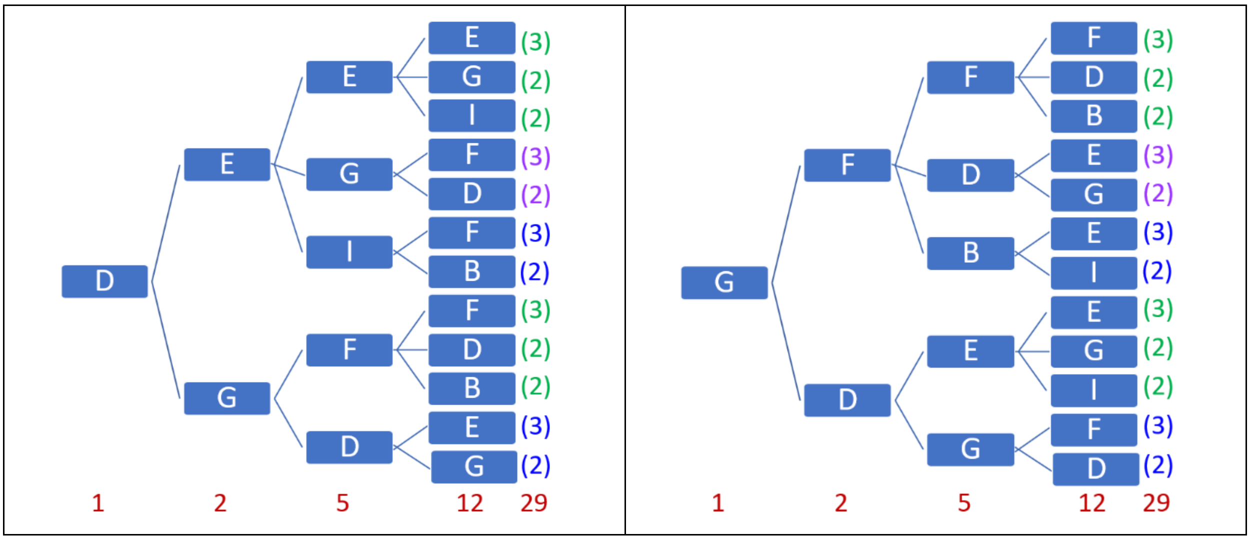
連接模式有 2：(1)對偶型。(2)EF 系列。如表 3-6，排列數為

1→2→3+2→(3+2+2)+(3+2)→[(3+2+2)+(3+2)+(3+2)]+[(3+2+2)+(3+2)]⋯，

即 1→2→5→12→29→⋯。

表 3-6：BI 系列與 DG 系列連接模式





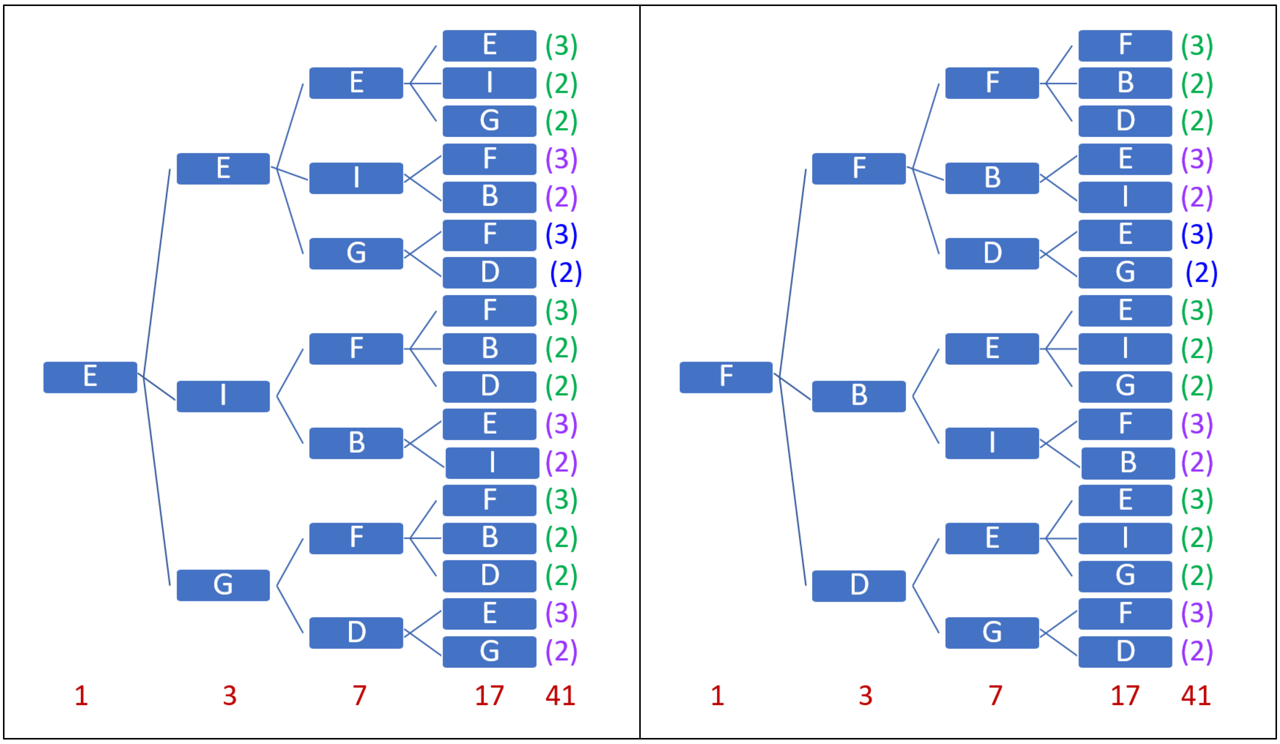
4、E 與 F：

連接模式有 3：(1)自身連接。(2)BI 系列。(3)DG 系列。如表 3-7，排列數為

1→3→3+2+2→(3+2+2)+(3+2)+(3+2)→

[(3+2+2)+(3+2)+(3+2)]+[(3+2+2)+(3+2)]+[(3+2+2)+(3+2)]→⋯，即 1→3→7→17→41→⋯。

表 3-7：EF 系列連接模式



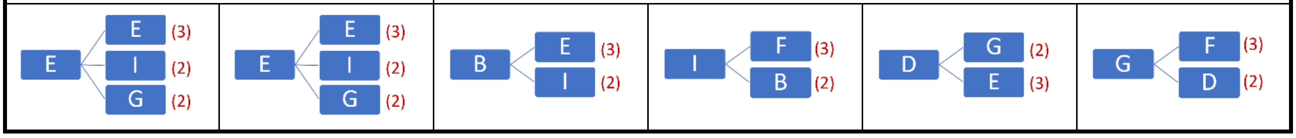
性質 9：BI、DG 系列與 EF 系列兩者排列數的遞迴關係結構形式相同，起始值不同。

說明：

1、整理 BI、DG 系列與 EF 系列連接關係(表 3-8)

表 3-8：BI、DG 系列與 EF 系列連接模式

EF 系列	BI、DG 系列



2、EF 系列排列數增加模式為 1→3→(3+2+2)→(3+2+2)+(3+2)+(3+2)。

BI、DG 系列排列數增加模式為 1→2→(3+2)→(3+2+2)+(3+2)。

3、將 3 的個數設為a_n，2 的個數設為b_n，整理 E、F 系列(表 3-9)與 B、I、D、G 系列(表 3-10)，a_n、b_n與行數(n)的關係。

表 3-9：EF 系列排列數a_n、b_n與行數(n)的關係

行數(n)	2	3	4	5	⋯	n
3 的個數(a_n)	1	1+0=1	1+2=3	3+4=7		$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$
2 的個數(b_n)	0	1×2+0=2	1×2+2=4	3×2+4=10		$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$

表 3-10： BI、DG 系列排列數a_n、b_n與行數(n)的關係

行數(n)	2	3	4	5	⋯	n
3 的個數(a_n)	0	0+1=1	1+1=2	2+3=5		$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$
2 的個數(b_n)	1	0×2+1=1	1×2+1=3	2×2+3=7		$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$

4、發現 EF 系列與 BI、DG 系列兩者除了起始值不同，3 的個數(a_n)與 2 的個數(b_n)都呈現相同的關係式，屬於相同的結構形式。$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$；$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$。

5、 整理a_n與b_n的遞迴關係式

$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$ ；$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$ ；

$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}=(a_{n-2}+b_{n-2})+(2a_{n-2}+b_{n-2})=2(a_{n-2}+b_{n-2})+a_{n-2}=2a_{n-1}+a_{n-2}$ 。

$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}=(2a_{n-2}+2b_{n-2})+(2a_{n-2}+b_{n-2})=2(2a_{n-2}+b_{n-2})+b_{n-2}=2b_{n-1}+b_{n-2}$ 。

6、 設C_n為排列數，a_n為排列數 3 的個數，b_n為排列數 2 的個數，則C_n=3a_n+2b_n；代入a_n與b_n的遞迴關係，則

$$C_n=3(2a_{n-1}+a_{n-2})+2(2b_{n-1}+b_{n-2})=6a_{n-1}+3a_{n-2}+4b_{n-1}+2b_{n-2}$$
$$=2(3a_{n-1}+2b_{n-1})+(3a_{n-2}+2b_{n-2})=2C_{n-1}+C_{n-2}。$$

7、將$C_n=2C_{n-1}+C_{n-2}$用於我們的排列數

設 B、D、G、I 的排列數為B_n，則$B_n=2B_{n-1}+B_{n-2}(B_1=1,B_2=2)$

E、F 的排列數設為E_n，則$E_n=2E_{n-1}+E_{n-2}(E_1=1,E_2=3)$

(五) 2 列三角形成雙成對排列數探討

定理 3：$\boldsymbol{n}$ 行 2 列三角形成雙成對的排列數為 $\boldsymbol{2(n+1)+4B_n+2E_n}$。其中

$$\boldsymbol{B_n = 2B_{n-1} + B_{n-2}(B_1{=}1,\ B_2 = 2)};$$

$$\boldsymbol{E_n = 2E_{n-1} + E_{n-2}(E_1{=}1,\ E_2 = 3)}。$$

說明：

1、整理 2 列三角形成雙成對的排列數。

表 3-11：2 列 n 行各系列起始值與排列數關係

起始值	A、J	C、H	B、I、D、G	E、F
排列數	1	n	$B_n = 2B_{n-1} + B_{n-2}$ B_1=1，$B_2 = 2$	$E_n = 2E_{n-1} + E_{n-2}$ E_1=1，$E_2 = 2$

2、n 行 2 列三角形「成雙成對」的排列數＝$1 \times 2 + n \times 2 + B_n \times 4 + E_n \times 2$

$= 2(n+1) + 4B_n + 2E_n$

(六) 將定理 3，$\boldsymbol{n}$ 行 2 列三角形成雙成對的排列數公式 $\boldsymbol{2(n+1)+4B_n+2E_n}$輸入 Excel，推算行數增加時排列數的變化。

表 3-12：三角形成雙成對 2 列 1~10 行排列數變化

行數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
E_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363
2 列和	10	20	42	92	210	492	1170	2804	6746	16260

四、3 列三角形成雙成對研究

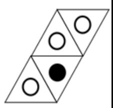
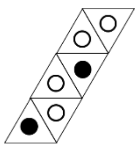
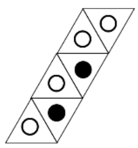
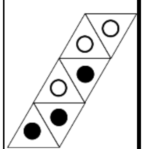
(一) 3 列起始行編號說明

1、延續 2 列各系列英文字母編號，再依編碼大小分別在英文字母後面加上數字。

2、以 A 序列為例 (表 4-1)

A 序列 3 列時多 2 個三角形，故多加的兩碼，01 < 10 < 11，分別以A_1、A_2、A_3編號。

表 4-1：A 系列編號示例

列數	2 列	3 列		
編碼	0010	001001	001010	001011
編號	A	A_1	A_2	A_3
圖示				

性質 10：向下增加一列，各系列起始行的排列數必介於 2~3 之間。

說明：

1、各系列向下延伸一列，會增加兩個三角形，以二進位編碼，由小而大依序為 00、01、10、11。

2、各系列編碼時需注意避免避開 3 顆白棋或 3 顆黑棋連一起。

3、若兩列末兩碼為 10，以 2 列 A 系列 0010 為例，末 2 碼為 10，故 3 列可出現的編碼為 001001、001010、001011 三種，即 3 列時 A 系列的編號為A_1、A_2與A_3。(見表 4-1)。

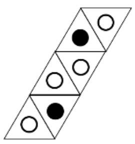
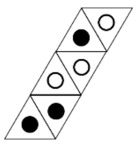
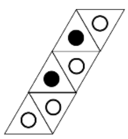
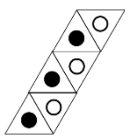
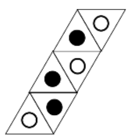
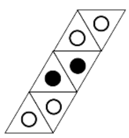
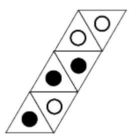
4、若兩列末兩碼為 00，以 C 系列 0100 為例，末 2 碼為 00，故 3 列可出現的編碼為 010010、010011 兩種，即 3 列時 C 系列的編號為C_1與C_2。(見表 4-2 中 C 系列)

5、若兩列末兩碼為 01，以 D 系列 0101 為例，末 1 碼為 01，故 3 列可出現的編碼為 010100、010101、010110 三種，即 3 列時 D 系列的編號為D_1、D_2與D_3。(見表 4-2 中 D 系列)

6、若兩列末兩碼為 11，以 B 系列 0011 為例，末 2 碼為 11，故 3 列可出現的編碼為 001100、001101 兩種，即 3 列時 B 系列的編號為B_1與B_2。(見表 4-2 中 B 系列)

7、故向下增加一列，各系列起始行的排列數必介於 2~3 之間。

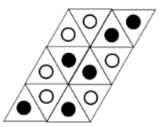
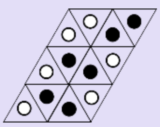
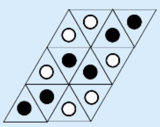
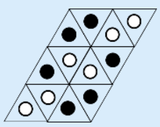
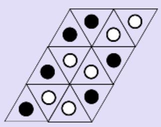
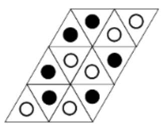
表 4-2：2 列延伸為 3 列示例

系列	C 系列		D 系列			B 系列	
編碼	010010	010011	010100	010101	010110	001100	001100
編號	C_1	C_2	D_1	D_2	D_3	B_1	B_2
圖示							

(二) 3 列三角形「成雙成對」連接模式探討

1、A 與 J 系列：(如表 4-3)

表 4-3：A 與 J 系列連接模式

$A_1 \to J_2$	$A_2 \to J_2$	$A_3 \to J_1$	$J_1 \to A_3$	$J_2 \to A_2$	$J_3 \to A_2$
					

(1) 我們發現 A 與 J 系列出現 2 組對偶型循環排列。

① $A_2 \to J_2 \to A_2 \to J_2 \to \cdots$。

②$A_3 \to J_1 \to A_3 \to J_1 \cdots$。

(2) 而A_1與J_3則分別於第 2 行進入$A_2 \to J_2 \to A_2 \to J_2 \to \cdots$的循環。

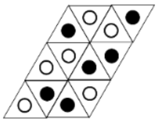
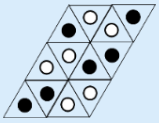
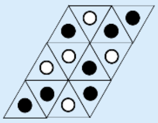
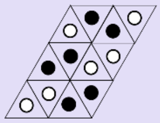
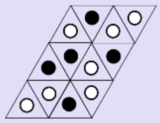
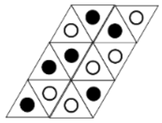
① $A_1 \to J_2 \to A_2 \to J_2 \to A_2 \to J_2 \to \cdots$。

② $J_2 \to A_2 \to J_2 \to A_2 \to J_2 \to \cdots$。

(3) 故 3 列三角形成雙成對的 AJ 系列排列數與 2 列相同，排列數等於 1。

2、C 與 H 系列：(如表 4-4)

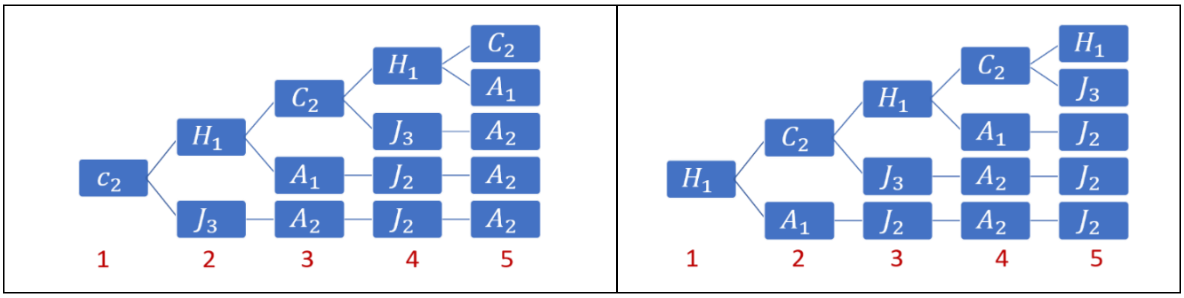
表 4-4：C 與 H 系列連接模式

$C_1 \to H_2$	$C_2 \to H_1$	$C_2 \to J_3$	$H_1 \to C_2$	$H_1 \to A_1$	$H_2 \to C_1$
					

(1) C_1與H_2的連接，也出現對偶型循環排列；$C_1 \to H_2 \to C_1 \to H_2 \to \cdots$。排列數等於 1。

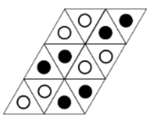
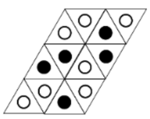
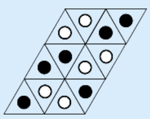
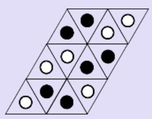
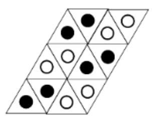
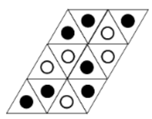
(2) C_2與H_1連接模式有 2：①對偶型。②AJ 系列。與原 CH 系列相同，排列數＝行數。

表 4-5：C_2與H_1排列數＝行列數



3、B 與 I 系列：(如表 4-6)

表 4-6：B 與 I 系列連接模式

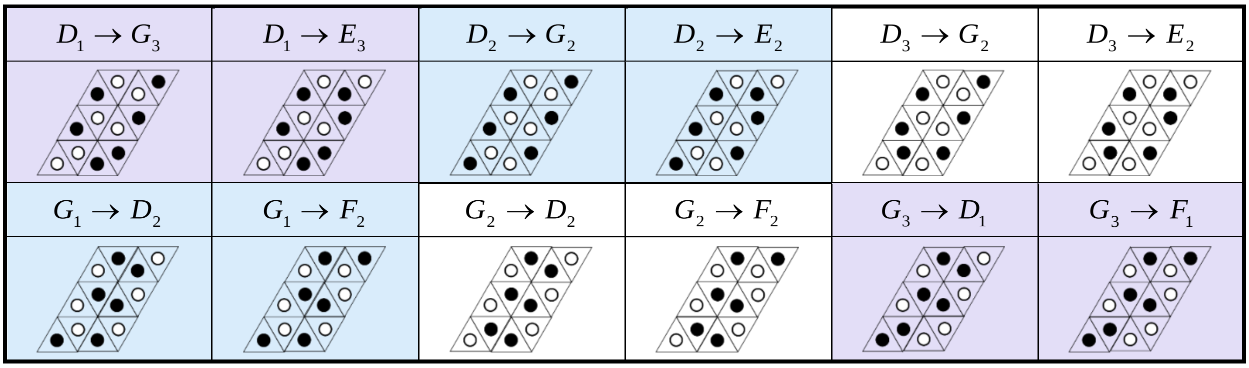
$B_1 \to I_2$	$B_1 \to E_1$	$B_2 \to I_1$	$I_1 \to B_2$	$I_2 \to B_1$	$I_2 \to F_3$
					

(1) B_2與I_1的連接，也出現對偶型循環排列；$B_2 \to I_1 \to B_2 \to I_1 \to \cdots$。排列數等於 1。

(2) B_1與I_2連接模式有 2：①對偶型。②EF 系列的E_1與F_3。**(與 EF 系列有關稍後討論)**

4、D 與 G 系列：(如表 4-7)

表 4-7：D 與 G 系列連接模式



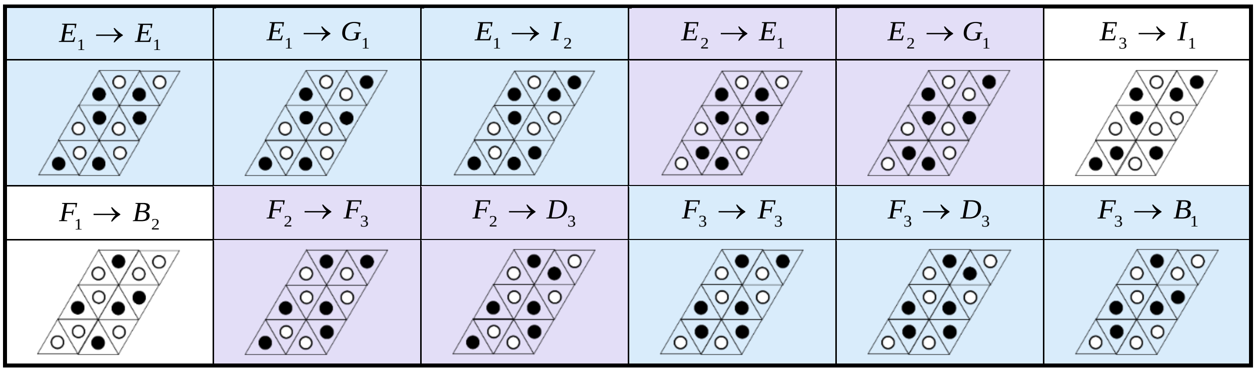
(1) D_1與G_3連接模式有 2：①對偶型。②EF 系列中的E_3與F_1。**(與 EF 系列有關稍後討論)**

(2) D_2與G_2的連接模式有 2：①對偶型。②EF 系列中的E_2與F_2；

而D_3與D_2，G_1與G_2連接模式相同。**(與 EF 系列有關稍後討論)**

5、E 與 F 系列：(如表 4-8)

表 4-8：E 與 F 系列連接模式



(1) E_3與F_1連接模式只有 1 種，分別連接到I_1與B_2的對偶型循環排列，故排列數等於 1。

① $E_3 \to I_1 \to B_2 \to I_1 \to B_2 \to \cdots$。② $F_1 \to B_2 \to I_1 \to B_2 \to I_1 \to \cdots$。

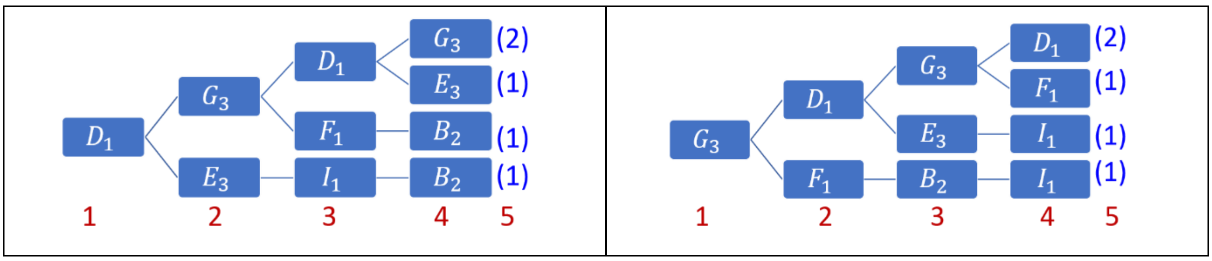
(2) E_1與F_3的連接模式有 3：①自身連接。②DG 系列的$G_1(D_3)$。③BI 系列的$I_2(B_1)$。

(3) E_2與F_2的連接模式有 2：①$E_1(F_3)$ 、②DG 系列的$G_1(D_3)$。

6、DG 系列中D_1與G_3的連接模式有 2：①對偶型。②EF 系列中的E_3與F_1。

由於E_3與F_1連接到I_1與B_2的對偶型循環，故D_1與G_3的排列數為 n。

表 4-9：D_1與G_3排列數＝行數(n)



7、整理 BI、DG 與 EF 系列中未討論的部份。

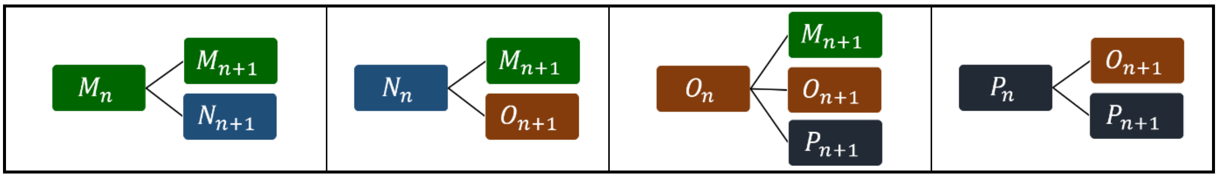
(1) 我們依其連接模式分成 M、N、O、P ，4 類

表 4-10：M、N、O、P 分類

類別	M				N	
起始行	D_2	D_3	G_1	G_2	E_2	F_2
連接模式	D_2 → G_2 (2)、E_2 (2)	D_3 → G_2 (2)、E_2 (2)	G_1 → D_2 (2)、F_2 (2)	G_2 → D_2 (2)、F_2 (2)	E_2 → E_1 (3)、G_1 (2)	F_2 → F_3 (3)、D_3 (2)
類別	O		P			
起始行	E_1	F_3	B_1	I_2		
連接模式	E_1 → E_1 (3)、G_1 (2)、I_2 (2)	F_3 → F_3 (3)、D_3 (2)、B_1 (2)	B_1 → I_2 (2)、E_1 (3)	I_2 → B_1 (2)、F_3 (3)		

(2) 整理 M、N、O、P 的關係，我們得到他們之間的關係如表 4-9。

表 4-11：M、N、O、P 關係



(3) 由表 4-11 中 M、N、O、P 的關係我們整理出以下關係式

$$M_{n+1} = M_n + N_n + O_n$$

$$N_{n+1} = M_n$$

$$O_{n+1} = N_n + O_n + P_n$$

$$P_{n+1} = O_n + P_n$$

(4) 排列數$S_n = M_n + N_n + O_n + P_n$

$$= (M_{n-1} + N_{n-1} + O_{n-1}) + M_{n-1} + (N_{n-1} + P_{n-1} + O_{n-1}) + (P_{n-1} + O_{n-1})$$

$$= 2(M_{n-1} + N_{n-1} + O_{n-1} + P_{n-1}) + O_{n-1} = 2S_{n-1} + O_{n-1}$$ 。

① M 類排列數$MS_n = 2MS_{n-1} + O_{n-1}(M_1 = 1，N_1 = O_1 = P_1 = 0)$。

② N 類排列數$NS_n = 2NS_{n-1} + O_{n-1}(N_1 = 1，M_1 = O_1 = P_1 = 0)$。

③ O 類排列數$OS_n = 2OS_{n-1} + O_{n-1}(O_1 = 1，M_1 = N_1 = P_1 = 0)$。

④ P 類排列數$PS_n = 2PS_{n-1} + O_{n-1}(P_1 = 1，M_1 = N_1 = O_1 = 0)$。

(5) 將 M、N、O、P 的關係輸入 Excel，推算 M、N、O、P 成雙成對的排列數。

① M 類(起始行為 D_2 、 D_3 、 G_1 、 G_2)成雙成對的排列數MS_n

表 4-12：M 類成雙成對排列數

行	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M	1	1	2	4	8	17	37	82	184	416
N		1	1	2	4	8	17	37	82	184
O		0	1	2	5	12	28	65	150	345
P		0	0	1	3	8	20	48	113	263
MS_n	1	2	4	9	20	45	102	232	529	1208

② N 類(起始行為 E_2 ， F_2)成雙成對的排列數NS_n

表 4-13：N 類成雙成對排列數

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M		1	2	4	9	20	45	102	232	529
N	1	0	1	2	4	9	20	45	102	232
O		1	1	3	7	16	37	85	195	447
P		0	1	2	5	12	28	65	150	345
NS_n	1	2	5	11	25	57	130	297	679	1553

③ O 類(起始行為 E_1 ， F_3)成雙成對的排列數OS_n

表 4-14：O 類成雙成對排列數

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M		1	2	5	12	28	65	150	345	792
N		0	1	2	5	12	28	65	150	345
O	1	1	2	5	11	25	57	130	297	679
P		1	2	4	9	20	45	102	232	529
OS_n	1	3	7	16	37	85	195	447	1024	2345

④ P 類(起始行為B_1，I_2)成雙成對的排列數PS_n

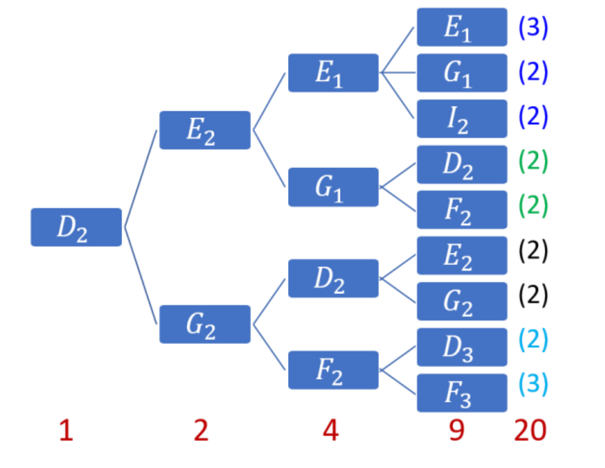
表 4-15：P 類成雙成對排列數

行數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M		0	1	3	8	20	48	113	263	608
N		0	0	1	3	8	20	48	113	263
O		1	2	4	9	20	45	102	232	529
P	1	1	2	4	8	17	37	82	184	416
PS_n	1	2	5	12	28	65	150	345	792	1816

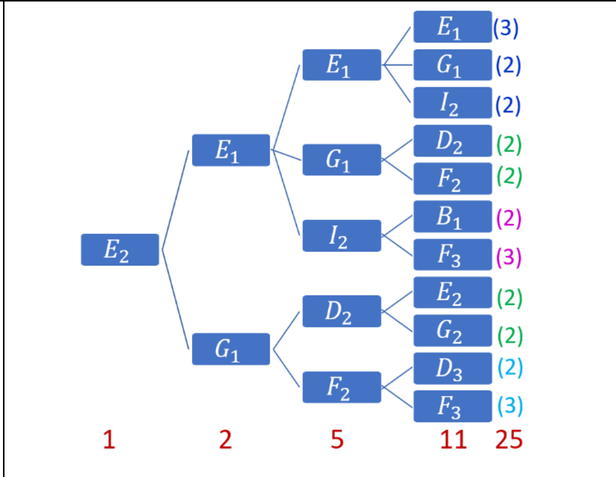
(5) 對照成雙成對樹狀圖(表 4-16)，發現與我們的用關係式推算出來的排列數相同。

表 4-16：M、N、O、P 類排列數樹狀圖

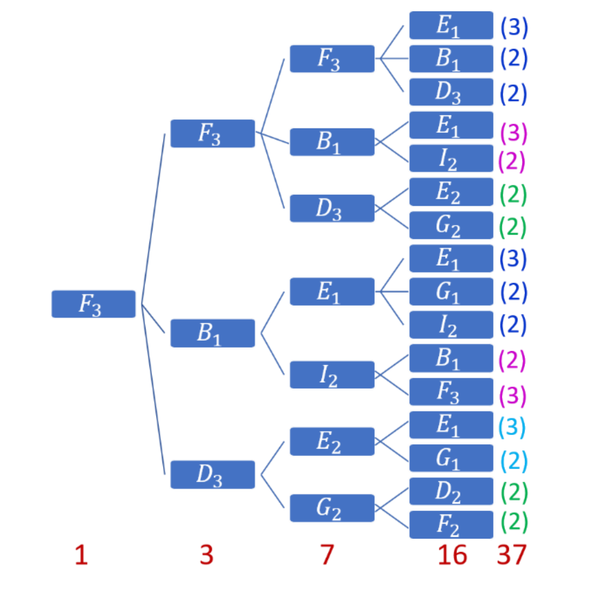
M 類(D_2 、 D_3 、 G_1 、 G_2)，以 D_2 為例



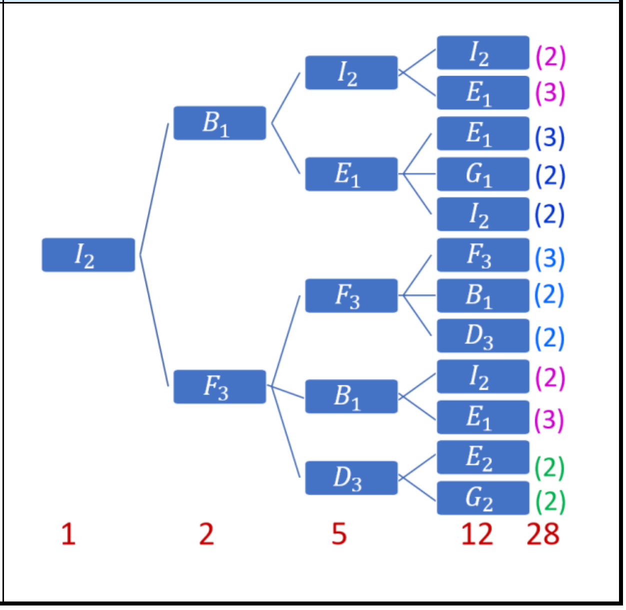
N 類(E_2 ， F_2)，以 E_2 為例



O 類(E_1 ， F_3)以 F_3 為例



P 類(起始行為 B_1 ， I_2)以 I_2 為例



(三) 列數(m)為 3，三角形「成雙成對」排列數探討

定理 4：**n 行 3 列三角形成雙成對的排列數為 $\mathbf{12+4n+4MS_n+2NS_n+2OS_n+2PS_n}$。**

$M_n = M_{n-1} + N_{n-1} + O_{n-1}$；

$N_n = M_{n-1}$；

$O_n = N_{n-1} + P_{n-1} + O_{n-1}$；

$P_n = P_{n-1} + O_{n-1}$；

$S_n = 2S_{n-1} + O_{n-1}$

$MS_n(M_1 = 1)$；$NS_n(N_1 = 1)$；$OS_n(O_1 = 1)$；$PS_n(P_1 = 1)$。

說明：

1、整理 3 列三角形成雙成對的排列數。

表 4-17：3 列 n 行不同起始值與排列數關係

起始值	個數	排列數
$\boldsymbol{A_1}$、$\boldsymbol{A_2}$、$\boldsymbol{A_3}$、$\boldsymbol{J_1}$、$\boldsymbol{J_2}$、$\boldsymbol{J_3}$、 B_2、I_1、C_1、H_2、E_3、F_1。	12	1
C_2、H_1、D_1、G_3。	4	n
M 類 $\boldsymbol{D_2}$、$\boldsymbol{D_3}$、$\boldsymbol{G_1}$、$\boldsymbol{G_2}$	4	$MS_n = 2S_{n-1} + O_{n-1}$ $(M_1 = 1，N_1 = O_1 = P_1 = 0)$
N 類 $\boldsymbol{E_2}$、$\boldsymbol{F_2}$	2	$NS_n = 2S_{n-1} + O_{n-1}$ $(N_1 = 1，M_1 = O_1 = P_1 = 0)$
O 類 $\boldsymbol{E_1}$、$\boldsymbol{F_3}$	2	$OS_n = 2S_{n-1} + O_{n-1}$ $(O_1 = 1，M_1 = N_1 = P_1 = 0)$
P 類 $\boldsymbol{B_1}$、$\boldsymbol{I_2}$	2	$PS_n = 2S_{n-1} + O_{n-1}$ $(P_1 = 1，M_1 = N_1 = O_1 = 0)$

2、n 行 3 列三角形「成雙成對」的排列數

$=1\times 12 + 4\times n + 4\times MS_n + 2\times NS_n + 2\times OS_n + 2\times PS_n$

$=12 + 4n + 4MS_n + 2NS_n + 2OS_n + 2PS_n$。

(四) 將定理 4：$\boldsymbol{n}$ 行 3 列三角形「成雙成對」的排列數公式 $\boldsymbol{12 + 4n + 4MS_n + 2NS_n + 2OS_n + 2PS_n}$輸入 Excel，推算行數增加時排列數的變化。

表 4-18：3 列 1~10 行排列數變化

行數(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{MS_n}$	1	2	4	9	20	45	102	232	529	1208
$\boldsymbol{NS_n}$	1	2	5	11	25	57	130	297	679	1553
$\boldsymbol{OS_n}$	1	3	7	16	37	85	195	447	1024	2345
$\boldsymbol{PS_n}$	1	2	5	12	28	65	150	345	792	1816
3 列 排列數	26	42	74	142	292	630	1398	3150	7154	16312

伍、討論

一、為什麼列數增加，各系列連接模式不會增加？

(一) 當列數往下增加時，所增加的成雙三角形只需考慮該列與上一列的黑、白棋排列。(見圖 5-1)

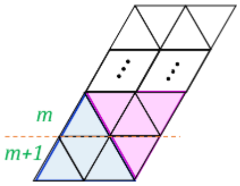
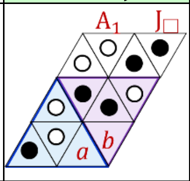
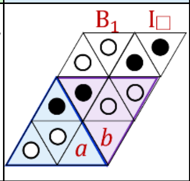
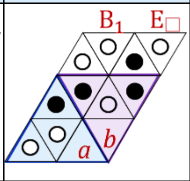
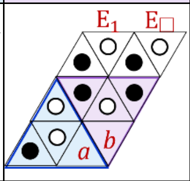
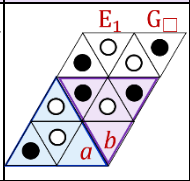
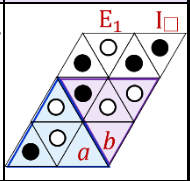
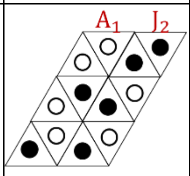
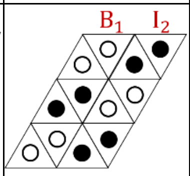
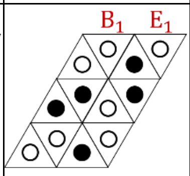
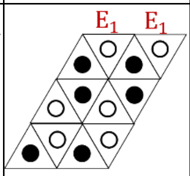
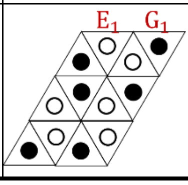
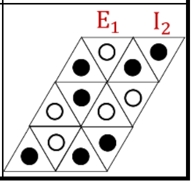


圖 5-1

(二) 由表 5-1 中 A 系列、B 系列與 E 系列連接模式可看出當列數增為 3 時，連接模式與兩列相同。

表 5-1：列數 2 與列數 3 各系列連接模式舉例

延伸列數	A → J	B → I	B → E	E → E	E → G	E → I
2 列延伸 3 列思考	 A_1 $J_□$ a b	 B_1 $I_□$ a b	 B_1 $E_□$ a b	 E_1 $E_□$ a b	 E_1 $G_□$ a b	 E_1 $I_□$ a b
3 列連接	 A_1 J_2	 B_1 I_2	 B_1 E_1	 E_1 E_1	 E_1 G_1	 E_1 I_2

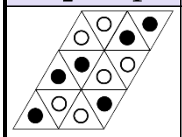
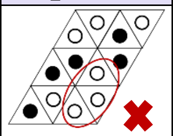
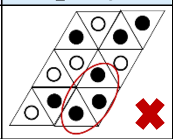
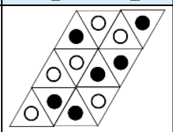
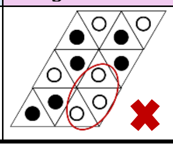
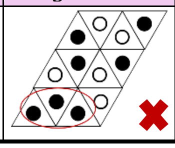
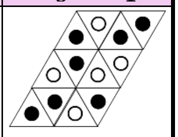
1、由表 5-1 各 2 列延伸圖可看出，確立了 3 列的起始行，連接模式只需考慮各圖中的 a、b 位置的黑、白棋安排。

2、各圖中 a 位置因藍色三角形已確定了其他三顆棋子顏色，a 棋子顏色只有唯一選擇；相同的對各圖中 b 位置因紫色三角形已確定了其他三顆棋子顏色，b 的棋子顏色只有唯一選擇。

3、故雖然列數往下延伸一列，連接模式並不會改變，會延續 2 列的連接模式。

4、例外，若延續 2 列的連接模式時出現 3 黑或 3 白則因不具延續性(性質 8)，故該連接模式不計。

表 5-2：3 列成雙成對中B_2 、C_1與E_3的連接模式

$B_2 \rightarrow I_1$	$B_2 \rightarrow E?$	$C_1 \rightarrow J?$	$C_1 \rightarrow H_2$	$E_3 \rightarrow E?$	$E_3 \rightarrow G?$	$E_3 \rightarrow I_1$
						

5、表 5-2 中 B_2 、 C_1 、與 E_3 我們延續 2 列連接模式思考時，因出現出現 3 黑或 3 白，而使 B_2 、C_1與E_3連接模式都只有一種。

二、增加列數連接模式不會減少的起始行黑白棋安排是否有共同點？

(一) 檢核各系列連接模式 2 列與 3 列相同的連接模式

1、AJ 系列 2 列與 3 列的排列數為 1，不予考慮，其餘系列如表 5-3，除 DG 系列外，其餘都只出現一種狀況會與的 2 列相同。

表 5-3：3 列連接模式與 2 列相同的起始行編號

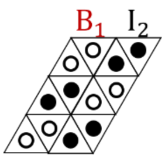
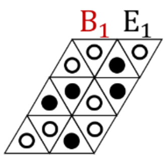
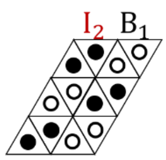
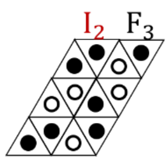
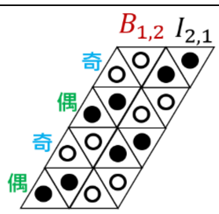
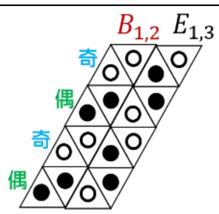
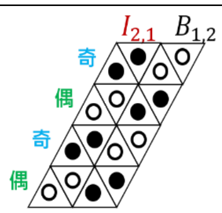
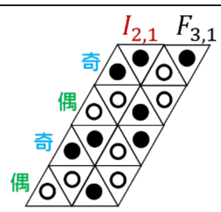
系列	BI 系列	CH 系列	DG 系列	EF 系列
3 列	B_1、I_2	C_2、H_1	D_1、D_2、D_3、G_1、G_2、G_3	E_1、F_3

2、BI 系列

(1) 將 3 列B_1、I_2向下增為為 4 列，我們觀察到一個有趣的現象：

奇數列與奇數列相同與偶數列與偶數列相同，奇、偶交叉排列。(表 5-4)

表 5-4：BI 系列列數增加連接模式不會減少的起始行排列

2 列	B→I	B→E	I→B	I→F
3 列				
4 列				
奇數列	○○●●	○○●○	●●○○	●●○●
偶數列	●●○○	●●○●	○○●●	○○●○

(2) 故 BI 系列若向下延伸列數，只有一種模式會出現連接模式與 2 列相同。奇數列完必接偶數列，偶數列完必接奇數列。依我們編號模式

○○只能接●○與●●，●○為 1，●●為 2

●●只能接○○與○●，○○為 1，○●為 2。

(3) 故以此我們可推定 BI 系列列數增加連接模式與兩列相同的黑白棋排列

① B→B_1 → $B_{1,2}$ → $B_{1,2,1}$ → $B_{1,2,1,2}$ → $B_{1,2,1,2,....}$，即黑白棋由上而下為

$\boxed{○○●●}$,○○,●●,○○,●●,⋯。

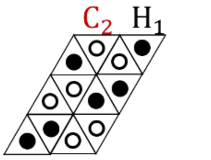
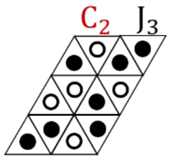
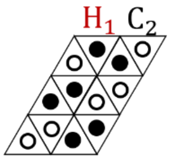
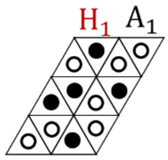
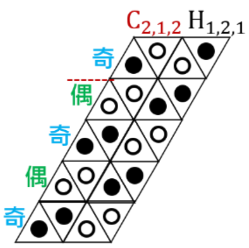
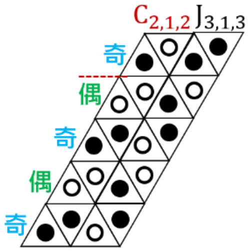
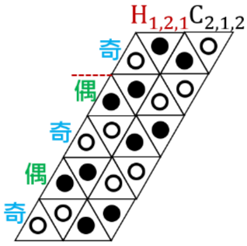
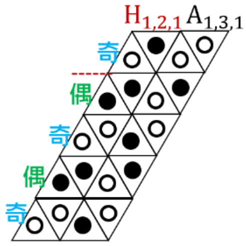
② I → I_2 → $I_{2,1}$ → $I_{2,1,2}$ → $I_{2,1,2,1}$ → $I_{2,1,2,1,....}$，即黑白棋由上而下為

$\boxed{●●○○}$,●●,○○,●●,○○⋯。

3、CH 系列

(1) 由於 C→J 的奇、偶列循環排列，從「第 2 列」開始，為清楚的看清奇、偶列的循環排列，我們將表 4-2 中 3 列C_2、H_1向下增為 5 列 (表 5-5)。

表 5-5：CH 系列列數增加連接模式不會減少的起始行排列

2 列	C→H	C→J	H→C	H→A
3 列				
5 列				
偶數列	○○●●	○○●○	●●○○	●●○●
奇數列	●●○○	●●○●	○○●●	○○●○

(2) 由「第 2 列」開始出現與 BI 系列相同的奇、偶循環模式，由左而右，黑白棋排列分別由兩種模式，輪流在「偶數列」與「奇數列」出現。

(3) 故以此我們可推定 BI 系列列數增加連接模式與兩列相同的黑白棋排列

① C→ C_2 → $C_{2,1}$ → $C_{2,1,2}$ → $C_{2,1,2,1}$ → $C_{2,1,2,1,....}$，即黑白棋由上而下為
○●○○,●●,○○,●●,○○,…。

② H→H_1 → $H_{1,2}$ → $H_{1,2,1}$ → $H_{1,2,1,2}$ → $H_{1,2,1,2,....}$，即黑白棋由上而下為
●○●●,○○,●●,○○,●●,…。

4、EF 系列

(1) 由於 E→G 與 F→D 的奇、偶列循環排列，從「第 2 列」開始，為清楚的看清奇、偶列的循環排列，我們將表 4-6 中 3 列E_1、F_3向下增為 5 列 (表 5-6、表 5-7)

表 5-6：E 系列列數增加連接模式不會減少的起始行排列

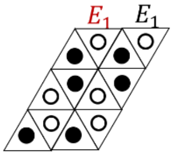
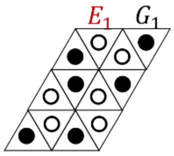
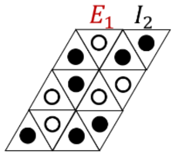
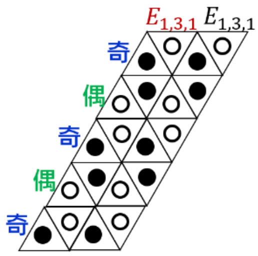
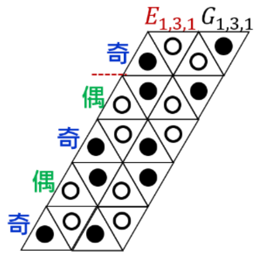
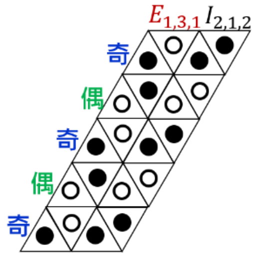
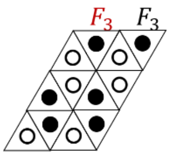
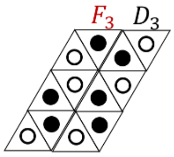
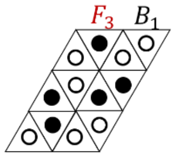
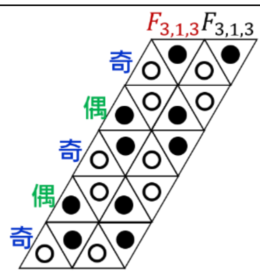
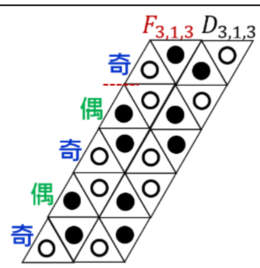
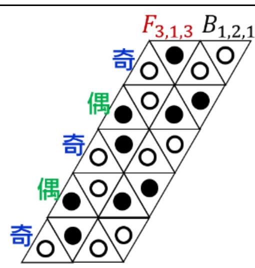
2 列	E→E	E→G	E→I
3 列			
5 列			
偶數列	○●○●	○●○●	○●○○
奇數列	●○●○	●○●○	●○●●

表 5-7：F 系列列數增加連接模式不會減少的起始行排列

2 列	F→F	F→D	F→B
3 列			
5 列			
偶數列	●○●○	●○●○	●○●●
奇數列	○●○●	○●○●	○●○○

(1) 由「第 2 列」開始出現與 BI 系列相同的奇、偶循環模式，由左而右，黑白棋排列分別由兩種模式，輪流在「偶數列」與「奇數列」出現。

(2) 故以此我們可推定 EF 系列列數增加連接模式與兩列相同的黑白棋排列

① E→ E_1 → $E_{1,3}$ → $E_{1,3,1}$ → $E_{1,3,1,3}$ → $E_{1,3,1,3,\ldots}$，即黑白棋由上而下為

$\boxed{○●●○}$,○●,●○,○●,●○,⋯ 。

② F→F_3 → $F_{3,1}$ → $F_{3,1,3}$ → $F_{3,1,3,1}$ → $F_{3,1,3,1,\ldots}$，即黑白棋由上而下為

$\boxed{●○○●}$,●○,○●,●○,○●,⋯ 。

5、DG 系列

(1) 3 列的 DG 系列與 2 列一樣，都有 2 種連接模式，以 D 為例，連接 G 與 E。

(2) 但 2 列連接 E 系列有 3 種連接模式，而 3 列連接 E 系列有 2 種連接模式，和 1 種模式，故基本上與 2 列起始行的連接模式有所差異。(表 5-8)

表 5-8：DG 系列連接模式

2 列	3 列		
D G (2) E (3)	D_1 G_3 (2) E_3 (1)	D_2 G_2 (2) E_2 (2)	D_3 G_2 (2) E_2 (2)

(二) 增加列數連接模式不會減少的起始行黑白棋安排的共同點。

1、BI、CH 與 EF 系列，每增加一列，會出現一種起始行的排列模式與 2 列該系列的連接模式相同。

2、與 2 列成雙成對起始行相同的連接模式，會出現起始行的連接模式「奇數列相同」與「偶數列相同」的黑、白棋排列。

3、因「奇數列相同」與「偶數列相同」的黑白棋排列，故只會出現一種起始行的排列模式與 2 列該系列的連接模式相同。

(三) 列數增為 3 時，因為 DG 系列的連接與 2 列不同，故無法完全沿用 2 列模式推算排列數。

陸、結論

一、方格「成雙成對」與立體「成雙成對」連接模式性質相似

(一) 成雙成對的排列模式除黑白相間的模式外，呈對偶型的連接模式。

(二) 黑白相間的排列，有兩種連接模式都能呈現成雙成對的排列模式。

(1) 對偶型的連接模式。(2) 自身連接。

(三) 方格黑白相間的排列，每增加 1 行，排列數就增為原來的 2 倍；

立體黑白相間的排列，每增加 1 層，排列數就增為原來的 2 倍。

二、方格 「成雙成對」$\boldsymbol{n}$ 行 $\boldsymbol{m}$ 列的排列數為 $\mathbf{2^m + 2^n - 2}$。

三、立體「成雙成對」$\boldsymbol{n}$ 行 $\boldsymbol{m}$ 列 $\boldsymbol{r}$ 層的排列數為 $\mathbf{2^m + 2^n + 2^r - 4}$。

四、三角形「成雙成對」連接模式包括以下性質

(一) 行數每增加 1，所增加的成雙三角形黑、白棋排列，只受該行與前一行的影響。

列數每增加 1，所增加的成雙三角形黑、白棋排列，只受該列與前一列的影響。

(二) 三角形「成雙成對」模式不能出現連續 3 顆白棋或 3 顆黑棋連在一起。

(三) 三角形「成雙成對」2 列「起始行」的連接模式除 EF 系列外，其中一種連接模式為對偶型連接；EF 系列，其中一種連接模式為自身連接。

(四) 三角形「成雙成對」往下延伸增加列數，「起始行」的連接模式並不會改變，可延續 2 列的連接模式思考，但若出現 3 黑或 3 白連在一起，則該連接模式不計。

(五) BI、CH 與 EF 系列，每增加一列，會出現一種「起始行」的排列模式與 2 列該系列的連接模式相同。

五、$\boldsymbol{n}$ 行 2 列三角形「成雙成對」的排列數為 $\mathbf{2(n+1) + 4B_n + 2E_n}$，其中

$B_n = 2B_{n-1} + B_{n-2}\ (B_1 = 1，B_2 = 2)$

$E_n = 2E_{n-1} + E_{n-2}\ (E_1 = 1，E_2 = 3)$

六、$\boldsymbol{n}$ 行 3 列三角形成雙成對的排列數為 $\mathbf{12+4n+4}\boldsymbol{MS_n}+\mathbf{2}\boldsymbol{NS_n}+\mathbf{2}\boldsymbol{OS_n}+\mathbf{2}\boldsymbol{PS_n}$。其中

$M_n = M_{n-1} + N_{n-1} + O_{n-1}$；

$N_n = M_{n-1}$；

$O_n = N_{n-1} + P_{n-1} + O_{n-1}$；

$P_n = P_{n-1} + O_{n-1}$；

$S_n = 2S_{n-1} + O_{n-1}$

$MS_n\ (M_1 = 1)$；$NS_n\ (N_1 = 1)$；$OS_n\ (O_1 = 1)$；$PS_n\ (P_1 = 1)$。

七、三角形「成雙成對」排列數出現的遞迴關係式，我們可用 Excel 輕鬆的求出 $\boldsymbol{n}$ 行的排列數。

柒、未來展望

在三角形成雙成對中，雖然我們有不少的發現，但依我們目前的數學程度，我們只能寫出遞迴關係式，配合 Excel 求排列數，相信我們數學更精進時，能找出更漂亮的方法解決這個問題。

捌、參考資料

[1] 曾祥宇、郭東翰、陳駿瑋(2018)。左手畫「方」右手畫「矩」。第 58 屆全國中小學科展高中組數學科作品。

[2] 澳洲 AMC 2017 考題(2017)。財團法人台北市九章基金會。

【評語】080406

研究者從數學競賽題目出發，並利用黑白棋與棋盤來手動操作探索研究問題。研究方法為利用黑、白棋排列方法與前一行相關的特性，發現對偶連接與自身連接可以擴充符合成雙成對的棋盤，接著將研究方法擴充到立體與三角形棋盤並求出棋盤數的一般式。研究者利用已知成立的基礎模式巧妙的擴充更多的可能性，並再歸納三角形棋盤的遞迴關係式，研究結果豐富。此方法可操作性高，適合開發其他擴充方法來增加研究方法的多樣性。

作品海報

成雙成對

研究目的

(一) 方格成雙成對遊戲排列模式與排列數的探討

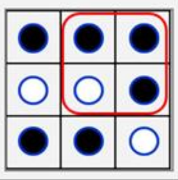
(二) 立體成雙成對遊戲排列模式與排列數的探討

(三) 三角形成雙成對遊戲排列模式與排列數的探討

方格成雙成對遊戲：

在每 2×2 的方格中，排出 2 黑 2 白的棋子。

右圖中只有紅框 4 格不符合規定。



立體成雙成對遊戲：

兩層方塊	前、後	左、右	上、下

研究過程

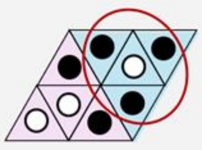
方格	由起始行圖形連接，發現連接模式與規律。	推出n行m列排列數
立體	由層與層的堆疊發現堆疊模式與規律。	推出n行m列r層排列數
三角形(2列)	以起始行(2列)連接模式，找出連接類型與限制。	推出2列n行排列數
三角形(3列)	將2列向下延伸為3列，發現連接模式變化。	推出3列n行排列數

三角形成雙成對遊戲：

在每 4 個三角形組成的「成雙三角形」中，

排出 2 黑 2 白的棋子。 左下粉紅色三角形正確，

右上藍色三角形出現 3 黑 1 白，錯誤。



研究結果

一、方格成雙成對研究

性質 1 ：「成雙成對」的排列模式除黑白相間的模式外，呈對偶型的連接模式。

1、以對偶型相互連接可發現相鄰兩行同一列黑、白棋必為 1 黑 1 白，故相鄰兩行兩列的 4 格(2×2)中必出現 2 黑 2 白，符合成雙成對要求。

表 1-1 ： 1×4 黑、白棋排列編號圖示

編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
圖示	○ ○ ○ ○	● ● ● ●	○ ○ ○ ●	● ● ● ○	○ ○ ● ○	● ● ○ ●	○ ● ○ ○	● ○ ● ●	● ○ ○ ○	○ ● ● ●	○ ○ ● ●	● ● ○ ○	● ○ ○ ●	○ ● ● ○	○ ● ○ ●	● ○ ● ○

表 1-2 ：對偶型與非對偶型排列模式與成雙成對關

	符合成雙成對模式(對偶)		不符成雙成對模式(非對偶)		
	3, 4, 3, 4	5, 6, 5, 6	1, 6	1, 8	14,16
圖示	○●○● ○●○● ○●○● ●○●○	○●○● ○●○● ●○●○ ○●○●	○● ○● ○○ ○●	○● ○○ ○● ○●	○● ●○ ●● ○○

性質 2 ：黑白相間的排列有兩種連接模式(1)對偶型連接 (2)自身連接；
故每增加 1 行，排列數就增為原來的 2 倍。

(1)與對偶型連接，同一列為 1 黑 1 白，故相鄰兩行兩列為 2 黑 2 白。

(2)與自己連接，同一行為 1 黑 1 白，故相鄰兩行兩列為 2 黑 2 白。

表 1-3 ：黑白相間排列連接模式 (以起始行編號 15 為例)

模式	起始	對偶	自己	對偶+對偶	對偶+自己	自己+對偶	自己+自己
行數	1	2	2	3	3	3	3
圖示	15 ○ ● ○ ●	(15,16) ○● ●○ ○● ●○	(15,15) ○○ ●● ○○ ●●	(15,16,15) ○●○ ●○● ○●○ ●○●	(15,16,16) ○●● ●○○ ○●● ●○○	(15,15,16) ○○● ●●○ ○○● ●●○	(15,15,15) ○○○ ●●● ○○○ ●●●

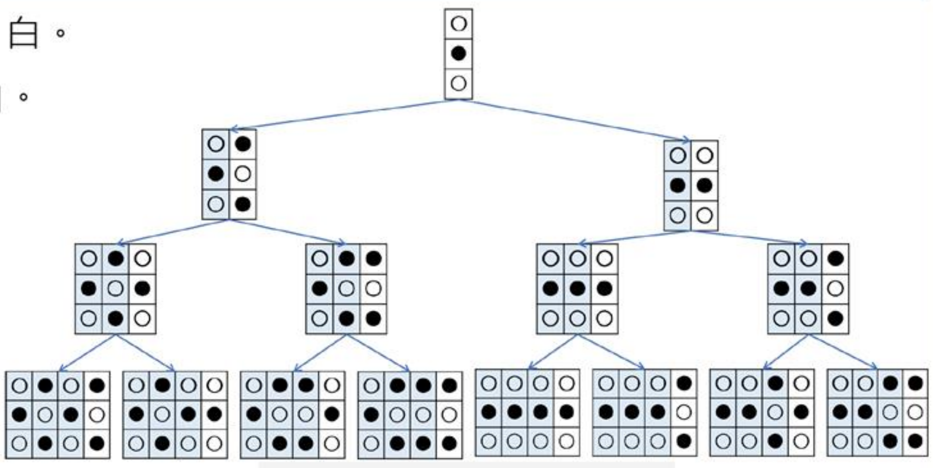


圖 1-1 ：黑白相間連接模式

定理 1 ：n 行m列「成雙成對」的排列數為 $2^m + 2^n - 2$。

1、m 列時，由於每一格皆可放置白棋或黑棋，故起始行(行數為 1)有2^m 種排列模式。

2、非黑、白相間排列的有 $2^m - 2$ 種，連接模式都需以對偶型相互連接，故 n 行 m 列的排列模式為 $2^m - 2$ 種。

3、黑白相間排列數會隨著行數成倍增加，兩種起始行為黑、白相間模式 n 行共有 $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ 種排列方式。

4、由以上可得 n 行 m 列「成雙成對」的排列數 $= (2^m - 2) + 2^n = 2^m + 2^n - 2$。

二、立體成雙成對研究

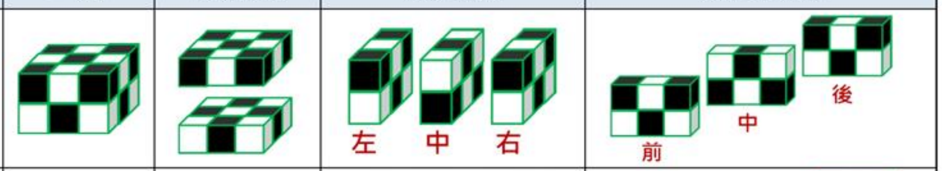
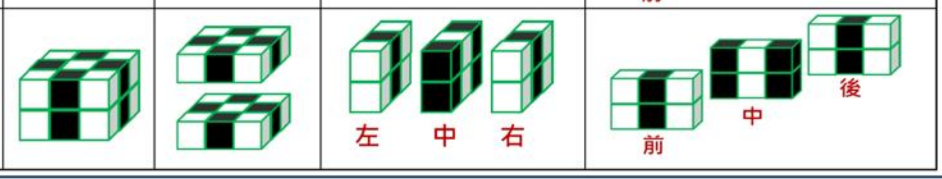
性質 3 ：立體成雙成對層與層的連接除黑白相間的模式外，呈對偶型的連接模式。

1、如表 2-1 相鄰上、下層因做對偶型連接，故上、下關係必為 1 黑 1 白或 1 白 1 黑，故兩層中每 4 個方塊必為 2 黑 2 白符合成雙成對要求。

表 2-1 ：非黑白相間連接模式

	2 層	橫剖面	縱剖面	前後剖面
對偶				

表 2-2 ：黑白相間連接模式

	2 層	橫剖面	縱剖面	前後剖面
對偶				
自身				

性質 4 ：立體成雙成對黑白相間模式層與層的連接有兩種模式(1)對偶型連接 (2)自身連接；
故每增加 1 層，排列數就增為原來的 2 倍。

1、如表 2-2，自身連接，上、下同色，相鄰直行或橫列都為 1 白 1 黑，故對偶與自身連接皆符合成雙成對要求。

定理 2 ：n 行m 列 r 層「成雙成對」的排列數為$2^m + 2^n + 2^r - 4$。

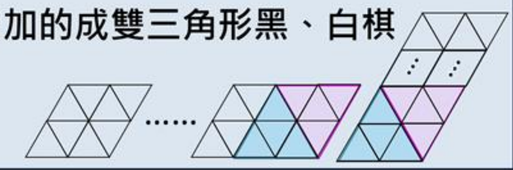
1、單層非黑白相間模式呈對偶型連接(性質 3)，故排列數不會隨著層數增加。
n 行m列「成雙成對」的排列數為 $2^m + 2^n - 2$，扣除單層 2 種黑、白相間模式，非黑白相間的排列數為 $2^m + 2^n - 4$。

2、黑白相間的排列，每增加 1 層，排列數就增為原來的 2 倍，故 r 層排列數為 1 層的 2^{r-1} 倍。
單層有 2 種黑白相間的排列模式，故黑白相間排列數為 $2^{r-1} \times 2 = 2^r$ 種。

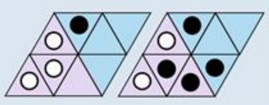
3、n 行m列 r 層「成雙成對」的排列數 $= (2^m + 2^n - 4) + 2^r = 2^m + 2^n + 2^r - 4$。

三、三角形成雙成對研究

性質 5 ：每增加 1 行或 1 列，所增加的成雙三角形黑、白棋排列，只受該行 (列)與前一行(列)的影響。



性質 6 ：三角形成雙成對排列，若出現 3 顆白棋或 3 顆黑棋連在一起，不具延續性，不予討論。



(一) 2 列成雙成對連接模式與排列數探討

1、整理 2 列「起始行」具成雙成對延續性的黑白棋排法。(表 3-1)

2、整理「起始行」向右連接 1 行，找出可能出現的連接模式。(表 3-2)

3、分析各系列連接模式

(1) AJ 系列：對偶型循環排列

(2) CH 系列：①對偶型 ② AJ 系列

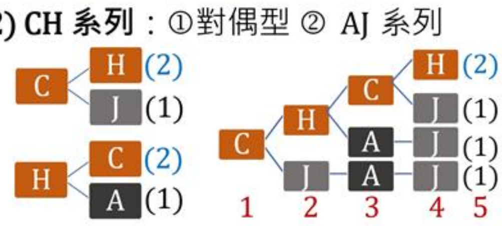
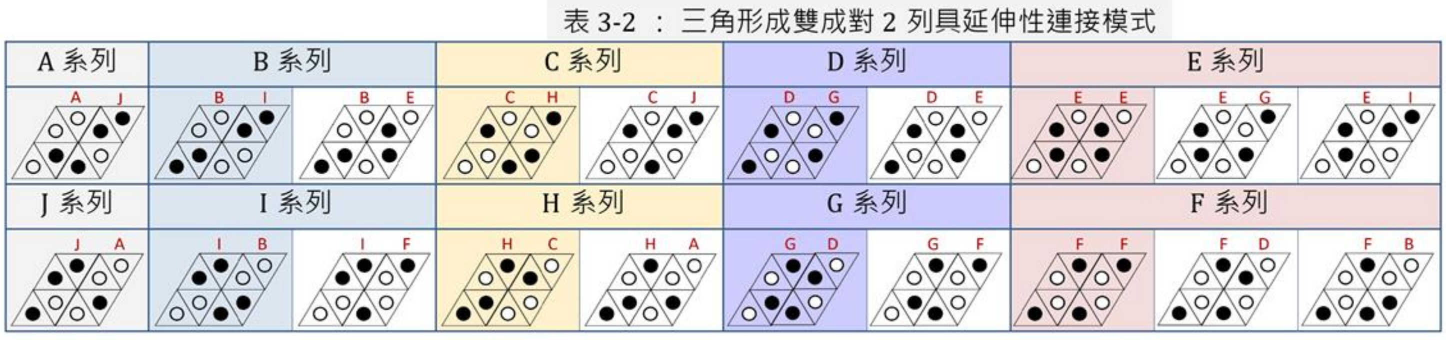


表 3-1 ：斜棋盤具延續性，起始行(1×2)黑、白棋排法

編碼	0010	0011	0100	0101	0110	1001	1010	1011	1100	1101
編號	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
圖示										

表 3-2 ：三角形成雙成對 2 列具延伸性連接模式



(3) BI 與 DG 系列：連接模式有 2 ①對偶型連接 ② EF 系列連接

(4) EF 系列：連接模式有 3 ①自身連接 ② BI 系列 ③ DG 系列

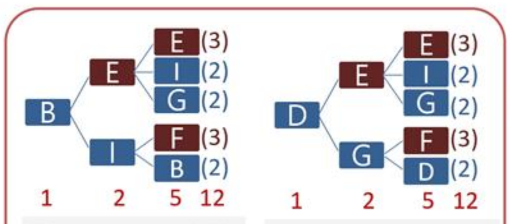


圖 3-2 ：BI 系列　圖 3-3 ：DG 系列

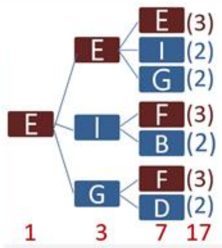


圖 3-4 ：EF 系列

4、整理 BI、DG 與 EF 的連接模式

BI、DG 系列排列數增加模式為 1 → 2 →(3+2)→(3+2+2)+(3+2)。

EF 系列排列數增加模式為 1 → 3 →(3+2+2)→(3+2+2)+(3+2)+(3+2)。

5、用表格整理 BI、DG 與 EF 的排列數與行數關係(設 a_n 為 3 的個數， b_n 為 2 的個數)

表 3-3 ：BI 與 DG 系列，排列數 3 與 2 個數與行數的關係

行數	2	3	4	5	…	n
3 的個數(a_n)	0	1	$1+1=2$	$2+3=5$	…	$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$
2 的個數(b_n)	1	1	$1\times2+1=3$	$2\times2+3=7$	…	$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$

表 3-4 ：E 與 F，排列數 3 與 2 個數與行數(n)的關係

行數	2	3	4	5	…	n
3 的個數(a_n)	1	1	$1+2=3$	$3+4=7$	…	$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}$
2 的個數(b_n)	0	2	$1\times2+2=4$	$3\times2+4=10$	…	$b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$

6、設 B_n 為 B、I、D、G 的排列數， E_n 為 E、F 的排列數，整理 2 列三角形成雙成對的排列數。

$$a_n=a_{n-1}+b_{n-1}\qquad b_n=2a_{n-1}+b_{n-1}$$

$$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}\qquad b_n=2b_{n-1}+b_{n-2}$$

$$C_n=3a_n+2b_n\qquad C_n=2C_{n-1}+C_{n-2}$$

$$B_n=2B_{n-1}+B_{n-2}(B_1=1，B_2=2)\qquad E_n=2E_{n-1}+E_{n-2}\ (E_1=1，E_2=3)$$

定理 3 ：n 行 2 列三角形成雙成對的排列數為 $2(n+1)+4B_n+2E_n$ 。其中

$B_n=2B_{n-1}+B_{n-2}\ (B_1=1，B_2=2)$；

$E_n=2E_{n-1}+E_{n-2}\ \ (E_1=1，E_2=3)$。

(二) 3 列成雙成對連接模式與排列數探討

1、出現 6 組對偶型循環排列，排列數為 1。

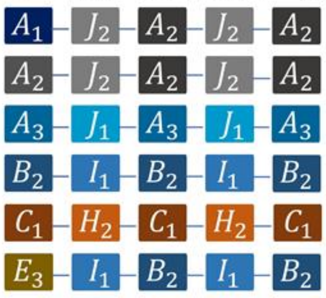
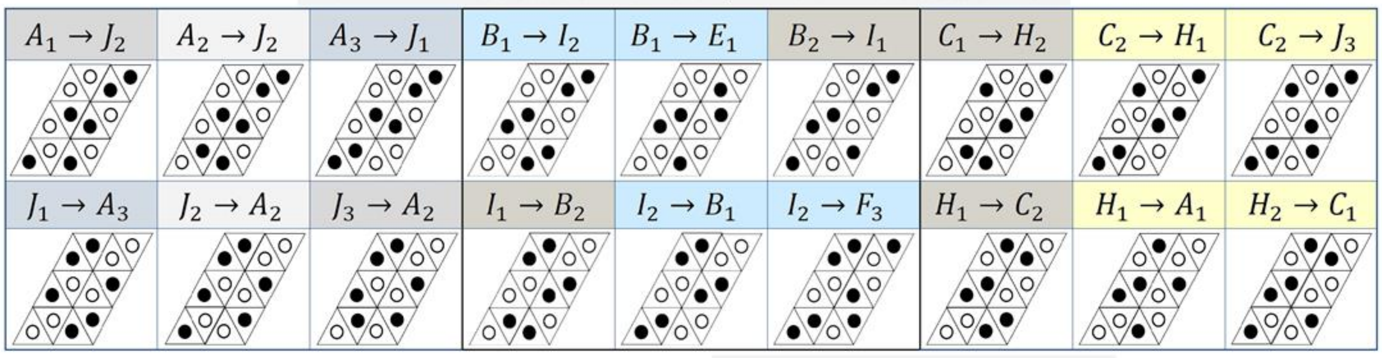


表 3-5 ：三角形成雙成對 3 列 AJ、BI 與 CH 系列連接模式



2、出現 2 組排列數 = 行數的起始行模式。$(C_2、H_1)\ (D_1、G_3)$

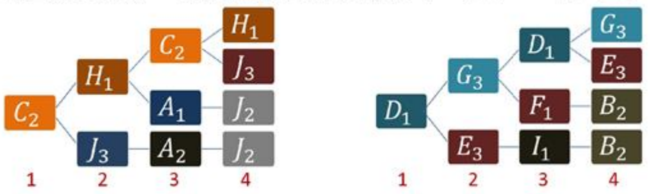
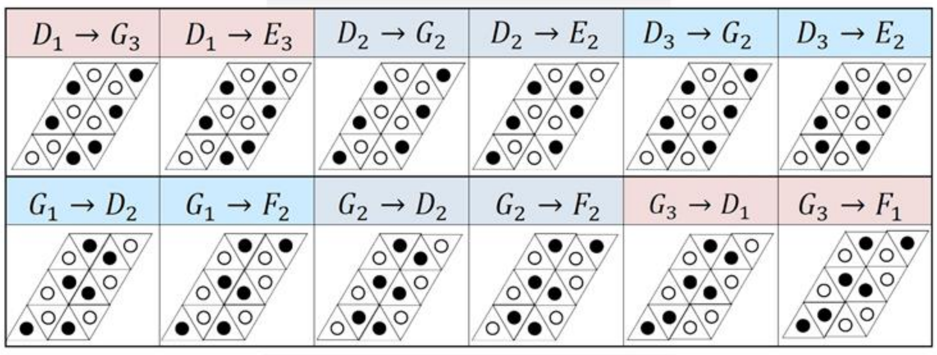


表 3-6 ：3 列 DG 系列連接模式



3、整理 BI、DG 與 EF 系列中未討論的部份

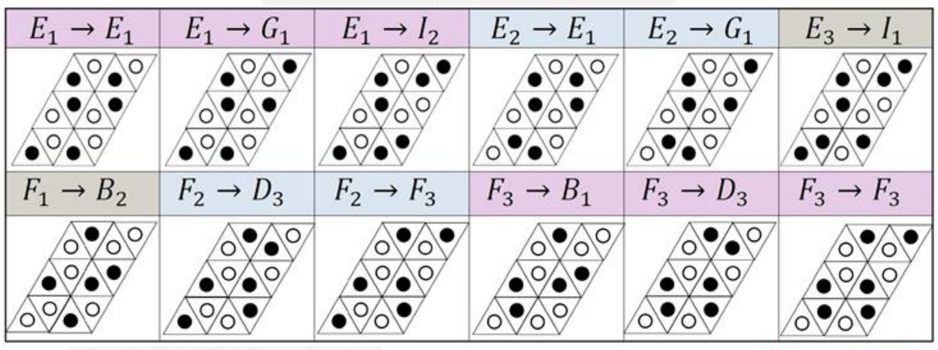
(1) BI 系列與 DG 系列起始行連接的 EF 系列不同，故無法沿用 2 列公式。

(2) 依其連接模式分 M、N、O、P，4 類。(表 3-8)

表 3-8 ：M、N、O、P 關係

類別	M	N	O	P
起始行	D_2、D_3、G_1、G_2	E_2、F_2	E_1、F_3	B_1、I_2
連結示例	D_2 → G_2(2)、E_2(2)	E_2 → G_1(2)、E_1(3)	E_1 → G_1(2)、E_1(3)、I_2(2)	B_1 → E_1(3)、I_2(2)
連接模式	M_n → M_{n+1}、N_{n+1}	N_n → M_{n+1}、O_{n+1}	O_n → M_{n+1}、O_{n+1}、P_{n+1}	P_n → O_{n+1}、P_{n+1}

表 3-7 ：3 列 EF 系列連接模式



4、由表 3-8 的連接模式我們得到行數(n)與 M、N、O、P 的關係。

$M_{n+1}=M_n+N_n+O_n$

$N_{n+1}=M_n$

$O_{n+1}=N_n+O_n+P_n$

$P_{n+1}=O_n+P_n$

$S_n=M_n+N_n+O_n+P_n=2S_{n-1}+O_{n-1}$

表 3-9 ：M 系列排列數

行	1	2	3	4	5	6	7	8
M	1	1	2	4	8	17	37	82
N		1	1	2	4	8	17	37
O			1	2	5	12	28	65
P				1	3	8	20	48
MS_n	1	2	4	9	20	45	102	232

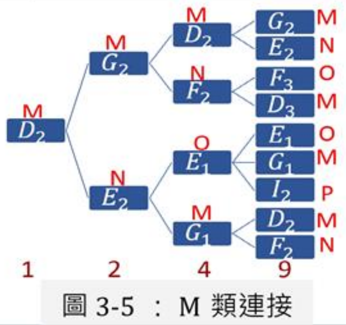


圖 3-5 ：M 類連接

6、 整理 n 行 3 列三角形成雙成對排列數

定理 4 ：n 行 3 列三角形成雙成對的排列數為 $12+4n+4MS_n+2NS_n+2OS_n+2PS_n$。其中

$M_n=M_{n-1}+N_{n-1}+O_{n-1}$；

$N_n=M_{n-1}$；

$O_n=N_{n-1}+P_{n-1}+O_{n-1}$；

$P_n=P_{n-1}+O_{n-1}$；

$S_n=2S_{n-1}+O_{n-1}$；$MS_n(M_1=1)$；$NS_n(N_1=1)$；$OS_n(O_1=1)$；$PS_n(P_1=1)$。

討　　論

一、延伸列數如何推估三角形成雙成對排列數

(一) 分析 2 列、3 列時 BI、DG 與 EF 系列與總排列數關係

1、BI、DG 與 EF 系列的連接模式存在環環相扣的關係。

　2 列時我們將他們的排列數分成 B_n 與 E_n，2 類；

　3 列時我們將他們的排列數分成 MNOP，4 類 。

2、分析 BI、DG 與 EF 系列與總排列數關係(圖 4-1、圖 4-2)

　發現它們的排列數會隨著行數增加與總排列數越接近，

　故我們可由它們的排列數求得總排列數的概數。

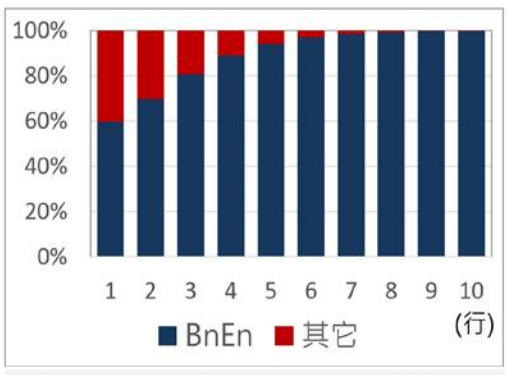


圖 4-1 ： 2 列 BIDGEF 系列排列數

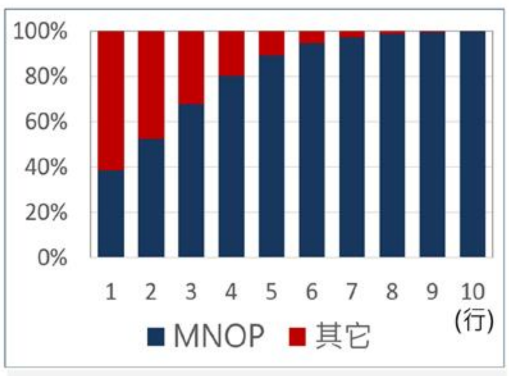


圖 4-2 ： 3 列 BIDGEF 系列排列數

(二) 推估 4 列排列數，發現 BI、DG 與 EF 系列也存在環環相扣的連接關係，可用以推估排列數。

表 4-1 ： 4 列 M、NA、NB、O、P 連接關係

M	NA	NB	O	P
$D_{2,2}$、$D_{2,3}$、$G_{2,1}$、$G_{2,2}$、$D_{3,1}$、$D_{3,2}$、$G_{1,2}$、$G_{1,3}$	$E_{2,1}$、$E_{2,2}$、$F_{2,2}$、$F_{2,3}$	$E_{1,2}$、$F_{3,2}$	$E_{1,3}$、$F_{3,1}$	$B_{1,2}$、$I_{2,1}$
M_n → M_{n+1}、NA_{n+1}	NA_n → M_{n+1}、NB_{n+1}	NB_n → M_{n+1}、O_{n+1}	O_n → M_{n+1}、O_{n+1}、P_{n+1}	P_n → O_{n+1}、P_{n+1}

二、三角形成雙成對「行數」與「排列數」的逆轉

表 4-2 ：三角形成雙成對 2 列、3 列、4 列排列數(概數)

列＼行	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2 列	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	94642	228486	551614	1331714	3215042	7761798	18738638
3 列	10	22	50	114	260	594	1358	3106	7106	16260	37210	85158	194898	446066	1020932	2336674	5348126	12240706
4 列	18	38	82	178	388	848	1858	4078	8962	19714	43396	95576	210578	464086	1022994	2255346	4972804	10965408

圖 4-3 ：不同列數排列數與行數關係

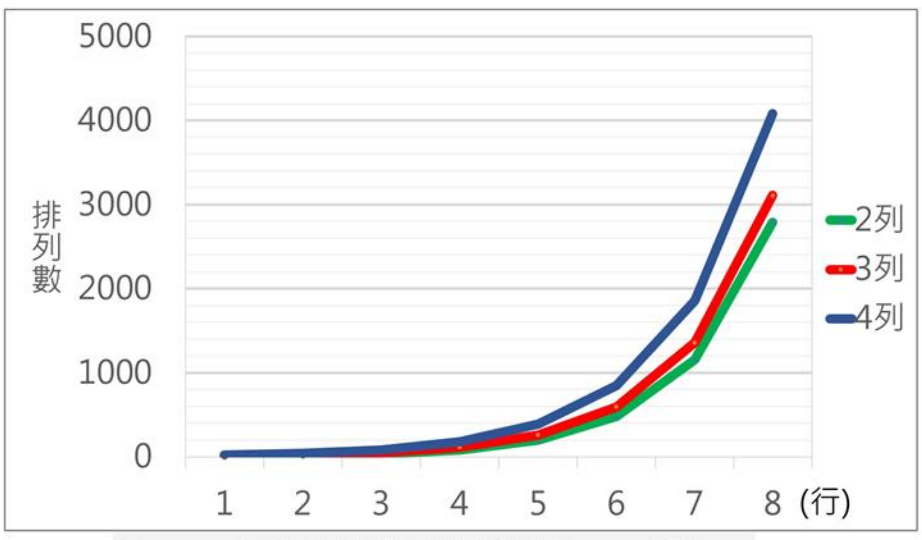


圖 4-4 ：不同列數排列數與行數(1~8)關係

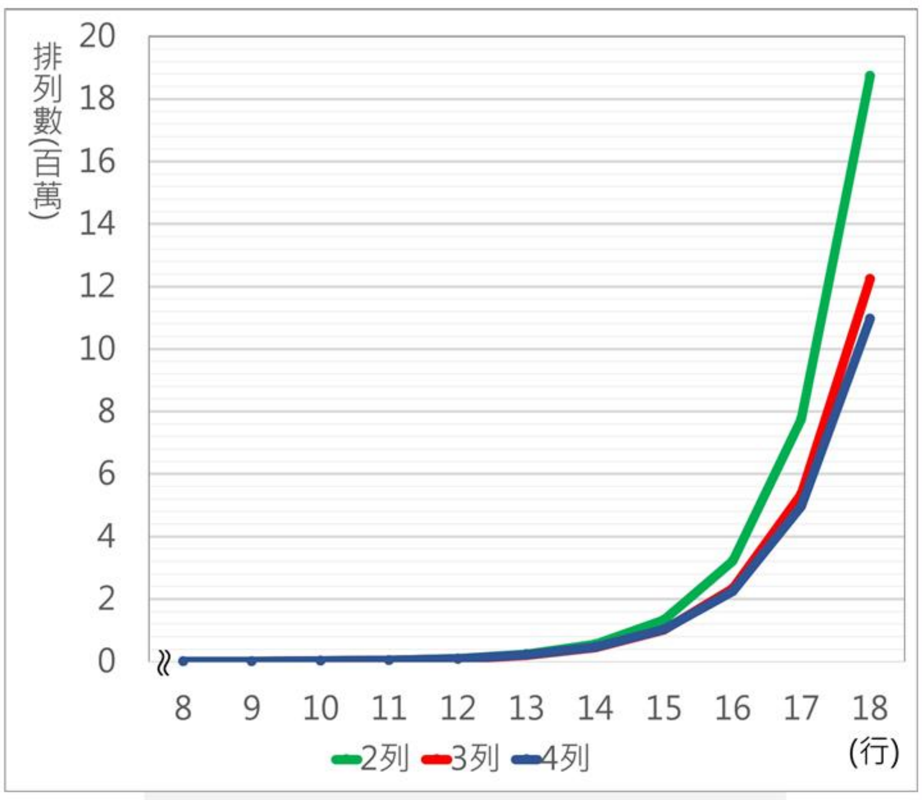


圖 4-5 ：不同列數排列數與行數(8~18)關係

結　　論

一、「方格」成雙成對與「立體」成雙成對連接模式相似。

(一) 成雙成對的排列模式除黑白相間的模式外，呈「對偶型」的連接模式。

(二) 黑白相間的排列，有兩種連接模式都能呈現「成雙成對」的排列模式。(1) 對偶型連接。(2) 自身連接。

　故每增加 1 行(1 層)，排列數就增為原來的 2 倍。

二、方格成雙成對 n 行 m 列的排列數為 2^m+2^n-2。

三、立體成雙成對 n 行 m 列 r 層的排列數為 $2^m+2^n+2^r-4$。

四、三角形成雙成對的發現

(一) 每增加 1 行或 1 列，所增加的「成雙三角形」，是否符合成雙成對要求，只受該行(列)與前一行(列)的影響。

(二) 起始行為「對偶型」的排列呈現相同的連接模式，故排列數也相同。

五、三角形成雙成對排列數足夠大時，能以 n 行 2 列的排列數為上界；排列數不大於 $2(n+1)+4B_n+2E_n$。

參考資料

[1] 曾祥宇、郭東翰、陳駿瑋(2018)。左手畫「方」右手畫「矩」。第 58 屆全國中小學科展高中組數學科作品。

[2] 澳洲 AMC 2017 考題(2017)。財團法人台北市九章基金會。